مقدمهٔ مدیرتألیف

ما در رقابت با هیچ‌کس جز خودمان نیستیم...
هدف ما مغلوب نمودن آخرین کاری است که انجام داده‌ایم.

مقدمهٔ مؤلفین

آینده تبدیل به حال،

حال به گذشته

و گذشته به یک «ندامت جاودانه» تبدیل خواهد شد

اگر در زندگی نقشه‌ای نداشته باشید.

تنسی ویلیامز

فهرست
ریاضیات دهم

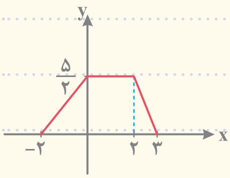
فهرست
حسابان یازدهم

فهرست
حسابان دوازدهم

درس اول: تبدیل نمودار توابع

TEST 356 انبساط و انقباض عمودی

اگر نمودار تابع f به‌صورت مقابل باشد، دامنه و بُرد تابع $y=۲f(x-۱)+۱$ در کدام گزینه آمده است؟



۱) $D_f=[-۱,۴]$ ، $R_f=[۱,۶]$

۲) $D_f=[-۱,۴]$ ، $R_f=[۰,۵]$

۳) $D_f=[-۲,۳]$ ، $R_f=[۰,۵]$

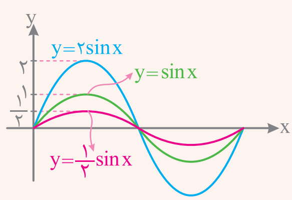
۴) $D_f=[۱,۶]$ ، $R_f=[-۱,۴]$

MiniBOX

برای رسم نمودار $y=kf(x)$ ، باید عرض تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را k برابر کنیم.

اگر $k>۱$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منبسط (در امتداد محور x فشرده‌تر) می‌شود و اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منقبض (در امتداد محور x، بازتر) می‌شود.

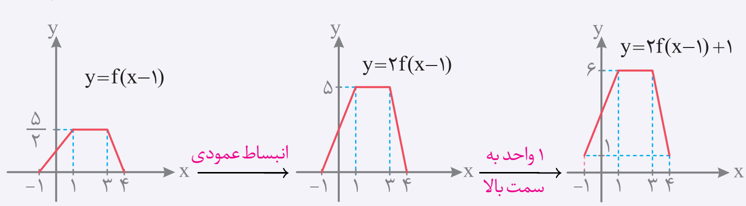
نمودار توابع $y=۲\sin x$ ، $y=\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ به‌صورت مقابل است:



اگر $k<۰$ باشد، ابتدا نمودار $kf(x)$ را با فرض مثبت بودن k رسم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

ANALYSE

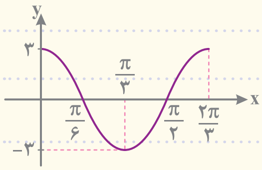
با توجه به مطالب گفته شده، نمودار تابع $y=۲f(x-۱)+۱$ را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



پاسخ گزینهٔ ۱

TEST 357 — انبساط و انقباض افقی

نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



۱) $y=۳\cos ۳x$

۲) $y=\frac{۱}{۳}\cos ۳x$

۳) $y=\frac{۱}{۳}\cos\frac{x}{۳}$

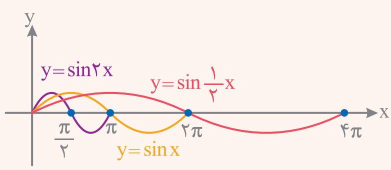
۴) $y=۳\cos\frac{x}{۳}$

MiniBOX

برای رسم نمودار $y=f(kx)$ ، باید طول تمام نقاط $f(x)$ را $\frac{۱}{k}$ برابر کنیم.

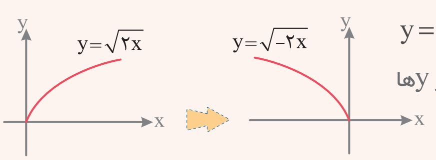
اگر $k>۱$ باشد، نمودار در امتداد محور xها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض می‌شود و اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار در امتداد محور xها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط می‌شود.

نمودار توابع $y=\sin\frac{۱}{۲}x$ ، $y=\sin x$ و $y=\sin ۲x$ در نمودار زیر رسم شده‌اند:



اگر $k<۰$ باشد، ابتدا نمودار $f(kx)$ را با فرض مثبت بودن k رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

برای رسم $y=\sqrt{-۲x}$ ، ابتدا نمودار $y=\sqrt{۲x}$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:



ANALYSE

در نمودار تابع $y=\cos x$ ، اگر عرض تمام نقاط ۳ برابر و طول‌ها $\frac{۱}{۳}$ برابر شود، به نمودار داده شده در سؤال می‌رسیم. ضابطهٔ تابع به صورت $y=۳\cos ۳x$ خواهد بود.

پاسخ گزینهٔ ۱

358 TEST — بررسی نمودار $y=f(ax+b)$ با داشتن نمودار $f(x)$

نمودار تابع $y=f(x)$ مفروض است. ابتدا نمودار را ۴ واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می کنیم، سپس آن را با ضریب ۳ در راستای افقی منبسط می‌کنیم و در انتها آن را ۲ واحد در راستای عمودی به سمت پایین منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع به دست آمده کدام است؟

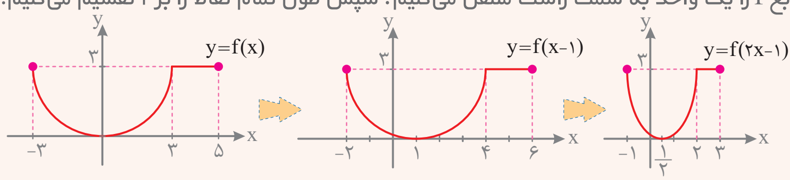
۱) $y=-۲+f(۳x-۴)$ ۲) $y=۴+f(۳x-۲)$ ۳) $y=-۲+f(\frac{x}{۳}-۴)$ ۴) $y=۴+f(\frac{x}{۳}-۲)$

MiniBOX

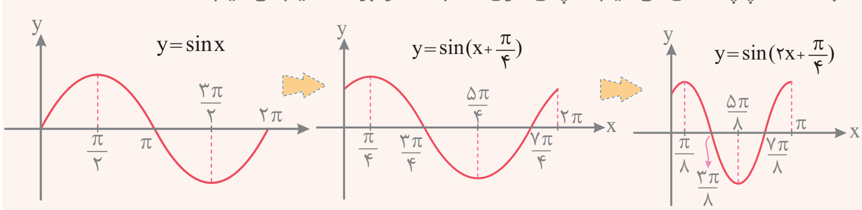
برای رسم نمودار تابع $y=f(ax+b)$ باکمک نمودار تابع $y=f(x)$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1. با توجه به علامت b، نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ b واحد در راستای افقی جابه‌جا می‌کنیم.
2. طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می‌کنیم.

نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر است. برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$، ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:



برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sin(۲x+\frac{\pi}{۴})$، ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ به سمت چپ منتقل می‌کنیم، سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:



ANALYSE

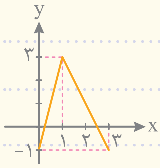
تغییرات را مرحله به مرحله بر روی ضابطهٔ تابع f اعمال می‌کنیم:

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{سمت راست}]{\text{۴ واحد به}}y=f(x-۴)\xrightarrow[\text{در راستای افقی}]{\text{انبساط با ضریب ۳}}y=f(\frac{۱}{۳}x-۴)\xrightarrow[\text{به سمت پایین}]{\text{۲ واحد}}$$
$$y=-۲+f(\frac{۱}{۳}x-۴)$$

پاسخ گزینهٔ ۳

TEST 359 بررسی نمودار تابع $y=f(x)$ با داشتن نمودار $y=f(ax+b)$

نمودار تابع $y=1+f(2x-1)$ مطابق شکل است. نمودار $y=f(x)$ از کدام ناحیه‌نمی‌گذرد؟

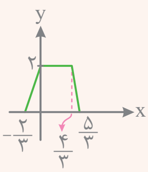


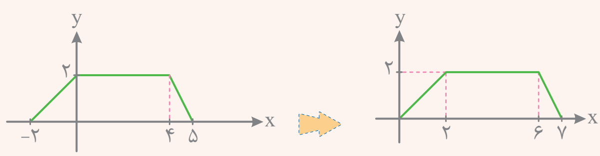
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

MiniBOX

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ ، از روی نمودار $y=f(ax+b)$ ابتدا طول تمام نقاط نمودار را در a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y=f(x+b)$ برسیم. سپس اگر $b>0$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت راست و اگر $b<0$ باشد، نمودار را به اندازهٔ b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

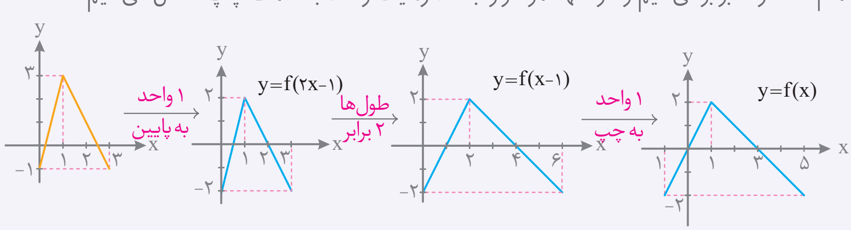
نمودارتابع $y=f(3x+2)$ به صورت مقابل است. برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ ، ابتدا طول تمام نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:





ANALYSE

باید نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم. برای این منظور، ابتدا نمودار تابع $y=1+f(2x-1)$ را یک واحد در راستای عمودی به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(2x-1)$ به دست آید. سپس طول تمام نقاط را ۲ برابر می‌کنیم و در انتها نمودار را به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم:



بنابراین نمودار تابع از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد.

پاسخ گزینهٔ ۲

TEST 369 — بررسی یکنوایی توابع معروف

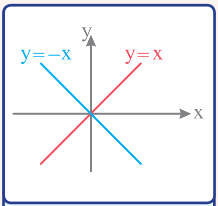
کدام تابع اکیداً صعودی است؟

۱) $y=-x^2$ ۲) $y=x^2$ ۳) $y=x^3$ ۴) $y=-x^3$

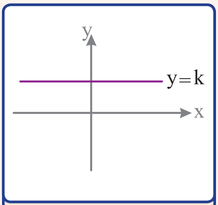
MiniBOX

در سؤالاتی که ضابطهٔ تابع داده می‌شود، بهترین راه برای تشخیص یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است.

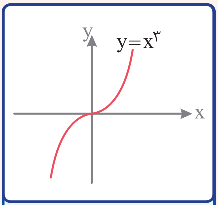
نمودار همهٔ توابع مهم کتاب درسی، که باید برای تشخیص یکنوایی به خاطر داشته باشید در جدول زیر آورده شده است. در این نمودارها، قسمت‌های صعودی با رنگ قرمز و قسمت‌های نزولی با رنگ آبی مشخص شده است.



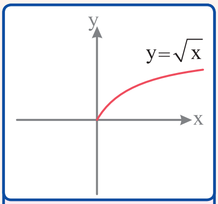
تابع $y=x$ اکیداًصعودی است.
تابع $y=-x$ اکیداًنزولی است.



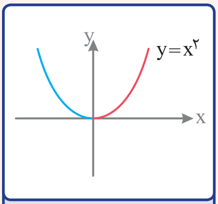
تابع $y=c$، تنها تابعی است که هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.



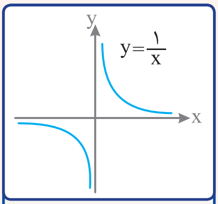
تابع $y=x^3$ تابعی اکیداً صعودی است.



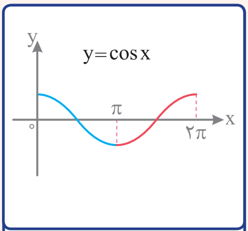
تابع $y=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی است.



تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.
تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی است.

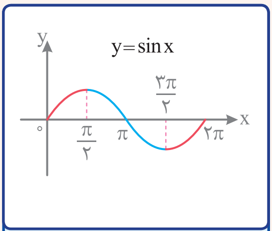


تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است. اما در $\mathbb{R}$ غیر یکنوا است.



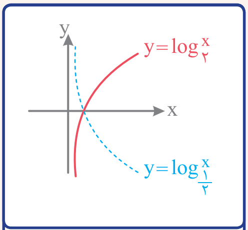
تابع در بازهٔ $[0,\pi]$ اکیداً نزولی است.

تابع در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ اکیداً صعودی است.



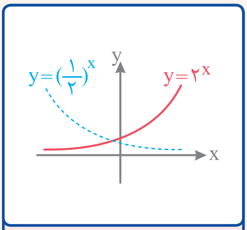
تابع در بازهٔ $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.

تابع در بازه‌های $[0,\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ اکیداً صعودی است.



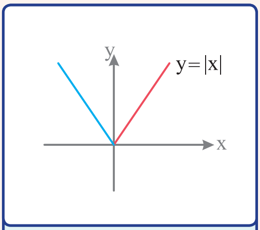
برای مبنای بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است.

برای مبنای بین ۰ و ۱، تابع اکیداً نزولی است.



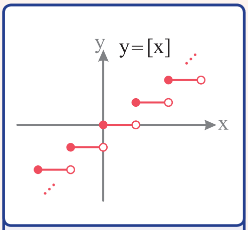
برای پایهٔ بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است.

برای پایهٔ بین صفر و یک، تابع اکیداً نزولی است.



تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

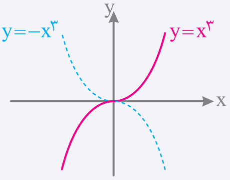
تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی است.

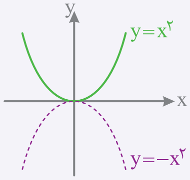


تابع صعودی است.

ANALYSE

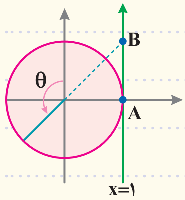
با توجه به نمودار توابع، واضح است تابع $y=x^3$ تابعی اکیداً صعودی است:





پاسخ گزینهٔ ۳

394 TEST تانژانت و تغییرات آن

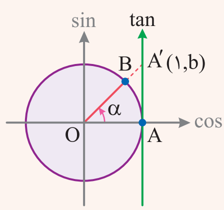


با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل، طول پاره خط AB کدام است؟

۱) $\tan\theta$ ۲) $-\tan\theta$

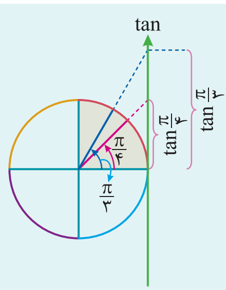
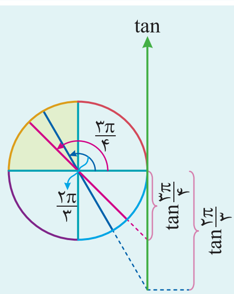
۳) $\frac{۱}{\tan\theta}$ ۴) $-\frac{۱}{\tan\theta}$

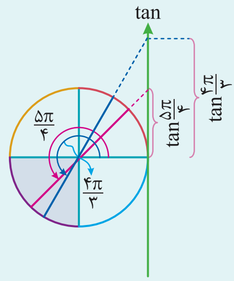
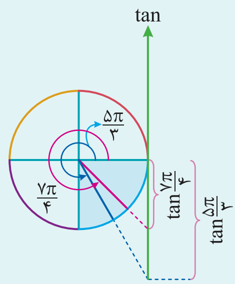
MiniBOX



محور تانژانت همان خط $x=۱$ است که بر دایرهٔ مثلثاتی، مماس شده است. برای پیدا کردن تانژانت زاویهٔ α ، شعاع OB را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را قطع کند. تانژانت زاویهٔ α برابر b است.

مقدار تانژانت در هر چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی همواره در حال افزایش است. نحوهٔ تغییرات تانژانت در ربع‌های مختلف به‌صورت زیر است:

ربع	بازه	دایرهٔ مثلثاتی	تغییرات
اول	$۰\le x\le\frac{\pi}{۲}$		مقدار تانژانت از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.
دوم	$\frac{\pi}{۲}\le x\le\pi$		مقدار تانژانت از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.

ربع	بازه	دایرهٔ مثلثاتی	تغییرات
سوم	$\pi \leq x \leq \frac{۳\pi}{۲}$		مقدار تانژانت از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.
چهارم	$\frac{۳\pi}{۲} \leq x \leq ۲\pi$		مقدار تانژانت از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.

ANALYSE

با توجه به شکل، امتداد زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}+\theta$ محور تانژانت را در نقطهٔ B قطع کرده است، پس $\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=AB$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\cot\theta \Rightarrow AB=-\cot\theta=-\frac{۱}{\tan\theta}$$

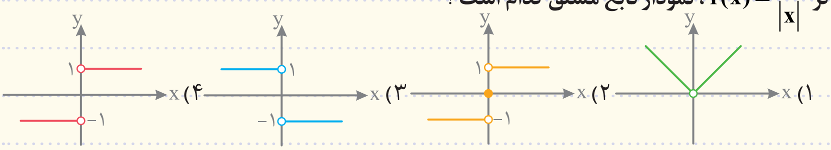
[توجه کنید که $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$ است، پس $\tan\theta<۰$؛ بنابراین $-\frac{۱}{\tan\theta}$ مقداری مثبت است و با مثبت بودن AB در تناقض نیست.]

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 489 نمودار تابع مشتق

اگر $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$، نمودار تابع مشتق کدام است؟

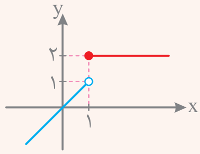


MiniBOX

برای رسم نمودار تابع مشتق f به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

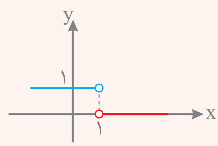
- ابتدا نقاط مشتق ناپذیر تابع f را پیدا می‌کنیم تا دامنهٔ تابع مشتق مشخص شود.
- از تابع f مشتق می‌گیریم و نمودار تابع f' را در دامنهٔ به دست آمده رسم می‌کنیم.

اگر $f(x)=\begin{cases} 2 & x\geq 1 \\ x & x<1 \end{cases}$ باشد، برای رسم نمودار تابع f'، ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم تا نقاط مشتق ناپذیر آن مشخص شود:



چون تابع در $x=1$ ناپیوسته است، پس در این نقطه مشتق ناپذیربوده و نقطهٔ $x=1$ در دامنهٔ تابع مشتق وجود ندارد:

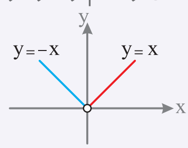
$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x>1 \\ 1 & x<1 \end{cases}$$



ANALYSE

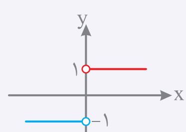
ابتدا تابع f را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2}{|x|}=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$



بنابراین نمودار f' به‌صورت مقابل است:

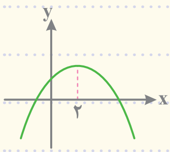
$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

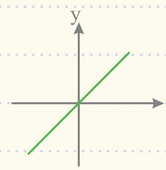


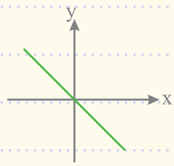
پاسخ گزینهٔ ۴

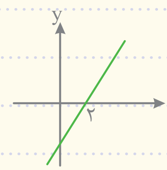
490 TEST رابطهٔ بین نمودارهای f و f'

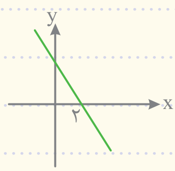
نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. نمودار f' کدام می‌تواند باشد؟



۱) 

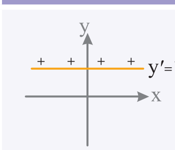
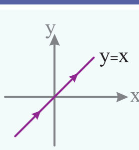
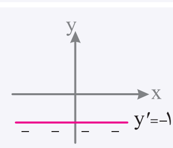
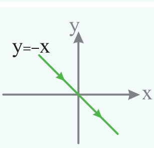
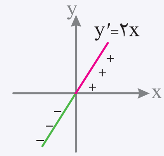
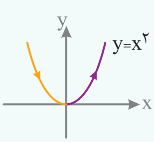
۲) 

۳) 

۴) 

MiniBOX

در جدول زیر، ارتباط بین نمودار توابع معروف با نمودار تابع مشتق آن‌ها بیان شده است:

تابع f'		تابع f	
نمودار	ویژگی	نمودار	ویژگی
	همواره مثبت		همواره صعودی
	همواره منفی		همواره نزولی
	ابتدا منفی سپس مثبت		ابتدا نزولی سپس صعودی