

مقدمهٔ مدیریت تألیف

♦ ما در رقابت با هیچ‌کس جز خودمان نیستیم...
هدف ما مغلوب نمودن آخرین کاری است که انجام داده‌ایم.

مقدمه مؤلفین

■ آینده تبدیل به حال،

حال به گذشته

و گذشته به یک «ندامت جاودانه» تبدیل خواهد شد

اگر در زندگی نقشه‌ای نداشته باشید.

■ تنسی ویلیامز

فهرست ریاضیات دهم

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

- درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۱۰
- درس دوم: متمم یک مجموعه ۱۶
- درس سوم: الگو و دنباله ۲۳
- درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی ۳۰

فصل ۲ مثلثات

- درس اول: نسبت‌های مثلثاتی ۴۶
- درس دوم: دایره مثلثاتی ۵۵
- درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۶۱

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- درس اول: ریشه و توان ۷۰
- درس دوم: ریشه n ام ۷۳
- درس سوم: توان‌های گویا ۷۶
- درس چهارم: عبارت‌های جبری ۸۱

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

- درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۱۰۰
- درس دوم: سهمی ۱۰۹
- درس سوم: تعیین علامت ۱۱۸

فصل ۵ تابع

- درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۱۳۸
- درس دوم: دامنه و برد توابع ۱۴۴
- درس سوم: انواع تابع ۱۵۶

فهرست حسابان یازدهم

فصل ۱	جبر و معادله
۱۶۶	درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۸۴	درس دوم: معادلات درجه دوم
۱۹۸	درس سوم: معادلات گویا و گنگ
۲۱۱	درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۲۲۵	درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی
فصل ۲	تابع
۲۴۴	درس اول: آشنایی بیشتر با تابع
۲۴۷	درس دوم: انواع تابع
۲۵۸	درس سوم: وارون تابع
۲۷۴	درس چهارم: اعمال روی توابع
فصل ۳	توابع نمایی و لگاریتمی
۲۹۸	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۳۰۷	درس دوم و سوم: لگاریتم
فصل ۴	مثلثات
۳۲۸	درس اول: رادیان
۳۳۲	درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
۳۴۰	درس سوم: توابع مثلثاتی
۳۵۳	درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
فصل ۵	حد و پیوستگی
۳۶۸	درس اول: مفهوم حد و فرآیندهای حدی
۳۷۲	درس دوم: حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)
۳۸۹	درس سوم: قضایای حد
۳۹۹	درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
۴۰۸	درس پنجم: پیوستگی

فصل ۱ تابع

- درس اول: تبدیل نمودار توابع ۴۱۶
- درس دوم (بخش ۱): تابع درجه سوم، توابع یکنوا ۴۲۰
- درس دوم (بخش ۲): بخش پذیری و تقسیم ۴۴۱

فصل ۲ مثلثات

- درس اول: تناوب و تانزانت ۴۵۲
- درس دوم: معادلات مثلثاتی ۴۶۵

فصل ۳ حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

- درس اول: حدهای نامتناهی ۴۸۸
- درس دوم: حد در بی نهایت ۵۰۸

فصل ۴ مشتق

- درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۵۳۰
- درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی ۵۵۹
- درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۵۸۳

فصل ۵ کاربردهای مشتق

- درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۵۹۰
- درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۶۲۱
- درس سوم: رسم نمودار تابع ۶۳۳

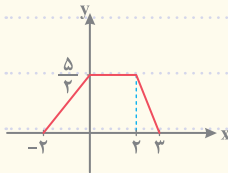


درس اول: تبدیل نمودار توابع

انبساط و انقباض عمودی

TEST 356

اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنه و بُرد تابع $y = 2f(x-1) + 1$ در کدام گزینه آمده است؟



(۱) $R_f = [1, 6]$ ، $D_f = [-1, 4]$

(۲) $R_f = [0, 5]$ ، $D_f = [-1, 4]$

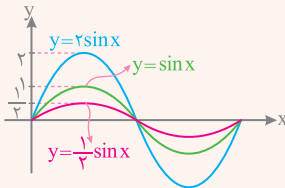
(۳) $R_f = [0, 5]$ ، $D_f = [-2, 3]$

(۴) $R_f = [-1, 4]$ ، $D_f = [1, 6]$

MiniBOX

برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، باید عرض تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را k برابر کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منبسط (در امتداد محور x فشرده‌تر) می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منقبض (در امتداد محور x بازتر) می‌شود.



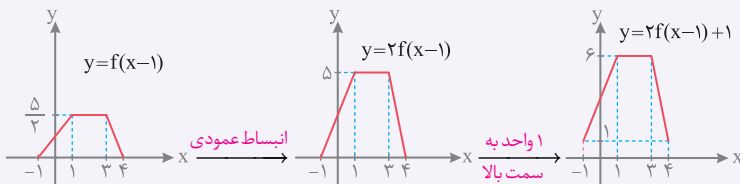
نمودار توابع $y = \frac{1}{2} \sin x$ و $y = \sin x$ ، $y = 2 \sin x$

به صورت مقابل است:

اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار $kf(x)$ را با فرض مثبت بودن k رسم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

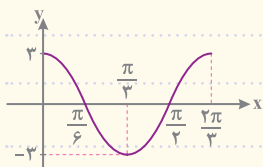
ANALYSE

با توجه به مطالب گفته شده، نمودار تابع $y = 2f(x-1) + 1$ را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



پاسخ گزینه ۱

نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



(۱) $y = 3 \cos 3x$

(۲) $y = \frac{1}{3} \cos 3x$

(۳) $y = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$

(۴) $y = 3 \cos \frac{x}{3}$

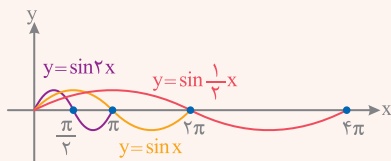
MiniBOX

🍏 برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، باید طول تمام نقاط $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

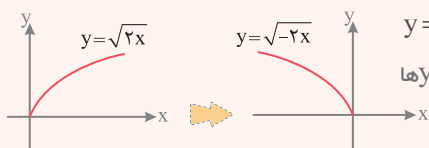
🍏 اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود و اگر $0 < k < 1$

باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.

🍏 نمودار توابع $y = \sin \frac{1}{3}x$ ، $y = \sin x$ و $y = \sin 3x$ در نمودار زیر رسم شده‌اند:



🍏 اگر $k < 1$ باشد، ابتدا نمودار $f(kx)$ را با فرض مثبت بودن k رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.



🍏 برای رسم $y = \sqrt{-2x}$ ، ابتدا نمودار $y = \sqrt{2x}$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

ANALYSE

🍏 در نمودار تابع $y = \cos x$ ، اگر عرض تمام نقاط ۳ برابر و طولها $\frac{1}{3}$ برابر شود، به نمودار داده شده در سؤال می‌رسیم. ضابطه تابع به صورت $y = 3 \cos 3x$ خواهد بود.

پاسخ گزینه ۱



بررسی نمودار $y = f(ax + b)$ با داشتن نمودار $f(x)$

TEST 358

نمودار تابع $y = f(x)$ مفروض است. ابتدا نمودار را ۴ واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می کنیم، سپس آن را با ضریب ۳ در راستای افقی منبسط می کنیم و در انتها آن را ۲ واحد در راستای عمودی به سمت پایین منتقل می کنیم. ضابطه تابع به دست آمده کدام است؟

(۱) $y = -۲ + f(۳x - ۴)$ (۲) $y = ۴ + f(۳x - ۲)$ (۳) $y = -۲ + f(\frac{x}{۳} - ۴)$ (۴) $y = ۴ + f(\frac{x}{۳} - ۲)$

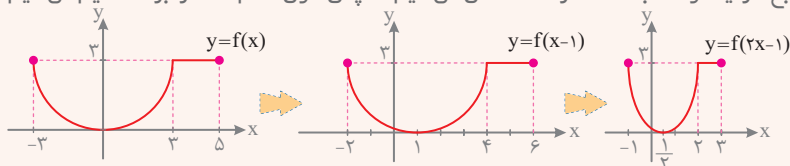
MiniBOX

1 برای رسم نمودار تابع $y = f(ax + b)$ با کمک نمودار تابع $y = f(x)$ ، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

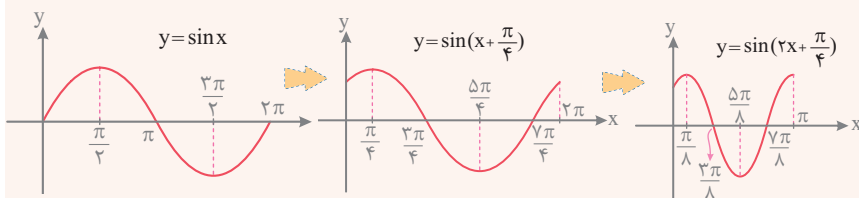
با توجه به علامت b ، نمودار $y = f(x)$ را به اندازه b واحد در راستای افقی جابه جا می کنیم.

2 طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می کنیم.

3 نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. برای رسم نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ ، ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم. سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می کنیم:



4 برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ ، ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ منتقل می کنیم، سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می کنیم:



ANALYSE

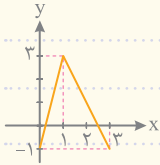
تغییرات را مرحله به مرحله بر روی ضابطه تابع f اعمال می کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\text{۴ واحد به}} y = f(x - ۴) \xrightarrow[\text{در راستای افقی}]{\text{انبساط با ضریب ۳}} y = f(\frac{1}{۳}x - ۴) \xrightarrow[\text{به سمت پایین}]{\text{۲ واحد}} y = -۲ + f(\frac{1}{۳}x - ۴)$$

پاسخ گزینه ۳

بررسی نمودار تابع $y = f(x)$ با داشتن نمودار $y = f(ax + b)$

TEST 359



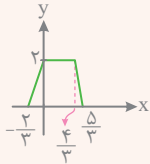
نمودار تابع $y = 1 + f(2x - 1)$ مطابق شکل است. نمودار $y = f(x)$ از کدام

ناحیه نمی‌گذرد؟

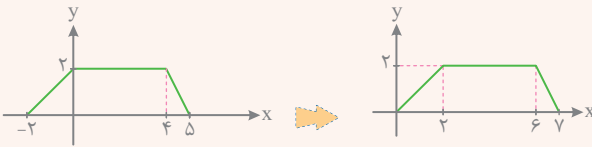
- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

MiniBOX

برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ ، از روی نمودار $y = f(ax + b)$ ابتدا طول تمام نقاط نمودار را در a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y = f(x + b)$ برسیم. سپس اگر $b > 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت راست و اگر $b < 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

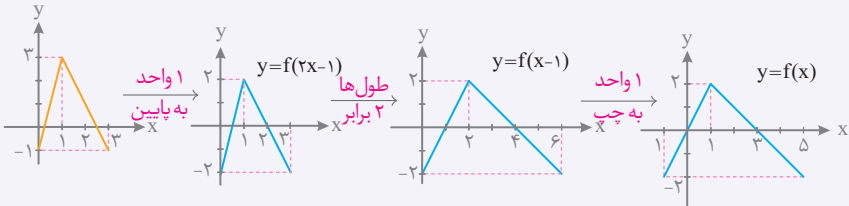


نمودار تابع $y = f(3x + 2)$ به صورت مقابل است. برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ ، ابتدا طول تمام نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



ANALYSE

باید نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم. برای این منظور، ابتدا نمودار تابع $y = 1 + f(2x - 1)$ را یک واحد در راستای عمودی به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ به دست آید. سپس طول تمام نقاط را ۲ برابر می‌کنیم و در انتها نمودار را به اندازه یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم:



بنابراین نمودار تابع از ناحیه دوم نمی‌گذرد.

پاسخ گزینه ۲



بررسی یکنوایی توابع معروف

TEST 369

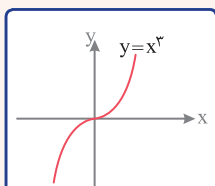
کدام تابع اکیداً صعودی است؟

$$y = -x^2 \quad (۱) \quad y = x^2 \quad (۲) \quad y = x^3 \quad (۳) \quad y = -x^3 \quad (۴)$$

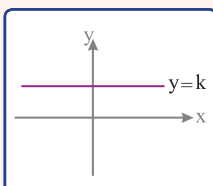
MiniBOX

در سؤالاتی که ضابطه تابع داده می‌شود، بهترین راه برای تشخیص یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است.

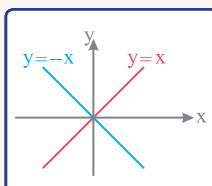
نمودار همه توابع مهم کتاب درسی، که باید برای تشخیص یکنوایی به خاطر داشته باشید در جدول زیر آورده شده است. در این نمودارها، قسمت‌های صعودی با رنگ قرمز و قسمت‌های نزولی با رنگ آبی مشخص شده است.



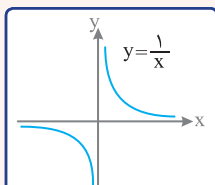
تابع $y = x^3$ تابعی
اکیداً صعودی است.



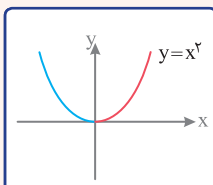
تابع $y = c$ ، تنها تابعی
است که هم صعودی و
هم نزولی می‌باشد.



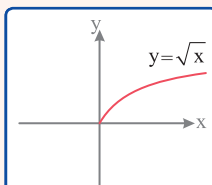
تابع $y = x$ اکیداً صعودی
است.
تابع $y = -x$ اکیداً نزولی
است.



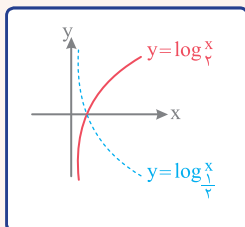
تابع در هر یک از بازه‌های
 $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$
اکیداً نزولی است. اما در
 \mathbb{R} غیر یکنوا است.



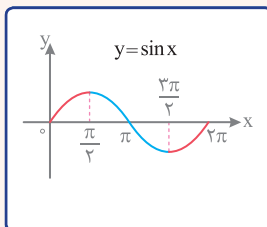
تابع در بازه $[0, +\infty)$
اکیداً صعودی است.
تابع در بازه $(-\infty, 0]$
اکیداً نزولی است.



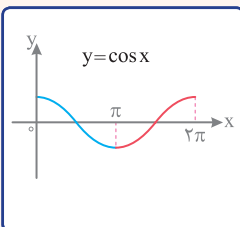
تابع $y = \sqrt{x}$
اکیداً صعودی است.



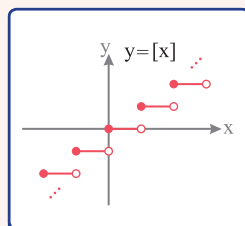
برای مبنای بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است. برای مبنای بین ۰ و ۱، تابع اکیداً نزولی است.



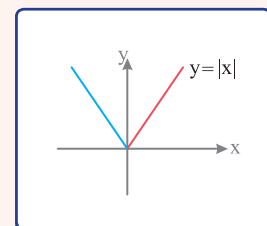
تابع در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است. تابع در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.



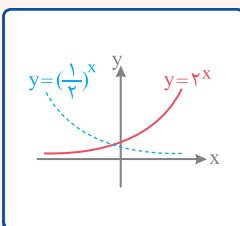
تابع در بازه $[0, \pi]$ اکیداً نزولی است. تابع در بازه $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.



تابع صعودی است.



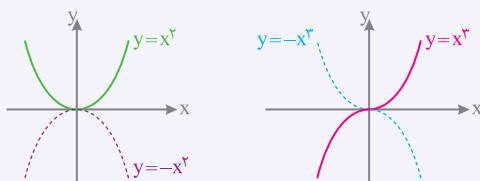
تابع در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.



برای پایه بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است. برای پایه بین صفر و یک، تابع اکیداً نزولی است.

ANALYSE

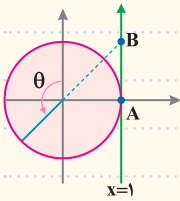
با توجه به نمودار توابع، واضح است تابع $y = x^2$ تابعی اکیداً صعودی است:





تانژانت و تغییرات آن

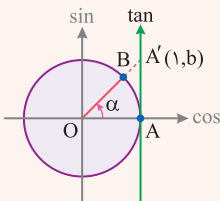
TEST 394



با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $\tan \theta$ (۲) $-\tan \theta$
 (۳) $\frac{1}{\tan \theta}$ (۴) $-\frac{1}{\tan \theta}$

MiniBOX



محور تانژانت همان خط $x=1$ است که بر دایره مثلثاتی، مماس شده است. برای پیدا کردن تانژانت زاویه α ، شعاع OB را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را قطع کند. تانژانت زاویه α برابر b است.

مقدار تانژانت در هر چهار ربع دایره مثلثاتی همواره در حال افزایش است. نحوه تغییرات تانژانت در ربع‌های مختلف به صورت زیر است:

تغییرات	دایره مثلثاتی	بازه	ربع
مقدار تانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.		$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	اول
مقدار تانژانت از $+\infty$ تا $-\infty$ افزایش می‌یابد.		$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	دوم



تغییرات	دایره مثلثاتی	بازه	ربع
مقدار تانژانت از 0 تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.		$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	سوم
مقدار تانژانت از $-\infty$ تا 0 افزایش می‌یابد.		$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$	چهارم

ANALYSE

با توجه به شکل، امتداد زاویه $\theta + \frac{\pi}{4}$ محور تانژانت را در نقطه B قطع کرده است، پس

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = AB$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\cot\theta \Rightarrow AB = -\cot\theta = -\frac{1}{\tan\theta}$$

[توجه کنید که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ است، پس $\tan\theta < 0$ ؛ بنابراین $-\frac{1}{\tan\theta}$ مقداری مثبت است و با

مثبت بودن AB در تناقض نیست.]

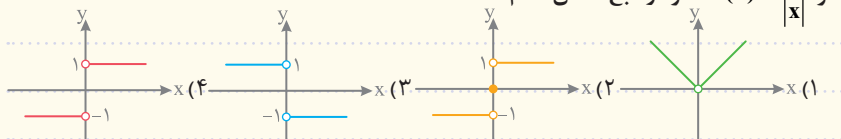
پاسخ گزینه ۴



نمودار تابع مشتق

TEST 489

اگر $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ ، نمودار تابع مشتق کدام است؟

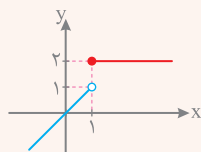


MiniBOX

برای رسم نمودار تابع مشتق f به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا نقاط مشتق ناپذیر تابع f را پیدا می‌کنیم تا دامنه تابع مشتق مشخص شود.

از تابع f مشتق می‌گیریم و نمودار تابع f' را در دامنه به دست آمده رسم می‌کنیم.

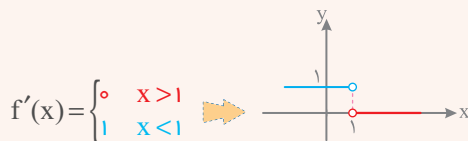


اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ باشد، برای رسم نمودار تابع f' ، ابتدا نمودار

تابع f را رسم می‌کنیم تا نقاط مشتق ناپذیر آن مشخص شود:

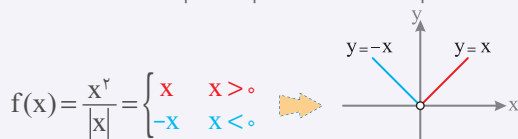
چون تابع در $x = 1$ ناپیوسته است، پس در این نقطه مشتق ناپذیر بوده و نقطه $x = 1$ در دامنه

تابع مشتق وجود ندارد:

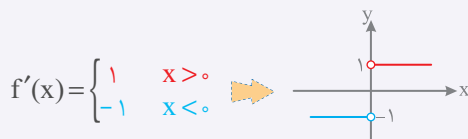


ANALYSE

ابتدا تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

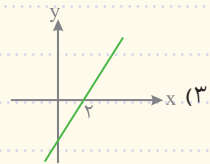
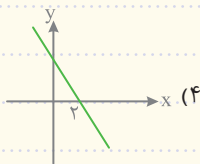
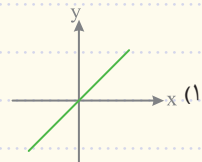
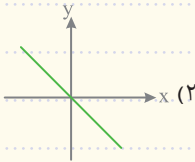
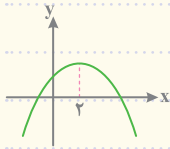


بنابراین نمودار f' به صورت مقابل است:




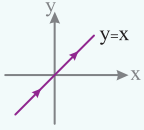
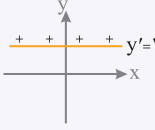
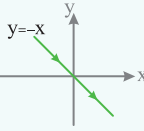
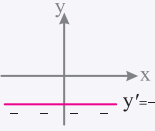
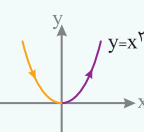
رابطه بین نمودارهای f و f'

TEST 490

نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار f' کدام می تواند باشد؟

MiniBOX

 در جدول زیر، ارتباط بین نمودار توابع معروف با نمودار تابع مشتق آن ها بیان شده است:

تابع f		تابع f'	
ویژگی	نمودار	ویژگی	نمودار
همواره صعودی		همواره مثبت	
همواره نزولی		همواره منفی	
ابتدا نزولی سپس صعودی		ابتدا منفی سپس مثبت	