۱

بخش

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

تابع ۱

فصل اول ریاضی ۳، در امتحان نوبت اول، ۷ نمره و در نوبت دوم، ۲ نمره و در شهریور و دی، ۳ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون توابع چندجمله‌ای، توابع یکنوا و اکیداً یکنوا، ترکیب توابع، رسم نمودار به کمک انتقال، قرینه و ... وارون تابع و ویژگی‌های آن مطرح شده است.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بسته ۱ | بسته ۲ و ۳ | بسته ۴

بسته اول

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

صفحه ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

بستهٔ اول شامل تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع صعودی و نزولی است که معمولاً در امتحان نهایی به‌صورت درست یا نادرست و هم‌چنین تکمیل‌کردن جای خالی، از آن سؤال مطرح می‌شود.

الف توابع چند جمله‌ای

توابعی را که ضابطهٔ آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ که در آن $a_۰$، $a_۱$، ... و a_n اعداد حقیقی، $a_n \neq ۰$ و $n\in\mathbb{W}$، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌گوییم.

! نکته دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ خواهد بود. برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد، همواره برابر $\mathbb{R}$ است.

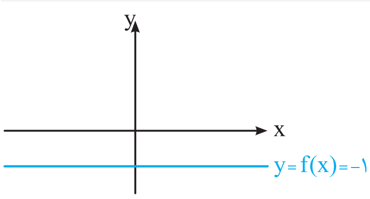
مثال هریک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشند: $g(x)=-۳x^۲+۵x+۱$ $\quad$ $f(x)=۲x^۵-۴x^۳-\frac{۱}{۲}x+۳$

f یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ فرد ۵ است و در نتیجه برد تابع f برابر $\mathbb{R}$ است.

یادآوری با انواع توابع چندجمله‌ای قبلاً آشنا شده‌ایم، تعریف آن‌ها به‌صورت یادآوری گفته می‌شود:

۱ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=a$ است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به‌صورت یک خط به موازات محور x ها می‌باشد.

مثال نمودار تابع $f(x)=-۱$ به‌صورت مقابل است:



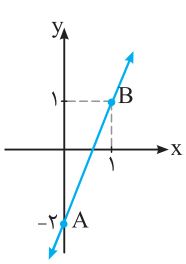
۲ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$، $a\neq ۰$ می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطهٔ دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

مثال تابع $f(x)=۳x-۲$ یک تابع دو جمله‌ای از درجهٔ اول است. برای رسم نمودار، دو نقطهٔ دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۳(۰)-۲=-۲ \Rightarrow A(۰,-۲)$$

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)=۳(۱)-۲=۱ \Rightarrow B(۱,۱)$$

دو نقطهٔ A و B را روی دستگاه مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.



۳ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ ، $a \neq ۰$ است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم: $S(x = -\frac{b}{۲a}, f(-\frac{b}{۲a}) = -\frac{\Delta}{۴a})$

اگر $a > ۰$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است. در سهمی خط $x = -\frac{b}{۲a}$ ، محور تقارن سهمی است.

! نکته برای رسم سهمی می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

سؤال **نمودار تابع درجه دوم به معادلهٔ $f(x) = -x^۲ + ۶x - ۵$ را رسم کنید.**

پاسخ ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

$$x_s = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۶}{۲(-۱)} = ۳ \Rightarrow y_s = f(۳) = -۹ + ۱۸ - ۵ = ۴$$

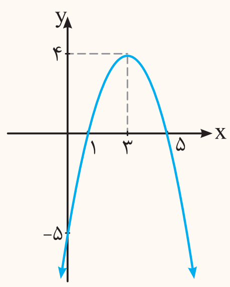
حالا مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را نیز به دست می‌آوریم:

$$x = ۰ \Rightarrow y = -۵ \quad , \quad y = ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۶x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲ - ۶x + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۱)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = ۵$$

S

x	۰	۱	۳	۵
y	-۵	۰	۴	۰

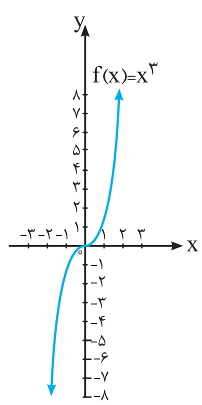


علاوه بر نمودارهایی که تاکنون یادگرفته‌اید، نمودار $y = x^۳$ را نیز حفظ کنید که با توجه به آن و به کمک انتقال و ... نمودارهای دیگری را رسم می‌کنیم.

تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ ، $a \neq ۰$ یک تابع درجهٔ ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

نمودار تابع $y = x^۳$ به کمک نقطه‌یابی به‌صورت مقابل است:



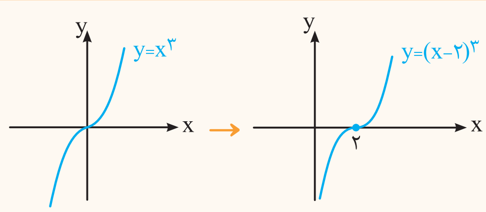
x	$f(x) = x^۳$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

! نکته فقط نمودار توابعی به صورت $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به‌صورت $y = a(x - b)^۳ + c$ نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطهٔ تابع $y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱$ به‌صورت $y = (x + ۱)^۳$ است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

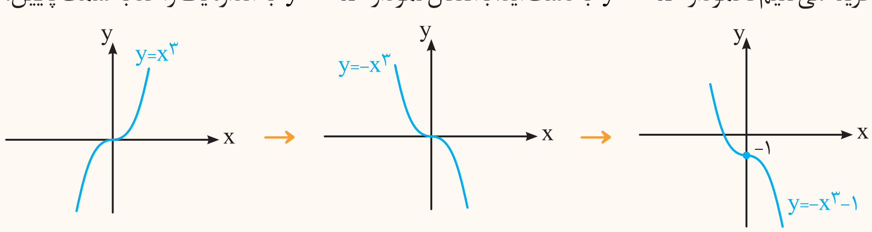
سؤال **نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.**

۱) $y = (x - ۲)^۳$ ۲) $y = -x^۳ - ۱$

پاسخ ۱) اگر نمودار $y = x^۳$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y = (x - ۲)^۳$ به‌دست می‌آید.



۲) ابتدا نمودار $y = x^۳$ را نسبت به محور x هاقرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -x^۳$ به‌دست آید. با انتقال نمودار $y = -x^۳$ به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین، نمودار $y = -x^۳ - ۱$ رسم می‌شود:



تلنگر:حواست باشه

مقایسهٔ نمودار توابع $y = x^{۲}$ و $y = x^{۳}$ که در یک بازه، کدام بالاتر و یا پایین‌تر قرار می‌گیرد، از سؤالات امتحانی است.

سؤال **نمودار توابع $y = x^{۲}$ و $y = x^{۳}$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید که در کدام بازه، نمودار $y = x^{۲}$ بالاتر از نمودار $y = x^{۳}$ قرار می‌گیرد؟**

پاسخ برای مقایسهٔ نمودار دو تابع، ابتدا نقاطی را که مقدار دو تابع برابر می‌شوند را مشخص می‌کنیم. یعنی باید معادلهٔ $x^{۲} = x^{۳}$ را حل کنیم:

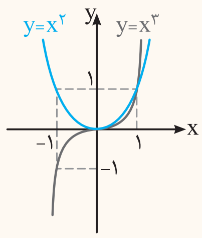
$$x^{۲} = x^{۳} \Rightarrow x^{۲} - x^{۳} = ۰ \Rightarrow x^{۲}(۱-x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ ۱ - x = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

پس دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = ۰$ و $x = ۱$ بر هم منطبق‌اند.

از دو نقطهٔ کمکی دیگر نیز برای رسم نمودار استفاده می‌کنیم.

نمودار دو تابع در یک دستگاه به‌صورت مقابل است:

با توجه به نمودار، در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ و $(۰, ۱)$، نمودار $y = x^{۲}$ بالاتر از نمودار $y = x^{۳}$ قرار دارد و در بازهٔ $(۱, +\infty)$، نمودار $y = x^{۳}$ بالاتر از نمودار $y = x^{۲}$ قرار دارد.



x	-۱	۰	۱	۲
$y = x^{۲}$	۱	۰	۱	۴
$y = x^{۳}$	-۱	۰	۱	۸

در این قسمت، تعریف توابع یکنوا و اکیداً یکنوا را یاد می‌گیریم. توابعی را بررسی می‌کنیم که ابتدا نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم و سپس به سؤالات پاسخ می‌دهیم.

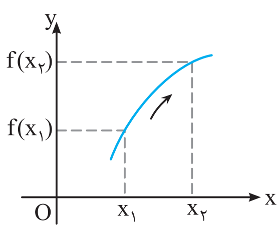
ب توابع اکیداً صعودی و نزولی

فرض کنیم $A \subseteq D_f$ باشد؛

تعریف می‌گوییم تابع f روی A اکیداً صعودی است هرگاه برای هر $x_{۱}, x_{۲} \in A$ داشته باشیم:

$$x_{۱} < x_{۲} \Rightarrow f(x_{۱}) < f(x_{۲})$$

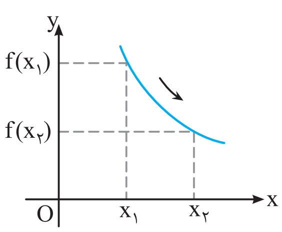
در نمودار توابع اکیداً صعودی، وقتی روی محور x ها، از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار همواره در حال بالا رفتن است.



تعریف می‌گوییم f روی A اکیداً نزولی است، هرگاه برای هر $x_{۱}, x_{۲} \in A$ داشته باشیم:

$$x_{۱} < x_{۲} \Rightarrow f(x_{۲}) < f(x_{۱})$$

در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنهٔ f افزایش می‌یابد، مقدار y کاهش می‌یابد. در واقع نمودار از چپ به راست، در حال پایین آمدن است.



تعریف به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

توابع صعودی و نزولی

تعریف تابع f روی A صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_{۱}, x_{۲} \in A$:

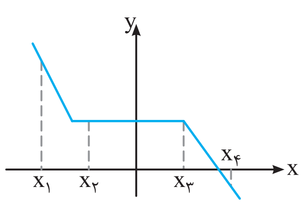
$$x_{۱} < x_{۲} \Rightarrow f(x_{۱}) \le f(x_{۲})$$

و تابع f روی A نزولی است اگر و تنها اگر برای هر $x_{۱}, x_{۲} \in A$:

$$x_{۱} < x_{۲} \Rightarrow f(x_{۲}) \le f(x_{۱})$$

مثال در نمودار زیر، هرچه مقدار x در دامنهٔ تابع f بیش‌تر می‌شود، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند. طبق تعریف، تابع f، تابعی نزولی است.

$$x_{۱} < x_{۲} < x_{۳} < x_{۴} \Rightarrow f(x_{۱}) > f(x_{۲}) = f(x_{۳}) > f(x_{۴})$$



تعریف به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

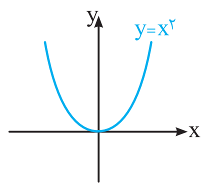
تلنگر:حواست باشه

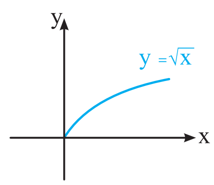
تعریف تابع ثابت و این نکته که تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است، در امتحان مطرح می‌شود.

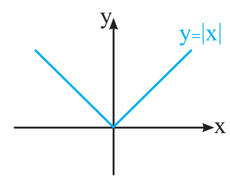
تعریف تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد.

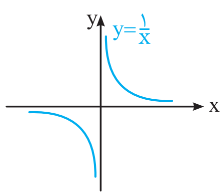
! نکته با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در نتیجه تابعی یکنوا است.

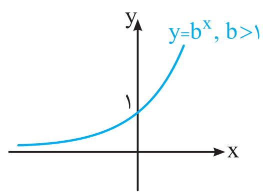
یادآوری در این قسمت برخی از نمودارهایی را که باید به عنوان نمودار اصلی حفظ باشیم و از آن‌ها در یکنوایی استفاده کنیم را رسم کرده‌ایم:

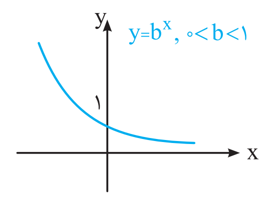


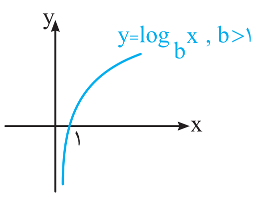


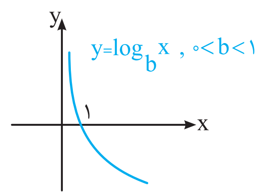


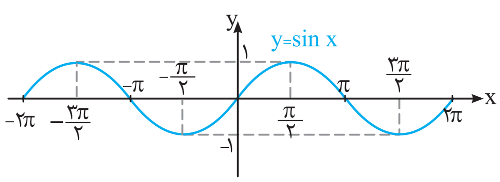


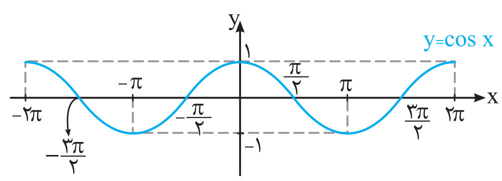






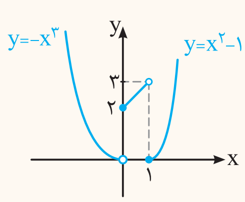






سؤال نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۱ \\ x+۲ & ۰\leq x<۱ \\ -x^{۳} & x<۰ \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است.

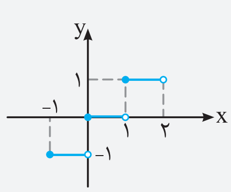
پاسخ با رسم سهمی $y=x^{۲}-۱$ در بازهٔ $[۱,+\infty)$، خط $y=x+۲$ در بازهٔ $[۰,۱)$ و تابع درجه سوم $y=-x^{۳}$ در بازهٔ $(-\infty,۰)$، نمودار تابع f به دست می‌آید:



با توجه به نمودار تابع f، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$، تابعی اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[۰,۱)$، تابعی اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۱,+\infty)$، تابعی اکیداً صعودی است. توجه کنید که تابع f روی $\mathbb{R}$، اکیداً یکنوا نیست.

! نکته تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند خطی به موازات محور x ها باشد.

مثال تابع $y=[x]$ که نمودار آن به‌صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.



بسته ۱ پرسش‌های تشریحی
توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱ . تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. (دی ۹۷، خرداد ۹۸)

۲ . دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. (شهریور ۱۴۰۰)

۳ . تابع $y = -x^۳ + ۲$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. (شهریور ۹۸)

۴ . تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. (شهریور ۱۴۰۰)

۵ . تابع $y = \sqrt{۲}x^۳ - \frac{۳}{۴}x$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است. (دی ۱۴۰۰)

۶ . برد تابع $f(x) = ۴x^۳ + x - ۱$ برابر $\mathbb{R}$ است.

● در سؤال‌های ۷ تا ۱۲، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۷ . توابع اکیداً یکنوا، همواره .... هستند. (شهریور ۹۹)

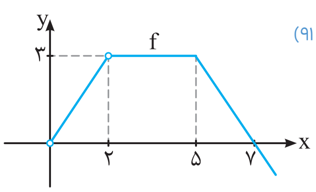
۸ . در بازهٔ $(۰,۱)$ ، نمودار تابع $y = x^۳$ ، .... نمودار تابع $y = x^۲$ قرار دارد. (دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

۹ . تابع $y = (x+۱)^۳$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی - نزولی) است. (خرداد ۹۸)

۱۰ . تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود. (دی ۹۸)

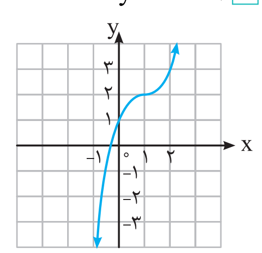
۱۱ . تابع $y = ۲^x$ در دامنهٔ تعریف خود .... (اکیداً صعودی - اکیداً نزولی) است.

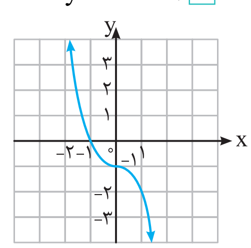
۱۲ . تابع f با نمودار مقابل در بازهٔ .... اکیداً صعودی و در بازهٔ .... اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۲,۵]$ ، .... است. (خرداد ۹۱)

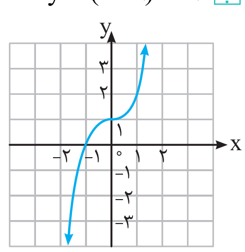


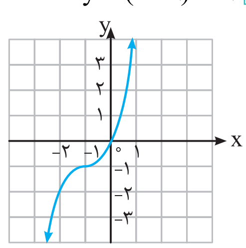
۱۳ . ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

آ $y = x^۳ + ۱$ ب $y = -x^۳ - ۱$ پ $y = (x-۱)^۳ + ۲$ ت $y = (x+۱)^۳ - ۱$


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

● نمودار توابع سؤالات ۱۴ تا ۱۸ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۱۴ . $y = x^۳ - ۱$ ۱۶ . $y = (x+۲)^۳ - ۱$ ۱۸ . $y = -(x-۱)^۳ - ۱$

۱۵ . $y = -x^۳ - ۲$ ۱۷ . $y = (x-۱)^۳ + ۲$

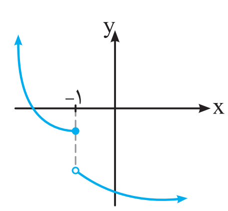
۱۹ . نمودار توابع $y = x^۲$ و $y = x^۳$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه، نمودار کدام تابع بالاتر و کدام پایین‌تر است؟

(فعالیت صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

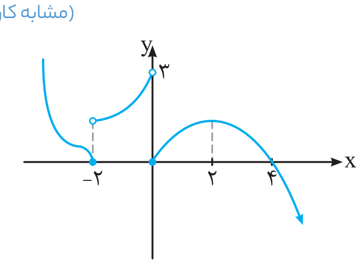
● در هر کدام از توابع سؤالات ۲۰ و ۲۱، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۲۰ .



۲۱ .



۲۲ . روی بازهٔ $[۰,۲]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازهٔ $[۰,۱]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[۱,۲]$ اکیداً نزولی باشد.

۲۳ . نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۲۴ . نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<-۲ \\ ۱ & -۲<x<۱ \\ -۲x & x>۱ \end{cases}$$

۲۵ . ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیریکنوا باشد.

● **نمودار توابع سؤالات ۲۶ تا ۳۲ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.**

۲۶ . $f(x)=-x^{۲}+۴x$

۲۷ . $f(x)=x+|x|$

۲۸ . $f(x)=\sqrt[۳]{x}$

۲۹ . $f(x)=\dfrac{۱}{x}$

۳۰ . $f(x)=-x^{۳}+۲$

۳۱ . $f(x)=x^{۲}\,|x|$

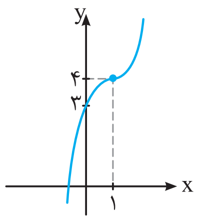
۳۲ . $f(x)=\cos x\,,\ x\in[-\pi,۲\pi]$

۳۳ . نمودار هر یک از توابع $y=b^{x}$ و $y=\log_b x$ را در حالت‌های $b>۱$ و $۰<b<۱$ رسم کنید و در هر حالت نوع یکنوایی تابع را مشخص کنید. هم‌چنین با رسم توابع $y=۲^{x}-۲$ و $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$ ، نوع یکنوایی آن‌ها را مشخص کنید.

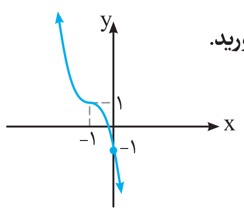
۳۴ . تابع $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x>۱ \\ ۲ & ۰<x\le ۱ \\ -x-۱ & x\le ۰ \end{cases}$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۳۵ . نمودار تابع $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۲$ را رسم کنید.

۳۶ . نمودار تابع $y=a(x-b)^{۳}+c$ به‌صورت مقابل است. مقادیر a ، b و c را مشخص کنید.



۳۷ . نمودار تابع $f(x)=a(x+b)^{۳}+c$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=b(x-a)^{۳}+c$ باشد، مقدار $g(۲)$ را به‌دست آورید.



۳۸ . نمودار $f(x)=x^{۳}$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود. نمودار توابع f و g با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

بستهٔ دوم
ترکیب توابع
صفحه ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

در این قسمت از دو تابع f و g، تابع جدیدی می‌سازیم که به آن ترکیب توابع می‌گوییم. مسائل مهم در این درسنامه به دست آوردن ضابطهٔ تابع مرکب، مقدار عددی و دامنهٔ تابع مرکب با استفاده از تعریف است.

ترکیب توابع

تعریف ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم (بخوانید اف اُ جی) و به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog: x\longrightarrow f(g(x))$ تعریف می‌کنیم.

نمودار ترکیب دو تابع به‌صورت مقابل است:

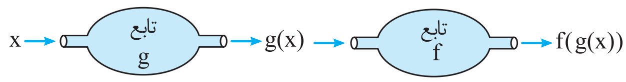
$$x\xrightarrow{g} g(x)\xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

مراحل ساخت تابع fog:

۱ x باید در دامنهٔ g باشد. در مرحلهٔ اول، x ورودی و $g(x)$ خروجی است.

۲ $g(x)$ باید در دامنهٔ f باشد. در مرحلهٔ دوم، $g(x)$ ورودی و $f(g(x))$ خروجی است.



! نکته برای به‌دست آوردن ضابطهٔ $(fog)(x)$، در تابع f به جای x ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.

سؤال اگر $f(x)=3x-2$ و $g(x)=4x-5$ دو تابع باشند، ضابطهٔ هریک از توابع fog و gof را مشخص کنید.

پاسخ اگر در ضابطهٔ تابع f به جای x، $g(x)$ قرار دهیم، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(4x-5)=3(4x-5)-2=12x-15-2=12x-17$$

هم‌چنین با قرار دادن $f(x)$ به جای x در ضابطهٔ تابع g، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x-2)=4(3x-2)-5=12x-8-5=12x-13$$

! نکته همان‌طور که در این سؤال می‌بینیم، ضابطهٔ fog و gof لزوماً یکی نیستند. ممکن است در مثال‌هایی fog و gof یکسان شوند.

سؤال اگر $f(x)=x^2-5x+2$ و $g(x)=2x-1$ باشند، جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=-4$ را مشخص کنید. **مشابه تمرین ۹ کتاب درسی**

پاسخ ضابطهٔ تابع fog را به‌دست می‌آوریم و آن را مساوی -4 قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)^2-5(2x-1)+2$$

$$(fog)(x)=-4 \Rightarrow (2x-1)^2-5(2x-1)+2=-4$$

با فرض $2x-1=A$، داریم:

$$A^2-5A+2=-4 \Rightarrow A^2-5A+6=0 \Rightarrow (A-2)(A-3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=2 \\ 2x-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 2x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=2 \end{cases}$$

! تلنگر: حواست باشه

اینکه ضابطهٔ دو تابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم مقدار عددی fog یا gof را به دست بیاوریم، در سؤالات امتحان نهایی وجود دارد.

سؤال اگر $f(x)=\sqrt{2x+1}$ و $g(x)=\frac{x}{x+1}$ دو تابع باشند، مقدار عددی $(fog)(-3)$ و $(gof)(4)$ را به‌دست آورید.

پاسخ مقدار عددی $(fog)(-3)$ برابر $f(g(-3))$ است. ابتدا مقدار $g(-3)$ را با قرار دادن عدد -3 به جای x در ضابطهٔ g به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{x}{x+1} \Rightarrow g(-3)=\frac{-3}{-3+1}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2} \Rightarrow f(g(-3))=f(\frac{3}{2})$$

حال باید در ضابطهٔ f به جای x، $\frac{3}{2}$ قرار دهیم:

$$f(x)=\sqrt{2x+1} \Rightarrow f(\frac{3}{2})=\sqrt{2\times\frac{3}{2}+1}=\sqrt{3+1}=2 \Rightarrow (fog)(-3)=2$$

برای به‌دست آوردن مقدار $(gof)(4)$، یعنی $g(f(4))$ ابتدا مقدار $f(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{2x+1} \Rightarrow f(4)=\sqrt{2\times4+1}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow g(f(4))=g(3)$$

حال باید مقدار $g(3)$ را از ضابطهٔ $g(x)$ به‌دست بیاوریم:

$$g(x)=\frac{x}{x+1} \Rightarrow g(3)=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4} \Rightarrow g(f(4))=g(3)=\frac{3}{4}$$

سؤال اگر $f = \{(۲,-۱),(۱,۴),(۳,۰),(۵,۲)\}$ و $g = \{(۴,۲),(۳,۱),(۲,۱),(۱,۶)\}$ دو تابع باشند، هریک از توابع **fog** و **gog** را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

مشابه تمرین ۱ کتاب درسی

پاسخ برای مشخص کردن تابع fog، ابتدا تابع g روی g اثر می‌کند:

$۳ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۴$ ، $(fog)(۳) = ۴$

$۴ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} -۱$ ، $(fog)(۴) = -۱$

$۱ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f} ?$ ، $(fog)(۱)$ وجود ندارد

$۲ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۴$ ، $(fog)(۲) = ۴$

$$\Rightarrow fog = \{(۴,-۱),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

برای مشخص کردن تابع gog، داریم:

$(gog)(۴) = g(g(۴)) = g(۲) = ۱ \Rightarrow (۴,۱) \in gog$, $(gog)(۳) = g(g(۳)) = g(۱) = ۶ \Rightarrow (۳,۶) \in gog$

$(gog)(۲) = g(g(۲)) = g(۱) = ۶ \Rightarrow (۲,۶) \in gog$, $(gog)(۱) = g(g(۱)) = g(۶)$ تعریف‌نشده

بنابراین: $gog = \{(۴,۱),(۳,۶),(۲,۶)\}$

سؤال تابع $h(x) = (x^۳ - ۱)^۲$ را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو طریق).

پاسخ **طریقهٔ اول** تابع $y = x^۳$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^۳ , f(x) = (x-۱)^۲ \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^۳) = (x^۳ - ۱)^۲$$

طریقهٔ دوم تابع $y = x^۳ - ۱$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳ - ۱$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x) = x^۳ - ۱ , f(x) = x^۲ \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = f(x^۳ - ۱) = (x^۳ - ۱)^۲$$

دامنهٔ تابع مرکب

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof دو روش وجود دارد:

روش اول تابع $gof(x)$ را تشکیل دهیم و دامنهٔ تابع به‌دست آمده را تعیین کنیم (در این روش **نباید** ضابطهٔ تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

سؤال اگر $f(x) = x^۲$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، دامنهٔ تابع **fog** را به‌دست آورید.

پاسخ

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^۲$$

دامنهٔ تابع $y = (\sqrt{x})^۲$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ است، بنابراین:

$$D_{fog} = [۰,+\infty) , x \geq ۰ \Rightarrow (fog)(x) = x$$

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای $(\sqrt{x})^۲$ ، x بنویسیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $(fog)(x) = x$ درمی‌آید که دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود. بنابراین ضروری است که ابتدا دامنهٔ تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

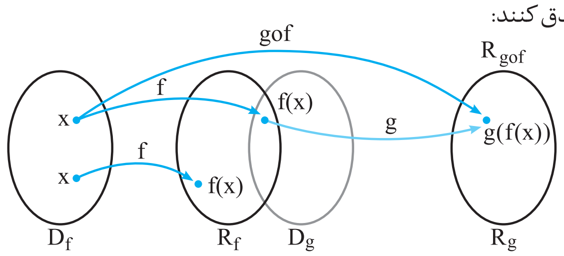
تلنگر: حواست باشه

تعیین دامنهٔ ترکیب دو تابع، یکی از سؤالات پرتکرار امتحان نهایی است.

روش دوم دامنهٔ تابع مرکب gof، مجموعهٔ x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

۲

بخش

پاسخ‌نامه

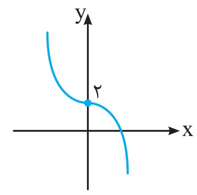
فصل ۱ **تابع**

۱ | درست

۲ | درست

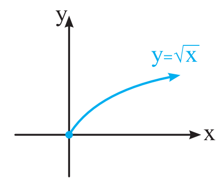
۳ | نادرست

نمودار تابع $y=-x^{۳}+۲$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع اکیداً نزولی است.



۴ | نادرست

نمودار $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع در دامنه‌اش، اکیداً صعودی است:



۵ | درست، زیرا بزرگ‌ترین توان x برابر ۳ است.

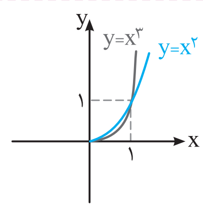
۶ | درست

برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد برابر $\mathbb{R}$ است. f یک تابع سه‌جمله‌ای از درجهٔ ۳ است و در نتیجه برد آن برابر $\mathbb{R}$ است.

۷ | یکنوا

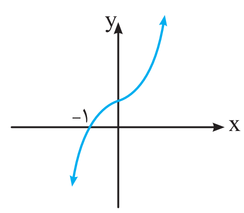
۸ | پایین

نمودارتوابع $y=x^{۲}$ و $y=x^{۳}$ دربازهٔ $(۰,۱)$ به صورت مقابل است:



۹ | صعودی

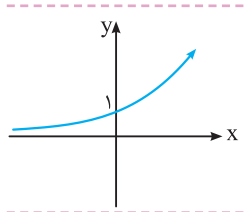
نمودار تابع $y=(x+۱)^{۳}$ به‌صورت مقابل است:



۱۰ | ثابت

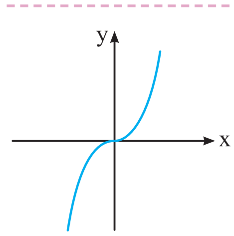
۱۱ | اکیداً صعودی

نمودار تابع $y=۲^{x}$ به صورت مقابل است که تابعی اکیداً صعودی است:



۱۲ | $(۰,۲)$ ، $[۵,+\infty)$ ، ثابت

۱۳ | آ) اگر نمودار $y=x^{۳}$ که به‌صورت مقابل می‌باشد را به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=x^{۳}+۱$ به‌دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال‌یافتهٔ نمودار $y=x^{۳}$ به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا است.

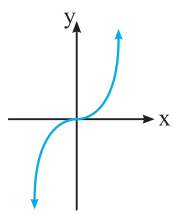


ب) اگر نمودار $y=x^{۳}$ را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=-x^{۳}-۱$ به‌دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار $y=-x^{۳}-۱$ می‌باشد.

پ) اگر نمودار $y=x^{۳}$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=(x-۱)^{۳}+۲$ به‌دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار $y=(x-۱)^{۳}+۲$ می‌باشد.

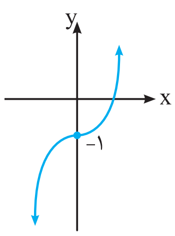
ت) اگر نمودار $y=x^{۳}$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=(x+۱)^{۳}-۱$ به‌دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار $y=(x+۱)^{۳}-۱$ می‌باشد.

• نمودار تابع $y=x^{۳}$ به‌صورت مقابل است:

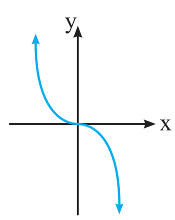


۱۴ | اگر نمودار $y=x^{۳}$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=x^{۳}-۱$ به‌دست می‌آید:

دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.

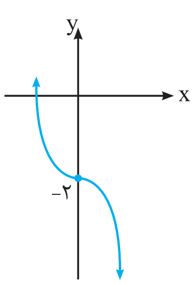


۱۵ | ابتدا نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^{۳}$ به‌دست آید:

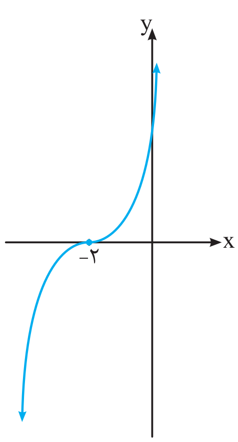


با انتقال نمودار $y=-x^{۳}$ به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^{۳}-۲$ به‌دست می‌آید:

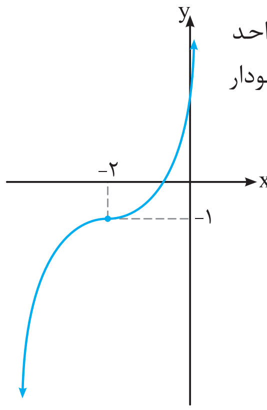
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



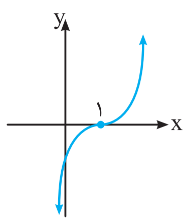
۱۶ | با انتقال نمودار $y=x^{۳}$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ، نمودار $y=(x+۲)^{۳}$ به‌دست می‌آید:



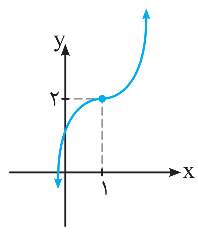
نمودار $y=(x+۲)^۳$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y=(x+۲)^۳-۱$ به‌دست آید:
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



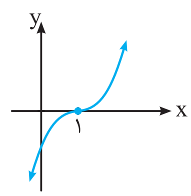
۱۷ | اگر نمودار $y=x^۳$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-۱)^۳$ به‌دست می‌آید:



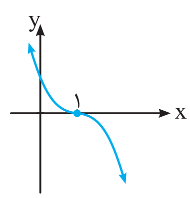
با انتقال نمودار $y=(x-۱)^۳$، به اندازهٔ دو واحد به سمت بالا نمودار $y=(x-۱)^۳+۲$ به‌دست می‌آید.
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.



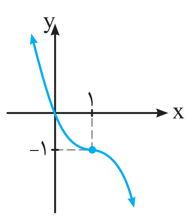
۱۸ | اگر نمودار $y=x^۳$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-۱)^۳$ به‌دست می‌آید:



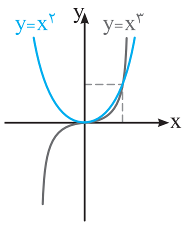
با قرینه کردن نمودار $y=(x-۱)^۳$ نسبت به محور x ها، نمودار $y=-(x-۱)^۳$ به‌دست می‌آید:



نمودار $y=-(x-۱)^۳$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-(x-۱)^۳-۱$ به‌دست آید:
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



۱۹ | در بازهٔ $(-\infty,۰)$، $x^۲$ عددی مثبت و $x^۳$ عددی منفی است. پس در بازهٔ $(-\infty,۰)$، نمودار $y=x^۲$ بالاتر از نمودار $y=x^۳$ است. در $x=۰$ و $x=۱$، مقدار دو تابع برابرند و در نتیجه دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند. در بازهٔ $(۰,۱)$، $x^۲$ بیش‌تر از $x^۳$ است و در نتیجه نمودار $y=x^۲$ بالاتر از نمودار $y=x^۳$ قرار می‌گیرد و برای $x\in(۱,+\infty)$، مقادیر $x^۳$ بیش‌تر از مقادیر $x^۲$ است و در نتیجه نمودار $y=x^۳$ بالاتر از نمودار $y=x^۲$ قرار می‌گیرد. نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:



• فرض کنیم $A\subseteq D_f$ باشد. تابع f روی A اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A, x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

تابع f روی A اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A\ ,\ x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

تابع f روی A صعودی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A\ ,\ x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\le f(x_۲)$$

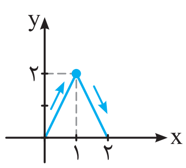
تابع f روی A نزولی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A, x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\ge f(x_۲)$$

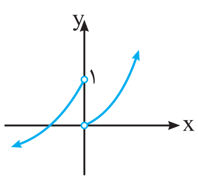
۲۰ | با توجه به شکل و با افزایش x، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

۲۱ | با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $(-\infty,-۲]$ و $[۲,+\infty)$، اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-۲,۰)$ و $[۰,۲]$، تابعی اکیداً صعودی است.

۲۲ | اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار f در بازهٔ $[۰,۱]$ در حال صعود و در بازهٔ $[۱,۲]$ در حال نزول است.



۲۳ | اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه f روی بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نمی‌باشد.
برای پاسخ به چنین سؤالاتی باید نمودار توابع غیرپیوسته را رسم کنیم.



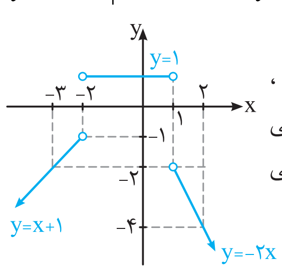
۲۴ | برای رسم نمودار تابع سه‌ضابطه‌ای f، باید خط $y=x+۱$ را در محدودهٔ $(-\infty,-۲)$، خط $y=۱$ را در محدودهٔ $(-۲,۱)$ و خط $y=-۲x$ را در محدودهٔ $(۱,+\infty)$ رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

x	۱	۲
$y=-۲x$	-۲	-۴

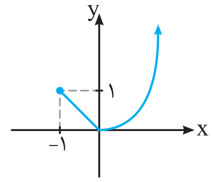
x	-۲	۱
$y=۱$	۱	۱

x	-۳	-۲
$y=x+۱$	-۲	-۱

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,-۲)$، تابعی اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۲,۱)$، تابعی ثابت و در بازهٔ $(۱,+\infty)$، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.



۲۵ | نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطهٔ آن را می‌نویسیم:



ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-x & -۱\leq x\leq ۰\\ x^{۲} & x>۰\end{cases}$ است.

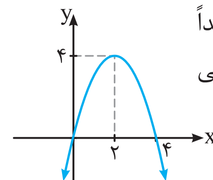
۲۶ | برای رسم نمودار $y=-x^{۲}+۴x$ ، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲\Rightarrow y_S=-(۲)^{۲}+۴(۲)=۴$$

$$x=۰\Rightarrow y=۰\,،\; y=۰\Rightarrow -x^{۲}+۴x=۰\Rightarrow x(-x+۴)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۴$$

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,۲]$ اکیداً صعودی و تابع در بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

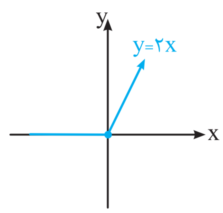


۲۷ | با حذف قدرمطلق، تابع را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$|x|=\begin{cases}x & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

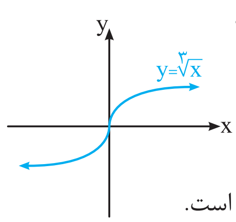
$$\Rightarrow y=x+|x|=\begin{cases}x+x & x\geq ۰\\ x+(-x) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲x & x\geq ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$

با رسم تابع ثابت $y=۰$ برای $x<۰$ و نیم‌خط $y=۲x$ برای $x\geq ۰$ ، نمودار تابع f رسم می‌شود:



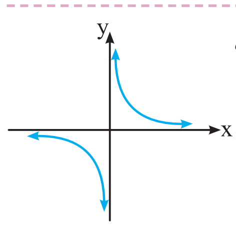
نمودار f در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(-\infty,۰]$ ، هم صعودی و هم نزولی است (f تابع ثابت است). تابع f در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.

۲۸ | نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌صورت مقابل است:



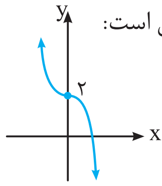
با توجه به نمودار، تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۲۹ | نمودار تابع گویای $y=\frac{۱}{x}$ به‌صورت مقابل است:



تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی تابع روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است.

۳۰ | نمودار تابع $y=-x^{۳}+۲$ به‌صورت مقابل است:

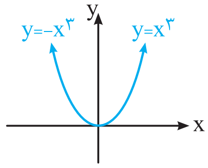


تابع روی $\mathbb{R}$ ، اکیداً نزولی است.

۳۱ | ابتدا با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

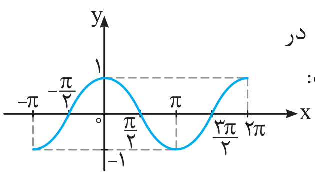
$$y=x^{۲}|x|=\begin{cases}x^{۲}(x) & x\geq ۰\\ x^{۲}(-x) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^{۳} & x\geq ۰\\ -x^{۳} & x<۰\end{cases}$$

نمودار تابع به‌صورت مقابل است:



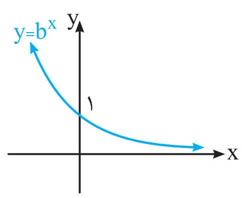
تابع در بازهٔ $(-\infty,۰]$ ، اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[۰,+\infty)$ ، اکیداً صعودی است.

۳۲ | نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ به‌صورت مقابل است:

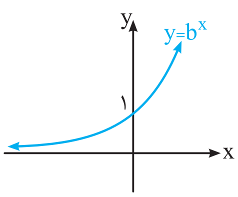


با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-\pi,۰]$ و $[\pi,۲\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۰,\pi]$ ، اکیداً نزولی است. تابع روی بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ غیریکنوا است.

۳۳ | نمودار تابع نمایی $y=b^{x}$ به صورت زیر است:



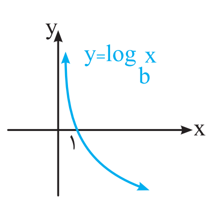
$(۰<b<۱)$



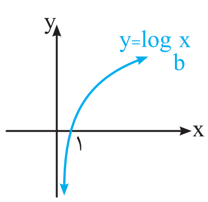
$(b>۱)$

در حالت $b>۱$ ، تابع $y=b^{x}$ روی $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی و در حالت $۰<b<۱$ ، تابع $y=b^{x}$ ، اکیداً نزولی است.

نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_b x$ به صورت زیر است:



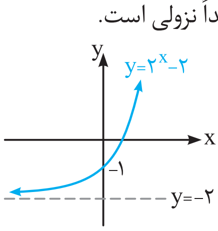
$(۰<b<۱)$



$(b>۱)$

در حالت $b>۱$ ، تابع $y=\log_b x$ روی $(۰,+\infty)$ ، اکیداً صعودی و در حالت $۰<b<۱$ ، تابع $y=\log_b x$ ، تابعی اکیداً نزولی است.

اگر نمودار تابع $y=۲^{x}$ را به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲^{x}-۲$ به‌دست می‌آید:



تابع روی $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی است.

۳

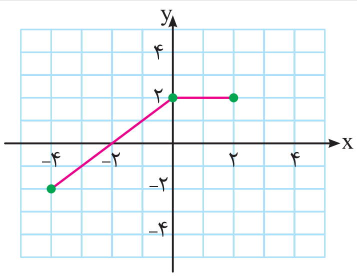
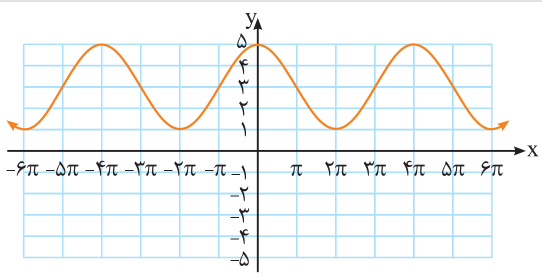
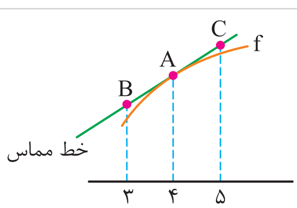
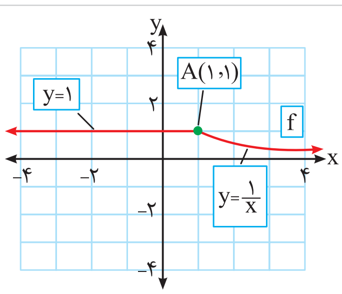
بخش سوم

امتحان نهایی

120 mins

آزمون ۴: خرداد ۱۴۰۰

آزمون نوبت دوم | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** آ) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است. ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد.	۰/۵
۲	**در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.** آ) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^3-3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر .... است. ب) شعاع دایره‌ای به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ برابر .... است.	۰/۵
۳	با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ ، نمودار تابع $y=f(-x)+2$ را رسم کنید. 	۰/۷۵
۴	اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشند؛ آ) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. ب) مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.	۱/۲۵
۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y=a\cos bx+c$ است. با توجه به نمودار، ضابطهٔ آن را مشخص کنید. 	۱
۶	معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.	۱
۷	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. آ) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ ب) $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})}\frac{[x]}{\lvert 3x+1\rvert}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5}$	۲
۸	برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4)=1/5$ و $f(4)=24$. با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.  	۱
۹	با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ A ، نشان دهید که تابع f در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیست.  	۱

۱۰ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) — ۱/۵

آ) $f(x)=\frac{9x-2}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3$

۱۱ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هرلحظه از معادلهٔ $h(t)=-5t^2+40t$ به‌دست می‌آید؛ — ۱/۵

آ) سرعت متوسط جسم را در بازهٔ $[5,8]$ به‌دست آورید. ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $35\,m/s$ است.

۱۲ اگر نقطهٔ $(2,1)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید. — ۱/۵

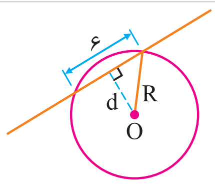
۱۳ در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید. — ۱/۵

۱۴ کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است. — ۱/۵

آ) فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازهٔ نصف قطر بزرگ بیضی است.)

۱۵ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ دایره را بنویسید. — ۱/۵



۱۶ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ — ۲

☆ موفق و مؤید باشید. ☆ — ۲۰

آزمون ۵: شهریور ۱۴۰۰

آزمون نوبت دوم | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. — ۰/۷۵

الف) دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

ب) دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند.

پ) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x+1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحلهٔ آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. — ۰/۷۵

۳ با توجه به جدول مقابل، مقادیر خواسته‌شده را به‌دست آورید. — ۱/۵

آ) $(gof)(1)$

ب) $(fo(f+g))(0)$

x	۱-	۰	۱	۲
f(x)	۰	۱-	۲	۵-
g(x)	۲	۳	۴	۲-

۴ معادلهٔ یک تابع سینوسی $y=a\sin(bx)+c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن ۱- و دورهٔ تناوب آن 8π است. — ۱

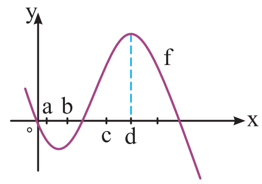
۵ مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ — ۱

۶ حاصل عبارت $4\sin x\cos x\cos 2x$ را به ازای $x=7/5^\circ$ محاسبه نمایید. — ۱

۷ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. — ۲

آ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x$ پ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

ردیف	سؤال	نمره
۸	با در نظرگرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a ، b ، c و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.	۱
۹	اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.	۱
۱۰	مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده‌ترین مشتق الزامی نیست.) آ) $f(x)=(x^2+2x+1)^5$ ب) $g(x)=\frac{x}{\sqrt{3x+2}}$	۱/۵
۱۱	تابع با ضابطهٔ $f(x)=7\sqrt{x}+50$ متوسط قد کودکان تا شصت‌ماهگی را نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آ) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[0,25]$ چقدر است؟ ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟	۱/۵
۱۲	تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟	۱/۵
۱۳	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل‌ضرب‌شان کم‌ترین مقدار ممکن گردد.	۱/۵
۱۴	در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4,5)$ باشد؛ آ) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.	۱
۱۵	وضعیت خط $x+y=3$ و دایرهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱/۵
۱۶	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟	۱/۵
	⭐ موفق و مؤید باشید. ⭐	۲۰



x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	−۰/۵

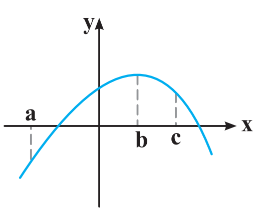
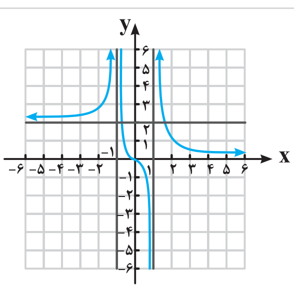
آزمون ۶: دی ۱۴۰۰

آزمون نوبت دوم | ساعت شروع: ۱۰ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.**	۰/۷۵
	آ) تابع $y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است. ب) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$ ، آن‌گاه $(fog)(4)=5$. پ) دو تابع $f(x)=-\frac{7}{2}x-3$ و $g(x)=-\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.	
۲	**در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.**	۰/۵
	آ) نمودار تابع $f(x)=x^3$ در بازهٔ $(0,1)$ ، .... از نمودار تابع $g(x)=x^2$ قرار دارد. (بالاتر.پایین‌تر) ب) چند جمله‌ای $p(x)=2x^3+x^2+1$ بردو جمله‌ای .... بخش‌پذیر است. $((x+1),(x-1))$	

آزمون ۷: خرداد ۱۴۰۱

آزمون نوبت دوم | ساعت شروع: ۸ صبح | 120 mins

ردیف	سؤالات امتحانی	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** آ) تابع $f(x)=\sqrt{۲}x-x^{۲}$ یک تابع درجه دوم است. ب) تابع $f(x)=x^{۳}$، تابعی اکیداً صعودی است. پ) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.	۰/۷۵
۲	**در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.** آ) اگر $f=\{(۲,۳),(۳,۵)\}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۳)$ برابر .... است. ب) باقی‌مانده تقسیم عبارت $۲x^{۲}-۵x+۱$ برابر .... است. پ) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصلهٔ کانونی ۶ برابر .... است.	۰/۷۵
۳	**سؤالات چهارگزینه‌ای:** I. برد تابع f بازهٔ $[-۳,۱)$ است. برد تابع $y=-۲f(۳x-۱)+۳$ کدام‌یک از موارد زیر است؟ آ) $[-۸,۰)$ ب) $(-۱۲,۰]$ پ) $(۱,۹]$ ت) $(-۱۰,۲]$ II. کدام‌یک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۴y+۱=۰$ قرار دارد؟ آ) $(۰,۰)$ ب) $(۱,۰)$ پ) $(۰,-۱)$ ت) $(-۱,۰)$ III. با توجه به نمودار تابع f، اگر شیب خط مماس در نقاط a,b,c به ترتیب با m_a، m_b، m_c نمایش داده شود. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟  آ) $m_c>m_b>m_a$ ب) $m_b>m_a>m_c$ پ) $m_a>m_b>m_c$ ت) $m_c=m_b=m_a$	۱/۵
۴	اگر ورودی ماشین زیر ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ ورودی $x\rightarrow ۲x-۲\rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x}+۱}\rightarrow$ خروجی	۰/۷۵
۵	معادلهٔ یک تابع سینوسی $y=a\sin(bx)+c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دورهٔ تناوب اصلی آن ۲ است.	۱
۶	معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x=\sin x$ را حل کنید.	۱
۷	نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید.  آ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ پ) $\lim\limits_{x\to-۱} f(x)=$ ت) $\lim\limits_{x\to(۱)^-} f(x)=$	۱
۸	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to۳}\dfrac{x^{۲}-۵x+۶}{۲x^{۲}-۷x+۳}$	۰/۷۵
۹	اگر توابع f,g مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳\ ,\ f'(۲)=۵\ ,\ g(۲)=۸\ ,\ g'(۲)=-۶$ حاصل $(fg)'(۲)$ را به دست آورید.	۱