

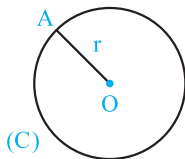
درسنامه ۱

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره

دایره، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی در آن صفحه، مقداری ثابت باشد. نقطه ثابت مرکز دایره و مقدار ثابت شعاع دایره نامیده می‌شود.

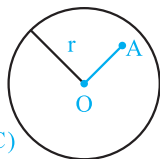
به عبارت دیگر تمام نقاط روی دایره، از مرکز دایره به یک اندازه ثابت که همان شعاع دایره است قرار دارند. معمولاً دایره C به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم.



(C)

اوضاع نسبی نقطه و دایره

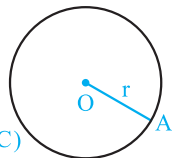
(آ) اگر نقطه A درون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است.



(C)

$$OA < r$$

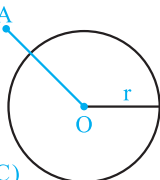
(ب) اگر نقطه A روی دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.



(C)

$$OA = r$$

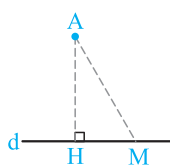
(پ) اگر نقطه A بیرون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره، بیش‌تر از شعاع دایره است.



(C)

$$OA > r$$

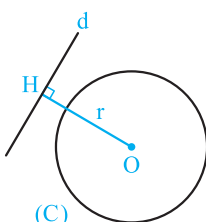
یادآوری: اگر نقطه A غیرواقع بر خط d داده شده باشد و نقطه H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازه پاره خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصله نقطه A از سایر نقاط روی d ، از این مقدار بزرگ‌تر است.



$$AH < AM$$

اوضاع نسبی خط و دایره

(آ) خط d هیچ اشتراکی با دایره $C(O, r)$ ندارد. در این حالت فاصله نقطه O از خط d بیش‌تر از شعاع دایره است.

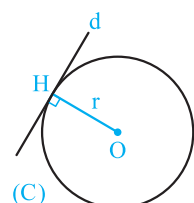


(C)

$$OH > r$$

(ب) خط d با دایره $C(O, r)$ فقط و فقط در یک نقطه اشتراک دارد.

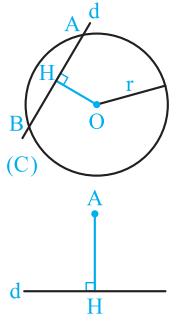
در این حالت فاصله نقطه O از خط d برابر با شعاع دایره است و می‌گویند خط بر دایره مماس است.



(C)

$$OH = r$$

درسنامه ۱



(پ) خط d با دایره $C(O, r)$ در دو نقطه اشتراک دارد. در این حالت خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند.

در این حالت فاصله نقطه O از خط d کم‌تر از شعاع دایره است و گفته می‌شود خط نسبت به دایره قاطع است.

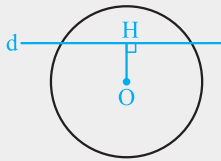
$$OH < r$$

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $d: ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال خط $d: x + 2y + 3 = 0$ و دایره $C(O, 5)$ به مرکز $O(0, 1)$ مفروض می‌باشند. وضعیت خط نسبت به دایره چگونه است؟

پاسخ: با توجه به یادآوری فوق، کافی است فاصله مرکز دایره تا خط d را بیابیم:



$$OH = \frac{|0 + 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

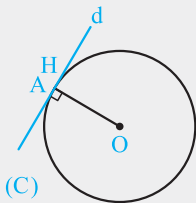
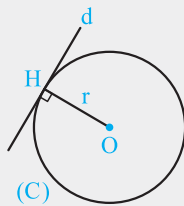
از طرفی شعاع دایره $r = 5$ می‌باشد. بنابراین $OH < r$ و در نتیجه خط و دایره متقاطع‌اند؛ یعنی خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

مثال ثابت کنید:

«یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود باشد.»

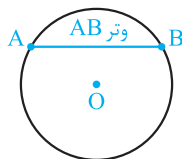
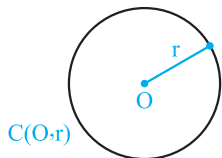
پاسخ: فرض می‌کنیم خط d بر دایره $C(O, r)$ در نقطه A مماس باشد. از نقطه O بر خط d خط عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم، در واقع H نزدیک‌ترین نقطه از خط d به O است. بنابراین نقطه A و H بر هم منطبق‌اند و $OH = R$

برعکس نقطه A را روی دایره در نظر می‌گیریم. شعاع گذرنده از نقطه A را رسم می‌کنیم، سپس خط گذرنده از نقطه A عمود بر OA را رسم می‌کنیم. چون نقطه H از خط d ، کم‌ترین فاصله را از O دارد، بنابراین این خط در نقطه A بر دایره C مماس است.

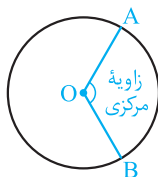
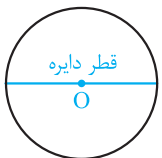


تعاریف و مفاهیم اولیه

(آ) **شعاع دایره:** پاره‌خطی که یک انتهای آن مرکز دایره و انتهای دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است.



(ب) **وتر دایره:** پاره‌خطی که دو نقطه متمایز از دایره را به هم وصل می‌کند. به عبارت دیگر پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.

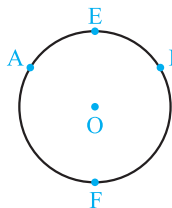


(پ) **قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

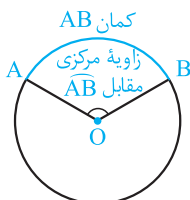
(ت) **زاویه مرکزی:** زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره واقع است.

درسنامه ۱

ث) زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند.



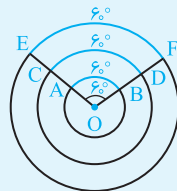
ج) کمان: دو نقطه A و B واقع بر یک دایره، دو کمان \widehat{AB} را روی آن دایره مشخص می‌کنند. در این حالت برای مشخص کردن هر یک از آن‌ها، از نقطه‌ای اختیاری واقع بر هر یک از دو کمان استفاده می‌شود، مانند کمان‌های \widehat{AEB} و \widehat{AFB} در شکل مقابل. معمولاً منظور از \widehat{AB} ، کمان کوچک‌تر است.



چ) اندازه کمان: هر یک از زاویه‌های مرکزی یک کمان از دایره جدا می‌کنند. به آن کمان، کمان نظیر آن زاویه مرکزی گفته می‌شود. اندازه کمان نظیر هر زاویه مرکزی، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود که واحد آن درجه است.

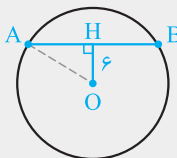
نکته

کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.



مثال دایره $C(O, 10)$ داده شده است. اگر فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۶ باشد، طول وتر AB را به دست آورید.

پاسخ: در مثلث OHA از رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم:



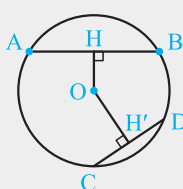
$$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + AH^2 \Rightarrow AH^2 = 64 \Rightarrow AH = 8$$

$$AB = 2AH = 16$$

مثال

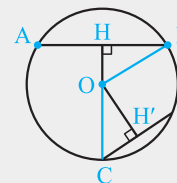
در دایره $C(O, R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و فقط اگر $OH < OH'$ و OH' فاصله O از دو وتر AB و CD هستند.

پاسخ:



فرض : $AB > CD$
حکم : $OH < OH'$

از O به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویه OHB و OH'C تشکیل شوند. با به کار بردن قضیه فیثاغورس برای این دو مثلث داریم:



$$\begin{cases} \Delta OHB : OB^2 = OH^2 + HB^2 \\ \Delta OH'C : OC^2 = OH'^2 + H'C^2 \end{cases} \xrightarrow{OB=OC=R} OH^2 + HB^2 = OH'^2 + H'C^2 \quad (1)$$

$$\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{AB > CD \Rightarrow HB > H'C} OH'^2 > OH^2 \Rightarrow OH' > OH$$

اثبات عکس قضیه:

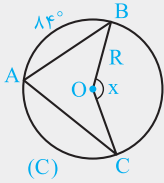
فرض : $OH < OH'$
حکم : $AB > CD$

تمامی مراحل بالا را تکرار کرده تا به رابطه (۱) برسیم. سپس استدلال می‌کنیم:

طبق فرض : $OH < OH' \Rightarrow BH > CH' \Rightarrow AB > CD$

درسنامه ۱

مثال



در دایره $C(O, R)$ مطابق شکل روبه‌رو:

(آ) اگر $\widehat{AC} = 12^\circ$ ، آن‌گاه زاویه \widehat{BOC} را بیابید.

(ب) اگر $x = 145^\circ$ ، آن‌گاه اندازه کمان AC را به دست آورید.

پاسخ: (آ)

$$\widehat{BC} = 36^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{AC}) = 36^\circ - (14^\circ + 12^\circ) = 10^\circ$$

x زاویه مرکزی است، بنابراین:

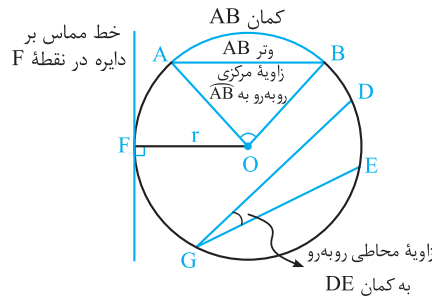
$$x = \widehat{BC} = 10^\circ$$

(ب)

$$x = 145^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 145^\circ$$

$$\widehat{AC} = 36^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{BC}) = 36^\circ - (14^\circ + 145^\circ) = -123^\circ$$

نمای کلی از مطالب مطرح‌شده:

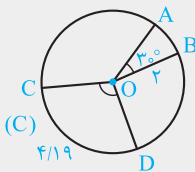


رابطه اندازه کمان AB با طول کمان AB

محیط دایره، یک کمان به اندازه 36° است. بنابراین داریم:

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{36^\circ}$$

مثال



در شکل روبه‌رو طول کمان AB و اندازه کمان CD را به دست آورید. ($\pi \approx 3/14$)

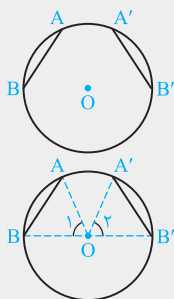
پاسخ: طبق فرمول برای طول و اندازه کمان، ابتدا محیط دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$C \text{ محیط دایره } = 2\pi r = 2 \times 3/14 \times 2 = 12/56$$

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{36^\circ} \Rightarrow \frac{\text{طول AB}}{12/56} = \frac{30^\circ}{36^\circ} \Rightarrow \text{طول AB} \approx 1/046$$

$$\frac{\text{طول کمان CD}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان CD}}{36^\circ} \Rightarrow \frac{4/19}{12/56} = \frac{\widehat{CD}}{36^\circ} \Rightarrow \widehat{CD} \approx 12^\circ$$

مثال



ثابت کنید اندازه دو کمان از یک دایره با هم برابرند اگر و تنها اگر وترهای نظیر آن‌ها برابر باشند. به طور مثال در شکل روبه‌رو کمان‌های AB و $A'B'$ برابرند اگر و فقط اگر وترهای AB و $A'B'$ برابر باشند. (مشابه نهایی- شهریور ۹۵)

پاسخ:

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$

حکم: $AB = A'B'$

۱ درسامه

از O به نقاط A, A', B و B' وصل می‌کنیم. تا دو مثلث OAB و OA'B' تشکیل شوند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} R = OA = OA' \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \text{ (زوایای مرکزی روبه‌روی کمان‌های برابر AB و A'B')} \\ R = OB = OB' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \Delta OAB \cong \Delta OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

اثبات عکس:

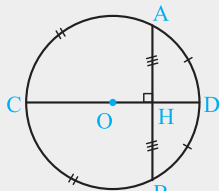
فرض: $AB = A'B'$

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$

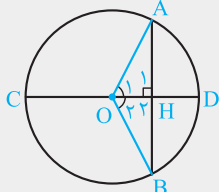
$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \text{ (فرض)} \\ R = OB = OB' \\ R = OA = OA' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \Delta OAB \cong \Delta OA'B' \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$

O_1 و O_2 زوایای مرکزی‌اند، بنابراین:



ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



فرض: $CD = 2R$, $CD \perp AB$

حکم: $AH = BH$, $\widehat{AD} = \widehat{BD}$, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$

پاسخ:

از نقطه O به سر پاره‌خط AB وصل می‌کنیم تا مثلث‌های OAH و OBH پدید آیند.

$$\left. \begin{array}{l} R = OA = OB \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ OH = OH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \Delta OAH \cong \Delta OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2, AH = BH$$

\widehat{O}_1 و \widehat{O}_2 زوایای مرکزی روبه‌روی کمان‌های AD و BD هستند پس $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ (۱)

چون CD قطر است، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. یعنی:

$$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} \widehat{DAC} - \widehat{AD} = \widehat{DBC} - \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

(سعی کنید با استفاده از خواص مثلث متساوی‌الساقین در مثلث AOB، اثبات دیگری ارائه دهید.)

۱. خط $d: 2\sqrt{2}x + y + c = 0$ و دایره C به شعاع ۳ و مرکز $O(0,4)$ مفروض است. مقادیر c را در حالتی که خط و دایره بر هم مماس‌اند، بیابید.

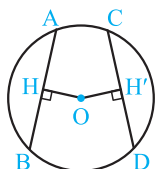
۲. ثابت کنید اگر دو وتر AB و AC از یک دایره برابر باشند، آنگاه قطر گذرنده از A نیمساز زاویه BAC می‌باشد و کمان نظیر این زاویه را نصف می‌کند.

۳. در دایره $C(O, R)$ و $AB = 8$ و فاصله مرکز از وتر AB برابر $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ است. اندازه کمان \widehat{AB} را به دست آورید.

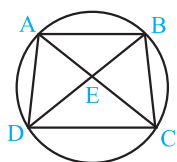
۴. نشان دهید در هر دایره، قطری که وتر را نصف می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

۵. نشان دهید در هر دایره، اگر قطری کمان نظیر یک وتر را نصف کند، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.

۶. ثابت کنید کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه درون دایره، وتری است که بر قطر گذرنده از این نقطه عمود باشد. سپس طول این وتر را بر اساس شعاع دایره و فاصله مرکز از وتر بیابید.



۷. در دایره مقابل نشان دهید $AB = CD$ اگر و فقط اگر $OH = OH'$ و OH' فاصله O از دو وتر AB و CD هستند.



(نهایی- دی ۸۲)

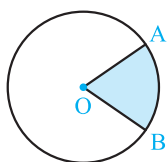
۸. با توجه به شکل نشان دهید:

(ا) اگر $AD = BC$ ، آن‌گاه $AC = BD$

(ب) اگر $AC = BD$ ، آن‌گاه $AD = BC$

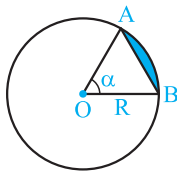
۹. مکان هندسی مرکز تمامی دایره‌هایی را که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر خط مفروض d مماس‌اند، به‌دست آورید.

۱۰. دو خط L و d در نقطه O متقاطع‌اند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی خط d و شعاع آن ۳ سانتی‌متر بوده بر خط L مماس باشد.



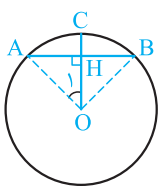
۱۱. قطاع دایره به ناحیه‌ای از درون و روی دایره می‌گویند که به وسیله دو شعاع از دایره محدود شده است. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه برابر α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر

$$L = \frac{\pi R}{180} \alpha \quad \text{و} \quad S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad \text{با} \quad \alpha \text{ برابر برابری است.}$$



۱۲. مطابق شکل مقابل ناحیه رنگی محدود به دایره و وتر AB را قطعه‌ای از دایره می‌نامند. اگر شعاع دایره R باشد و زاویه مرکزی \widehat{AOB} برابر α باشد، مساحت این قطعه را بر حسب α و R به‌دست آورید.

پاسخ‌هاک تشریحی

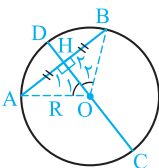


۳. اندازه OH داده مسئله است که روی قطر عمود بر وتر AB است که وتر و کمان روبه‌روی آن را نصف می‌کند. بنابراین:

$$AH = \frac{1}{2} AB = 4, \quad OH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

طبق روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:

$$\tan \widehat{O}_1 = \frac{AH}{OH} = \frac{4}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{AB} = 120^\circ$$



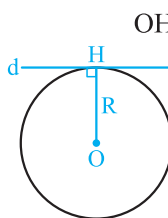
۴. پاره‌خط‌های OA و OB را رسم می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ AH = BH \text{ (فرض)} \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle OAH \cong \triangle OBH$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2, \quad \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

$$\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AB \quad \text{اما داریم:}$$

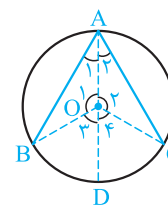
$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD}, \quad \widehat{AC} = \widehat{BC} \quad \text{هم‌چنین:}$$



۱. در صورتی خط بر دایره مماس می‌شود که $OH = R$

$$\frac{|0 + 4 + c|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow |4 + c| = 9$$

$$\begin{cases} 4 + c = 9 \\ 4 + c = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 5 \\ c = -13 \end{cases}$$



۲. شعاع‌های OB و OC را رسم می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \text{ (فرض)} \\ OA = OA \\ OB = OC \text{ (شعاع)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \triangle AOB \cong \triangle AOC$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2, \quad \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

از طرفی:

$$\widehat{O}_3 + \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 + \widehat{O}_4 = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2} \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$$

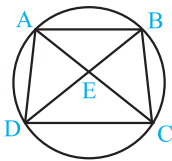
چون \widehat{BD} و \widehat{CD} به ترتیب کمان‌های مقابل به زوایای مرکزی O_3 و O_4 هستند. بنابراین: $\widehat{BD} = \widehat{CD}$

اثبات عکس: $OH = OH'$ فرض:

حکم: $AB = CD$

$$\left. \begin{array}{l} R = OA = OC \\ OH = OH' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AOH \cong \triangle COH'$$

$$\Rightarrow AH = CH' \xrightarrow{\times 2} AB = CD$$



فرض: $AD = BC$

حکم: $AC = BD$

(۸) آ

طبق قضیه‌ای داشتیم که در هر دایره، وترهای نظیر کمان‌های مساوی، برابرند و بر عکس، پس:

$$AD = BC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} &= \widehat{AB} + \widehat{BC} \\ \widehat{BAD} &= \widehat{AB} + \widehat{AD} \end{aligned} \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} \widehat{ABC} = \widehat{BAD} \Rightarrow AC = BD$$

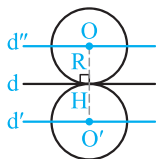
(ب)

فرض: $AC = BD$

حکم: $AD = BC$

$$AC = BD \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BAD} \quad (\text{طبق فرض})$$

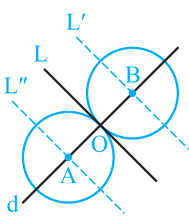
$$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AB} + \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} \Rightarrow BC = AD$$



خط مفروض d را در نظر می‌گیریم.

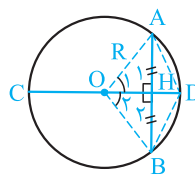
چون شعاعی از دایره که از نقطه تماس می‌گذرد بر خط مماس عمود است، اگر O مرکز دایره‌ای به شعاع R باشد که بر خط d مماس است یعنی $OH \perp d$ ، این بدان معنی است که فاصله نقطه O از خط d برابر R است.

پس فاصله تمامی مرکز دایره‌هایی با ویژگی خواسته شده از خط d برابر R می‌باشد که این مراکز روی خطوط d' و d'' که موازی خط d بوده و دو طرف آن واقع‌اند، قرار دارند.



(۱۰) با توجه به تمرین قبیل مراکز همه دایره‌هایی که به شعاع ۳ سانتی‌متر و مماس بر خط L اند، دو خط موازی می‌باشد که در دو طرف خط L و به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن قرار دارند (خطوط L' و L''). نقطه تقاطع این خطوط با خط d، مرکز دایره مورد نظر است. (نقاط A و B)

(ب و



فرض کنیم قطر CD

کمان ADB را در نقطه D نصف کرده باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\widehat{AD} = \widehat{BD}$$

بنابراین اگر OA و OB را رسم کنیم، زوایای مرکزی O_1 و O_2 برابرند.

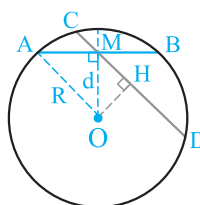
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \\ OD = OD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضض)}} \triangle OAD \cong \triangle OBD$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBD} \Rightarrow \frac{AH \times OD}{2} = \frac{BH \times OD}{2}$$

$$\Rightarrow AH = BH \quad (۱)$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \text{ (شعاع)} \\ AH = BH \text{ (۱)} \\ OH = OH \text{ (مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$$

$$\xrightarrow{\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 180^\circ} \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ$$



وتر AB گذرنده از M و عمود

بر قطر گذرنده از M را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم به ازای هر وتر دیگر گذرنده از نقطه M، وتر AB کوچک‌تر است.

وتر دلخواه CD را در نظر می‌گیریم که از نقطه M می‌گذرد. در مثلث قائم‌الزاویه OHM، وتر است بنابراین $OH < OM$. طبق یک تمرین داریم هر چه فاصله یک وتر از مرکز دایره کم‌تر باشد، طول آن بزرگ‌تر است. بنابراین:

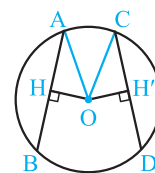
اگر $OM = d$ و شعاع دایره $OA = R$ باشند، داریم:

$$\triangle OAM: \widehat{M} = 90^\circ \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} OA^2 = OM^2 + AM^2$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{R^2 - d^2}$$

اما $AB = 2AM$ در نتیجه:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$$



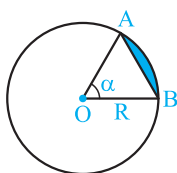
فرض: $AB = CD$

حکم: $OH = OH'$

از مرکز دایره (نقطه O) به نقاط A و C وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویه AOH و COH' تشکیل شوند.

$$\left. \begin{array}{l} AH = CH' \text{ (شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند).} \\ R = OA = OC \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AOH \cong \triangle COH' \Rightarrow OH = OH'$$

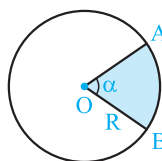


(مساحت AOB) - (مساحت قطاع AOB) = مساحت قطعه

دستور سینوس برای محاسبه مساحت مثلث
 $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin \alpha \rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$

$$= \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

۱۲



۱۱ $\widehat{AOB} = \widehat{AB} = \alpha$ (زاویه مرکزی)

طبق رابطه طول و اندازه کمان داریم:

$$\frac{\widehat{AB} \text{ کمان}}{360^\circ} = \frac{AB \text{ کمان}}{\text{محیط دایره}}$$

اگر طول کمان AB را برابر L در نظر بگیریم:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{2\pi R}{360^\circ} \alpha = \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha$$

مساحت کل دایره برابر πR^2 است، بنابراین مساحت یک قطاع برابر است با مساحت دایره ضرب در نسبت زاویه‌ای که در بر دارد به کل دایره که 360° درجه می‌باشد. بنابراین:

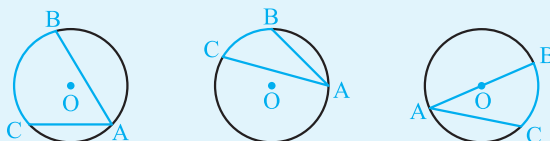
$$S = \pi R^2 \times \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

درسنامه ۲

زوایای محاطی و ظلی

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی، برابر نصف کمان روبه‌روی آن است. یعنی در هر سه حالت زیر داریم:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



اثبات: این قضیه را در سه حالت زیر اثبات می‌کنیم:

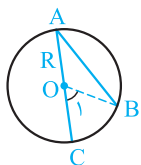
حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی، قطری از دایره باشد.

از O به B وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الساقین OAB (OB = OA) ایجاد شود. بنابراین:

$$\widehat{O_1} = \widehat{A} + \widehat{B} \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{O_1} = 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{O_1}}{2} \quad (1)$$

از طرفی $\widehat{O_1}$ زاویه مرکزی است، یعنی:

طبق (۱) و (۲) داریم:



$$\widehat{O_1} = \widehat{BC} \quad (2)$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز دایره باشد.

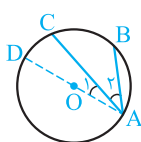
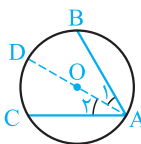
ابتدا مطابق شکل قطری از دایره را که از رأس A می‌گذرد، رسم می‌کنیم. با توجه به حالت اول داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A_1} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{A_2} &= \frac{\widehat{DC}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع شده باشند.

قطر AD را رسم می‌کنیم. طبق حالت اول داریم:



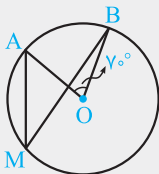
$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{A_1} &= \frac{\widehat{CD}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل طرفین}} \widehat{A} - \widehat{A_1} = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{A_2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

۲ در سنامه

مثال

در دایره مقابل به مرکز O، اندازه زاویه مرکزی AOB برابر ۷۰° است. اندازه زاویه محاطی \widehat{AMB} چقدر است؟



$$\widehat{AB} = 70^\circ$$

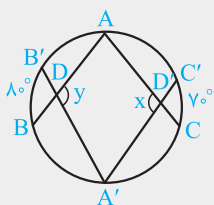
$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

پاسخ: اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبه‌رویش برابر است، بنابراین:

در نتیجه:

مثال

در شکل مقابل مقدار $x + y$ را به دست آورید.



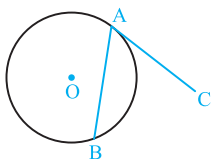
پاسخ: با یافتن مقدار $\widehat{A} + \widehat{A}'$ ، مقدار $x + y$ مشخص می‌شود. چون مجموع زوایای چهارضلعی ADA'D' برابر ۳۶۰° است. بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \frac{\widehat{BA'C}}{2} \text{ (زاویه محاطی)} \\ \widehat{A}' &= \frac{\widehat{B'AC'}}{2} \text{ (زاویه محاطی)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین تساوی}} \widehat{A} + \widehat{A}' = \frac{\widehat{BA'C} + \widehat{B'AC'}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BA'C} + \widehat{B'AC'} = 360^\circ - (\widehat{BB'} + \widehat{CC'}) = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

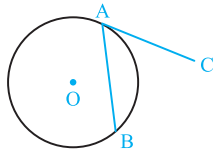
$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{A}' = \frac{210^\circ}{2} = 105^\circ \Rightarrow x + y = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{A}') = 360^\circ - 105^\circ = 255^\circ$$

زاویه ظلی



زاویه ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره می‌باشد. یکی از اضلاع آن وتر از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. مانند \widehat{CAB} در شکل مقابل:

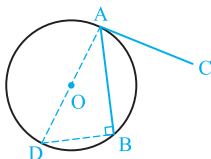
$$\widehat{CAB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ قضیه: اندازه هر زاویه ظلی، برابر نصف کمان روبه‌روی آن است، یعنی در شکل مقابل:}$$



اثبات: \widehat{CAB} زاویه ظلی است: فرض

$$\text{حکم: } \widehat{CAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

قطر AD را رسم می‌کنیم:



سپس از D به B وصل می‌کنیم. B زاویه محاطی مقابل به قطر است. در نتیجه $\widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 90^\circ$

بنابراین:

$$\widehat{ADB} + \widehat{DAB} = 90^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ \quad (2)$$

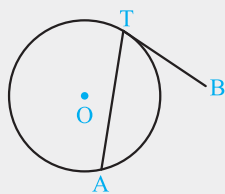
$$\widehat{BAC} = \widehat{ADB}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ADB} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ (زاویه محاطی)} \\ \widehat{BAC} &= \widehat{ADB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

چون خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره (OA) عمود است، پس:

از (۱) و (۲) داریم:

۲ درسنامه



مثال: اگر اندازه زاویه ظلی ATB برابر $(2\alpha - 6)^\circ$ و اندازه کمان \widehat{AT} برابر $(3\alpha + 33)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه ATB را به دست آورید. (نهایی - شهریور ۹۴)

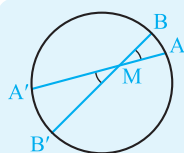
$$\widehat{ATB} = \frac{\widehat{AT}}{2}$$

پاسخ: چون اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان مقابل آن است، داریم:

$$2\alpha - 6 = \frac{3\alpha + 33}{2} \Rightarrow 4\alpha - 12 = 3\alpha + 33 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

طبق فرض $\widehat{AT} = (3\alpha + 33)^\circ$ و $\widehat{ATB} = (2\alpha - 6)^\circ$ ، بنابراین:

$$\Rightarrow \widehat{ATB} = (2 \times 45 - 6) = 84^\circ$$

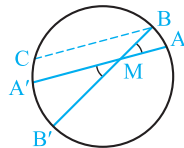


قضیه:

اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی از دایره است که به اضلاع و امتداد اضلاع آن زاویه محدودند یعنی در شکل مقابل داریم:

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

اثبات:



AA' و BB' دو وتر متقاطع از دایره: فرض

$$\text{حکم: } \widehat{AMB} = \widehat{A'MB'} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

از نقطه B خطی موازی با وتر AA' رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه C قطع کند.

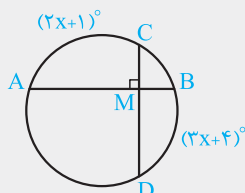
$$BC \parallel AA' \xrightarrow{\text{مورب } BB'} \widehat{AMB} = \widehat{CBB'}$$

$$\widehat{CBB'} = \frac{\widehat{CB'}}{2} = \frac{\widehat{CA'} + \widehat{A'B'}}{2}$$

$\widehat{CBB'}$ یک زاویه محاطی است. بنابراین:

در یکی از تمرینات همین درسنامه، ثابت کردیم که کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند، یعنی $BC \parallel AA' \Rightarrow \widehat{CA'} = \widehat{BA}$ ، در نتیجه:

$$\widehat{CBB'} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2}$$

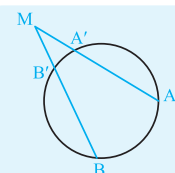


(نهایی - دی ۹۰)

مثال: مقدار x را در شکل مقابل به دست آورید.

$$\widehat{CMA} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \xrightarrow{\widehat{CMA} = 90^\circ} 90^\circ = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \Rightarrow \frac{(2x+1)^\circ + (3x+4)^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow 5x + 5 = 180 \Rightarrow x = 35^\circ$$

پاسخ:



قضیه: اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر نصف تفاضل اندازه کمان‌هایی

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$

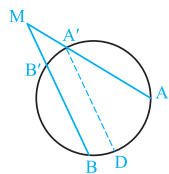
از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند، یعنی در شکل مقابل داریم:

اثبات:

M نقطه تقاطع امتداد دو وتر AA' و BB' بیرون از دایره: فرض

$$\text{حکم: } \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$

۲ درسنامه



از نقطه A' خطی موازی با وتر BB' رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌ای مانند D قطع کند.
 $A'D \parallel BB' \xrightarrow{\text{مورب } AM} \widehat{AMB} = \widehat{AA'D}$
 زاویه $AA'D$ محاطی است. بنابراین:

$$\widehat{AA'D} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{BD}}{2}$$

اما در یکی از تمرینات همین درسنامه نشان می‌دهیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند. پس: $A'D \parallel B'B \Rightarrow \widehat{A'B'} = \widehat{BD}$ در نتیجه:

$$\widehat{A'B'} = \widehat{BD} = \widehat{AA'D} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$$

مثال

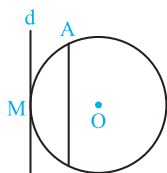
مقادیر x و y را در شکل روبه‌رو تعیین کنید. (مشابه نهایی- دی ۹۲)

پاسخ:

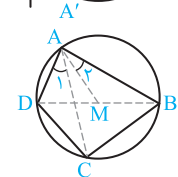
$$\widehat{ADB} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70^\circ = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140^\circ, \widehat{M} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 40^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 80^\circ$$

$$\begin{cases} x+y = 140^\circ \\ x-y = 80^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 110^\circ, y = 30^\circ$$

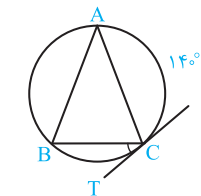
۱۳. با استفاده از تعریف زاویه محاطی، نشان دهید، مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. (نهایی- دی ۹۵)



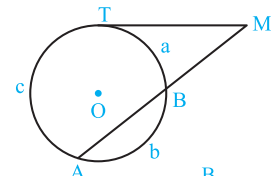
۱۴. خط d در نقطه M بر دایره $C(O, R)$ مماس است. وتر AA' از دایره را موازی با d رسم می‌کنیم. ثابت کنید $\widehat{AM} = \widehat{A'M}$ (نهایی- شهریور ۹۳)



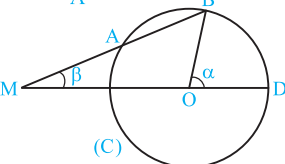
۱۵. در شکل مقابل $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. ثابت کنید $AD \cdot BC = AC \cdot DM$.



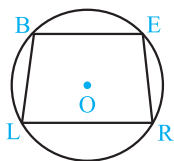
۱۶. در شکل روبه‌رو، $AB = AC$ ، مماس بر دایره در نقطه C و $\widehat{AC} = 140^\circ$ است. اندازه زاویه BCT را بیابید. (نهایی- فرورداد ۹۶)



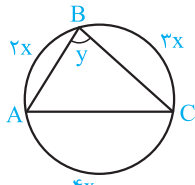
۱۷. خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB ، در نقطه M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB} = a$ ، $\widehat{BA} = b$ و $\widehat{AT} = c$ و $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ اندازه زاویه M را تعیین کنید. (نهایی- فرورداد ۹۴)



۱۸. دایره $C(O, R)$ مفروض است. در شکل مقابل اگر داشته باشیم $MA = R$ ، نشان دهید $\alpha = 3\beta$.

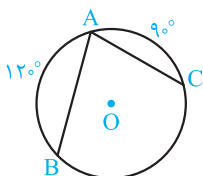


۱۹. در دایره به مرکز O ، $BL = ER$ ، نشان دهید $BE \parallel LR$ (مشابه نهایی- فرورداد ۸۸ و شهریور ۹۲)

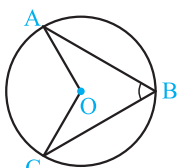


۲۰. در شکل مقابل اندازه x و y را به دست آورید. (نهایی- دی ۹۳)

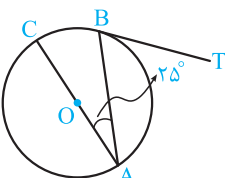
۲۱. زاویه محاطی BAC در دایره ای به مرکز O داده شده است. اگر $\widehat{AB} = 12^\circ$ و $\widehat{AC} = 9^\circ$ ، اندازه زاویه BAC را بیابید.



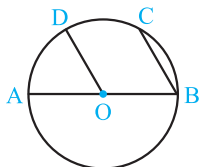
۲۲. در دایره به مرکز O ، اگر $\widehat{AOC} = (3\alpha + 12)^\circ$ و $\widehat{ABC} = (\alpha + 16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه های مرکزی AOC و محاطی ABC را تعیین کنید. (نهایی- فرورداد ۹۵)



۲۳. در شکل مقابل، اندازه زاویه ظلّی ABT را به دست آورید (AC قطر دایره است). (نهایی- فرورداد ۸۲)

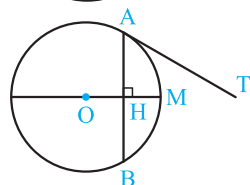


۲۴. در دایره به مرکز O و قطر AB ، داریم $OD \parallel BC$ ، ثابت کنید $\widehat{CD} = \widehat{AD}$

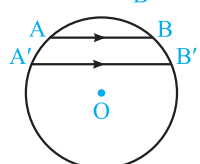


۲۵. زاویه ظلّی TAB در دایره $C(O, R)$ داده شده است. با استفاده از «ویژگی قطر عمود بر وتر» ثابت کنید

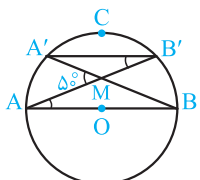
$$\widehat{TAB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



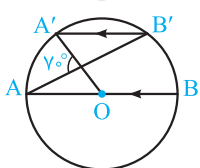
۲۶. (آ) در شکل روبه رو وترهای AB و $A'B'$ موازی اند. نشان دهید کمان های $\widehat{AA'}$ و $\widehat{BB'}$ برابر هستند.
(ب) عکس قسمت «آ» را بنویسید و در صورت درستی ثابت کنید.



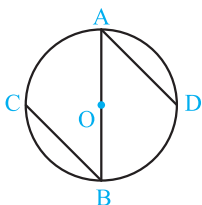
۲۷. در شکل مقابل O مرکز دایره است و $AB \parallel A'B'$. اندازه کمان $A'CB'$ را به دست آورید.



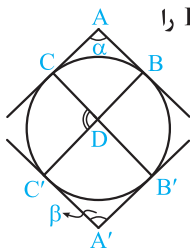
۲۸. در شکل روبه رو O مرکز دایره است. اگر $AB \parallel A'B'$ باشد، اندازه کمان های $A'B'$ و AA' را بیابید.



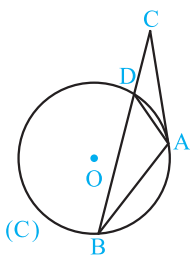
۲۹. در شکل روبه‌رو AB قطری از دایره است و $AD \parallel BC$. ثابت کنید $AD = BC$.



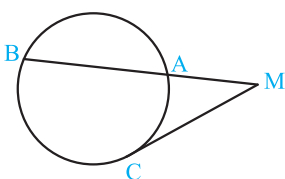
۳۰. در شکل روبه‌رو اضلاع زاویه‌های A و A' بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه مشخص شده D را بر حسب α و β به دست آورید.



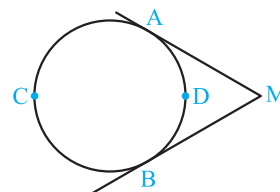
۳۱. در دایره $C(O \cdot R)$ مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC ، متساوی‌الساقین است. (نهایی - فرداد ۹۱)



۳۲. در شکل‌های زیر ثابت کنید:

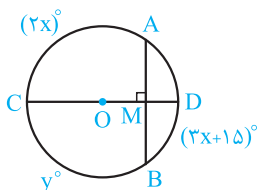


$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2} \quad (\text{ب})$$



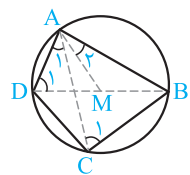
$$\widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{ا})$$

۳۳. در شکل مقابل قطر CD در نقطه M بر وتر AB عمود است. اگر $AC = (2x)^\circ$ و $BC = y^\circ$ و $\widehat{BD} = (3x + 15)^\circ$ ، آن‌گاه x و y را محاسبه کنید. (نهایی - شهریور ۹۵)



پاسخ‌های تشریحی

۱۵. با توجه به شکل داریم:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad (\text{زاویه محاطی}) \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{DAM} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(ز)}} \triangle ABC \sim \triangle AMD$$

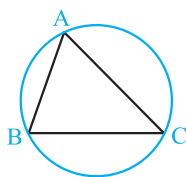
$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DM} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DM$$

۱۶. برای به دست آوردن زاویه BCT ، کافی است اندازه کمان BC را به دست آوریم.

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \xrightarrow{\widehat{AC} = 140^\circ} \widehat{AB} = \widehat{AC} = 140^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 360^\circ - (\widehat{AB} + \widehat{AC}) = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$$

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \quad (\text{ظلی})$$



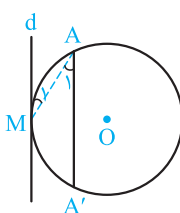
۱۳. مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم.

می‌دانیم از هر سه نقطه دلخواه که روی یک خط قرار نداشته باشند، یک دایره می‌گذرد، پس دایره‌ای را که از رئوس این مثلث می‌گذرد رسم می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad (\text{محاطی}) \\ \widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad (\text{محاطی}) \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad (\text{محاطی}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AC} + \widehat{AB}}{2}$$

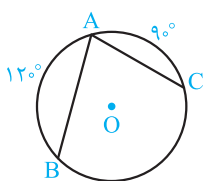
$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

۱۴. از نقطه M به نقطه A وصل می‌کنیم. داریم:



$$d \parallel AA' \xrightarrow{\text{مورب } AM} \widehat{A}_1 = \widehat{M}_1$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{A'M}}{2} = \frac{\widehat{AM}}{2} \Rightarrow \widehat{A'M} = \widehat{AM}$$



$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ (زاویهٔ محاطی)}$$

$$\widehat{BC} = 360 - (\widehat{AB} + \widehat{AC}) = 360 - (120 + 90) = 150$$

$$\widehat{BAC} = \frac{150}{2} = 75$$

۲۱

۱۷ طبق تناسب a, b, c داریم:

$$\begin{aligned} b &= 4a \\ c &= 5a \end{aligned} \quad (1)$$

$$a + b + c = 360 \xrightarrow{(1)} a + 4a + 5a = 360$$

$$\Rightarrow 10a = 360 \Rightarrow a = 36 \Rightarrow c = 180$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{TA} - \widehat{TB}}{2} = \frac{c - a}{2} = \frac{180 - 36}{2} = \frac{144}{2} = 72$$

بنابراین:

۲۲

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ABC} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 2\widehat{ABC} = \widehat{AC} \\ \widehat{AOC} &= \widehat{AC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\widehat{ABC} = \widehat{AOC}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} 2(\alpha + 16) = 3\alpha + 12 \Rightarrow \alpha = 20$$

$$\widehat{AOC} = 72, \widehat{ABC} = 36$$

بنابراین:

۲۳

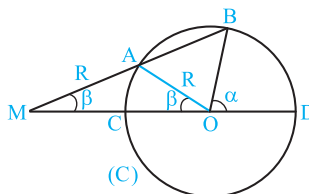
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \xrightarrow{\widehat{A}=25} \widehat{BC} = 50$$

$$CA \text{ قطر است} \Rightarrow \widehat{ABC} = 180$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 180 - \widehat{BC} = 180 - 50 = 130$$

$$\widehat{ABT} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{130}{2} = 65 \text{ (ظلی)}$$

۱۸ از نقطه A به O وصل می‌کنیم:



طبق فرض $OA = MA = R$. بنابراین مثلث MAO متساوی‌الساقین

است، پس $\widehat{AOM} = \widehat{M} = \beta$

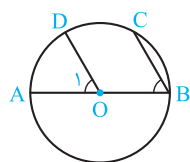
$$\widehat{AOM} = \widehat{AC} = \beta \text{ (مرکزی)} \quad (1)$$

$$\widehat{BOD} = \widehat{BD} = \alpha \text{ (مرکزی)} \quad (2)$$

از طرفی:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \xrightarrow{\text{طبق روابط (1) و (2)}} \beta = \frac{\alpha - \beta}{2} \Rightarrow \alpha = 3\beta$$

۲۴



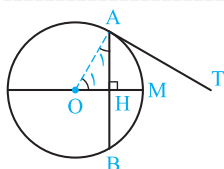
$$\left. \begin{aligned} OD \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } AB} \widehat{O_1} &= \widehat{B} \\ \widehat{O_1} &= \widehat{AD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{AD} \quad (1) \text{ پ}$$

از طرفی \widehat{B} زاویهٔ محاطی است یعنی:

$$B = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} \xrightarrow{\text{طبق (1)}} \widehat{AD} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CD}$$

۲۵

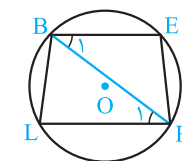
از نقطه O به A وصل می‌کنیم.



$$\left. \begin{aligned} \widehat{O_1} &= \widehat{AM} \text{ (مرکزی)} \\ \widehat{AM} &= \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ (قطر عمود بر وتر)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{O_1} = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad (1)$$

۱۹ از نقطه R به B وصل می‌کنیم. داریم:

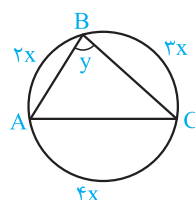
$$ER = BL \Rightarrow \widehat{ER} = \widehat{BL} \quad (1)$$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{B_1} &= \frac{\widehat{ER}}{2} \text{ (محاطی)} \\ \widehat{R_1} &= \frac{\widehat{BL}}{2} \text{ (محاطی)} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{طبق (1)}} \widehat{B_1} = \widehat{R_1}$$

با توجه به عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب $BE \parallel LR$

۲۰ (مجموع کمان‌های روی دایره)



$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360$$

$$\Rightarrow 2x + 3x + 4x = 360$$

$$9x = 360 \Rightarrow x = 40$$

$$\widehat{AC} = \frac{160}{2} = 80 \text{ (محاطی)} \quad y = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{160}{2} = 80$$