آبی که برآسود زمینش بخورد زود   دریا شود آن رود که پیوسته روان است

معرفی مجموعه‌ها

مفهوم مجموعه نقش بسیار اساسی در شاخه‌های ریاضیات دارد بنابراین برای درک واقعی هر شاخه مرتبط نیاز به شناخت نظریه‌ی مجموعه‌ها ضروری است. مفهوم مجموعه نخستین بار توسط «**گئورک کانتور**» ریاضی‌دان آلمانی در اواخر قرن نوزدهم بیان شد.

مجموعه: مجموعه را معمولاً تعریف‌نمی‌کنیم. آن‌چه به عنوان توصیف مجموعه بیان می‌شود به دلیل نزدیک‌کردن ذهن به مفهوم آن می‌باشد. از نظر ریاضی، یک مجموعه، دسته یا گروهی از اشیاء متمایز و مشخص است. برای مثال، گروه دانش‌آموزان کلاس اول یک مجموعه است ولی گروه دانش‌آموزان زرنگ کلاس اول مجموعه نیست. زیرا زرنگ، از نظر افراد مفهومی متفاوت است.

> **توجه ۱**: نمایش ریاضی یک مجموعه با استفاده از نماد $\{\ \}$ (آکولاد) می‌باشد که همه یا بعضی از اعضای آن مجموعه در داخل آن نوشته می‌شود.

مثال ۱: مجموعه‌ی ماه‌های فصل بهار (سال شمسی) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

{خرداد, اردیبهشت, فروردین}

مثال۲: مجموعه‌ی حروف صدادار انگلیسی را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

$\{a,e,i,o,u\}$

مثال۳: مجموعه عددهای فرد (Odd) و مجموعه‌ی عددهای زوج (Even) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

$O=\{۱,۳,۵,۷,...\} \quad , \quad E=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

> **توجه ۲**: هر مجموعه با اعضای آن مشخص می‌شود و هرخاصیتی یک مجموعه را مشخص می‌کند. (مانند فرد بودن، اول بودن، زوج بودن و ...)

عضو یک مجموعه: به افراد یا اشیایی که کاملاً مشخص یا حداقل در یک خاصیت، مشترک بوده و یک مجموعه را تشکیل دهند، اعضای آن مجموعه می‌گوییم.

> **توجه ۳**: گروه‌هایی که اعضای آن به زمان، مکان و سلیقه شخصی بستگی دارند، مجموعه نیستند.

مثال ۴: گروه دانش‌آموزان زرنگ، سه عدد فرد، شعرای مشهور، عددهای بزرگ و ... مجموعه نیستند. زیرا مثلاً در مورد زرنگ بودن هیچ ملاکی مطرح نیست و سلیقه‌ی شخصی در آن دخالت دارد.

> **توجه ۴**: اسامی مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین (A , B , ...) می‌نویسیم، ولی اعضای مجموعه را هیچ‌گاه با حروف بزرگ نمی‌نویسیم.

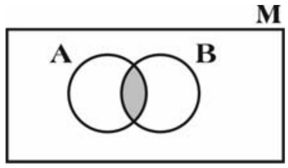
نماد عضویت (تعلق): عضو بودن یک شی در یک مجموعه را با نماد $\in$ و عدم عضویت آن را با $\notin$ مشخص می‌کنیم.

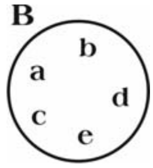
مثال۵: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ در این‌صورت $۵\in A$, $۰\notin A$, $۲\in A$ و $-۳\notin A$.

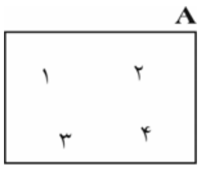
مجموعه‌ی مرجع: مجموعه‌ای را که شامل همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث باشد (مجموعه‌ی عالم سخن) مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم. مثلاً وقتی از عددهای صحیح مثبت، منفی، فرد و زوج(Z) را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم و وقتی از عددهای کسری، منفی و گنگ صحبت می‌کنیم می‌توانیم مجموعه‌ی عددهای حقیقی (R) را مجموعه‌ی مرجع معرفی می‌کنیم. مجموعه‌ی مرجع را با M نمایش می‌دهیم.

نمودار ون: نمودار ون یکی از روش‌های حل آسان مسائل مربوط به مجموعه‌ها است که نخستین بار توسط یک ریاضیدان انگلیسی به‌نام « **جان وِن** » ارائه شد.

در نمودار ون مجموعه‌ی مرجع (بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مطرح‌شده در مسئله) را با یک مستطیل به نام M نشان می‌دهیم و مجموعه‌های کوچک‌تری که با مجموعه‌ی مرجع مشترکاتی دارند را با شکل‌های دایره، بیضی، مربع، مثلث و ... و با حروف A، B، C و ... نشان‌می‌دهیم.







مثال۶: از گروه‌های زیر فقط (پ) نمایش یک مجموعه ریاضی است.

آ. شعرای نامی جهان   ب. جانوران روی زمین

پ. سه عدد زوج متوالی   ت. گل‌های خوشبو

> **توجه ۵:** گاهی تعداد اعضای یک مجموعه زیاد است و نمی‌توانیم همه‌ی اعضای آن را بنویسیم.
> در این‌صورت چند عضو مجموعه را نوشته و سه نقطه بعد یا قبل از آن‌ها می‌گذاریم.

مثال۷: مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج را به‌صورت: $A=\{۲,۴,۶,...\}$ و مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰۰ را به‌صورت: $B=\{۱,۳,۵,...,۹۷,۹۹\}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه تهی: هر مجموعه که هیچ عضوی نداشته‌باشد مجموعه‌ی تهی نام دارد و با نماد $\{\ \}$ یا $\varnothing$ نمایش داده‌می‌شود.

مثال۸: مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۳۵ و ۳۶، مجموعه‌ی عددهای اول زوج بزرگ‌تر از ۱۰ و مجموعه‌ی عددهای طبیعی منفی نمونه‌هایی از مجموعه‌های تهی هستند.

مجموعه‌ی تک عضوی: هر مجموعه که فقط یک عضو داشته‌باشد، مجموعه تک‌عضوی نام دارد.

مثال۹: مجموعه‌ی $\{۰\}$، $\{\varnothing\}$ ، $\{\pi\}$و عددهای زوج بین عددهای ۳ و ۵، نمایشی از مجموعه‌های تک‌عضوی هستند.

مجموعه‌های خاص در مجموعه‌ی عددهای حقیقی (R)

۱- مجموعه‌ی عددهای طبیعی

$N=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

۲- مجموعه‌ی عددهای حسابی

$I=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}$

۳- مجموعه‌ی عددهای صحیح

$$Z=\{\dots,-۳,-۲,۰,+۱,+۲,\dots\}$$

۴- مجموعه‌ی عددهای گویا

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\; m,n\in z, n\neq ۰\right\}$$

۵- مجموعه‌ی عددهای گنگ: هر عدد حقیقی که گویا نباشد گنگ است.

$$Q'=R-Q$$

عددهای $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۷}$، π و ... عددهای گنگ (اصم) هستند.

۶- مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج:

$$E=\{۲,۴,۶,\dots\}$$

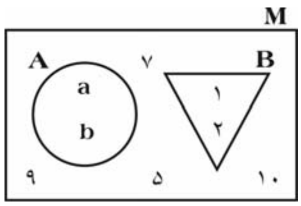
۷- **مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد:**

$$O=\{۱,۳,۵,\dots\}$$

۸- **مجموعه‌ی عددهای اول:**

$$P=\{۲,۳,۵,\dots\}$$

مثال۱۰:



$$M=\{a,b,۱,۲,۵,۷,۹,۱۰\}$$
$$A=\{a,b\}$$
$$B=\{۱,۲\}$$

جاده موفقیت سر راست نیست پیچی وجود دارد به‌نام شکست
دوربرگردانی به نام سردرگمی سرعت‌گیرهایی به‌نام دوستان
چراغ‌قرمزهایی به نام دشمنان چراغ‌احتیاط‌هایی به نام خانواده
تایرهای پنچری خواهید داشت به نام شغل
اما اگر یدکی به نام عزم داشته‌باشید
موتوری به نام استقامت و راننده‌ای به نام خدا
به جایی خواهید رسید که موفقیت نامیده‌می‌شود

مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

نمایش یک مجموعه با علائم ریاضی : هرگاه اعضای یک مجموعه را با نمادهای ریاضی معرفی می‌کنیم، در واقع آن مجموعه را به‌صورت ریاضی نمایش داده‌ایم.

مثال ۱۱: مجموعه‌های $A=\{$ عددهای‌طبیعی‌بین۱۰و۲۰ $\}$ ، $B=\{$عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰ $\}$ و $C=\{۱,۴,۹,۱۶,...\}$ به زبان ریاضی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$A=\{x \mid x\in N, ۱۰<x<۲۰\}$$

$$B=\{x \mid x=۲k-۱, k\in N, x<۱۰\}$$

$$C=\{x^۲ \mid x\in N\}$$ یا $$C=\{x^۲ \mid x\in Z-\{۰\}\}$$

مثال ۱۲: آ) مجموعه‌های

$$A=\{۲^x \mid x\in N\}$$

$$B=\{x \mid x-۵=y, y\in N\}$$

با اعضا به‌صورت زیر نمایش داده‌می‌شود:

$$A=\{۲,۴,۸,...\}$$

$$B=\{۶,۷,۸,...\}$$

ب) درستی یا نادرستی رابطه‌های داده شده را تعیین می‌کنیم.

نادرست $۵۱\notin B$ درست $۱۰۰۰\in B$ درست $۱۵\notin A$

درست $۲۱\frac{۶}{۳}\in B$ نادرست $۳۲/۵\in A$ نادرست $\frac{۴}{۲}\notin A$

زیرمجموعه: هرگاه همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B باشند در این صورت مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی مجموعه B است و به صورت $A\subset B$ نمایش می‌دهیم، علامت $\subset$ نماد زیرمجموعه می‌باشد. اگر بعضی از اعضای مجموعه A در مجموعه B نباشد خواهیم گفت $A\not\subset B$ و می‌خوانیم مجموعه A زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B نمی‌باشد.

مثال ۱۳: $A=\{a,b,c\}$ زیرمجموعه‌ی $B=\{a,b,c,d,e\}$ می‌باشد.

$A\subset B$

و $C=\{۱,۳,۴\}$ زیر مجموعه‌ی $D=\{۱,۳,۵,۷,...\}$ نمی‌باشد.

$C\not\subset D$

و $E=\{۲,۴,۶\}$ زیرمجموعه‌ی $F=\{۶,۴,۲\}$ می‌باشد و بالعکس.

$E\subset F$ و $F\subset E$

و $G=\{$ دانش‌آموزان کلاس نهم از مدرسه $M\}$ زیرمجموعه‌ی $H=\{$ دانش‌آموزان مدرسه $M\}$ می‌باشد.

$G\subset H$

دو مجموعه برابر: دو مجموعه‌ی A و B را برابر گوییم هرگاه $A\subset B$ و $B\subset A$ پس می‌نویسیم:

$$A\subset B\ ,\ B\subset A \quad \Leftrightarrow \quad A=B$$

مثال۱۴:آ) مجموعه‌های $\{a,b,a,b,c\}$ و $\{a,b,c\}$ با هم و مجموعه‌های $\{۱,۲,۱,۲,۲\}$ و $\{۱,۲\}$ با هم برابرند. پس اگر در مجموعه‌ای اعضا تکرار شوند برای به‌دست آوردن تعداد اعضا، اعضای تکراری را حذف می‌کنیم.

ب) مجموعه‌های $\{۱,۲,۳\}$، $\{۱,۳,۲\}$ و $\{۳,۱,۲\}$ با هم برابرند یعنی اگر اعضای یک مجموعه جابه‌جا شوند، مجموعه‌ی حاصل مساوی همان مجموعه است.

> **توجه۶:** هر مجموعه‌زیر مجموعه خودش می‌باشد $(A \subset A)$ و مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست $(\varnothing \subset A)$ [A یک مجموعه‌ی دلخواه است.]
>
> به دو مجموعه‌ی A و $\varnothing$ زیرمجموعه‌های بدیهی مجموعه Aمی‌گوییم.

مثال۱۵: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{a,b\}$ را بنویسید. [$A_۱$ را بخوانید A یک، $A_۲$ را بخوانید A دو، ... به ۱، ۲، ۳و ... که پایین حرف A نوشته‌می‌شود اندیس A می‌گوییم.]

$A_۱=\varnothing$ $\qquad A_۲=\{a\}$ $\qquad A_۳=\{b\}$ $\qquad A_۴=\{a,b\}$

مجموعه‌ی A دارای ۴ زیرمجموعه است.

مثال۱۶: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳\}$ را می‌نویسیم:

$B_۱=\varnothing$ $\qquad B_۲=\{۱\}$ $\qquad B_۳=\{۲\}$ $\qquad B_۵=\{۱,۲\}$

$B_۶=\{۱,۳\}$ $\qquad B_۷=\{۲,۳\}$ $\qquad B_۸=\{۱,۲,۳\}$

بنابراین مجموعه‌ی B دارای ۸ زیرمجموعه است.

> **توجه۷:** اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد در این صورت دارای ۲^n زیرمجموعه می‌باشد.
>
> یعنی یک مجموعه ۴ عضوی دارای $۱۶ = ۲^۴$ زیرمجموعه
>
> و یک مجموعه ۱۰ عضوی دارای $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ زیرمجموعه می‌باشد.

زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه: اگر از همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، خود آن مجموعه را حذف کنیم $(۲^n-۱)$ زیرمجموعه خواهیم داشت که به آن‌ها زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه گوییم.

مثال۱۷: تعداد زیر مجموهای محض مجموعه ی $A=\{\oplus,\square,\bigcirc,\triangle\}$ چند تاست؟

$n=۴ \Rightarrow ۲^n-۱=۲^۴-۱=۱۶-۱=۱۵$ تعداد زیرمجموعه‌های محض

مثال۱۸: مجموعه‌ی $A=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟

$n=۶ \Rightarrow ۲^n=۲^۶=۶۴$ تعداد زیرمجموعه‌ها

مثال۱۹: مجموعه‌ی $A=\{x \mid x\in N,\ ۴<x<۵\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟

$A=\{\ \}$ $\qquad n=۰ \Rightarrow ۲^n=۲^۰=۱$ تعداد زیرمجموعه ها

مثال۲۰: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۳۲ است آن مجموعه چند عضو دارد؟

آن مجموعه ۵ عضو دارد. $۲^n = ۳۲ \Rightarrow ۲^n = ۲^۵ \Rightarrow n = ۵$

مثال۲۱: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه ۱۲۷ است. آن مجموعه چند عضو دارد؟

$$۲^n - ۱ = ۱۲۷ \Rightarrow ۲^n = ۱۲۷ + ۱ \Rightarrow ۲^n = ۱۲۸ \Rightarrow ۲^n = ۲^۷ \Rightarrow n = ۷$$

آن مجموعه ۷ عضو دارد.

عدد اصلی یک مجموعه: تعداد عضوهای هر مجموعه را عدد اصلی آن مجموعه می‌گوییم و عدد اصلی یک مجموعه مانند A را به صورت n (A) نشان می‌دهیم و اِنِ A می‌خوانیم.

مثال۲۲: **عدد اصلی مجموعه‌ی** $A = \{۲,۳,۴,۵\}$، $n(A) = ۴$ می‌باشد.

مجموعه نامتناهی(بی‌پایان): اگر تعداد اعضای یک مجموعه را تعیین کنیم (عدد اصلی یک مجموعه) و عددی طبیعی یافت شود که از عدد اصلی آن مجموعه بزرگتر باشد آن‌گاه آن مجموعه را متناهی گوییم.

مثال۲۳: **مجموعه‌ی** $A = \{۱,۲,۳,...,۹۹۹\}$ یک مجموعه متناهی است.

مجموعه A مجموعه‌ی متناهی است. $\Rightarrow$ $۱۰۰۰ > ۹۹۹$ $n(A) = ۹۹۹$

مثال ۲۴: **مجموعه‌ی** $A = \{۲,۴,۶,...\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

> **توجه۸**: مجموعه‌ی $A = \{\{۲,۳,۴,۵\}\}$ یک مجموعه‌ی تک عضوی است، یعنی عضو مجموعه A، مجموعه‌ای است که دارای ۴ عضو است به هر یک از عددهای ۲ , ۳ , ۴ و ۵ عضوِ عضو مجموعه‌ی A می‌گوییم.

مثال۲۵: زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{۱,۲,...,۱۰\}\}$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$n(A) = ۱ \Rightarrow ۲^n = ۲^۱ = ۲ \qquad A_۱ = \varnothing \qquad A = \{\{۱,۲,...,۱۰\}\}$$

مثال۲۶: زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{۱,\{۲,۳\},۳\}$ به صورت زیر می‌باشد.

$$n = ۳ \qquad ۲^n = ۲^۳ = ۸$$

$$A_۱ = \{۱\} \qquad A_۲ = \{\{۲,۳\}\} \qquad A_۳ = \{۳\} \qquad A_۴ = \{۱,\{۲,۳\}\}$$

$$A_۵ = \{۱,۳\} \qquad A_۶ = \{\{۲,۳\},۳\} \qquad A_۷ = \varnothing \qquad A_۸ = \{۱,\{۲,۳\},۳\}$$

> **حرف‌های زیبا همیشه راست نیستند و حرف‌های راست همیشه زیبا نیستند.**

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

درباره‌ی عددهای حقیقی با چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آشنا شدیم و این اعمال را اعمال دوتایی عددهای حقیقی نامیدیم، حال می‌خواهیم عمل‌هایی را درباره مجموعه‌ها بیان کنیم.

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه‌ی A و B مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که هر عضوش یا متعلق به A یا متعلق به B و یا متعلق به هر دو مجموعه باشد و آن را به صورت $A\cup B$ نمایش می‌دهیم.

مثال۲۷: اجتماع دو مجموعه‌ی $A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ **به صورت زیر است:**

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۹\}$$

مثال۲۸: اجتماع دو مجموعه‌ی

$$A=\{x|x\in N,\ x\le ۴\} \qquad B=\{x|x\in N,\ -۴\le x\le ۳\}$$

به صورت زیر است:

$$A=\{۱,۲,۳,۴\} \qquad B=\{۱,۲,۳\}$$

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴\}$$

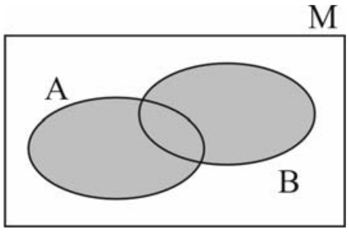
توجه۹: اگر $A\subset B$ در این صورت $A\cup B=B$

توجه۱۰: $A\cup\varnothing=A$ ، $A\cup A=A$ و $A\cup M=M$

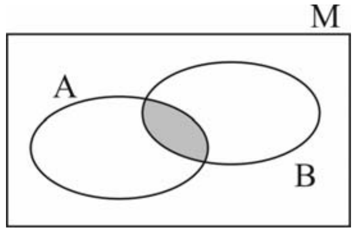
اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه‌ی A وB مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که هم متعلق به A و هم متعلق به B باشد و آن را به صورت $A\cap B$ نمایش می‌دهیم.

مثال۲۹: اشتراک دو مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۵,۷\}$ و $B=\{۲,۴,۶\}$ را به صورت $A\cap B=\{۲\}$ نشان می‌دهیم.

مثال۳۰: در شکل‌های زیر $A\cap B$ و $A\cup B$ سایه زده شده‌است.



$A\cup B$



$A\cap B$

مثال ۳۱: اشتراک دو مجموعه‌ی

$$A=\{۱,۳,۵,۷\} \quad ، \quad B=\{۲,۴,۶\} \quad\Rightarrow\quad A\cap B=\{\ \}=\varnothing$$

توجه۱۱: اگر $A\subset B$ در این صورت $A\cap B=A$

توجه۱۲: $A\cap\varnothing=\varnothing$ ، $A\cap A=A$ ، $A\cap M=A$

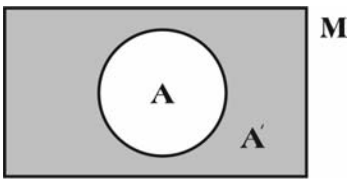
توجه۱۳: $A\subset(A\bigcup B)$ ، $B\subset(A\bigcup B)$ ، $(A\bigcap B)\subset A$ ، $(A\bigcap B)\subset B$ ، $(A\bigcap B)\subset(A\bigcup B)$

دو مجموعه‌ی جدا از هم: دو مجموعه‌ی A و B را جدا از هم گوییم اگر هیچ عضوی مشترکی نداشته باشند. یعنی: $A\bigcap B=\varnothing$.

مثال۳۲: مجموعه‌ی دانش‌آموزان کلاس اول و مجموعه دانش‌آموزان کلاس دوم دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، زیرا هیچ دانش‌آموزی نیست که در هر دو کلاس درس بخواند.

مثال۳۳: مجموعه‌ی اعدا طبیعی زوج و مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، زیرا $E\bigcap O=\varnothing$.

متمم یک مجموعه: اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه و M مجموعه‌ی مرجع مجموعه‌ی A باشد یعنی $A\subset M$ در این صورت همه‌ی عضوهای M که در A نیستند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که متمم مجموعه‌ی A نامیده می‌شود. متمم مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی A' می‌نامیم. [قسمت هاشور خورده A' است.]



$$A'=\{x|x\in M, x\notin A\}=M-A$$

مثال۳۴: اگر $M=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ و $A=\{۲,۴,۶,...\}$ متمم مجموعه‌ی A $A'=\{۱,۳,۵,...\}$ است. $[A\bigcap A'=\varnothing]$

مثال۳۵: اگر $M=\{۲,۵,۷,۹,۱۱\}$ و $A=\{۷,۹\}$ در این صورت $A'=\{۲,۵,۱۱\}$ است.

توجه۱۴: اگر $A\subset M$ در این صورت $A'\subset M$ ، $A\bigcap A'=\varnothing$ ، $A'\bigcap M=A'$ ، $\varnothing'=M$ ، $M'=\varnothing$

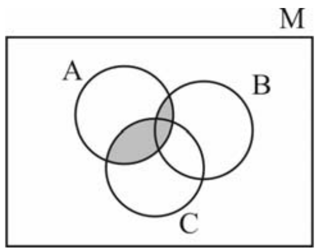
تفاضل دو مجموعه: تفاضل دو مجموعه‌ی A و B را با $A-B$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشد ولی در B نباشد.

$$A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}=A\bigcap B'$$

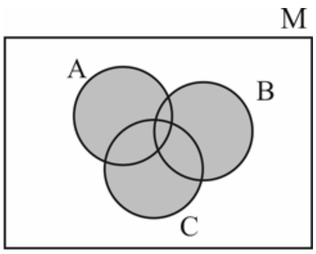
مثال۳۶: اگر $M=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ و $A=\{۱,۳,۵,...\}$ در این صورت $M-A=\{۲,۴,۶,...\}$.

مثال۳۷: $A=\{۱,۴,۹,۱۱\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ در این صورت $B-A=\{۲,۶,۸,۱۰\}$ و $A-B=\{۱,۹,۱۱\}$.

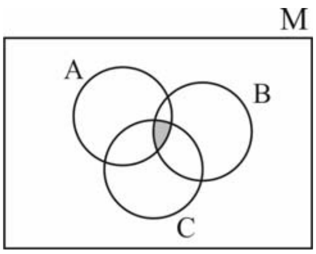
مثال۳۸: نمودار ون $A\bigcap(B\bigcap C)$، $A\bigcup(B\bigcup C)$ و $A\bigcap(B\bigcup C)$ را رسم می‌کنیم.



$A\bigcap(B\bigcap C)$



$A\bigcup(B\bigcup C)$



$A\bigcap(B\bigcup C)$

مجموعه‌ها و احتمال

در زندگی روزمره وقوع یک رویداد را به صورت احتمالی پیش‌بینی می‌کنیم و علاقمندیم درجه‌ی اطمینان به وقوع آن رویداد را معین کنیم. برای تعریف و محاسبه‌ی دقیق احتمال به موارد زیر توجه کنید:

۱– پدیده‌ی قطعی: اگر از کیسه‌ای که دارای ۱۰ مهره‌ی سبز است، یکی را خارج کنیم، قطعاً آن مهره سبز خواهد بود این پدیده که تکرار آن را به نتیجه‌ی یکسانی ختم می‌شود پدیده‌ی قطعی نام دارد.

۲– پدیده تصادفی: اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم، وقتی بر زمین بنشیند یکی از دو حالت رو (H) یا پشت (T) را مشاهده خواهیم کرد. در این پدیده که نمی‌توان وقوع حالتی را از قبل پیش‌بینی کرد پدیده‌ی تصادفی نام دارد.

احتمال: هرگاه در پدیده‌های تصادفی، قاعده و قانونی برای وقوع یک رویداد بیان کنیم که درصد یا شانس وقوع آن را تعیین کند، در واقع احتمال وقوع آن رویداد را محاسبه کرده‌ایم.

مثال ۳۹: احتمال آنکه نوزادی پسر یا دختر باشد $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال ۴۰: با پرتاب یک تاس احتمال آنکه عدد ۳ رو بنشیند $\frac{۱}{۶}$ است.

$$\text{احتمال وقوع رویداد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

اگر احتمال را با P، حالت‌های ممکن را با S (همه‌ی حالت‌ها) و حالت‌های مطلوب را با A نشان دهیم داریم:

$$\left.\begin{array}{ll} n(A) & \text{تعداد حالت‌های مطلوب} \\ n(S) & \text{تعداد حالت‌های ممکن} \\ P(A) & \text{احتمال وقوع رویداد} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۴۱: تاسی را پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه عدد روی آن زوج باشه چقدر است؟

$$\text{حالت‌های ممکن} = S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$$
$$\text{حالت‌های مطلوب} = A = \{۲,۴,۶\} \Rightarrow n(A) = ۳$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

> **توجه ۱۵:** عدد احتمال همواره برابر با بین عدد صفر و عدد ۱ است. بیشترین احتمال که یقین داریم واقع می‌شود عدد ۱ و کمترین احتمال احتمال که حتماً واقع نمی‌شود صفر است.

مثال ۴۲: احتمال آن که ماه اردیبهشت بعد از ماه فروردین باشد یک است و احتمال آنکه ماه اردیبهشت قبل از ماه فروردین باشد صفر است.

> **توجه ۱۶:** مجموع همه‌ی احتمالات یک رویداد مساوی ۱ است.

حالت‌های هم‌شانس: در صورتی که وقوع دو یا چند رویداد مساوی باشد، آن رویدادها، هم شناس هستند. مانند شانس پسر یا دختر شدن یک نوزاد که برای هر کدام احتمال وقوع $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال۴۳: همه‌ی احتمالات پرتای یک تاس را بدست آورد و جمع احتمالات را محاسبه می‌کنیم.

احتمال وقوع عدد ۱ $=p(A_1)=\frac{1}{6}$

احتمال وقوع عدد ۲ $=p(A_2)=\frac{1}{6}$

احتمال وقوع عدد ۳ $=p(A_3)=\frac{1}{6}$

احتمال وقوع عدد ۴ $=p(A_4)=\frac{1}{6}$

احتمال وقوع عدد ۵ $=p(A_5)=\frac{1}{6}$

احتمال وقوع عدد ۶ $=p(A_6)=\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+p(A_4)+p(A_5)+p(A_6)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

توجه۱۷:مجموع احتمال وقوع یک رویداد و عدم وقوع آن رویداد، همواره برابر عدد یک است

(به این نوع پیشامدها مکمل می‌گوییم.) $P(A)+P(A')=1$

مثال۴۴: احتمال وقوع عدد زوج با پرتاب تاس روی زمین و احتمال عدم وقوع عدد زوج را به دست می‌آوریم:

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}\ ,\ A=\{2,4,6\}\ ,\ A'=\{1,3,5\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2} \\ P(A')=\dfrac{n(A')}{n(S)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)+P(A')=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

توجه۱۸: تعداد حالت‌های مورد انتظار در n بار انجام یک کار از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

n بار × احتمال وقوع آن رویداد = تعداد وقوع مورد انتظار در n بار

مثال۴۵: اگر سکه‌ای را ۲۰ بار پرتاب کنیم، انتظار داریم چند بار پشت بیاید با پرتاب سکه تعداد حالت‌های ممکن ۲ خواهد بود

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{2}$ تعداد آمدن پشت $=\dfrac{1}{2}\times 20=\dfrac{20}{2}=10$

مثال۴۶: در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره سفید و ۵ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه مهره‌ای انتخاب می‌کنیم احتمال هر یک از پیشامدهای الف) مهره انتخابی سفید یا قرمز باشد. ب) مهره انتخابی سفید نباشد.

$$n(S)=3+4+5=12$$

الف) $n(A)=4+3=7 \Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{7}{12}$

ب) $n(B)=5+3=8 \Rightarrow P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$

اگر مهره سفید نباشد به این معنی است که قرمز یا سبز است.