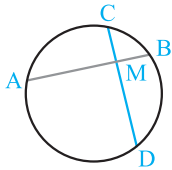


قسمت دوم

فصل

۱

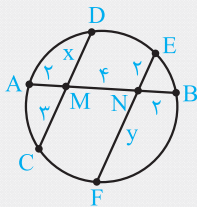
رابطه‌های طولی در دایره



آ) وترهای متقاطع: اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل ضرب پاره‌های یکی با حاصل ضرب پاره‌های دیگری برابر است.

حکم: $MA \times MB = MC \times MD$

مثال



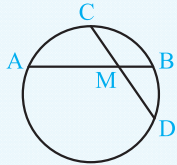
در شکل مقابل مقادیر x و y را محاسبه کنید.

پاسخ: بنابه رابطه طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA \times MB = MD \times MC \Rightarrow 2 \times (4 + 2) = x \times 3 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

$$NA \times NB = NF \times NE \Rightarrow (2 + 4) \times 2 = y \times 2 \Rightarrow y = \frac{12}{2} = 6$$

تست



متطابق شکل طول وتر AB در دایره (O, R) ، $CD = 10$ سانتی متر می‌باشد. این وتر، وتر CD را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کرده است. اگر $CD = 10$ سانتی متر باشد، آن‌گاه تفاضل طول پاره‌های MA و MB کدام است؟
(مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

- ۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۹

پاسخ: بنابه فرض، وتر CD به نسبت ۲ به ۳ تقسیم شده است. پس می‌توانیم فرض کنیم $MC = 2k$ و $MD = 3k$ و داریم:

$$CD = 10 \Rightarrow 2k + 3k = 10 \Rightarrow 5k = 10 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \begin{cases} MC = 4 \\ MD = 6 \end{cases}$$

$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow[\begin{matrix} MA=14-x \\ MB=x \end{matrix}]{\text{}} (14-x) \times x = 4 \times 6 \Rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-12) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 12$$

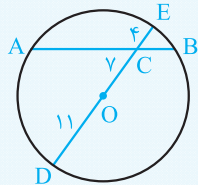
بنابراین با فرض $MA > MB$ نتیجه می‌شود $MA = 12$ و $MB = 2$ و تفاضل این دو مقدار برابر ۱۰ است. پس گزینه (۱) درست است.

تست

وتری به طول ۱۸ در یک دایره به شعاع ۱۱ مفروض است. نقطه‌ای روی این وتر، از مرکز دایره به فاصله ۷ می‌باشد. این نقطه، وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: بنابه فرض $AB = 18$ ، $OC = 7$ و $OE = OD = 11$ ، پس $CE = 4$. فرض کنیم $BC = x$ بنابراین داریم:



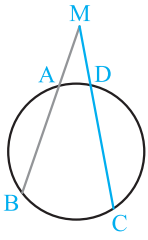
$$AC \cdot BC = CD \cdot CE \Rightarrow (18 - x)x = (11 + 7) \times 4 \Rightarrow x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x - 12) = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ یا } x = 12$$

و با فرض $AC > BC$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{18 - x}{x} = \frac{18 - 6}{6} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

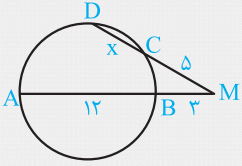
(ب) رابطه طولی وترهایی با امتداد متقاطع: اگر امتداد دو وتر AB و CD در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA \cdot MB = MD \cdot MC$



حکم : $MA \times MB = MD \times MC$

مثال

با توجه به شکل مقابل مقدار x را بیابید.

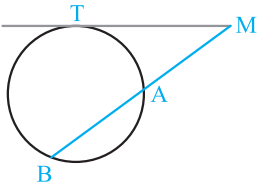


$$MB \times MA = MC \times MD \Rightarrow 3 \times (3 + 12) = 5 \times (5 + x) \Rightarrow 3 \times 15 = 5 \times (5 + x)$$

پاسخ :

$$\Rightarrow 3 \times 3 = 5 + x \Rightarrow x + 5 = 9 \Rightarrow x = 4$$

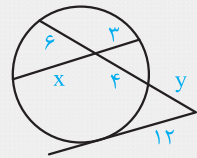
(پ) رابطه طولی مماس و قطعات قاطع: اگر از نقطه M یک خط مماس و یک خط قاطع بر دایره مفروض رسم کنیم، آن‌گاه طول پاره خط مماس (MT) واسطه هندسی قطعات قاطع (MA) و (MB) قطعات قاطع هستند) می باشد.



حکم : $MT^2 = MA \times MB$

مثال

در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.



$$3 \times x = 6 \times 4 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

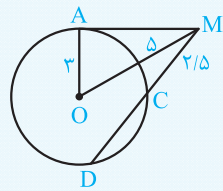
پاسخ :

$$12^2 = y \times (y + 6 + 4) \Rightarrow y(y + 10) = 144 \Rightarrow y^2 + 10y = 144 \Rightarrow y^2 + 10y - 144 = 0$$

$$\Rightarrow (y + 18)(y - 8) = 0 \Rightarrow y = -18 \text{ یا } y = 8 \xrightarrow{y > 0} y = 8$$

تست

در شکل مقابل MA در نقطه A بر دایره مماس و شعاع دایره برابر ۳ است. اگر فاصله M تا مرکز دایره برابر ۵ باشد و $MC = 2/5$ ، آن‌گاه طول وتر CD کدام است؟



۴/۵ (۴)

۳/۶ (۳)

۳/۹ (۲)

۴/۲ (۱)

پاسخ: خط مماس، بر شعاع نقطه تماس عمود است. پس مثلث MAO در رأس A قائمه است و داریم:

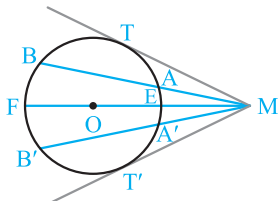
$$MA^2 = OM^2 - OA^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow MA = 4$$

$$MA^2 = MC \times MD \Rightarrow 4^2 = 2/5 \times (2/5 + CD) \Rightarrow 16 = 2/5 \times (2/5 + CD)$$

حال بنابه رابطه طولی مماس و قطعات قاطع داریم:

$$\Rightarrow CD + 2/5 = \frac{16}{2/5} = \frac{64}{10} = 6.4 \Rightarrow CD = 6.4 - 2/5 = 3/9 \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

نتیجه روابط طولی وترهای متقاطع و مماس



(۱) اگر نقطه معلوم M خارج دایره $C(O, R)$ باشد، آن‌گاه حاصل ضرب همه قطعات قاطع و مربع طول دو مماسی که

بر دایره رسم می شود برابر مقدار ثابت $OM^2 - R^2$ می باشد و با فرض $OM = d$ این مقدار ثابت به صورت $d^2 - R^2$

$$MT^2 = MT'^2 = MA \times MB = MA' \times MB' = \dots = ME \times MF$$

نوشته می شود، زیرا:

$$ME \times MF = (OM - OE)(OM + OF) = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2$$

از طرفی داریم:

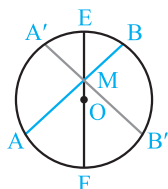
$$MT^2 = MT'^2 = MA \times MB = MA' \times MB' = \dots = d^2 - R^2$$

بنابراین:

(۲) اگر نقطه M درون دایره باشد، آن‌گاه حاصل ضرب پاره خط‌های روی هر وتر گذرنده از نقطه M برابر مقدار ثابت $d^2 - R^2$ است. اثبات همانند حالت قبل می باشد.

$$MA \times MB = MA' \times MB' = \dots = ME \times MF = R^2 - d^2$$

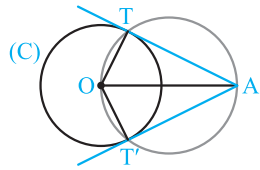
(۳) اگر نقطه M روی دایره باشد، حاصل ضرب‌های فوق برابر صفر است.



شعاع یک دایره ۵ و فاصله یک نقطه معلوم از مرکز آن ۸ است. حاصل ضرب همه قطعات قاطعی را که از این نقطه بر دایره رسم می شود، محاسبه کنید.

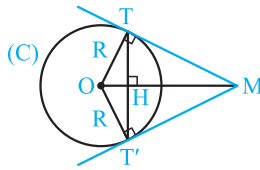
پاسخ: با توجه به مطلب قبل داریم: $MA \times MB = MA' \times MB' = \dots = ME \times MF = d^2 - R^2 = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره



نقطه A را خارج دایره $C(O, R)$ در نظر می‌گیریم. O را به A وصل می‌کنیم، دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره C را T و T' می‌نامیم. زوایای OTA و $OT'A$ روبرو به قطرند، پس قائمه‌اند. در نتیجه AT و AT' بر دایره C مماس‌اند.

خواص دو مماس رسم شده بر یک دایره معلوم از یک نقطه خارج آن



فرض کنید مطابق شکل از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دایره $C(O, R)$ رسم شود و H نقطه برخورد وتر TT' با پاره‌خط OM باشد. بنابراین داریم:

(۱) طول مماس‌های MT و MT' برابر است ($MT = MT'$).

(۲) OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است.

(۳) OM عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه‌های تماس می‌باشد، یعنی OM عمودمنصف TT' است.

(۴) اگر $\widehat{M} \neq 90^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی MTOT' کایت (شبه‌لوزی) است.

(۵) اگر $\widehat{M} = 90^\circ$ باشد، آن‌گاه چهارضلعی MTOT' مربع است. در این حالت از هر نقطه روی دایره به مرکز O شعاع $OM = R\sqrt{2}$ می‌توان ۲ مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد و بر عکس اگر از نقطه‌ای دو مماس عمود بر هم، بر دایره C رسم شود، آن‌گاه آن نقطه روی دایره به مرکز O و شعاع $R\sqrt{2}$ قرار دارد.

(۶) طول پاره‌خط واصل نقاط تماس برابر است با:

اثبات: مساحت چهارضلعی MTOT' را به دو روش می‌نویسیم:

$$TT' = \frac{2R \cdot MT}{OM}$$

$$1) S(MTOT') = \frac{1}{2} OM \times TT', \quad 2) S(MTOT') = 2S(MTO) = 2 \times \frac{1}{2} \times OT \times MT \Rightarrow \frac{1}{2} OM \times TT' = OT \times MT \Rightarrow TT' = \frac{2R \times MT}{OM}$$

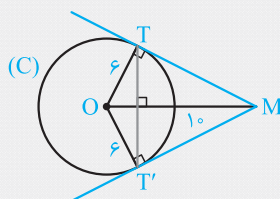
(۷) مثلث‌های MTO، MHT، و THO متشابه هستند.

از نقطه M دو مماس MT و MT' را بر دایره $C(O, 6)$ رسم می‌کنیم. اگر $OM = 10$ باشد، آن‌گاه:

(آ) طول مماس‌های MT و MT' را به دست آورید.

(ب) طول پاره‌خط TT' را بیابید.

پاسخ: (آ) در مثلث قائم‌الزاویه OMT داریم:



$$OM^2 = OT^2 + MT^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + MT^2 \Rightarrow MT^2 = 100 - 36$$

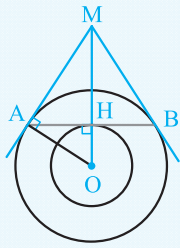
$$\Rightarrow MT^2 = 64 \Rightarrow MT = MT' = 8$$

(ب) برای محاسبه TT' می‌گوییم، مساحت چهارضلعی MTOT' برابر $\frac{1}{2} OM \times TT'$ است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند. از طرفی مساحت همین

چهارضلعی دو برابر مساحت مثلث OMT است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} TT' \times OM = 2 \times \frac{1}{2} MT \times OT \Rightarrow TT' \times 10 = 2 \times 8 \times 6 \Rightarrow TT' = \frac{96}{10} = 9.6$$

تست



دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایره بزرگ‌تر مماس بر دایره کوچک‌تر است. اگر دو مماس مرسوم از دو سر این وتر بر دایره بزرگ‌تر در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصله M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

۱۹ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه OAM بنابه رابطه طولی داریم:

$$OA^2 = OH \times OM \Rightarrow 12^2 = 8 \times OM \Rightarrow OM = \frac{144}{8} = 18 \Rightarrow \text{گزینه (۱) صحیح است.}$$

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم‌مرکز

نکته در حالتی که دو دایره مماس برون و مماس داخل هستند، مراکز دو دایره و نقطه تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند.

مثال

طول خط‌المركزین دو دایره مماس داخل ۵ و مساحت ناحیه بین دو دایره 85π است. محیط هر یک از دایره‌ها را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۳۳ کتاب درسی)

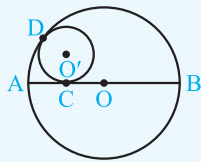
پاسخ: طول خط‌المركزین دو دایره مماس داخل برابر $R - R'$ ، $R > R'$ است. داریم:

$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 85\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow R^2 - R'^2 = 85$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = 85 \xrightarrow{\text{بنابه فرض } R - R' = 5} R + R' = \frac{85}{5} = 17$$

$$\begin{cases} R + R' = 17 \\ R - R' = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 2R = 22 \Rightarrow R = 11, R' = 6$$

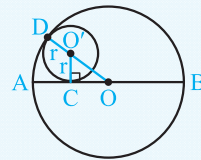
پس محیط دایره‌ها برابر 22π و 12π است.



در شکل مقابل، دایره کوچک بر قطر AB و دایره بزرگ مماس است. اگر $BC = 12$ و $AC = 6$ ، آن‌گاه شعاع دایره کوچک تر کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: در دو دایره مماس داخل، مراکز دو دایره و نقطه تماس آن‌ها روی یک خط قرار دارند. داریم:



$$AB = 2R \Rightarrow AC + BC = 2R \Rightarrow 6 + 12 = 2R \Rightarrow R = 9$$

$$OD = OO' + O'D \Rightarrow 9 = OO' + r \Rightarrow OO' = 9 - r$$

$$OA = OC + AC \Rightarrow 9 = OC + 6 \Rightarrow OC = 3$$

$$OO'^2 = O'C^2 + OC^2 \Rightarrow (9 - r)^2 = r^2 + 3^2 \Rightarrow 81 + r^2 - 18r = r^2 + 9 \Rightarrow 18r = 72 \Rightarrow r = \frac{72}{18} = 4 \Rightarrow \text{گزینه (۲) درست است.}$$

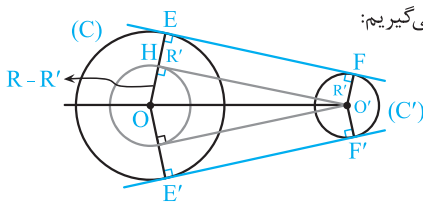
مماس مشترک‌های دو دایره

(آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند، آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)
 (ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند، آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند. (خط Δ')



بنابه قرارداد اندازه EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازه CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره



(آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر می‌گیریم:

(۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R - R'$ رسم می‌کنیم.

(۲) از نقطه O' مماس $O'H$ را بر دایره روبه‌رو رسم می‌کنیم.

(۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره (C) را در نقطه E قطع کند.

(۴) مطابق شکل از نقطه O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایره C' را در نقطه F قطع کند. مماس مشترک خارجی دو دایره است. زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($\widehat{H} = 90^\circ$ و $EH \parallel O'F = R'$). اگر O' خارج دایره به مرکز O و شعاع $R - R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبه طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثل قائم‌الزاویه OHO' داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = (R - R')^2 + EF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$EF = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

با فرض این‌که طول خط‌المركزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۹ و طول خط‌المركزین ۲۱ مفروض‌اند. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

پاسخ: بنابه فرض $R = 9$ ، $R' = 6$ و $d = 21$ است، در نتیجه داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{21^2 - (9 - 6)^2} = \sqrt{21^2 - 3^2} = \sqrt{18 \times 24} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$$

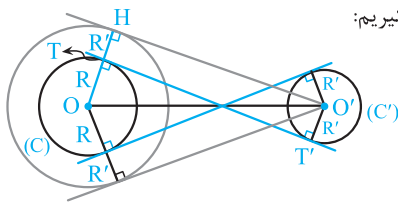
شعاع‌های دو دایره ۲ و ۱۰ و طول خط‌المركزین و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها به ترتیب $4x + 1$ و $3x + 3$ است. مقدار x و طول خط‌المركزین و مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$(3x + 3)^2 = (4x + 1)^2 - (10 - 2)^2 \Rightarrow 9x^2 + 18x + 9 = 16x^2 + 8x + 1 - 64$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 10x - 72 = 0 \Rightarrow (x - 4)(7x + 18) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -\frac{18}{7}$$

جواب منفی قابل قبول نیست، پس $x = 4$ و در نتیجه طول خط‌المركزین دو دایره $4x + 1 = 17$ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $3x + 3 = 15$ است.



(ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر می‌گیریم: $(R > R')$

(۱) به مرکز O و شعاع $R + R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

(۲) از نقطه O' مماس $O'H$ را بر دایره روبه‌رو رسم می‌کنیم.

(۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایره (C) نقطه T می‌نامیم.

(۴) از نقطه O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایره (C') را در نقطه T' قطع کند، خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است، زیرا $\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است، چون $\hat{H} = 90^\circ$ و $TH \parallel O'T' = R'$). اگر O' خارج دایره به مرکز O و شعاع $R + R'$ باشد، مسئله همواره دو جواب دارد.

محاسبه طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل فوق و با فرض $OO' = d$ در مثلث قائم‌الزاویه $OO'H$ داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow d^2 = (R + R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

نتیجه طول مماس مشترک داخلی دو دایره همواره از طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کوچک‌تر است.

مثال دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المركزین ۹ مفروض است. اندازه مماس مشترک‌های داخلی آن را به دست آورید.

پاسخ: بنابه فرض $R = 3$ ، $R' = 4$ و $d = 9$ است. بنابراین داریم:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{2 \times 16} = 4\sqrt{2}$$

تست اندازه‌های مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب $\sqrt{48}$ و $\sqrt{24}$ است. حاصل ضرب شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۶

پاسخ: فرض کنیم $EF = \sqrt{24}$ و $CD = \sqrt{48}$ ، بنابراین داریم:

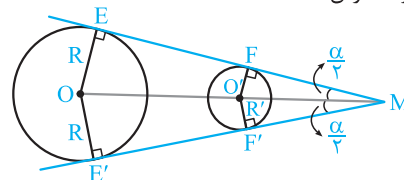
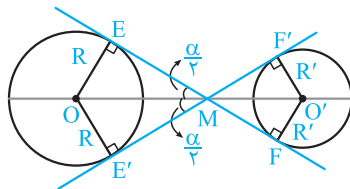
$$\begin{cases} EF^2 = d^2 - (R + R')^2 \\ CD^2 = d^2 - (R - R')^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} CD^2 - EF^2 = (R + R')^2 - (R - R')^2$$

$$\Rightarrow CD^2 - EF^2 = R^2 + 2RR' + R'^2 - R^2 + R'^2 - 2RR' = 4RR' \Rightarrow RR' = \frac{CD^2 - EF^2}{4} \Rightarrow RR' = \frac{48 - 24}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

بنابراین گزینه (۴) درست است.

همرسی مماس مشترک‌های دو دایره و خط‌المركزین

اگر شعاع‌های دو دایره نابرابر باشند، آن‌گاه مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المركزین دو دایره هم‌سراوند. همچنین مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره هم‌سراوند.



نکته ۱ نقطه هم‌سری مماس مشترک‌ها و خط‌المركزین، خط‌المركزین دو دایره را به نسبت شعاع‌ها تقسیم می‌کند $\frac{OM}{O'M} = \frac{R}{R'}$

نکته ۲ اگر زاویه بین مماس مشترک‌ها باشد، با فرض $(R > R')$ داریم:

$$\text{خارجی مشترک} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R - R'}{OO'}$$

$$\text{داخلی مشترک} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R + R'}{OO'}$$

دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۸ و خط‌المركزین ۱۵ مفروض‌اند. فاصله نقطه تلاقی مماس مشترک‌های داخلی از نقطه تلاقی مماس مشترک‌های خارجی دو دایره کدام است؟

پاسخ: بنابه فرض $R = 8, R' = 4, OO' = 15$. بنابراین داریم:

ترکیب در مخرج $\frac{O'S'}{OO'} = \frac{R'}{R + R'}$

$$\Delta OFS' \sim \Delta O'F'S' \Rightarrow \frac{O'S'}{OS} = \frac{O'F'}{OF} \Rightarrow \frac{O'S'}{OO'} = \frac{R'}{R + R'}$$

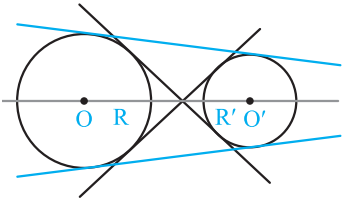
$$\Rightarrow O'S' = 15 \times \frac{4}{8 + 4} = 5$$

تفضیل در مخرج $\frac{O'S}{OO'} = \frac{R}{R - R'}$

$$\Delta O'SE' \sim \Delta OSE \Rightarrow \frac{O'S}{OS} = \frac{O'E'}{OE} \Rightarrow \frac{O'S}{OO'} = \frac{R}{R - R'} \Rightarrow O'S = 15 \times \frac{4}{8 - 4} = 15$$

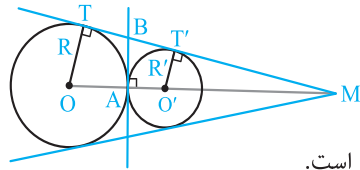
گزینه (۱) صحیح است. $SS' = O'S' + O'S = 5 + 15 = 20$

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌های دو دایره



(۱) دو دایره را متخارج گویند، هرگاه همه نقاط دو دایره بیرون یکدیگر باشند و در این حالت همواره داریم $OO' > R + R'$. دو دایره متخارج دارای ۴ مماس مشترک می‌باشند.

$OO' > R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متخارج‌اند.



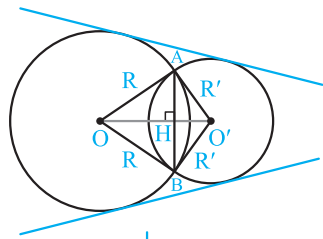
(۲) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط آن‌ها بیرون یکدیگر باشند، مماس خارج نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO' = R + R'$. دو دایره مماس خارج دارای ۳ مماس مشترک هستند که دو تای آن‌ها خارجی و سومی داخلی است.

$OO' = R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره مماس خارج‌اند.

نکته (آ) مماس مشترک داخلی دو دایره مماس خارج، همواره بر خط‌المركزین دو دایره در نقطه تماس عمود است.

(ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر $TT' = 2\sqrt{RR'}$ است.

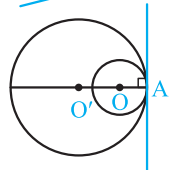
(پ) مماس مشترک داخلی دو دایره، پاره‌خط مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند. ($BT = BT'$)



(۳) دو دایره که فقط در دو نقطه مشترک باشند، متقاطع نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $|R - R'| < OO' < R + R'$. دو دایره متقاطع همواره دارای دو مماس مشترک خارجی هستند و مماس مشترک داخلی ندارند.

$|R - R'| < OO' < R + R' \Leftrightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

نکته در دو دایره متقاطع، خط‌المركزین دو دایره همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است.



(۴) دو دایره که فقط در یک نقطه مشترک باشند و سایر نقاط یکی از آن‌ها درون دایره دیگر باشد، مماس درون نامیده می‌شوند. در این حالت داریم $OO' = |R - R'|$

$OO' = |R - R'| \Leftrightarrow$ دو دایره مماس داخل هستند.

نکته دو دایره مماس درون فقط یک مماس مشترک خارجی دارند که بر خط‌المركزین دو دایره در نقطه تماس عمود است.



(۵) دو دایره را متداخل گویند، هرگاه همه نقاط یکی از آن‌ها درون دایره دیگر باشد. در این حالت داریم $OO' < |R - R'|$. دو دایره متداخل مماس مشترک ندارند.

دو دایره هم‌مركز با شعاع‌های متفاوت یکی از حالات دو دایره متداخل است.

دو دایره متداخل

اندازه شعاع‌های دو دایره ۴ و ۱۱ و طول مماس مشترک خارجی دو دایره $7\sqrt{3}$ است.

(ب) وضعیت دو دایره را نسبت به هم تعیین کنید.

(آ) طول خط‌المركزین دو دایره را به دست آورید.

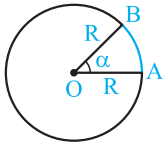
پاسخ: بنابه فرض $R = 11, R' = 4, TT' = 7\sqrt{3}$. داریم:

(۱) $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 7\sqrt{3} = \sqrt{d^2 - (11 - 4)^2} \Rightarrow 49 \times 3 = d^2 - 7^2$

$\Rightarrow d^2 - 49 = 3 \times 49 \Rightarrow d^2 = 4 \times 49 \Rightarrow d = 2 \times 7 = 14$

(ب) از $R = 11, R' = 4$ و $d = 14$ نتیجه می‌شود $R - R' < d < R + R'$. پس دو دایره متقاطع هستند.

طول کمان و مساحت قطاع



طول کمان AB (l) که زاویه مرکزی روبه‌رو به آن α درجه است، برابر است با:

$$l = \frac{\alpha}{360} (\text{محیط دایره}) = \frac{\alpha}{360} (2\pi R) = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

قطاع دایره: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، قطاع دایره می‌نامند.

ناحیه بین کمان AB و شعاع‌های OA و OB، قطاع دایره با زاویه مرکزی α درجه نامیده می‌شود و مساحت آن برابر

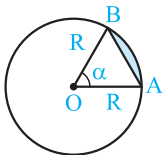
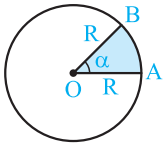
$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\alpha}{360} S_{\text{دایره}} = \frac{\alpha}{360} \pi R^2 = \frac{lR}{2}$$

است با:

این دستور، مانند دستور محاسبه مساحت مثلث است.

مساحت قطعه: ناحیه بین کمان AB و وتر AB قطع می‌شود و مساحت آن برابر است با:

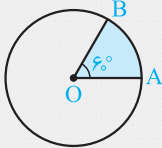
$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S(\text{ABO}) = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right)$$



مثال

شعاع دایره مقابل 6 سانتی‌متر و اندازه زاویه مرکزی AOB برابر 60° است. طول کمان AB و مساحت

قطاع AOB را به‌دست آورید.



$$l = \frac{\pi R}{180} \alpha = \frac{\pi \times 6}{180} \times 60 = 2\pi \text{ cm} \quad , \quad S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi \times 6^2 \times 60}{360} = 6\pi \text{ cm}^2$$

پاسخ:

مثال

اندازه یک زاویه محاطی در یک دایره 30° و طول کمان روبه‌رو به آن 4 سانتی‌متر است. محیط دایره را به‌دست آورید.

پاسخ: چون اندازه زاویه محاطی داده شده 30° است، پس اندازه کمان روبه‌رو به آن 60° می‌باشد. بنابه فرض طول کمان برابر $l = 4$ سانتی‌متر

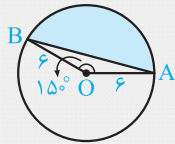
است، لذا داریم:

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180} \Rightarrow 4 = \frac{\pi R \times 60}{180} \Rightarrow R = \frac{12}{\pi}$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi \times \frac{12}{\pi} = 24 \text{ cm}$$

مثال

شعاع دایره مقابل 6 و اندازه زاویه مرکزی AOB برابر 150° است. مساحت قسمت رنگی را به‌دست آورید.



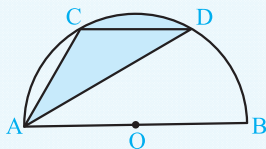
$$S = \frac{1}{2} \times R^2 \times \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right) = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \left(\frac{\pi \times 150}{180} - \sin 150^\circ \right) \Rightarrow S = 18 \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \right) = 15\pi - 9$$

پاسخ:

تست

در نیم‌دایره به مرکز O و قطر $AB = 12$ ، وتر CD موازی AB و $CD = 6$ است. مساحت ناحیه

رنگی کدام است؟



8π (2)

3π (1)

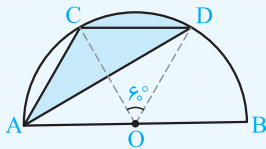
6π (4)

4π (3)

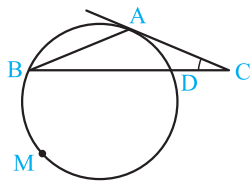
پاسخ: چون طول وتر CD با شعاع دایره برابر است، پس مثلث OCD متساوی‌الاضلاع به ضلع 6 است. در نتیجه زاویه COD به اندازه 60°

می‌باشد. دو مثلث ACD و OCD دارای قاعده مشترک CD هستند و چون $CD \parallel AB$ ، پس ارتفاع وارد بر این قاعده در دو مثلث برابر است. لذا

مساحت این دو مثلث برابر و در نتیجه مساحت ناحیه رنگی با مساحت قطاع OCD برابر است و داریم:



$$\text{گزینه (4) درست است.} \Rightarrow \text{مساحت قطاع OCD} = \text{مساحت مطلوب} = \frac{\pi \times 6^2 \times 60}{360} = 6\pi$$



۴۳☆ در شکل مقابل، مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابر است، اگر کمان \widehat{DMB} برابر 222 درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟

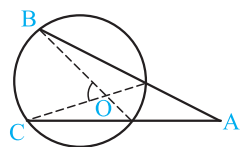
(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)



۴۴☆ در شکل مقابل، $\widehat{A} = 27^\circ$ و $\widehat{O} = 71^\circ$ ، کمان \widehat{BC} چند درجه است؟

(سراسری ریاضی - ۸۶)

۱۰۰ (۲)

۹۸ (۱)

۱۰۴ (۴)

۱۰۲ (۳)

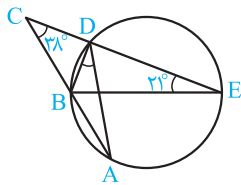
۴۵☆ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، دایره محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطه M قطع کرده است. مثلث ABM کدام نوع است؟

(۴) قائم‌الزاویه

(۳) متساوی‌الاضلاع

(۲) متساوی‌الساقین

(۱) متشابه ACD



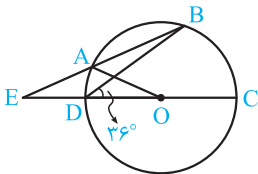
۴۶☆ در شکل مقابل، BE قطر دایره است. اندازه زاویه ADB چند درجه است؟

۲۸ (۱)

۳۰ (۲)

۳۱ (۳)

۳۲ (۴)



۴۷☆ در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است. امتداد قطر CD و وتر AB در نقطه E متقاطع‌اند.

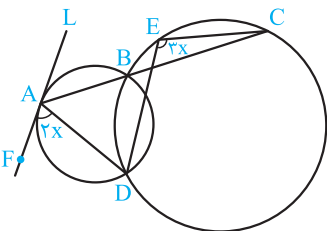
اگر $\widehat{D} = 36^\circ$ و $AE = AO$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه E چند درجه است؟

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

۳۰ (۴)

۲۷ (۳)



۴۸☆ در شکل روبه‌رو دو دایره در نقاط B و D متقاطع‌اند. از نقطه B خطی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با دایره‌ها را A و C می‌نامیم. خط L در نقطه A بر دایره کوچک‌تر مماس و نقطه E روی دایره بزرگ‌تر است. اندازه زاویه DEC چند درجه است؟

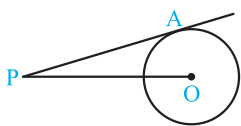
۱۰۸ (۲)

۱۲۰ (۱)

۱۰۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره



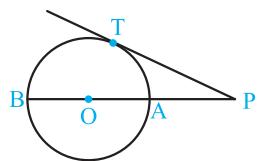
۴۹☆ در شکل روبه‌رو، PO برابر 5 و شعاع دایره واحد است. طول PA کدام است؟

$5\sqrt{2}$ (۲)

$6\sqrt{2}$ (۱)

$2\sqrt{6}$ (۴)

$2\sqrt{5}$ (۳)



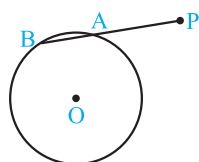
۵۰☆ در شکل مقابل، شعاع دایره 6 ، AB قطر و $PA = 4$ می‌باشد. طول مماس PT کدام است؟

$5\sqrt{2}$ (۲)

$4\sqrt{3}$ (۱)

۸ (۴)

۱۴ (۳)



۵۱☆ در شکل مقابل، $PA = 5$ ، $AB = 3$ و شعاع دایره برابر 4 واحد است. فاصله نقطه P تا مرکز دایره کدام است؟

$2\sqrt{21}$ (۱)

$2\sqrt{14}$ (۲)

$4\sqrt{7}$ (۳)

$3\sqrt{7}$ (۴)

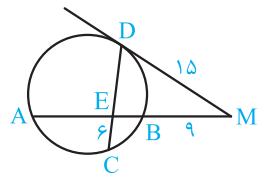
۵۲☆ دو دایره به شعاع‌های 9 و 12 واحد مماس درونی‌اند. اندازه بزرگ‌ترین قطعه مماس که یک سر آن بر روی دایره بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه تماس) بر روی دایره کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟

$8\sqrt{3}$ (۴)

۱۲ (۳)

$8\sqrt{2}$ (۲)

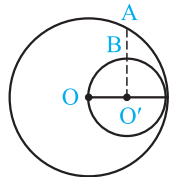
۹ (۱)



۵۳☆ در شکل مقابل MD بر دایره مماس است و وتر AB را به نسبت ۳ به ۱ قطع کرده است $(\frac{AE}{BE} = 3)$. با توجه به اندازه پاره‌های داده شده، طول پاره خط DE کدام است؟

(CE = 6, MB = 9, MD = 15)

- ۸ (۱)
۱۰ (۳)
۹ (۲)
۱۱ (۴)

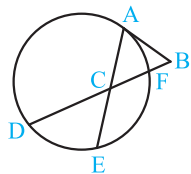


۵۴☆ در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره بزرگ، O' مرکز دایره کوچک، امتداد AB عمود بر OO' و طول AB برابر $3(3 - \sqrt{3})$ سانتی‌متر است. شعاع دایره بزرگ چند سانتی‌متر است؟

- ۳√۵ (۱)
۵√۳ (۳)
۳√۶ (۲)
۶√۳ (۴)

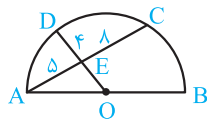
۵۵☆ نقطه C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، که از نقطه C می‌گذرد، کدام است؟

- ۸ (۱)
۵√۳ (۲)
۶√۲ (۳)
۴√۵ (۴)



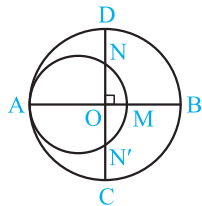
۵۶☆ در شکل مقابل، AB در نقطه A بر دایره مماس است و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر BF = ۱ و DF = ۸، آن‌گاه اندازه CE کدام است؟

- ۴ (۱)
۴/۵ (۳)
۵ (۲)
۳/۵ (۴)



۵۷☆ در شکل روبه‌رو، O مرکز نیم‌دایره، AE = ۵، CE = ۸ و DE = ۴ است. اندازه OE کدام است؟

- ۳ (۱)
۵ (۳)
۷ (۲)
۶ (۴)



۵۸☆ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر MB = ۱۶ و ND = ۱۰ باشد، مساحت بین دو دایره کدام است؟ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی)

- ۳۲۴π (۱)
۵۷۶π (۳)
۶۲۵π (۲)
۳۳۶π (۴)

۵۹☆ در یک دایره نقطه M روی وتر AB چنان قرار دارد که MA = ۱۲ و MB = ۳. طول کوتاه‌ترین وتری که در نقطه M رسم می‌شود، کدام است؟

- ۱۰ (۱)
۱۵ (۲)
۱۸ (۳)
۱۲ (۴)

۶۰ در مثلث به اضلاع ۶، ۵ و ۵، دایره محیطی آن را رسم می‌کنیم. فاصله بزرگ‌ترین ضلع از وسط کمان نظیر آن کدام است؟

- ۲/۲۵ (۱)
۲/۵ (۲)
۲/۷۵ (۳)
۲ (۴)

۶۱☆ از یک نقطه خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم. طول مماس ۱۶ و طول بزرگ‌ترین قطعه قاطع ۳۲ است. اگر فاصله مرکز دایره تا خط قاطع ۵ باشد، شعاع دایره کدام است؟

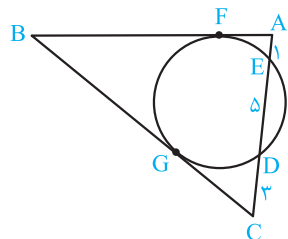
- ۱۰ (۱)
۱۱ (۲)
۱۲ (۳)
۱۳ (۴)

۶۲☆ از نقطه M خارج یک دایره، یک مماس و یک قاطع بر آن رسم شده است. اگر طول مماس ۸ و فاصله نقاط تقاطع قاطع با دایره تا نقطه تماس به ترتیب ۴ و ۶ باشد، آن‌گاه فاصله M تا نزدیک‌ترین نقطه تقاطع کدام است؟

- ۲۲/۳ (۱)
۲۰/۳ (۲)
۱۶/۳ (۳)
۱۴/۳ (۴)

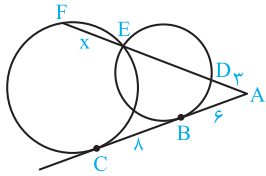
۶۳ اندازه اضلاع مثلث ABC برابر AB = ۸، AC = ۶ و BC = ۷ است. مماس بر دایره محیطی مثلث در نقطه A امتداد ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند. اندازه AD کدام است؟

- ۹ (۱)
۸ (۲)
۱۰ (۳)
۱۲ (۴)



۶۴☆ مطابق شکل یک دایره بر اضلاع AB و BC در نقاط F و G مماس است. اگر دایره ضلع AC را قطع کند و سه پاره‌خط به طول‌های ۱، ۵ و ۳ روی آن ایجاد کند، آن‌گاه $|BC - AB|$ کدام است؟

- √۳ (۱)
۶ - √۶ (۳)
√۶ (۲)
۳ - √۳ (۴)



۶۵★ در شکل مقابل، خط شامل BC بر دو دایره مماس است و قاطع گذرنده از نقطه E آن را در نقطه A قطع کرده است. اگر $AB = 6$ ، $BC = 8$ و $AD = 3$ ، آن‌گاه اندازه وتر EF کدام است؟

(۱) $\frac{11}{3}$ (۲) ۴

(۳) $\frac{13}{3}$ (۴) ۵

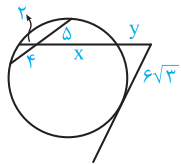
۶۶★ در شکل مقابل y کدام است؟

(۱) ۶

(۲) $7/5$

(۳) ۸

(۴) ۹



(سراسری ریاضی-۸۵)

۶۷★ در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد، فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطه C در امتداد AB به فاصله $CB = 2\sqrt{2}$ انتخاب شده است، طول قطعه مماسی که از C بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟

(۱) $2\sqrt{10}$

(۲) $3\sqrt{5}$

(۳) ۷

(۴) $5\sqrt{2}$

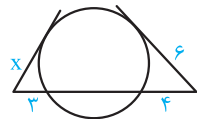
۶۸★ در شکل مقابل اندازه x چند واحد است؟

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{5}$

(۳) $2\sqrt{6}$

(۴) ۵



(سراسری ریاضی-۹۱)

۶۹ نزدیک‌ترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = 2$ ، اندازه AB چقدر است؟

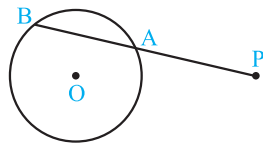
(سراسری ریاضی-۹۰)

(۱) ۹

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۵



۷۰ فاصله نقطه P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه PA چند برابر شعاع است؟

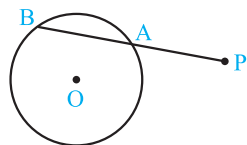
(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۰)

(۱) $\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1)$

(۲) $\frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)$

(۳) $\sqrt{11} - 2$

(۴) $\sqrt{13} - 2$



۷۱ دو دایره به شعاع‌های ۴ و $10/5$ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

(۱) ۸

(۲) $4\sqrt{5}$

(۳) $4\sqrt{6}$

(۴) ۱۰

۷۲★ در شکل مقابل، $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$ ، $PC = 9$ و $CD = 7$ ، اندازه مماس PM چقدر است؟

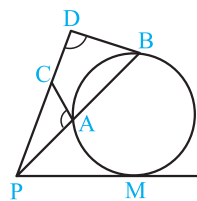
(سراسری ریاضی خارج از کشور-۸۵)

(۱) ۸

(۲) $6\sqrt{2}$

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲



۷۳★ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) مطابق شکل BD نیمساز زاویه B است. دایره محیطی مثلث BCD ضلع AB را در E قطع می‌کند. اگر $AC = 6$ و $AE = 1$ باشد، آن‌گاه طول ضلع AB کدام است؟

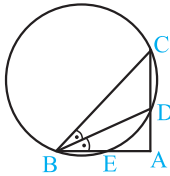
(سراسری ریاضی-۸۹)

(۱) $17/5$

(۲) ۱۷

(۳) $16/5$

(۴) ۱۶



۷۴★ دو نقطه A و B به بلندی‌های ۵ و ۸ بر روی محور قائم قرار دارند. نقطه M بر روی محور افقی، با کدام فاصله از پای قائم اختیار شود، تا زاویه AMB بیش‌ترین مقدار ممکن باشد؟

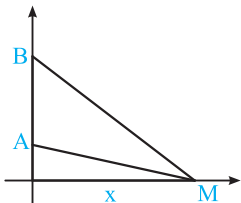
(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۶)

(۱) $3\sqrt{2}$

(۲) ۶

(۳) $2\sqrt{10}$

(۴) ۷



۷۵★ در دایره‌ای به شعاع OA، وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ برابر کدام است؟

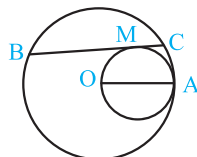
(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۴)

(۱) MO^2

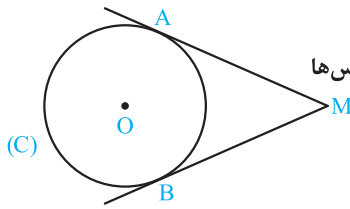
(۲) MA^2

(۳) OA^2

(۴) $MA \cdot MO$



مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه خارج دایره بر آن



۷۶☆ در شکل مقابل از نقطه M دو مماس MA و MB بر دایره (O, 6) رسم شده است. اگر طول مماس‌ها برابر ۸ باشد، دورترین فاصله نقطه M تا نقاط دایره کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۷۷ از نقطه A دو مماس به طول ۱ بر دایره‌ای به مرکز O رسم می‌شود که زاویه بین آن‌ها 120° است. کوتاه‌ترین فاصله نقطه A تا نقاط دایره کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{3} - 1$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۷۸ از نقطه M خارج دایره به شعاع $2\sqrt{3}$ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره ۶ باشد، آن‌گاه فاصله نقاط تماس کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{6}$

۷۹☆ از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $4(\sqrt{2} - 1)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

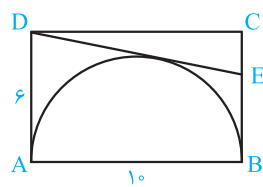
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۸۰☆ در مثلث ABC ($AB = AC$)، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = 6$ و ارتفاع $AH = 4$ باشد، شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $3/25$ (۲) $3/5$ (۳) $3/75$ (۴) $4/5$

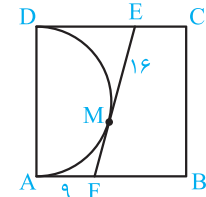
۸۱☆ از نقطه A خارج دایره به شعاع ۱ دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر زاویه بین دو مماس 60° باشد، آن‌گاه مساحت ناحیه بین دایره و مماس‌ها کدام است؟

- (۱) $2 - \frac{\pi}{6}$ (۲) $2 - \frac{\pi}{3}$ (۳) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$



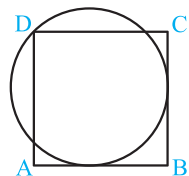
۸۲☆ در مستطیل ABCD مطابق شکل، نیم‌دایره‌ای به قطر AB رسم شده است. نقطه E روی ضلع BC چنان است که DE بر نیم‌دایره مماس است. طول پاره‌خط CE کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{5}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{13}{5}$ (۴) $\frac{11}{6}$



۸۳☆ مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و EF در نقطه M بر نیم‌دایره به قطر AD مماس است. اگر $ME = 16$ و $AF = 9$ ، آن‌گاه مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۴۸۴ (۲) ۶۲۵ (۳) ۵۲۹ (۴) ۵۷۶



۸۴☆ در شکل مقابل، مستطیل ABCD مستطیل است و دایره‌ای از رأس D می‌گذرد و بر دو ضلع AB و BC مماس است. اگر $AB = 16$ و $BC = 18$ باشد، آن‌گاه شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

مماس مشترک‌های داخلی و خارجی

۸۵☆ طول خط‌المركزین دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، برابر $\sqrt{5}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

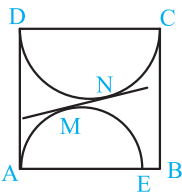
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۶☆ دو دایره مماس خارج به شعاع‌های $R_1 = 8$ و $R_2 = 2$ مفروض‌اند. اگر TT' مماس مشترک خارجی و O و O' مراکز دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OO'T'T'$ چقدر است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۴۰ (۳) ۳۰ (۴) ۲۰

۸۷☆ دو دایره مماس خارج‌اند. اگر یک زاویه چهارضلعی حاصل از وصل مراکز دو دایره و نقاط تماس مماس مشترک خارجی دو دایره برابر 60° باشد، آن‌گاه نسبت شعاع‌های دو دایره کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳



۸۸ ☆ در شکل مقابل مربع به ضلع ۱۴ مفروض است و نیم‌دایره‌ها به قطر CD و به قطر $AE = 12$ می‌باشند. اندازه طول مماس مشترک دو نیم‌دایره کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{7}$
 (۲) $4\sqrt{2}$
 (۳) $2\sqrt{5}$
 (۴) $\sqrt{30}$

۸۹ ☆ در دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط‌المركزین d ، روابط $3R_1 + 4R_2 = 4d$ و $R_1 + 2R_2 = \frac{11d}{6}$ برقرار است. چند خط وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۴
 (۴) ۲

۹۰ ☆ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. شعاع دایره بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
 (۲) $1/5$
 (۳) $\sqrt{3}$
 (۴) ۲

۹۱ ☆ اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المركزین این دو دایره چند واحد است؟

- (۱) $12\sqrt{2}$
 (۲) $7\sqrt{6}$
 (۳) ۱۷
 (۴) ۱۸ (سراسری ریاضی-۹۱)

۹۲ ☆ زاویه بین خط‌المركزین و مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های $7/5$ و 30 سانتی‌متر، 30 درجه است. طول خط‌المركزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $42/5$
 (۲) ۴۵
 (۳) $47/5$
 (۴) ۵۰

۹۳ شعاع دو دایره خارج هم به ترتیب $22/5$ و $7/5$ سانتی‌متر است. اگر زاویه بین مماس مشترک داخلی و خط‌المركزین دو دایره 30 درجه باشد، طول خط‌المركزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۵۵
 (۲) $57/5$
 (۳) ۶۰
 (۴) $62/5$ (سراسری ریاضی-۸۴)

۹۴ طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $3\sqrt{33}$ سانتی‌متر است. کم‌ترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۵
 (۴) ۶

۹۵ دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایره بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشند؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۰)

۹۶ ☆ در دو دایره متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{OO'}{2}$ می‌باشد. اندازه مماس مشترک محدود به دو نقطه تماس این دو دایره چند واحد است؟

- (۱) ۵
 (۲) $2\sqrt{5}$
 (۳) $2\sqrt{6}$
 (۴) ۴ (سراسری ریاضی-۹۰)

۹۷ ☆ دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 3)$ متقاطع‌اند. اگر مساحت چهارضلعی حاصل از وصل نقاط تماس مماس مشترک خارجی و مراکز دایره‌ها برابر ۴۸ باشد، طول قسمتی از خط‌المركزین که بین دو دایره قرار می‌گیرد، کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۳
 (۳) ۲
 (۴) ۱

۹۸ ☆ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ مماس داخل‌اند. چند وتر به طول $4\sqrt{10}$ در دایره بزرگ‌تر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشد؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۹۹ ☆ دو دایره به شعاع‌های ۷ و ۱۳ مماس خارج‌اند. فاصله نقطه تماس دو دایره از مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

- (۱) $8/6$
 (۲) $9/1$
 (۳) $9/6$
 (۴) $10/8$

۱۰۰ ☆ دو دایره نامساوی به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO' ، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) متقاطع (۲) مماس (۳) متخارج (۴) نامشخص (سراسری ریاضی-۹۴)

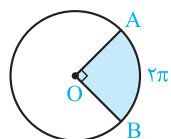
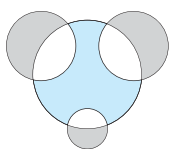
طول کمان، مساحت قطاع

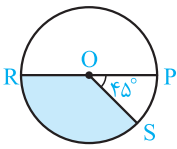
۱۰۱ در شکل مقابل قطره‌های دو دایره مساوی برابر ۴ و قطر دایره کوچک ۲ است. اگر مجموع مساحت نواحی طوسی با مساحت ناحیه رنگی برابر باشد، آنگاه قطر دایره بزرگ کدام است؟

- (۱) ۴
 (۲) ۳
 (۳) ۶
 (۴) ۸

۱۰۲ ☆ در شکل مقابل، طول کمان AB برابر 2π است. مساحت قطاع AOB کدام است؟

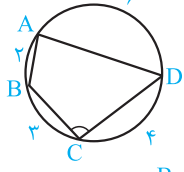
- (۱) 4π
 (۲) 16π
 (۳) 6π
 (۴) 24π





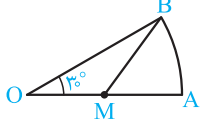
۱۰۳☆ مساحت ناحیه رنگی در دایره مقابل که اندازه قطرش $RP = 8$ است، کدام است؟

- (۱) $1/5\pi$ (۲) 6π (۳) 4π (۴) 3π



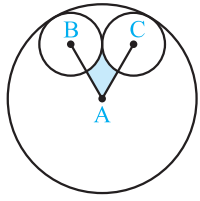
۱۰۴☆ در چهارضلعی محاطی ABCD مطابق شکل طول کمان‌ها بر حسب سانتی‌متر نوشته شده است. اندازه زاویه C چند درجه است؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۸۴ (۳) ۹۰ (۴) ۹۶



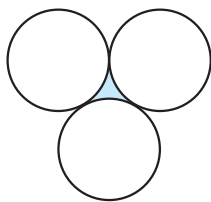
۱۰۵☆ در شکل مقابل OAB قطاعی از یک دایره با زاویه مرکزی 30° است. اگر M وسط OA باشد، نسبت مساحت مثلث OMB به مساحت قطاع AOB کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\sqrt{3}\pi}$ (۲) $\frac{2}{3\pi}$ (۳) $\frac{3}{2\pi}$ (۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$



۱۰۶☆ سه دایره مطابق شکل دوه‌دو بر هم مماس هستند و A، B، C مرکز دایره‌ها می‌باشند. اگر شعاع دایره بزرگ ۳ و شعاع‌های دایره‌های کوچک برابر ۱ باشند، آنگاه مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (۲) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (۳) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

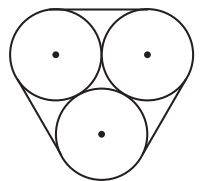


۱۰۷☆ در شکل مقابل سه دایره به شعاع‌های مساوی، دوه‌دو بر هم مماس‌اند. اگر محیط هر دایره ۳۶ باشد، محیط ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۶ (۳) ۳۶ (۴) ۱۲

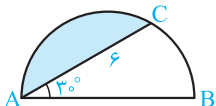
$2\sqrt{3} - \pi$ (۴)

- (۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ (۳) $\pi - \sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3} - \pi$



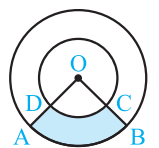
۱۰۹☆ سه دایره مطابق شکل با یک طناب بسته شده‌اند. اگر شعاع دایره‌ها یک باشد، طول طناب کدام است؟

- (۱) $2\pi + 2$ (۲) $3\pi + 4$ (۳) $6 + 2\pi$ (۴) $6\pi + 2$



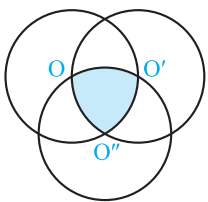
۱۱۰☆ در شکل مقابل، نیم‌دایره به قطر AB می‌باشد. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

- (۱) $2\pi - 2\sqrt{3}$ (۲) $3\pi - 2\sqrt{3}$ (۳) $4\pi - 3\sqrt{3}$ (۴) $3\pi - 3\sqrt{3}$



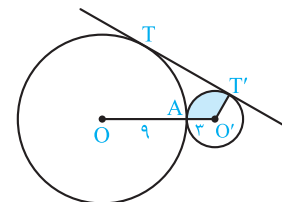
۱۱۱☆ دو دایره به مرکز O مطابق شکل چنان‌اند که $2OC = 3BC$. اگر مساحت ناحیه رنگی ۳۲ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت قطاع OCD چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶



۱۱۲☆ در شکل مقابل سه دایره مساوی به شعاع واحد از مرکز یکدیگر می‌گذرند، مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

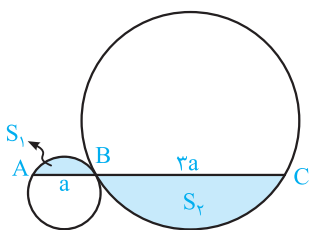
- (۱) $\pi - \sqrt{3}$ (۲) $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$



۱۱۳☆ در شکل مقابل مساحت ناحیه رنگی چند برابر π است؟

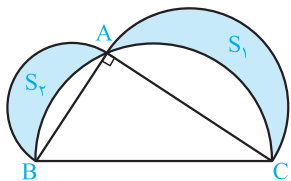
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۱۴. در شکل مقابل دو دایره مماس خارج هستند. اگر $S_1 + S_2 = 40\pi$ آن‌گاه S_1 کدام است؟



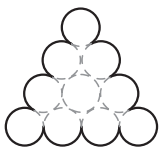
- (۱) 5π
- (۲) 4π
- (۳) 6π
- (۴) 8π

۱۱۵★. در شکل روبه‌رو، مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع $AB = 5$ و $AC = 12$ است. سه نیم‌دایره به قطرهای AB ، AC ، BC رسم شده‌اند. حاصل $S_1 + S_2$ کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی فارغ از کشور-۹۳)



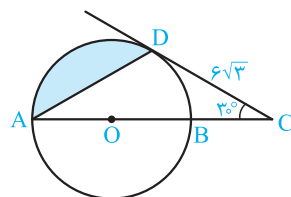
- (۱) 60
- (۲) 30
- (۳) 20π
- (۴) 10π

۱۱۶★. در شکل روبه‌رو، ۱۰ دایره به شعاع یک، مماس بر هم قرار گرفته‌اند. محیط شکل بدون احتساب کمان‌های نقطه‌چین کدام است؟



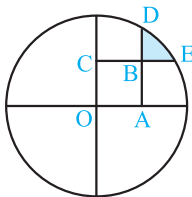
- (۱) 8π
- (۲) 9π
- (۳) 10π
- (۴) 11π

۱۱۷★. مساحت ناحیه رنگی در شکل مقابل کدام است؟



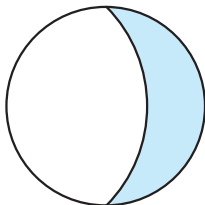
- (۱) $12\pi - 18$
- (۲) $6\pi - 12\sqrt{3}$
- (۳) $18\pi - 6\sqrt{3}$
- (۴) $12\pi - 9\sqrt{3}$

۱۱۸★. دایره روبه‌رو، به شعاع ۲ و مربع $OABC$ به ضلع واحد است. امتداد AB و BC به ترتیب دایره را در نقاط D و E قطع می‌کنند. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟



- (۱) $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$
- (۲) $\frac{\pi}{2} (2 - \sqrt{3})$
- (۳) $\pi(2 - \sqrt{3})$
- (۴) $\frac{\pi}{3} - 1 + \sqrt{3}$

۱۱۹★. در شکل مقابل کمانی از یک دایره دیگر رسم شده است که مرکز آن روی دایره مفروض است و از دو سر قطری از آن می‌گذرد. نسبت مساحت غیررنگی به مساحت رنگی کدام است؟

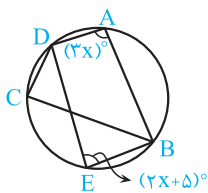


- (۱) $\pi - 1$
- (۲) π
- (۳) $\sqrt{2}\pi - 1$
- (۴) $\pi - \sqrt{2}$

قسمت سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی

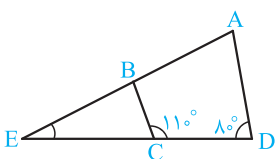
چهارضلعی‌های محاطی

۱۲۰★. در دایره مقابل، $\hat{A} = (3x)^\circ$ و $\hat{E} = (2x + 5)^\circ$. اندازه \hat{DCB} چند درجه است؟



- (۱) 55
- (۲) 60
- (۳) 75
- (۴) 70

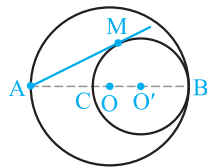
۱۲۱★. در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ محاطی است و اندازه دو زاویه آن داده شده است. زاویه برخورد امتداد ضلع‌های AB و CD چند درجه است؟



- (۱) 30
- (۲) 20
- (۳) 25
- (۴) 40

۱۲۲★. در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، $\hat{ABD} = \hat{ADB} = \hat{CAD}$ و $\hat{BAC} = 30^\circ$. اندازه زاویه \hat{ACD} چند درجه است؟

- (۱) 40
- (۲) 50
- (۳) 60
- (۴) 70

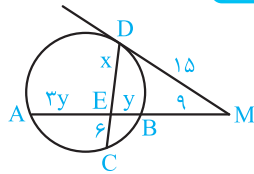


$$AM^2 = AC \cdot AB = (AB - BC) \cdot AB$$

$$\Rightarrow AM^2 = (24 - 18) \times 24$$

$$= 6 \times 24 = 6^2 \times 4 \Rightarrow AM = 6 \times 2 = 12$$

۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

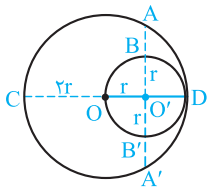


$$MD^2 = MB \times MA \Rightarrow 15^2 = 9 \times (9 + y + 3y)$$

$$\Rightarrow 4y + 9 = \frac{225}{9} = 25 \Rightarrow y = \frac{16}{4} = 4$$

$$DE \times CE = BE \times AE \Rightarrow x \times 6 = 4 \times 3 \times 4 \Rightarrow x = \frac{48}{6} = 8$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴



بنابه فرض $AB = 3(3 - \sqrt{3})$ داریم:

$$O'A \times O'A' = O'C \times O'D$$

$$\Rightarrow O'A^2 = 3r \times r$$

$$\Rightarrow (O'B + AB)^2 = 3r^2 \Rightarrow r + 3(3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3}r$$

$$\Rightarrow r(\sqrt{3} - 1) = 3(3 - \sqrt{3}) \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = 3\sqrt{3}$$

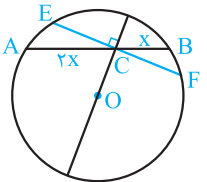
$$\text{شعاع دایره بزرگ} = 2r = 6\sqrt{3}$$

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض نقطه C وتر AB = 9 را به نسبت 1 به 2 تقسیم کرده است، پس $BC = x$ و $AC = 2x$ و در نتیجه:

$$AB = 9 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow BC = 3, AC = 6$$

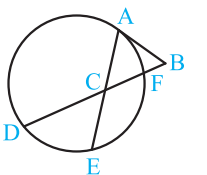
کوتاه‌ترین وترى که از نقطه C رسم می‌شود، وترى است که بر قطر گذرنده از نقطه C عمود است، یعنی وتر EF. داریم:



$$CE \cdot CF = AC \cdot BC \Rightarrow CE^2 = CF^2 = 6 \times 3 = 18$$

$$\Rightarrow CE = CF = 3\sqrt{2}, EF = 2CE = 2CF = 6\sqrt{2}$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴



بنابه فرض $DF = 8$ و $BF = 1$ است، پس می‌توان طول مماس AB را حساب کرد.

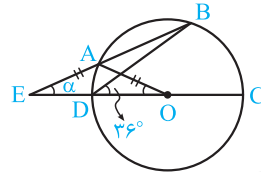
$$AB^2 = BF \times BD = 1 \times 9 \Rightarrow AB = 3$$

چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس نتیجه می‌شود $AC = BC = 3$ لذا داریم:

$$CF = BC - BF = 3 - 1 = 2, CD = DF - CF = 8 - 2 = 6$$

و نهایتاً بنابه رابطه طولی وترهای متقاطع داریم:

$$AC \times CE = CD \times CF \Rightarrow 3 \times CE = 6 \times 2 \Rightarrow CE = \frac{12}{3} = 4$$



۴۷ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض $AE = AO$
پس $\widehat{AOE} = \widehat{E} = \alpha$

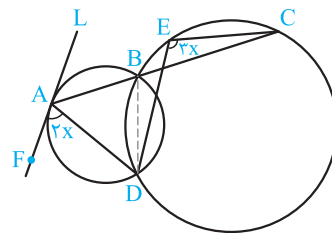
چون \widehat{AOD} زاویه مرکزی است، لذا $\widehat{AD} = \alpha$ داریم:

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{BC} - \alpha}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 3\alpha$$

$$\text{محاطی } \widehat{BDC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 36^\circ = \frac{3\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 72^\circ \Rightarrow \alpha = 24^\circ$$

۴۸ ۱ ۲ ۳ ۴



BD وتر مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. در دایره بزرگ دو زاویه \widehat{DBC} و \widehat{DEC} محاطی و روبه‌رو به کمان CD هستند،

$$\widehat{DBC} = \widehat{DEC} = 3x$$

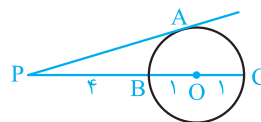
از طرفی در دایره کوچک، زاویه \widehat{ABD} محاطی و روبه‌رو به کمان AD است، هم‌چنین زاویه \widehat{DAF} ظلی روبه‌رو به کمان AD می‌باشد، پس این دو زاویه برابرند $\widehat{ABD} = \widehat{DAF} = 2x$ نهایتاً داریم:

$$\widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 180^\circ \Rightarrow 2x + 3x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$$

$$\widehat{DEC} = 3x = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$

۴۹ ۱ ۲ ۳ ۴



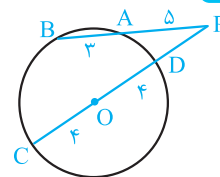
$$PA^2 = PB \cdot PC$$

$$\Rightarrow PA^2 = 4 \times 6 \Rightarrow PA = 2\sqrt{6}$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$PT^2 = PA \cdot PB = 4 \times (4 + 6 + 6) = 4 \times 16 \Rightarrow PT = 2 \times 4 = 8$$

۵۱ ۱ ۲ ۳ ۴



$$PA \cdot PB = PD \cdot PC \Rightarrow 5 \times (5 + 2) = PD \cdot (PD + 8)$$

$$\Rightarrow PD^2 + 8PD - 40 = 0 \Rightarrow PD = -4 \pm \sqrt{16 + 40}$$

$$\text{--- } PD > 0 \rightarrow PD = -4 + \sqrt{56} = -4 + 2\sqrt{14}$$

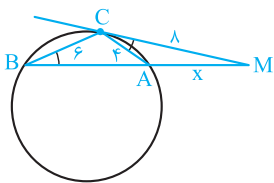
$$PO = PD + OD = -4 + 2\sqrt{14} + 4 = 2\sqrt{14}$$

۵۲ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض دو دایره مماس داخل‌اند و $O'B = O'C = 9$ و $OA = OB = 12$ دورترین نقطه دایره بزرگ از نقاط دایره کوچک نقطه A است. بزرگ‌ترین مماس از این نقطه بر دایره کوچک رسم می‌شود و داریم:

۶۲ (۴) (۳) (۲) (۱)

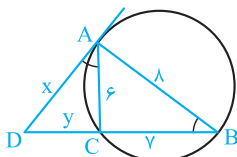
دو مثلث MAC و MCB به حالت (ز) متشابه‌اند، در نتیجه:



$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda}{MB} = \frac{\lambda}{x} \Rightarrow MB = \frac{\lambda x}{\lambda} = x \\ MC^2 = MA \cdot MB \end{cases}$$

$$12 \times x = \lambda^2 \Rightarrow x = \frac{6^2}{12} = \frac{16}{3}$$

۶۳ (۴) (۳) (۲) (۱)



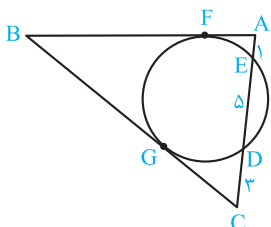
$$\triangle ADC \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+y} = \frac{6}{\lambda} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 4y \\ 4x = 3y + 21 \end{cases} \Rightarrow 16x = 9x + 84 \Rightarrow x = \frac{84}{7} = 12$$

۶۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

طول دو مماس BF و BG برابرند (BF = BG) و داریم:



$$AF^2 = AE \cdot AD$$

$$\Rightarrow AF^2 = 1 \times 6 \Rightarrow AF = \sqrt{6}$$

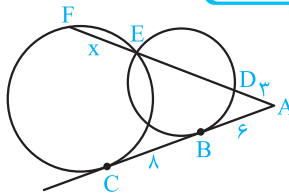
$$CG^2 = CD \cdot CE = 3 \times 8$$

$$\Rightarrow CG = 2\sqrt{6}$$

$$|BC - AB| = |BG + CG - BF - AF| = |CG - AF|$$

$$= |2\sqrt{6} - \sqrt{6}| = \sqrt{6}$$

۶۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

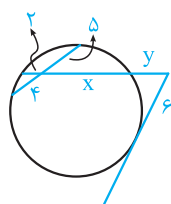


$$AB^2 = AD \cdot AE \Rightarrow 36 = 2 \times AE \Rightarrow AE = 12$$

$$AC^2 = AE \cdot AF \Rightarrow (6 + \lambda)^2 = 12 \times (12 + x) \Rightarrow 12 + x = \frac{196}{12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{49}{3} - 12 = \frac{49 - 36}{3} = \frac{13}{3}$$

۶۶ (۴) (۳) (۲) (۱)



$$2 \times x = 5 \times 4 \Rightarrow x = 10$$

$$(6\sqrt{3})^2 = y(y + x + 2)$$

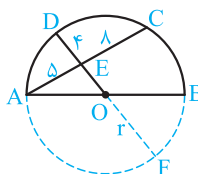
$$\Rightarrow 108 = y(y + 12)$$

$$\Rightarrow y^2 + 12y - 108 = 0$$

$$\Rightarrow (y + 18)(y - 6) = 0 \Rightarrow y = 6$$

۵۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

مطابق شکل اگر شعاع دایره را r فرض کنیم، OE = r - 4 می‌شود و داریم:



$$EF \cdot DE = AE \cdot CE$$

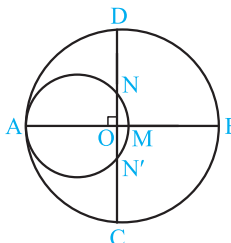
$$\Rightarrow 4(r - 4 + r) = 5 \times 8$$

$$\Rightarrow 2r - 4 = 10 \Rightarrow r = 7$$

$$OE = r - 4 = 7 - 4 = 3$$

۵۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

شعاع دایره بزرگ را R فرض می‌کنیم. داریم:



$$ON = ON' = R - 10$$

$$OM = R - 16$$

$$OA = R$$

بنابه رابطه طولی وترهای متقاطع در دایره کوچک داریم:

$$OA \times OM = ON \times ON' \Rightarrow R(R - 16) = (R - 10)(R - 10)$$

$$\Rightarrow R^2 - 16R = R^2 - 20R + 100 \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

قطر دایره کوچک AM = 2r است. پس می‌توان نوشت:

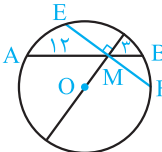
$$AM = AB - BM \Rightarrow 2r = 2R - 16$$

$$= 2 \times 25 - 16 = 50 - 16 = 34 \Rightarrow r = 17$$

$$\text{مساحت ناحیه بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(25^2 - 17^2)$$

$$= \pi(625 - 289) = 336\pi$$

۵۹ (۴) (۳) (۲) (۱)



کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M و تری است که بر قطر

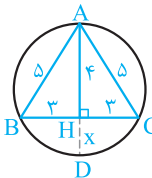
شامل در نقطه M عمود است، یعنی وتر EF.

بنابه رابطه طولی وترهای متقاطع داریم:

$$MA \cdot MB = ME \cdot MF \Rightarrow 12 \times 3 = ME \times ME \Rightarrow ME^2 = 36$$

$$\Rightarrow ME = 6 \Rightarrow EF = 2ME = 12$$

۶۰ (۴) (۳) (۲) (۱)



مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ارتفاع AH

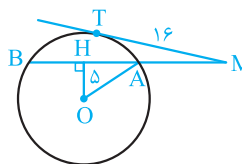
میان، نیمساز و عمودمنصف است؛ امتداد آن از وسط

کمان نظیر BC می‌گذرد و داریم:

$$AH \times DH = BH \times CH \Rightarrow x = \frac{3 \times 3}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

۶۱ (۴) (۳) (۲) (۱)

بنابه فرض 16 = MT، 32 = MB و 5 = OH. داریم:



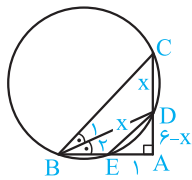
$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow 16^2 = MA \times 32 \Rightarrow MA = 8$$

$$AB = MB - MA = 32 - 8 = 24 \Rightarrow AH = BH = 12$$

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow OA = 13$$

۷۳ ۱ ۲ ۳ ۴

دو زاویه \widehat{B}_1 و \widehat{B}_2 در دایره محاطی هستند و چون BD نیمساز است داریم:



$$\begin{aligned} \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 &\Rightarrow \frac{CD}{2} = \frac{DE}{2} \\ &\Rightarrow CD = DE \\ &\Rightarrow CD = DE \end{aligned}$$

با فرض $CD = x$ داریم $DE = x$ و $AD = AC - CD = 6 - x$. در مثل قائم‌الزاویه ADE بنابه قضیه فیثاغورس داریم:

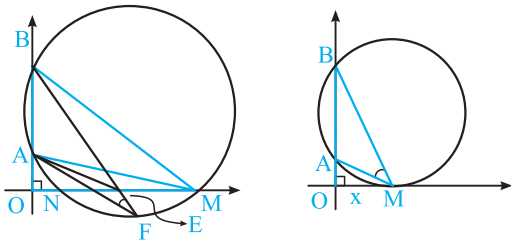
$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 \Rightarrow x^2 = (6-x)^2 + 1^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 36 - 12x + x^2 + 1 \Rightarrow 12x = 37 \Rightarrow x = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

و نهایتاً بنابه رابطه طولی امتداد وترهای متقاطع در دایره داریم:

$$\begin{aligned} AD \times AC &= AE \times AB \Rightarrow (6-x) \times 6 = 1 \times AB \\ \Rightarrow AB &= 36 - 6x \Rightarrow AB = 36 - 6 \times \frac{37}{12} = 36 - \frac{37}{2} \\ &= \frac{72 - 37}{2} = \frac{35}{2} = 17.5 \end{aligned}$$

۷۴ ۱ ۲ ۳ ۴

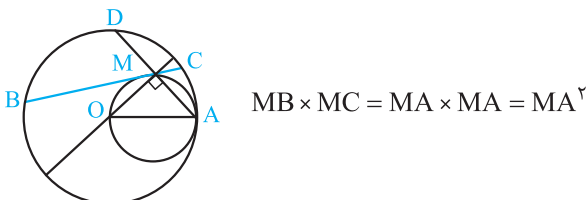
نقطه دلخواه M را روی محور افقی در نظر می‌گیریم. دایره‌گذرنده از نقاط A, M, B را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی دیگر آن با محور افقی را N می‌نامیم. هر نقطه مانند E روی پاره خط MN داخل دایره، رأس زاویه‌ای است که از زاویه \widehat{AMB} بزرگ‌تر است. زیرا دو زاویه محاطی M و F برابرند و بنابه زاویه خارجی، زاویه \widehat{AEB} بزرگ‌تر از زاویه \widehat{AMB} است. بنابراین زاویه \widehat{AMB} وقتی ماکزیمم است که دایره‌گذرنده از نقاط A و B بر محور افقی مماس باشد و بنابه رابطه طولی مماس و قطعات قاطع داریم:



$$OM^2 = OA \times OB \Rightarrow x^2 = 5 \times 8 = 4 \times 10 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

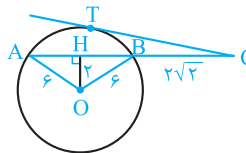
۷۵ ۱ ۲ ۳ ۴

\widehat{OMA} روبرو به قطر است، پس قائمه است ($\widehat{OMA} = 90^\circ$). بنابه رابطه طولی وترهای متقاطع در دایره بزرگ داریم $MB \times MC = MA \times MD$ از طرفی قطر شامل OM عمود بر وتر AD در دایره بزرگ، وتر AD را نصف می‌کند $MA = MD$. پس:



$$MB \times MC = MA \times MA = MA^2$$

۶۷ ۱ ۲ ۳ ۴

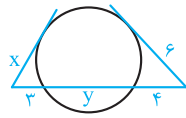


$$\begin{aligned} AH^2 &= BH^2 = OA^2 - OH^2 \\ &= 6^2 - 2^2 = 32 \Rightarrow AH = BH = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$AC = AB + BC = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$CT^2 = BC \cdot AC = 2\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} = 40 \Rightarrow CT = 2\sqrt{10}$$

۶۸ ۱ ۲ ۳ ۴

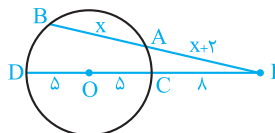


$$6^2 = 4(4+y) \Rightarrow 4+y = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow y = 5$$

$$x^2 = 3(3+y) = 3(3+5) = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

۶۹ ۱ ۲ ۳ ۴

نزدیک‌ترین نقطه دایره تا نقطه P ، تقاطع خط شامل OP با دایره است، یعنی PC . بنابه فرض $PC = 8$ ، $OC = OD = 5$ و $PA = 2 + AB$ داریم:



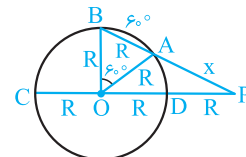
$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\ \Rightarrow (x+2)(x+2+x) &= 8(8+10) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(x+2)(x+1) = 8 \times 18 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 72$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 70 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow AB = 7$$

۷۰ ۱ ۲ ۳ ۴

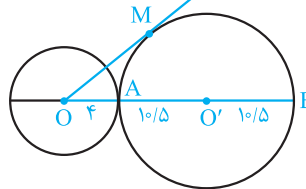
فاصله نقطه P تا دورترین نقاط دایره، PC می‌باشد. بنابه فرض $PC = 3R$ ، در نتیجه $PD = R$ چون کمان AB برابر 60° است، پس زاویه مرکزی $\widehat{AOB} = 60^\circ$ است و مثلث AOB متساوی‌الاضلاع می‌شود



لذا $AB = R$ و داریم:

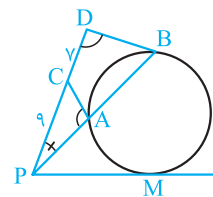
$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PD \cdot PC \Rightarrow x(x+R) = R \times 3R \Rightarrow x^2 + Rx - 3R^2 = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 12R^2}}{2} \quad x > 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}R - R}{2} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}R \end{aligned}$$

۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\begin{aligned} OM^2 &= OA \cdot OB \\ &= 4(4 + 10/5 + 10/5) \\ \Rightarrow OM^2 &= 4 \times 25 = 100 \\ \Rightarrow OM &= 10 \end{aligned}$$

۷۲ ۱ ۲ ۳ ۴



$$\begin{aligned} (\widehat{P} = \widehat{P} \quad , \quad \widehat{PAC} = \widehat{PDB}) \\ \Rightarrow \triangle APC \sim \triangle DPB \\ \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD} \\ \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD \end{aligned}$$

از طرفی بنابه رابطه طولی مماس و قاطع داریم $PM^2 = PA \cdot PB$ پس:

$$PM^2 = PC \cdot PD = 9 \times (9+7) = 9 \times 16 \Rightarrow PM = 3 \times 4 = 12$$

روش دوم: در مثلث‌های قائم‌الزاویه AMO و BMO بنابه قضیه فیثاغورس داریم:

$$MA^2 = MB^2 = OM^2 - OA^2 = (4 + 4\sqrt{2} - 4)^2 - 4^2 = 32 - 16 = 16 \Rightarrow MA = MB = 4$$

بنابراین چهارضلعی AMBO مربع است، در نتیجه:

$$OH = \frac{OM}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

۸۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

بنابه فرض، دایره به مرکز O و شعاع R در نقاط B و C بر ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC مماس است. پس OA عمودمنصف BC می‌باشد. بنابه فرض AH = 4 و BC = 6، در نتیجه BH = CH = 3 و

و $AB = AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\Delta ABH \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{BH}{OB}$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{3}{R} \Rightarrow R = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

۸۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

در چهارضلعی ABOC جمع زوایا 360° است. پس با فرض $\hat{A} = 60^\circ$ داریم $\hat{BOC} = 120^\circ$ و OA نیمساز این دو زاویه است. داریم:

$$OB = \frac{OA}{2} \Rightarrow 1 = \frac{OA}{2} \Rightarrow OA = 2$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$S(ABOC) = 2S(ABO) = 2 \times \frac{1}{2} OB \times AB = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

مساحت قطاع BOC برابر است با $\frac{\pi \times 1^2 \times 120}{360} = \frac{\pi}{3}$ ، در نتیجه مساحت ناحیه رنگی برابر $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ می‌باشد.

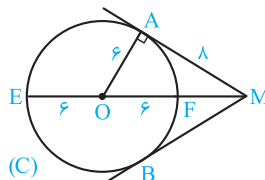
۸۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

فرض کنیم $CE = x$ ، در این صورت $BE = BC - x = 6 - x$ و با توجه به خاصیت مماس‌های مرسوم بر دایره نتیجه می‌شود $EF = BE = 6 - x$ و $DF = AD = 6$ و DEC می‌نویسیم:

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 \Rightarrow (6 + 6 - x)^2 = 10^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 144 + x^2 - 24x = 100 + x^2 \Rightarrow x = \frac{44}{24} = \frac{11}{6}$$

جهت یافتن دورترین نقاط دایره از نقطه M، نقطه M را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و نقاط تقاطع خط OM با دایره را پیدا می‌کنیم. مطابق شکل، ME جواب است. برای یافتن طول آن، طول OM را به کمک قضیه فیثاغورس به دست می‌آوریم:



$$OM^2 = OA^2 + MA^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow OM = 10$$

$$ME = OM + OE = 10 + 6 = 16$$

۷۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌خواهیم طول پاره‌خط AD را به دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه ABO اندازه زوایای حاده 30° و 60° است. پس داریم:

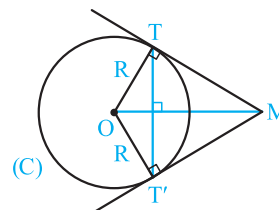
$$AB = \frac{OA}{2} \Rightarrow OA = 2AB = 2 \times 1 = 2$$

$$OB = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \Rightarrow OD = OB = \sqrt{3}$$

$$AD = OA - OD = 2 - \sqrt{3}$$

۷۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

مطابق شکل از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دایره C(O;R) رسم شده‌اند. می‌دانیم OM عمودمنصف TT' است. با فرض $OM = 6$ و $R = 2\sqrt{3}$ می‌خواهیم طول پاره‌خط TT' را به دست آوریم. چون قطرهای چهارضلعی MTOT' بر هم عمودند، پس مساحت آن برابر $\frac{OM \times TT'}{2}$ است. از طرفی مساحت همین چهارضلعی برابر $2S(OTM) = OT \times MT$ است، پس می‌توان نوشت:



$$\frac{OM \times TT'}{2} = OT \times MT \Rightarrow TT' = \frac{2OT \times MT}{OM}$$

$$= \frac{2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{OM^2 - OT^2}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2}}{3}$$

$$\Rightarrow TT' = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{36 - 12}}{3} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{24}}{3}$$

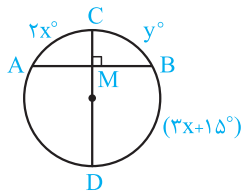
$$= \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{2}$$

۷۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

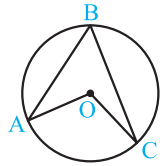
روش اول: فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا نقطه M برابر MC است. بنابه فرض $MC = 4(\sqrt{2} - 1)$ و در مثلث قائم‌الزاویه OAM داریم:

$$OA^2 = OH \cdot OM \Rightarrow 4^2 = OH(OC + MC)$$

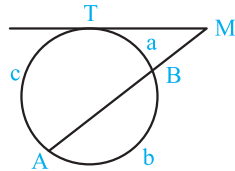
$$\Rightarrow 16 = OH(4 + 4\sqrt{2} - 4) \Rightarrow OH = \frac{16}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



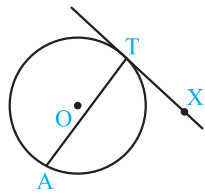
۲۶. در شکل مقابل، قطر CD در نقطه M بر وتر AB عمود است. اگر $\widehat{AC} = 2x^\circ$ و $\widehat{BC} = y^\circ$ و $\widehat{BD} = (3x+15)^\circ$ آن‌گاه x و y را محاسبه کنید. (نهایی- شهریور ۹۵)



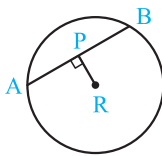
۲۷. در دایره به مرکز O ، اگر $\widehat{AOC} = (3\alpha+12)^\circ$ و $\widehat{ABC} = (\alpha+16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه مرکزی AOC و زاویه محاطی ABC را محاسبه کنید. (نهایی- فرورد ۹۵)



۲۸. خط مماس بر دایره در نقطه T و امتداد وتر AB ، در نقطه M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB} = a$ ، $\widehat{AT} = c$ ، $\widehat{BA} = b$ و $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ اندازه زاویه M را تعیین کنید. (نهایی- فرورد ۹۴)



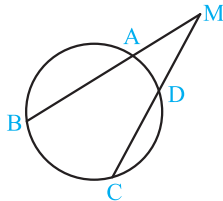
۲۹. اگر اندازه زاویه ظلی ATX مساوی $(2\alpha-6)^\circ$ و اندازه کمان \widehat{AT} برابر $(3\alpha+33)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه ATX را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۴)



۳۰. با توجه به شکل روبه‌رو، اگر طول شعاع 10 و $PR = 6$ ، آن‌گاه طول AP و AB را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۳)

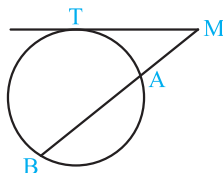
قسمت دوم: رابطه‌های طولی در دایره

(نهایی- دی ۹۵، فرورد ۹۵ و فرورد ۹۴)



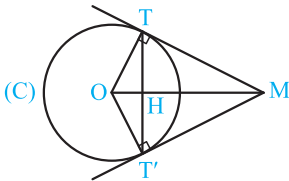
۳۱. ثابت کنید هرگاه وترهای AB و CD در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA \cdot MB = MD \cdot MC$.

۳۲. ثابت کنید اگر امتداد دو وتر AB و CD مطابق شکل در نقطه M متقاطع باشند، آن‌گاه $MA \cdot MB = MD \cdot MC$. (نهایی- فرورد ۹۴)



۳۳. ثابت کنید اگر مطابق شکل از نقطه M یک خط مماس و یک قاطع بر دایره مفروض رسم کنیم، آن‌گاه $MT^2 = MA \times MB$. (نهایی- دی ۹۱ و فرورد ۹۳)

(نهایی- شهریور ۹۵ و شهریور ۹۳)



۳۴. ثابت کنید اندازه دو مماسی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، با هم برابر است.

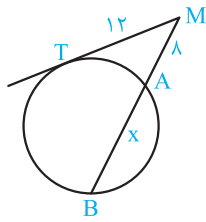
۳۵. در شکل مقابل از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دایره $C(O, R)$ رسم شده است. (ا) ثابت کنید OM نیمساز زوایای TMT' و TOT' است. (ب) ثابت کنید OM عمودمنصف TT' است.

۳۶. ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، دو برابر واسطه هندسی شعاع‌های دو دایره است.

۳۷. ثابت کنید خط‌المركزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست.

۳۸. دایره $C(O, R)$ و نقطه M در خارج این دایره داده شده‌اند. از نقطه M بر این دایره دو مماس رسم کنید (مراحل رسم را توضیح دهید).

(نهایی- فرورد ۹۴)

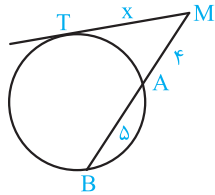


(نهایی- دی ۹۵)

۳۹. با توجه به شکل مقابل، مقدار x را تعیین کنید.

(نهایی- دی ۹۵)

۴۰. دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها را به دست آورید.



(نهایی- شهریور ۹۵)

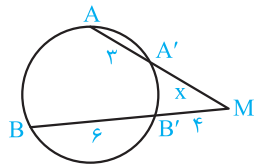
۴۱. در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.

(نهایی- فرورداد ۹۵)

۴۲. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المركزین $d = 13$ برابر $5x - 8$ باشد.

(نهایی- شهریور ۹۴)

۴۳. مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۳ و خط‌المركزین $d = 13$ برابر $5a - 3$ باشد.



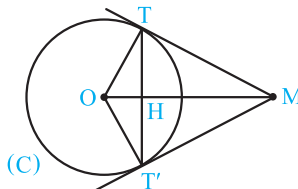
(نهایی- دی ۹۴)

۴۴. در شکل مقابل مقدار x را محاسبه کنید.

(نهایی- دی ۹۴)

(نهایی- دی ۹۴)

۴۵. دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۴ سانتی‌متر مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $3x + 1$ باشد.



(نهایی- شهریور ۸۶)

(نهایی- شهریور ۸۶)

۴۶. دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره $C(O, R)$ مماس‌اند. H نقطه برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:

(آ) خط OM نیمساز زاویه‌های $\widehat{TMT'}$ و $\widehat{TOT'}$ است.

(ب) $TT'.OM = 2R.MT$

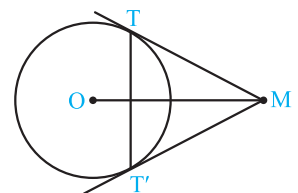
(نهایی- فرورداد ۹۳)

(نهایی- فرورداد ۹۳)

۴۷. دایره $C(O, 5)$ و نقطه M به فاصله $5\sqrt{2}$ از مرکز دایره C داده شده‌اند. MT و MT' در نقاط T و T' بر این دایره مماس‌اند.

(آ) طول مماس‌های MT و MT' را به دست آورید.

(ب) نوع چهارضلعی $OTMT'$ را با ذکر دلیل مشخص کنید.



(نهایی- شهریور ۸۸)

(نهایی- شهریور ۸۸)

۴۸. دایره $C(O, 4)$ و نقطه M به فاصله ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید، خط‌های MT و MT' بر این دایره مماس‌اند (T و T' نقطه‌های تماس‌اند).

(آ) طول مماس‌های MT و MT' را به دست آورید.

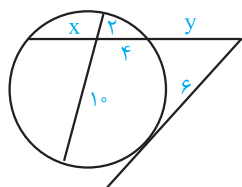
(ب) طول وتر TT' را به دست آورید.

(پ) اندازه زاویه $\widehat{TMT'}$ و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.

(نهایی- فرورداد ۹۳)

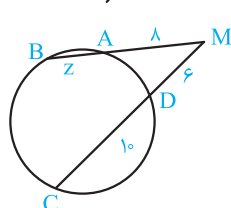
(نهایی- فرورداد ۹۳)

۴۹. دو دایره به شعاع ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $5x + 2$ باشد.



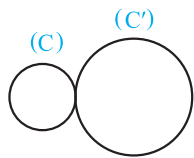
(نهایی- شهریور ۹۳)

۵۰. در شکل مقابل مقدارهای x و y را به دست آورید.



(نهایی- شهریور ۹۲)

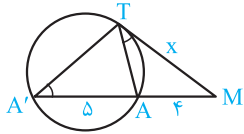
۵۱. با توجه به شکل، مقدار z را بیابید.



(نهایی- فرداد ۹۱)

۵۲. شکل مقابل نشان‌دهنده دو دایره مماس برون است.

(آ) این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟
(ب) اگر $R = ۴$ و $R' = ۹$ ، آنگاه اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها را به دست آورید.

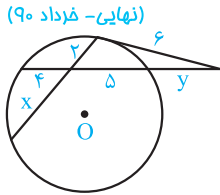


(نهایی- دی ۹۰)

۵۳. مقدار x را در شکل روبه‌رو به دست آورید.

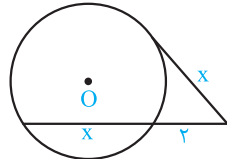
۵۴. مقدار a را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط‌المركزین $d = ۱۰$ ، برابر $۳a - ۱$ باشد. سپس تعیین کنید، این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارند.

۵۵. طول خط‌المركزین در دو دایره متقاطع به شعاع ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.



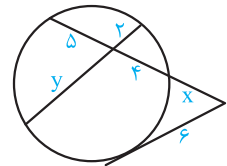
(نهایی- دی ۸۹)

۵۶. با توجه به شکل، مقدار x و y را به دست آورید.



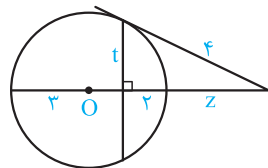
(نهایی- شهریور ۸۸)

۵۷. در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



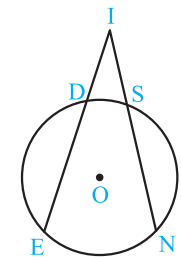
(نهایی- دی ۸۶)

۵۸. در شکل مقابل x و y را به دست آورید.



(نهایی- شهریور ۸۵)

۵۹. در شکل مقابل مقدار z و t را به دست آورید (O مرکز دایره است).



(نهایی- دی ۸۴)

۶۰. در شکل روبه‌رو دو قاطع IE و IN با هم برابرند. ثابت کنید $IS = ID$

۶۱. دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول خط‌المركزین دو دایره را به دست آورید. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (نهایی- شهریور ۸۶)

۶۲. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند، مقدار x را چنان تعیین کنید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $(۲x - ۲)$ باشد. (نهایی- فرداد ۸۷)

۶۳. دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط‌المركزین برابر $۲x + ۱$ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۲x$ سانتی‌متر باشد، مقدار x را محاسبه کنید. (نهایی- فرداد ۸۸)

۶۴. اگر شعاع‌های دو دایره نامساوی باشند، ثابت کنید مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المركزین آن‌ها هم‌مس‌اند.

۶۵. ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره هم‌مس‌اند.