

ریاضیات

جامع نهم

مولف: حسین انصاری



به نام خدا

مقدمه

خداوند منان را سپاس می‌گوییم که در ۳۰^{امین} سال تدریس در مدارس تیزهوشان و دیگر مدارس ممتاز، بضاعتی اندک عطا فرموده تا بتوانم حاصل این تجربه گرانبها را در کتاب ریاضیات جامع نهم در اختیار هوشمندان این مرز و بوم قرار دهم.

پایه نهم نظام جدید آموزش، پایه‌ای حساس و سرنوشت‌ساز برای دانش‌آموزان است. چراکه در این پایه عزیزان دانش‌آموز باید خود را جهت آزمون‌های ورودی تیزهوشان و مدارس به‌نام دیگر آماده کنند. این کتاب مرجعی کامل و جامع برای هدایت دانش‌آموزان در این مسیر و رساندن آن‌ها به سرمنزل مقصود می‌باشد. در این کتاب موارد زیر مورد توجه قرار گرفته است.

- ۱- آموزش مفاهیم ریاضی در قالب نکته و مثال.
- ۲- تفکیک تست‌ها به دو دسته آسان و ویژه هوشمندان.
- ۳- ارائه پاسخ‌های تشریحی به صورت کاملاً مفهومی.
- ۴- انتخاب تست‌ها از آزمون‌های ورودی تیزهوشان و مدارس به‌نام دیگر.
- ۵- انتخاب تست‌ها از آزمون‌ها و مسابقات ریاضی خارج از کشور و المپیادها.

مطالب این کتاب متناسب با فصل‌های کتاب پایه نهم آموزش و پرورش تنظیم گردیده است.

کتاب در ۲ جلد تنظیم شده است. در جلد اول این کتاب درسنامه، پرسش‌ها و پاسخ کلیدی آن‌ها قرار داده شده است؛ در جلد دوم نیز پاسخ تشریحی سؤالات آمده است که کمک زیادی به تعمیق یادگیری عزیزان دانش‌آموز می‌کند.

لازم به ذکر است که سؤالات دشوار با علامت ★ مشخص شده که مختص دانش‌آموزان نخبه و سرآمد می‌باشد.

در پایان از آقایان یحیی دهقانی مدیر مسئول انتشارات مبتکران، خدایار مبین مدیر واحد حروف‌چینی و صفحه‌آرایی و محسن انصاری مدیر توزیع و فروش قدردانی می‌کنم. همچنین از آقای حسنی و خانم‌ها آهنگر، نوروزی، مرادی و هرمزی که در آماده‌سازی این کتاب نقش بسزایی داشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

حسین انصاری

تابستان ۹۵

فهرست

فصل اول: مجموعه	۵
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول	۲۱
فصل دوم: اعداد حقیقی	۵۱
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم	۶۷
فصل سوم: استدلال در هندسه	۹۵
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم	۱۲۳
فصل چهارم: توان و ریشه	۱۶۷
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم	۱۹۱
فصل پنجم: عبارات جبری	۲۲۳
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل پنجم	۲۴۵
فصل ششم: معادله خط	۲۹۳
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم	۳۱۱
فصل هفتم: عبارات‌های گویا	۳۴۳
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هفتم	۳۴۹
فصل هشتم: حجم و مساحت	۳۶۱
پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هشتم	۳۷۷
پاسخنامه کلیدی	۴۰۱

فصل اول: مجموعه

نکته ۱: مجموعه دسته‌ای از اشیاء، کاملاً مشخص را گویند به طوری که صریحاً بتوان گفت یک شیء عضو آن دسته هست یا خیر.

مثال ۱: کدامیک از توصیف‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

(۱) اعداد خیلی بزرگ (۲) سه شاعر معروف ایران

(۳) اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ (۴) گل‌های زیبا

✓ گزینه (۳)

{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰۰۰}

اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ کاملاً مشخص است. اما سه گزینه دیگر تعریف مشخصی ندارند.

مثال ۲: اگر $A = \{1, 4, 7, 10, \dots, 999\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

(۱) $1252 \in A$ (۲) $7453 \in A$ (۳) $(3^7 + 13) \in A$ (۴) $(13^{12} + 1) \in A$

✓ گزینه (۴)

باقی‌مانده تقسیم هر عضو A بر ۳ برابر یک می‌باشد اما باقی‌مانده تقسیم عدد $(13^{12} + 1)$ بر ۳ برابر ۲ می‌باشد.

مثال ۳: اگر $B = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر درست است؟

(۱) $4096 \in B$ (۲) $2^7 \in B$ (۳) $(2^{50} + 2^{50}) \in B$ (۴) همه موارد

✓ گزینه (۴)

عضوهای مجموعه B توان‌های عدد ۲ می‌باشند.

$$4096 = 2^{12} \in B \quad 2^{50} + 2^{50} = 2 \times 2^{50} = 2^{51} \in B$$

نکته ۲: مجموعه‌ای که هیچ عضو نداشته باشد مجموعه تهی نامیده می‌شود که آن را به صورت \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۴: کدامیک از جملات زیر بیانگر مجموعه تهی می‌باشند؟

(۱) اعداد طبیعی بین ۷ و ۸ (۲) اعداد اول دو رقمی

(۳) اعداد فردی که بر ۲ بخش پذیرند. (۴) همه موارد

✓ گزینه (۴)

مثال ۵: اگر $C = \{7, 5, \{5, 8\}, \{4\}\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

(۱) $5 \in C$ (۲) $8 \in C$ (۳) $4 \notin C$ (۴) $\{4\} \in C$

✓ گزینه (۲)

مثال ۶: مجموعه $A = \{0, 1, 5, 10, 15, \dots\}$ چند عضو دارد؟

- ۱۰۰ (۱) ۲۰ (۲) ۱۹ (۳) ۲۱ (۴)

✓ گزینه (۲)

مثال ۷: مجموعه $B = \{0, 1, 5, 10, 15, \dots\}$ چند عضو دارد؟

- ۱۰۰ (۱) ۲۰ (۲) ۱ (۳) ۱۹ (۴)

✓ گزینه (۳)

نکته ۳: مجموعه‌ای که عضوهای آن با شمردن به اتمام برسد مجموعه متناهی می‌نامیم.

نکته ۴: مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن نامحدود باشد نامتناهی می‌نامیم.

نکته ۵: مجموعه اعداد طبیعی را با \mathbb{N} نشان می‌دهیم که یک مجموعه نامتناهی است.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

نکته ۶: مجموعه اعداد حسابی را با W نشان می‌دهیم.

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

نکته ۷: مجموعه اعداد صحیح را با \mathbb{Z} نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

نکته ۸: مجموعه اعداد گویا را با \mathbb{Q} نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

نکته ۹: مجموعه اعداد گنگ (اصم) را با \mathbb{Q}' و مجموعه اعداد حقیقی را با \mathbb{R} نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

مثال ۸: کدام یک از عبارات زیر نادرست است؟

- $1357 \in \mathbb{N}$ (۱) $3^{72} \in \mathbb{N}$ (۲) $(-5)^{18} \in \mathbb{N}$ (۳) $(-7)^{25} \in \mathbb{N}$ (۴)

✓ گزینه (۴)

عدد $(-7)^{25}$ عددی منفی است و به \mathbb{N} تعلق ندارد.

مثال ۹: کدام یک از عبارات زیر درست است؟

- $-576 \in \mathbb{Z}$ (۱) $(-7)^2 + 5^8 \in \mathbb{Z}$ (۲) $(-8)^9 \in \mathbb{Z}$ (۳) همه موارد (۴)

✓ گزینه (۴)

مثال ۱۰: کدام یک از عبارات زیر نادرست است؟

- $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ (۱) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}'$ (۲) $\sqrt{36} \in \mathbb{Q}'$ (۳) $-17 \in \mathbb{Q}$ (۴)

✓ گزینه (۳)

$$\sqrt{36} = 6 \notin \mathbb{Q}'$$

نکته ۱۰: هر مجموعه را به دو صورت تفصیلی (نمایش با عضوها) و توصیفی (نمایش با علائم ریاضی) نشان می‌دهیم.

$$\{2, 4, 6, \dots\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

نکته ۱۱: اعداد طبیعی زوج را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم.

$$\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

نکته ۱۲: اعداد صحیح زوج را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم.

$$\{1, 3, 5, \dots\} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

نکته ۱۳: اعداد طبیعی فرد را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم.

$$\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\} = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

نکته ۱۴: اعداد صحیح فرد را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم.

مثال ۱): کدامیک از مجموعه‌های زیر برای نمایش با علایم ریاضی مجموعه اعداد صحیح زوج درست است؟

(۱) $\{2x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{-2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{6 - 2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) همه موارد

✓: گزینه (۱)

نکته ۵): اگر m عددی صحیح باشد مجموعه مضارب m را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\{mx \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

مثال ۲): اگر $A = \{5x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ باشد کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱) $-3475 \in A$ (۲) $35^{17} \in A$ (۳) $(6^{13} + 9) \in A$ (۴) $(5^{19} + 3) \in A$

✓: گزینه (۱)

گزینه ۱ و ۲ مضارب ۵ می‌باشند در گزینه ۳ رقم یکان عدد 6^{13} برابر ۶ می‌باشد پس رقم یکان عدد $(6^{13} + 9)$ برابر ۵ می‌شود پس این عدد نیز مضرب ۵ است. اما رقم یکان عدد $(5^{19} + 3)$ برابر ۸ می‌شود و مضرب ۵ نیست.

مثال ۳): اگر $B = \{2, 3, 5, 9, \dots\}$ باشد کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) $B = \{x^2 + x \mid x \in \mathbb{N}\}$ (۲) $B = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$

(۳) $B = \{2^x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ (۴) $B = \{2^x + 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$

✓: گزینه (۱)

مثال ۴): مجموعه اعدادی که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۵ برابر یک باشد کدامیک از مجموعه‌های زیر است؟

(۱) $A = \{5x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $B = \{5x - 4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $C = \{5x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) همه موارد

✓: گزینه (۱)

نکته ۶): مجموعه A را زیرمجموعه B گویند در صورتی که تمام عضوهای A در B نیز باشد.

مثال ۵): اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد کدامیک از مجموعه‌های زیر، زیرمجموعه A می‌باشند؟

(۱) $\{1, 2\}$ (۲) $\{1, 2, 3\}$ (۳) $\{5\}$ (۴) همه موارد

✓: گزینه (۱)

مثال ۶): اگر $B = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ باشد کدامیک از مجموعه‌های زیر، زیرمجموعه B نیست؟

(۱) $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ (۲) $\{2, 4, 6, \dots, 50\}$ (۳) $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ (۴) $\{5, 10, 15, \dots, 50\}$

✓: گزینه (۳)

گزینه ۳ یک مجموعه تک‌عضوی است که عضو آن در B نیست.

نکته ۷): مجموعه \emptyset زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

نکته ۸): هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است.

مثال ۷): اگر $A = \{0, 5, \{5\}, \{\emptyset\}\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

(۱) $\emptyset \subset A$ (۲) $\{5\} \subset A$ (۳) $\{\emptyset\} \subset A$ (۴) $\{0\} \subset A$

✓ گزینه (۳)

مجموعه $\{\emptyset\}$ زیر مجموعه A نیست زیرا $\emptyset \notin A$.

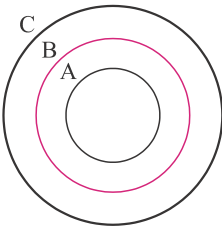
مثال ۸: اگر $A = \{x \mid -40 < x < 40\}$ باشد کدامیک از مجموعه‌های زیر، زیر مجموعه A نمی‌باشد؟

- (۱) $B = \{x \mid -10 < x < 10\}$ (۲) $C = \{2x \mid -10 < x < 10\}$
 (۳) $D = \{3x \mid -7 < x < 7\}$ (۴) $E = \{x^2 \mid -8 < x < 8\}$

✓ گزینه (۴)

عدد $7^2 = 49$ عضو مجموعه E است اما عضو مجموعه A نیست.

نکته ۱۹: اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ باشد آنگاه $A \subset C$.



نکته ۲۰: تعداد عضوهای یک مجموعه را عدد اصلی آن مجموعه می‌نامند عدد اصلی مجموعه A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۹: اگر $A = \{50, 55, 60, \dots, 200\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر درست است؟

- (۱) $n(A) = 40$ (۲) $n(A) = 30$ (۳) $n(A) = 31$ (۴) $n(A) = 29$

✓ گزینه (۳)

$$n(A) = \frac{200 - 50}{5} + 1 = 30 + 1 = 31$$

نکته ۲۱: $n(\emptyset) = 0$

نکته ۲۲: اگر A و B دو مجموعه متناهی و $A \subset B$ باشد آنگاه: $n(A) \leq n(B)$

نکته ۲۳: در نوشتن عضوهای یک مجموعه تکرار و ترتیب نوشتن اعضا اهمیتی ندارد.

مثال ۲۰: اگر $A = \{4, 4, 7, 7, 7, 5, 5, \{5\}\}$ باشد $n(A)$ برابر است با:

- (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

✓ گزینه (۳)

$$A = \{4, 7, 5, \{5\}\} \Rightarrow n(A) = 4$$

نکته ۲۴: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n .

مثال ۲۱: اگر $B = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های B برابر است با:

- (۱) 2^{100} (۲) 2^{10} (۳) 2^5 (۴) 2^{25}

✓ گزینه (۴)

$$n(B) = \frac{100 - 2}{2} + 1 = 49 + 1 = 50$$

$$2^{50} = (2^2)^{25} = 4^{25} \quad \text{تعداد زیر مجموعه‌ها}$$

مثال ۲۲: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $۵ + n$ عضو چند برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $n - ۱$ عضو است؟

- (۱) ۶ برابر (۲) ۶۴ برابر (۳) ۱۶ برابر (۴) ۸ برابر

✓ گزینه (۲)

$$\frac{2^{n+5}}{2^{n-1}} = \frac{2^n \times 2^5}{2^n \times 2^{-1}} = \frac{2^5}{2^{-1}} = 2^6 = 64$$

مثال ۲۳: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $۲n - ۳$ عضو هشت برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $n - ۲$ عضو است مقدار n چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۲

✓ گزینه (۳)

$$2^{2n-3} = 8 \times 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2n-3} = 2^3 \times 2^{n-2} \Rightarrow 2^{2n-3} = 2^{n+1}$$

$$2n - 3 = n + 1 \Rightarrow n = 4$$

نکته ۲۵: همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه به جز خود مجموعه را زیر مجموعه‌های محض آن مجموعه می‌نامند.

نکته ۲۶: تعداد زیر مجموعه‌های محض یک مجموعه n عضو برابر است با $2^n - ۱$.

مثال ۲۴: تعداد زیر مجموعه‌های محض مجموعه A برابر ۱۰۲۳ می‌باشد این مجموعه چند عضو است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

✓ گزینه (۳)

$$1023 + 1 = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n(A) = 10$$

مثال ۲۵: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه $n + ۳$ عضو از تعداد زیر مجموعه‌های محض یک مجموعه $n + ۱$ عضو ۴۹ واحد بیشتر است مقدار n چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

✓ گزینه (۲)

$$2^{n+3} = (2^{n+1} - 1) + 49 \Rightarrow 2^{n+3} - 2^{n+1} = 48$$

$$2^n (2^3 - 2) = 48 \Rightarrow 2^n \times 6 = 48 \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

نکته ۲۷: تعداد زیر مجموعه‌های یک عضو یک مجموعه n عضو برابر n است.

نکته ۲۸: تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی از یک مجموعه n عضو برابر است با $\frac{n(n-1)}{2}$.

نکته ۲۹: به طور کلی تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضو برابر است با: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

مثال ۲۶: یک مجموعه ۸ عضو چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۲۸ (۳) ۵۶ (۴) ۱۶

✓ گزینه (۲)

$$\frac{8 \times (8-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

مثال ۲۷: یک مجموعه ۷ عضوی چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

۴۲ (۴)

۳۵ (۳)

۳۰ (۲)

۲۱ (۱)

✓ گزینه (۳)

$$\frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 7 \times 5 = 35$$

نکته ۳۰: در یک مجموعه n عضوی تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی و $n-k$ عضوی با هم مساوی است.

مثال ۲۸: در یک مجموعه ۱۰ عضوی تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های چند عضوی مساوی است؟

۷ عضوی (۴)

۲ عضوی (۳)

۵ عضوی (۲)

۶ عضوی (۱)

✓ گزینه (۴)

$$10 - 3 = 7$$

مثال ۲۹: یک مجموعه ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه ۸ عضوی دارد؟

۱۱۰ (۴)

۵۵ (۳)

۹۰ (۲)

۴۵ (۱)

✓ گزینه (۱)

$$\frac{10 \times (10-1)}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۸ عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مساوی است.

نکته ۳۱: مجموعه متشکل از همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه توان آن مجموعه می‌نامند مجموعه توان A را $P(A)$ نشان می‌دهیم.

نکته ۳۲: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

مثال ۳۰: اگر $A = \{\{5\}, \{5, 5\}, \{5, 5, 5\}\}$ باشد $P(A)$ چند زیرمجموعه دارد؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

✓ گزینه (۴)

$$A = \{\{5\}, \{5\}, \{5\}\} = \{\{5\}\}$$

مجموعه A یک مجموعه تک عضوی است پس $P(A)$ دو عضو دارد و تعداد زیرمجموعه‌های $P(A)$ برابر است با:

$$2^2 = 4$$

مثال ۳۱: اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر درست است؟

همه موارد (۴)

$\{\{\emptyset\}\} \in P(A)$ (۳)

$\{\emptyset\} \in P(A)$ (۲)

$\emptyset \in P(A)$ (۱)

✓ گزینه (۴)

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

نکته ۳۳: اگر $A \subset B$ آنگاه $P(A) \subset P(B)$.

نکته ۳۴: دو مجموعه A و B در صورتی مساویند که $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد.

مثال ۳۲: مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ با کدامیک از مجموعه‌های زیر مساوی نیست؟

(۱) $B = \{1, 1, 1, 2, 3, 3\}$ (۲) $C = \{3, 2, 2, 2, 1\}$ (۳) $D = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (۴) $E = \{5^\circ, \sqrt{4}, (\sqrt{3})^2\}$

✓ گزینه (۳)

در مجموعه‌های متناهی تکرار و ترتیب نوشتن اعضا مهم نیست.

مثال ۳۳: اگر $A = \{\emptyset, \{0, 0\}, \{\}, \{0, 0, 0\}\}$ باشد $P(P(P(A)))$ یک مجموعه چند عضوی است؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۱۶

✓ گزینه (۴)

$$A = \{\emptyset, \{0\}\}$$

A یک مجموعه دو عضوی است پس $P(A)$ یک مجموعه ۴ عضوی و $P(P(A))$ یک مجموعه ۱۶ عضوی است و تعداد عضوهای $P(P(P(A)))$ برابر است با: ۲۱۶

مثال ۳۴: مجموعه $A = \{5x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ با کدامیک از مجموعه‌های زیر مساوی نیست؟

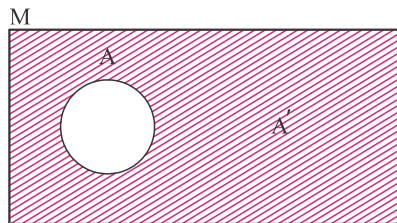
(۱) $B = \{10x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{x}{5} \in \mathbb{Z}\}$
 (۳) $D = \{5x + 10 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{5}{x} \in \mathbb{Z}\}$

✓ گزینه (۴)

اگر عضوهای سه مجموعه B و C و D را بنویسیم ملاحظه می‌کنیم همگی مضارب عدد ۵ می‌باشند اما عضوهای مجموعه E مقسوم علیه‌های ۵ هستند.

نکته ۳۵: در یک موضوع مورد بحث مجموعه‌ای که حاوی همه مجموعه‌های دیگر باشد به عبارت دیگر تمام مجموعه‌ها زیر مجموعه آن باشند مجموعه مرجع نامیده می‌شود که آن را با M نشان می‌دهیم.

نکته ۳۶: اگر M مجموعه مرجع باشد متمم A که آن را با A' نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن در M باشد ولی در A نباشد.



$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$

نکته ۳۷: اگر $x \in A$ آنگاه $x \notin A'$.

مثال ۳۵: اگر $M = \mathbb{Z}$ و $A = \{-18, -15, -12, \dots, 75\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر درست است؟

(۱) $54 \in A'$ (۲) $-24 \in A'$ (۳) $35 \in A$ (۴) $0 \notin A$

✓ گزینه (۲)

مثال ۳۶: اگر $M = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ و $A = \{4x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ آنگاه A' با کدامیک از مجموعه‌های زیر مساوی است؟

(۱) $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{4x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{4x - 2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{4(x-1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$

✓ گزینه (۳)

$$A' = \{\dots, -1, 0, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} = \{4x - 2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

نکته ۳۸: اگر $A \subset B$ آنگاه $B' \subset A'$.

$$A = B \Leftrightarrow A' = B'$$

نکته ۳۹: اگر دو مجموعه مساوی باشند متمم‌های آن‌ها نیز مساویند و بالعکس

$$(A')' = A$$

نکته ۴۰: متمم متمم یک مجموعه با خود مجموعه مساوی است.

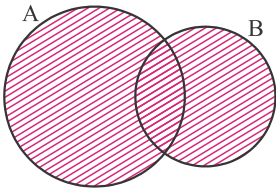
$$M' = \emptyset$$

نکته ۴۱: متمم مجموعه مرجع برابر مجموعه تهی است.

$$\emptyset' = M$$

نکته ۴۲: متمم مجموعه تهی مجموعه مرجع می‌باشد.

نکته ۴۳: اجتماع دو مجموعه A و B که آن‌را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن یا در A باشد یا در B .



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال ۳۷: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -50 \leq x < 36\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -20 < x < 45\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

(۴) $-50 \in A \cup B$

(۳) $36 \in A \cup B$

(۲) $45 \in A \cup B$

(۱) $-32 \in A \cup B$

✓ گزینه (۲)

$$A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -50 \leq x < 45\}$$

$$A \subset A \cup B \quad B \subset A \cup B$$

نکته ۴۴: اجتماع دو مجموعه حاوی آن دو مجموعه می‌باشد.

$$A_1 \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

نکته ۴۵: به طور کلی اگر A_1, A_2, \dots, A_n چند مجموعه باشند آنگاه:

$$A_2 \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

⋮

$$A_n \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

مثال ۳۸: کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

(۴) $C \cup D \subset D$

(۳) $C \cup D \subset C \cup D \cup E$

(۲) $C \subset C \cup D \cup E$

(۱) $C \subset C \cup D$

✓ گزینه (۴)

نکته ۴۶: اگر $A \subset B$ آنگاه $A \cup B = B$.

نکته ۴۷: اگر $A \subset B$ آنگاه $A \cup B = B$.

$$A \cup A = A \quad A \cup \emptyset = A \quad A \cup M = M \quad A \cup A' = M$$

مثال ۳۹: اگر $A = \{6x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ باشد کدامیک از عبارات زیر درست است؟

(۴) $A \cup B = B'$

(۳) $A \cup B = B$

(۲) $A \cup B = A$

(۱) $A \cup B = \mathbb{Z}$

✓ گزینه (۳)

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$

مثال ۴۰: حاصل عبارت $(A \cup \emptyset)' \cup (A \cup A')' \cup (\emptyset' \cup A)$ کدام است؟

- (۱) \emptyset (۲) A (۳) M (۴) A'

✓ گزینه (۳)

$$(A \cup \emptyset)' \cup (A \cup A')' \cup (\emptyset' \cup A) = (A \cup M)' \cup M' \cup (M \cup A) = M' \cup \emptyset \cup M = \emptyset \cup \emptyset \cup M = M$$

نکته ۴۱: اگر $A \cup B = \emptyset$ آنگاه $A = \emptyset$ و $B = \emptyset$.

مثال ۴۲: اگر $A_n = \{x \mid -n < x < n\}$ باشد کدام یک از عبارات زیر نادرست است؟

- (۱) $A_{10} \cup A_{12} = A_{12}$ (۲) $A_{18} \cup A_{24} = A_{18}$
 (۳) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{50} = A_{50}$ (۴) $A_7 \cup A_{11} \cup A_{25} = A_{25}$

✓ گزینه (۲)

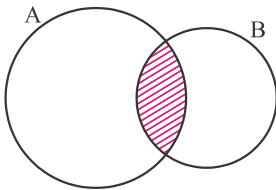
$$A_1 = \{x \mid -1 < x < 1\} \quad A_2 = \{x \mid -2 < x < 2\} \quad A_3 = \{x \mid -3 < x < 3\}$$

ملاحظه می‌کنیم با اضافه شدن اندیس‌ها مجموعه‌ها بزرگتر می‌شوند یعنی:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

$$\text{بنابراین: } A_{18} \subset A_{24} \text{ پس } A_{18} \cup A_{24} = A_{24}$$

نکته ۵۰: اشتراک دو مجموعه A و B که آن‌را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن هم در A باشند و هم در B .



$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

مثال ۴۲: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -9 < x < 17\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -20 < x < 8\}$ باشد $A \cap B$ کدام است؟

- (۱) $\{-9, -8, -7, \dots, 8\}$ (۲) $\{-9, -8, -7, \dots, 7\}$ (۳) $\{-8, -7, -6, \dots, 7\}$ (۴) $\{-19, -18, -17, \dots, 16\}$

✓ گزینه (۳)

مثال ۴۳: اگر $A = \{1, \{2\}, 2\}$ و $B = \{\{1\}, 1, 3\}$ باشد کدام یک از عبارات زیر درست است؟

- (۱) $A \cap B = \{1, 2\}$ (۲) $A \cap B = \{\{1\}\}$ (۳) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ (۴) $A \cap B = \{\}$

✓ گزینه (۴)

نکته ۵۱: دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند دو مجموعه جدا از هم نامیده می‌شوند.

$$A \cap B \subset B$$

$$A \cap B \subset A$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subset A_1$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subset A_2$$

$$\vdots$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subset A_n$$

نکته ۵۲: اشتراک دو مجموعه زیر مجموعه هر کدام از آن‌هاست.

نکته ۵۳: به طور کلی اشتراک چند مجموعه زیر مجموعه هر کدام از آن‌هاست.

مثال ۴۴: کدامیک از عبارات زیر درست است؟

۱) $A \cap B \cap C \subset C$ ۲) $A \cap B \subset A \cap B \cap C$ ۳) $A \cap B \cap C \subset A \cap C$ ۴) گزینه ۱ و ۳

✓ **گزینه (۴)**

نکته ۵۴: اگر $A \subset B$ آنگاه $A \cap B = A$.

نکته ۵۵: اگر $A \cap B = A$ آنگاه $A \subset B$.

مثال ۴۵: اگر $A_n = \left\{ x \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ باشد کدامیک از رابطه‌های زیر نادرست است؟

۱) $A_5 \cap A_4 = A_4$ ۲) $A_7 \cup A_{10} = A_7$

۳) $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = A_{10}$ ۴) $A_{20} \cap A_{21} \cap \dots \cap A_{50} = A_{20}$

✓ **گزینه (۴)**

$$A_1 = \left\{ x \mid -1 < x < 1 \right\} \quad A_2 = \left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right\} \quad A_3 = \left\{ x \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \right\}$$

$A_3 \subset A_2 \subset A_1$

ملاحظه می‌شود با بزرگ شدن اندیس‌ها مجموعه کوچکتر می‌شود

$A_{50} \subset A_{49} \subset A_{48} \subset \dots \subset A_{20} \Rightarrow A_{20} \cap A_{21} \cap \dots \cap A_{50} = A_{20}$

$A \cap A = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap M = A$ $A \cap A' = \emptyset$ **نکته ۵۶**

مثال ۴۶: حاصل عبارت $(A \cap A')' \cap (A' \cap \emptyset)' \cap (A \cap M)'$ کدام است؟

۱) \emptyset ۲) M ۳) A ۴) A'

✓ **گزینه (۳)**

$(A \cap A')' \cap (A' \cap \emptyset)' \cap (A \cap M)' = \emptyset' \cap (A' \cap M)' \cap (A \cap \emptyset)' = M \cap (A')' \cap \emptyset' = M \cap A \cap M = A$

نکته ۵۷: اگر $A \cap B = M$ آنگاه $A = M$ و $B = M$

نکته ۵۸: اگر $A = B$ آنگاه $A \cap C = B \cap C$ و $A \cup C = B \cup C$.

نکته ۵۹: اگر $A \cap C = B \cap C$ نمی‌توان گفت $A = B$.

نکته ۶۰: اگر $A \cup C = B \cup C$ نمی‌توان گفت $A = B$.

نکته ۶۱: اگر $A \cap C = B \cap C$ و $A \cup C = B \cup C$ باشد می‌توان گفت $A = B$.

نکته ۶۲: اجتماع و اشتراک دارای خاصیت جابجایی می‌باشند.

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

نکته ۶۳: اجتماع و اشتراک دارای خاصیت شرکت پذیری می‌باشند.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

نکته ۶۴: خاصیت پخششی (توزیع پذیری)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

مثال ۶۵: قوانین جذب

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

مثال ۶۶: قوانین شبه جذب

$$A \cup (A' \cap B) = A \cup B$$

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

مثال ۶۷: قوانین دمرگان

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

مثال ۴۷: اگر $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A \cup C = \{6, 7, 8, \dots, 15\}$ باشد حاصل $A \cup (B \cap C)$ کدام است؟

$$\{6, 7, 8, 9, 10\} \quad (۴) \quad \{5, 6, 7, 8\} \quad (۳) \quad \{7, 8\} \quad (۲) \quad \{1, 2, 3, \dots, 15\} \quad (۱)$$

✓ گزینه (۴)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

مثال ۴۸: اگر $M = \{1, 0, 1, 1, 2, \dots, 20\}$ و $A \cap B' = \{1, 4, 15, 16, \dots, 20\}$ باشد $A' \cup B$ کدام است؟

$$\emptyset \quad (۴) \quad \{1, 0, 1, 1, 2, 13\} \quad (۳) \quad \{1, 0, 1, 1, 2\} \quad (۲) \quad \{1, 1, 1, 2, 13, 14\} \quad (۱)$$

✓ گزینه (۳)

$$A' \cup B = (A \cap B')' = \{1, 0, 1, 1, 2, 13\}$$

مثال ۴۹: حاصل عبارت $A \cap (B \cap A')$ کدام است؟

$$A' \quad (۴) \quad A \quad (۳) \quad M \quad (۲) \quad \emptyset \quad (۱)$$

✓ گزینه (۱)

$$A \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

مثال ۵۰: حاصل عبارت $(A' \cup B) \cup (A \cup B')$ کدام است؟

$$B' \quad (۴) \quad A \quad (۳) \quad M \quad (۲) \quad \emptyset \quad (۱)$$

✓ گزینه (۲)

$$(A' \cup B) \cup (A \cup B') = (A' \cup A) \cup (B \cup B') = M \cup M = M$$

مثال ۵۱: حاصل عبارت $[A' \cup (A \cap B)] \cap B$ کدام است؟

$$B \quad (۴) \quad M \quad (۳) \quad \emptyset \quad (۲) \quad A \quad (۱)$$

✓ گزینه (۴)

$$[A' \cup (A \cap B)] \cap B = (A' \cup B) \cap B = B$$

مثال ۵۲: حاصل عبارت $(A' \cup B) \cap (A \cap B)'$ کدام است؟

$$B \quad (۴) \quad A' \quad (۳) \quad \emptyset \quad (۲) \quad A \quad (۱)$$

✓ گزینه (۳)

$$(A' \cup B) \cap (A \cap B)' = (A' \cup B) \cap (A' \cup B') = A' \cup (B \cap B') = A' \cup \emptyset = A'$$

مثال ۵۳: حاصل عبارت $(A \cup B') \cap (A' \cap B)$ کدام است؟

- (۱) \emptyset (۲) M (۳) A' (۴) B

✓ گزینه (۱)

$$(A \cup B') \cap (A' \cap B) = (A \cup B') \cap (A \cup B')' = \emptyset$$

نکته ۶۸: اگر $A \subset B$ آنگاه $A \cap B' = \emptyset$.

نکته ۶۹: اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $A \subset B'$ و $B \subset A'$.

مثال ۵۴: اگر $A \cup B = A \cap B'$ باشد آنگاه:

- (۱) $B = M$ (۲) $B = \emptyset$ (۳) $A = \emptyset$ (۴) $A = M$

✓ گزینه (۲)

$$A \cup B = A \cap B' \Rightarrow B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cap B') \Rightarrow B = (B \cap B') \cap A \Rightarrow B = \emptyset \cap A \Rightarrow B = \emptyset$$

مثال ۵۵: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

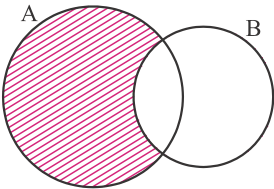
- (۱) $A \cup B' = B'$ (۲) $A \cap B' = A$ (۳) $B \cap A' = B$ (۴) $B \cup A' = B$

✓ گزینه (۴)

اگر A و B جدا از هم باشند آنگاه $A \subset B'$ و $B \subset A'$.

$$B \subset A' \Rightarrow B \cup A' = A'$$

نکته ۷۰: تفاضل دو مجموعه A و B که آن را به صورت $A - B$ نشان می‌دهیم مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشد ولی در B نباشد.



$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

مثال ۵۶: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ کدامیک از عبارات زیر درست است؟

- (۱) $A - B = \{1, 2, 3\}$ (۲) $B - A = \{7, 8\}$ (۳) $A - B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ (۴) گزینه ۱ و ۲

✓ گزینه (۴)

$$A - B \subset A, \quad B - A \subset B$$

نکته ۷۱: اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه:

$$A - B = A \cap B'$$

نکته ۷۲: اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه:

$$A - A = \emptyset$$

$$A - \emptyset = A$$

$$\emptyset - A = \emptyset$$

نکته ۷۳:

$$M - A = A'$$

$$A - M = \emptyset$$

$$A - A' = A$$

مثال ۵۷: حاصل عبارت $(A' - A)' \cap (M - A)$ کدام است؟

- (۱) M (۲) A (۳) \emptyset (۴) A'

✓ گزینه (۳)

$$(A' - A)' \cap (M - A) = (A')' \cap A' = A \cap A' = \emptyset$$

نکته ۷۴: اگر $A \subset B$ آنگاه $A - B = \emptyset$.

نکته ۷۵: اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $A - B = A$.

مثال ۵۸: حاصل عبارت $A - (B - A)$ کدام است؟

(۱) A' (۲) \emptyset (۳) M (۴) A

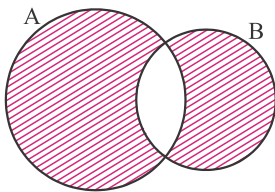
✓ گزینه (۴)

$$A - (B - A) = A - (B \cap A') = A \cap (B \cap A')' = A \cap (B' \cup A) = A$$

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

نکته ۷۶:

نکته ۷۷: تفاضل متقارن دو مجموعه A و B که آن را به صورت $A \Delta B$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود.



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

مثال ۵۹: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e\}$ باشد $A \Delta B$ کدام است؟

(۱) $\{c, d, e\}$ (۲) $\{a, b, e\}$ (۳) $\{a, b\}$ (۴) $\{a, b, c, d\}$

✓ گزینه (۲)

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, b\} \cup \{e\} = \{a, b, e\}$$

نکته ۷۸: اگر تعداد عضوهای دو مجموعه متناهی برابر باشند آن دو مجموعه هم ارز یا معادل می‌باشند.

نکته ۷۹: یک مجموعه را نسبت به یک عمل بسته می‌نامیم در صورتی که دو عضوی از مجموعه را انتخاب کرده و آن عمل را روی

آن‌ها انجام دهیم حاصل در همان مجموعه باشد.

مثال ۶۰: مجموعه اعداد طبیعی نسبت به کدام یک از اعمال زیر بسته نیست؟

(۱) جمع (۲) ضرب (۳) تفریق (۴) توان

✓ گزینه (۳)

$$2 \in \mathbb{N}$$

$$5 \in \mathbb{N}$$

$$2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$$

نکته ۸۰: مجموعه اعداد صحیح نسبت به جمع و ضرب و تفریق بسته است ولی نسبت به تقسیم بسته نیست.

مثال ۶۱: مجموعه $A = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ نسبت به کدام یک از اعمال زیر بسته نیست؟

(۱) جمع (۲) ضرب (۳) تفریق (۴) تقسیم

✓ گزینه (۴)

$$9 \in A$$

$$18 \in A$$

$$9 \div 18 = 0.5 \notin A$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته ۸۱:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

نکته ۸۲:

مثال ۶۲: یک باشگاه ورزشی ۵۰ عضو دارد که ۳۵ نفر آن‌ها فوتبال و ۲۵ نفر آن‌ها والیبال بازی می‌کنند چند نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

✓ گزینه (۳)

$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V)$$

$$50 = 35 + 25 - n(F \cap V) \Rightarrow n(F \cap V) = 10$$

مثال ۶۳: در مثال قبل چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

✓ گزینه (۲)

$$35 - 10 = 25$$

نکته ۸۳: پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش به طور قطع و یقین مشخص باشد **پدیده قطعی** می‌نامند به عنوان مثال وقتی سنجی را به هوا پرتاب می‌کنیم لزوماً سنگ به زمین می‌خورد.

نکته ۸۴: پدیده یا آزمایشی که قبل از انجام آزمایش نتوان نتیجه آن را پیش‌بینی کرد اما مجموعه همه نتایج آن مشخص باشد پدیده تصادفی نامیده می‌شود. به عنوان مثال وقتی تاسی را به هوا می‌اندازیم نمی‌دانیم چه عددی روی زمین می‌نشیند.

نکته ۸۵: مجموعه همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامند فضای نمونه‌ای را با S نشان می‌دهیم در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n(S) = 6$$

نکته ۸۶: اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش دو عضو خواهد داشت:

$$S = \{ر, پ\} = \{پشت, رو\} \quad n(S) = 2$$

نکته ۸۷: اگر سکه‌ای را دوبار پرتاب کنیم یا دو سکه را همزمان پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای چهار عضوی است

$$2 \times 2 = 4$$

$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

نکته ۸۸: اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم یا n سکه را همزمان پرتاب کنیم تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

$$6 \times 6 = 36$$

نکته ۸۹: اگر دو تاس را به هوا بیاندازیم فضای نمونه‌ای آن ۳۶ عضو خواهد داشت:

$$2 \times 6 = 12$$

نکته ۹۰: اگر یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب کنیم فضای نمونه‌ای آن ۱۲ عضو خواهد داشت:

نکته ۹۱: هر زیر مجموعه از یک فضای نمونه‌ای را یک **پیشامد تصادفی** در آن فضا می‌نامند.

نکته ۹۲: اگر S فضای نمونه‌ای باشد پیشامد \emptyset را **پیشامد نشدنی** و پیشامد S را **پیشامد حتمی** می‌نامند.

نکته ۹۳: دو پیشامد را که هیچ اشتراکی نداشته باشند دو **پیشامد ناسازگار** می‌نامند اگر دو پیشامد لااقل یک عضو مشترک داشته باشند سازگار می‌باشند. در پرتاب یک تاس پیشامد زوج آمدن تاس و پیشامد فرد آمدن تاس دو پیشامد ناسازگارند.

نکته ۹۴: اگر A یک پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشد متمم A که آن را با A' نشان می‌دهیم زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد و $n(A') = n(S) - n(A)$.

تعداد حالت های مطلوب
تعداد حالت های ممکن

نکته ۹۵: احتمال وقوع یک پیشامد برابر است با:

اگر A یک پیشامد و S فضای نمونه‌ای و $P(A)$ احتمال وقوع A باشد آن‌گاه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

نکته ۹۶: احتمال وقوع پیشامد نشدنی صفر است

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

نکته ۹۷: احتمال وقوع پیشامد حتمی یک است

مثال ۶۴: تاسی را به هوا می‌اندازیم احتمال این‌که تاس زوج بیاید چقدر است؟

$$\frac{2}{5} \quad (۱۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

✓ گزینه (۲)

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال ۶۵: تاسی را به هوا می‌اندازیم احتمال این‌که تاس دو رقمی بیاید چقدر است؟

$$۱ \quad (۱۴)$$

$$۰ \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

✓ گزینه (۳)

$$A = \emptyset \Rightarrow n(A) = 0$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

مثال ۶۶: یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم احتمال این‌که سکه پشت و تاس مضرب ۳ بیاید چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۱۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

✓ گزینه (۱۴)

$$A = \{(پ, ۳), (پ, ۶)\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$n(S) = 2 \times 6 = 12 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

نکته ۹۸:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نکته ۹۹: اگر A و B دو پیشامد باشند آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نکته ۱۰۰: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند آنگاه:

مثال ۶۷: احتمال این که فردا باران بیاید $\frac{3}{7}$ است احتمال این که فردا باران نیاید چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{5}{7}$ (۴) ۰

✓ گزینه (۲)

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

مثال ۶۸: دو تاس را با هم می‌اندازیم احتمال این که تاس جفت نیاید چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{7}{36}$ (۴) $\frac{5}{6}$

✓ گزینه (۴)

اگر پیشامد جفت آمدن تاس‌ها را A بنامیم آنگاه:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال ۶۹: در یک کلاس ۲۰٪ دانش‌آموزان والیبال و ۸۰٪ فوتبال و ۹۰٪ حداقل یکی از این دو ورزش را انجام می‌دهند

یک دانش‌آموز به تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم. احتمال این که او هر دو ورزش را انجام دهد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{20}$ (۲) $\frac{3}{10}$ (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) $\frac{1}{5}$

✓ گزینه (۳)

اگر A پیشامد والیبال و B پیشامد فوتبال باشد داریم:

$$P(A) = 0,20 \quad P(B) = 0,80 \quad P(A \cup B) = 0,90$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,90 = 0,20 + 0,80 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,10 = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

نکته ۱۰۱: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم تعداد حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده مساوی k باشد برابر k-1 است (با شرط

$$k \leq 6)$$

نکته ۱۰۲: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم تعداد حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده مساوی k باشد برابر k-13 است (با شرط

$$7 \leq k \leq 12)$$