ریاضیات گسسته دوازدهم

ادوارد ویتن
متولد ۱۹۵۱

عضو انیستیتو مطالعات پیشرفتهٔ پرینستون برندهٔ مدال فیلدز ۱۹۹۰ و مدال آینتشتاین

1
CHAPTER
آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس اول: استدلال ریاضی

TEST 001 — اثبات مستقیم

درستی کدام گزینه با استفاده از «اثبات مستقیم» قابل استدلال نیست؟

۱) مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است.

۲) مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است.

۳) مجموع هر سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

۴) مجموع دو عدد زوج متوالی مضرب ۴ است.

MiniBOX

اگر برای اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم از نوعی استدلال به نام استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع و اقسامی است:

استدلال استنتاجی
- مثال نقض
- اثبات مستقیم
- روش اشباع
- برهان خلف
- بازگشتی

برای اثبات یک گزاره به روش اثبات مستقیم، ابتدا باید گزارهٔ داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضیات کمک مهمی به شما می‌کند:

عبارت فارسی	نماد ریاضی
عدد زوج	$2k$
عدد فرد	$2k+1$
عدد مضرب ۳	$3k$
عدد مربع کامل	k^2
عدد فرد مربع کامل	$(2k+1)^2$
وارون عدد a	$\frac{1}{a}$

عبارت فارسی	نماد ریاضی
دو عدد فرد	$2k+1$ ، $2k'+1$
دو عدد زوج	$2k$ ، $2k'$
دو عدد فرد متوالی	$2k-1$ ، $2k+1$
دو عدد زوج متوالی	$2k$ ، $2k+2$
سه عدد متوالی	$k-1$ ، k ، $k+1$
عدد گویا	$\frac{p}{q}; p, q\in\mathbb{Z}, q\neq 0$

ANALYSE

تک‌تک گزینه ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $(۲k-۱)+(۲k+۱)=۴k$

۲ $(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}_{۲q}+۱=۸q+۱$

دقت کنید که k و $k+۱$ دو عدد صحیح متوالی هستند و قطعاً یکی از آن‌ها زوج است. پس حاصل‌ضرب آن‌ها نیز عددی زوج به شکل $۲q$ خواهد بود.

۳ $(k-۱)+k+(k+۱)=۳k$

۴ $(۲k)+(۲k+۲)=۴k+۲\neq ۴k'$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

002 TEST مثال نقض [پاد نمونه]

درستی کدام یک از گزاره‌های زیر را با مثال نقض نمی‌توان رد کرد؟

۱) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.

۲) مجموع هر دو گنگ، عددی گنگ است.

۳) برای هر دو عدد حقیقی x و y همواره $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

۴) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

MiniBOX

اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند. احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر هر، همه، تمام و ... یا هیچ، هیچ‌یک، هیچکدام و ... بیان می‌شوند.

«تمام اعداد اول، فرد هستند» یک حکم کلی نادرست است زیرا ۲ عددی اول است ولی فرد نیست.

«مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است» یک حکم کلی درست است.

به مثالی که نشان دهد یک حکم کُلی، نادرست است، مثال نقض [پاد نمونه] گفته می‌شود.

«به‌ازای همهٔ n های طبیعی، عبارت $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است»

برای رد حکم کلی فوق عدد $n=۴۰$ یک مثال نقض است زیرا:

$$n=۴۰ \Rightarrow ۴۰^۲+۴۰+۴۱=۴۰(۴۰+۱)+۴۱=(۴۰\times۴۱)+۴۱=۴۱(۴۰+۱)=۴۱\times۴۱$$ مرکب

با ارائهٔ مثال نقض نمی‌توان درستی یک حکم را اثبات کرد، بلکه فقط برای نشان‌دادن نادرستی یک حکم، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

«عدد صحیحی وجود ندارد که دو برابر آن مربع کامل و سه برابر آن مکعب کامل باشد.» یک حکم کلی است که مثال نقض آن ۷۲ می‌باشد.

$۷۲\times۳=۲۱۶=۶^۳$ $\qquad$ $۷۲\times۲=۱۴۴=۱۲^۲$

ANALYSE

برای گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) مثال نقض وجود دارد و گزینهٔ (۴) با استدلال استنتاجی قابل اثبات است.

۱ $n=۴ \Rightarrow ۲^۴-۱=۱۵$ مرکب

۲ $\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰\in\mathbb{Q}$

۳ $\sqrt{۱+۱}\neq\sqrt{۱}+\sqrt{۱}$

۴ $k=n(n+۱)\Rightarrow ۴k+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$

پاسخ گزینهٔ ۴

TEST 003 روش اشباع

کدام گزاره برای تمام اعداد طبیعی درست است؟

۱) عبارت n^2+3n همواره مضرب ۴ است.

۲) عبارت n^2+3n+5 همواره فرد است.

۳) عبارت n^3+n^2 مضرب ۳ است.

۴) عبارت n^2+3n به‌ازای هیچ مقداری از n مربع کامل نیست.

MiniBOX

گاهی برای اثبات درستی ارزش یک گزاره لازم است همهٔ حالت‌های ممکن در مورد مساله را در نظر بگیریم. این روش استدلال را **روش اشباع** می‌نامند.

می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج است. حاصل ضرب دو عدد متوالی را به‌صورت $n(n+1)$ نشان می‌دهیم و حال برای اثبات، برای n دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- $n=2k \Rightarrow n(n+1)=2\underbrace{k(2k+1)}_{k'}=2k'$
- $n=2k+1 \Rightarrow n(n+1)=(2k)(2k+2)=2\underbrace{k(2k+2)}_{k''}=2k''$

می‌خواهیم ثابت کنیم حاصل ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است. حاصل ضرب سه عدد متوالی را به‌صورت $n(n+1)(n+2)$ نشان می‌دهیم و حال برای اثبات، ۶ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- $n=6k \Rightarrow n(n+1)(n+2)=6k(6k+1)(6k+2)=6k'$
- $n=6k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(6k+1)\underbrace{(6k+2)}_{2k_1}\underbrace{(6k+3)}_{3k_2}=6k''$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- $n=6k+5 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=(6k+5)\underbrace{(6k+6)}_{6k_1}(6k+7)=6k'''$

ANALYSE

برای گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) به‌راحتی می‌توان مثال نقض ارائه کرد؛ اما گزینهٔ (۲) همواره درست است:

۱ $n=3 \Rightarrow n^2+3n=9+9=18 \neq 4k$

۲ $n^2+3n+5=n(n+3)+5=2k+5=$ فرد

اختلاف n و $n+3$ برابر ۳ واحد است، بنابراین همواره یکی زوج و یکی فرد است و در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها عددی زوج است.

۳ $n=1 \Rightarrow n^3+n^2=2 \neq 3k$

۴ $n=1 \Rightarrow n^2+3n=4=$ مربع کامل

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

TEST 006 — بخش‌پذیری

کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $۷|۳۵$ ۲) $۲۴|۶$ ۳) $۴|۱۲$ ۴) $۸|۲۴$

MiniBOX

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b\neq ۰$ بخش‌پذیر می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به‌طوری که $a=bq$ در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم b می‌شمارد a را یا b عاد می‌کند a را. به عبارت دیگر:

$$\boxed{b|a \Leftrightarrow a=bq}$$

برای رابطهٔ $b|a$ دو تعبیر می‌توان به کار برد، که یکی از چپ به راست خوانده می‌شود و دیگری از راست به چپ:

1. b شمارنده یا مقسوم‌علیه یا عامل a است.
2. a مضرب b است یا a بر b بخش‌پذیر است.

چون $۳\times ۲=۶$ است بنابراین $۶|۲$ و $۶|۳$.

اگر عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش‌پذیر نباشد، در این صورت می‌نویسیم $b\nmid a$.

چون هیچ عدد صحیحی مانند q یافت نمی‌شود که به ازای آن تساوی $q\times ۵=۱۲$ برقرار باشد، بنابراین ۱۲ بر ۵ بخش‌پذیر نیست، پس می‌نویسیم: $۵\nmid ۱۲$

از اینجا به بعد تمامی پارامترهایی مانند a، b، c و ... که در تمام مسائل تئوری اعداد به‌کار می‌رود همواره اعداد صحیح هستند.

ANALYSE

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $۳۵=۷\times ۵\Rightarrow ۷|۳۵$

۲ $\nexists q\in\mathbb{Z}\,;\,۶=۲۴\times q$

۳ $۱۲=۴\times ۳\Rightarrow ۴|۱۲$

۴ $۲۴=۳\times ۸\Rightarrow ۸|۲۴$

پاسخ گزینهٔ ۲

TEST 007 — تأثیر علامت در بخش‌پذیری

کدام یک از موارد زیر **نادرست** است؟

۱) $۶|-۴۸$ ۲) $-۸|۲۴$ ۳) $-۷|-۹۱$ ۴) $-۱۲|۱۸$

MiniBOX

علامت اعداد در بخش‌پذیری هیچ نقشی ندارد. به مثال‌های عددی زیر دقت کنید:

$-۱۵=(-۵)(۳)\Rightarrow -۵|-۱۵$

$-۱۵=(+۵)(-۳)\Rightarrow ۵|-۱۵$

$۱۵=(-۵)(-۳)\Rightarrow -۵|۱۵$

Compote اگر یک عدد بر عددی دیگر بخش‌پذیر باشد، قرینهٔ آن نیز بر دیگری بخش‌پذیر است و به‌طور کلی داریم:

$a|b$

$-a|-b$ $-a|b$ $a|-b$

چون ۱۴ بر ۷ بخش‌پذیر است. بنابراین می‌توان گفت:

$-۷|۱۴$ $-۷|-۱۴$ $۷|-۱۴$

ANALYSE

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ $-۴۸=۶\times(-۸)\Rightarrow ۶|-۴۸$

۲ $۲۴=۳\times(-۸)\Rightarrow -۸|۲۴$

۳ $-۹۱=۱۳\times(-۷)\Rightarrow -۷|-۹۱$

۴ $۱۸=-۱۲\times ?\Rightarrow -۱۲\nmid ۱۸$

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 016 قانون تعدی

اگر $a|bc$ و $x|a$ آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $b|2x$
۲) $a|c$
۳) $a|b^2$
۴) $x|c$

MiniBOX

اگر طرف چاق یک بخش‌پذیری با طرف لاغر بخش‌پذیری دیگری برابر باشد، آن‌گاه می‌توان این دو بخش‌پذیری را در هم ادغام کرد. این خاصیت را در تئوری اعداد، خاصیت تعدی بخش‌پذیری می‌نامند.

$$a|b \text{ و } b|c \Rightarrow a|c$$

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq \\ b|c \Rightarrow c=bq' \end{cases} \Rightarrow c=(aq)q' \Rightarrow c=a(\underbrace{qq'}_{q''}) \Rightarrow a|c$$

$4|8$ و $8|24 \Rightarrow 4|24$

تعبیر عامیانه: نوکر من نوکری داشت، بنابراین نوکرِ نوکر من، نوکر من نیز به حساب می‌آید.

ANALYSE

ابتدا از خاصیت تعدی استفاده کرده و دو بخش پذیری را به یک بخش پذیری تبدیل می‌کنیم و سپس با لورل – هاردی ادامه می‌دهیم:

$$bc|a \text{ و } a|x \xrightarrow{\text{تعدی}} bc|x \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر}} b|x \xrightarrow{\text{چاق، چاق‌تر}} b|2x$$

پاسخ گزینهٔ ۱

NOTE

TEST 017 شبه تعدی و تباهی!!!

اگر $a|60$ و $420|a$ برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۴

MiniBOX

اگر طرف چاق یک بخش‌پذیری و طرف لاغر یک بخش‌پذیری دیگر دارای پارامترهای عیناً یکسان باشند و بخواهیم آن پارامتر را پیدا کنیم استفاده از تعدی ما را به تباهی خواهد بُرد. در این موارد کافی است رابطهٔ بخش‌پذیری که پارامتر در طرف چاق آن واقع شده را باز کرده و به‌صورت تساوی بنویسیم و این تساوی را در بخش‌پذیری دیگر جایگذاری کنیم.

اگر $m|12$ و $180|m$ آن‌گاه برای یافتن m به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$12|m \Rightarrow m=12k \Rightarrow 12k|180 \xrightarrow{\div 12} k|15 \Rightarrow k=\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$$

بنابراین برای k و در نتیجه $m=12k$ می توان ۸ جواب صحیح و ۴ جواب طبیعی به‌دست آورد.

ANALYSE

اگر ساده لوحانه عمل کنیم، به نتیجهٔ $60|420$ خواهیم رسید که بدیهی است اما راه واقعی همان است که به شما آموختیم:

$$60|a \Rightarrow a=60q \Rightarrow 60q|420 \xrightarrow{\div 60} q|7 \Rightarrow q=\pm1, \pm7$$

با توجه به رابطهٔ $a=60q$ برای a نیز ۴ جواب وجود دارد که عبارتند از:

q	-1	1	-7	7
a	-60	60	-420	420

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 074 ترکیب پارامتر و پیمانهٔ مجهول

در هم‌نهشتی به پیمانهٔ m سه عدد a، ۴۱ و ۱۷۴ در یک کلاس هم‌نهشتی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به‌طوری که مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کمتری کلاس هم‌نهشتی افراز شود، کدام است؟

۱) ۱۰۶ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۲

MiniBOX

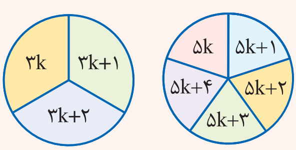
در هم‌نهشتی به پیمانهٔ m مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به m کلاس هم‌نهشتی افراز می‌شود.

در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۳، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۳ کلاس هم‌نهشتی افراز می‌شود که عبارتند از:

$$[0]_3=\{3k:k\in\mathbb{Z}\}\ ,\ [1]_3=\{3k+1:k\in\mathbb{Z}\}\ ,\ [2]_3=\{3k+2:k\in\mathbb{Z}\}$$

هر چه پیمانه بزرگ‌تر باشد $\mathbb{Z}$ به کلاس‌های بیشتری افراز می‌شود و هر چه پیمانه کوچک‌تر باشد $\mathbb{Z}$ به کلاس‌های کمتری افراز می‌شود.

در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۳، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۳ کلاس و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۵ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۵ کلاس افراز می‌شود.



اگر $a\in[r]_m$ و $b\in[r]_m$ باشد، آن‌گاه اعداد a و b هر دو به یک دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m تعلق دارند و به عبارت دیگر می‌توان نوشت: $a\overset{m}{\equiv}b$.

ANALYSE

اعداد a ، ۴۱ و ۱۷۴ در یک دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m قرار دارند، یعنی به پیمانهٔ m هم‌نهشت هستند. حال ابتدا پیمانهٔ m را پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{174\overset{m}{\equiv}41}_{1}\overset{m}{\equiv}a \quad \overbrace{41\overset{m}{\equiv}a}^{2}$$

1) $174\overset{m}{\equiv}41\Rightarrow m|174-41\Rightarrow m|133\Rightarrow m|19\times7\Rightarrow m=7$ یا ۱۹ یا ۱۳۳

از آن‌جا که گفته شده مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کمتری کلاس افراز شود، بنابراین باید $m=7$ باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

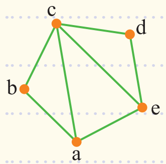
2) $41\overset{7}{\equiv}a\Rightarrow a=7k+41\xrightarrow{k=9}$ کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی $a=104$

برای این‌که $7k+41$ سه رقمی شود باید $7k$ خود را به حدود ۶۰ برساند که کافی است به $k=9$ بدهیم.

پاسخ گزینهٔ ۳

136 TEST **مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف**

اگر نمودار گراف G به صورت مقابل باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $|E(G)|=۷\ ,\ |V(G)|=۵$

۲) $|E(G)|=۸\ ,\ |V(G)|=۵$

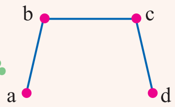
۳) $|E(G)|=۵\ ,\ |V(G)|=۷$

۴) $|E(G)|=۱۲\ ,\ |V(G)|=۶$

MiniBOX

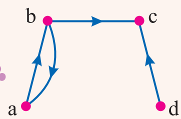
اگر G یک گراف باشد، مجموعهٔ رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و تعداد رأس‌ها را با $|V(G)|$ یا $n(V(G))$ نشان می‌دهند و همچنین مجموعهٔ یال‌های گراف را با $E(G)$ و تعداد یال‌ها را با $|E(G)|$ یا $n(E(G))$ نشان می‌دهند.

$$\begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \Rightarrow |V(G)|=۴ \\ E(G)=\{ab,bc,cd\} \Rightarrow |E(G)|=۳ \end{cases}$$



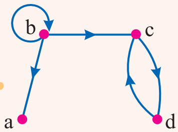
اگر یال‌های گراف جهت‌دار باشد، یال‌های گراف را باید به صورت زوج مرتب نشان دهیم:

$$\begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{(a,b),(b,a),(b,c),(d,c)\} \end{cases}$$



در بعضی گراف‌ها، یالی وجود دارد که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. این یال‌ها را طوقه می‌نامند.

$$\begin{cases} V(G)=\{a,b,c,d\} \\ E(G)=\{(b,a),(b,b),(b,c),(c,d),(d,c)\} \end{cases}$$



ANALYSE

این گراف دارای ۵ رأس است بنابراین $n(V(G))=۵$ و همچنین دارای ۷ یال است بنابراین $n(E(G))=۷$. به عبارت دیگر:

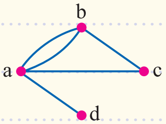
$$V(G)=\{a,b,c,d,e\} \Rightarrow |V(G)|=۵$$

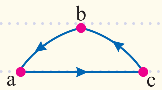
$$E(G)=\{ab,ac,ae,bc,cd,ce,de\} \Rightarrow |E(G)|=۷$$

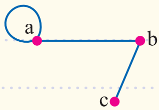
پاسخ گزینهٔ ۱

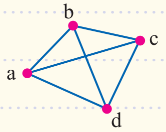
TEST 137 — گراف ساده

کدام یک از گراف‌های زیر یک گراف ساده است؟

۱) 

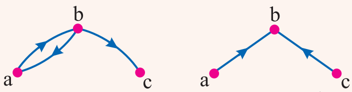
۲) 

۳) 

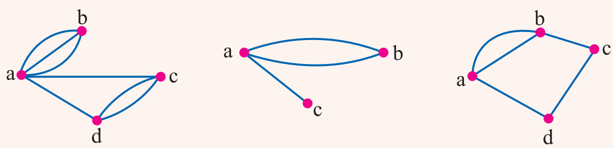
۴) 

MiniBOX

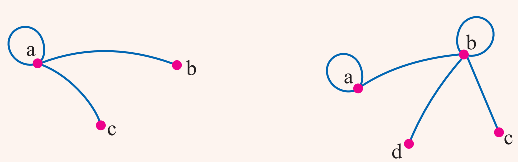
اگر برای یال‌های یک گراف، جهت تعیین شده باشد، این یال‌ها را **یال جهت‌دار** و گراف رسم شده را، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم.



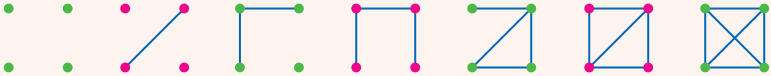
در بعضی از گراف‌ها بین دو رأس بیش از یک یال وجود دارد، این یال‌ها را **یال‌های موازی** و این گراف را، **گراف چندگانه** می‌نامند.



در بعضی از گراف‌ها ممکن است یک یال، یک رأس را به خود همان رأس وصل کند، این یال‌ها را **طوقه** و گراف را، **گراف طوقه‌دار** می‌نامند.



گرافی که یال جهت‌دار و یال موازی و طوقه نداشته باشد را **گراف ساده** می‌گویند و از این بعد در تمام کتاب بحث دربارهٔ گراف‌های ساده است و هرجا گفته می‌شود «گراف»، منظور گراف ساده است.



ANALYSE

تک‌تک گزینه ها را بررسی می‌کنیم:

۱ بین دو رأس a و b، یال‌های موازی وجود دارد بنابراین گراف ساده نیست.

۲ یال‌های گراف، جهت‌دار هستند بنابراین گراف ساده نیست.

۳ رأس a دارای طوقه است، بنابراین گراف طوقه‌دار است و ساده نیست.

۴ گراف ساده است، چون بین هر دو رأس متمایز، یک یال وجود دارد و طوقه و یال جهت‌دار در آن وجود ندارد.

پاسخ گزینهٔ ۴

NOTE

TEST 155 **رسم گراف در حالت مختلف**

در گرافی با درجهٔ رئوس ۲، ۲، ۲، ۲، ۵، ۵ بین دو رأس از درجهٔ ماکزیمم چند مسیر وجود دارد؟

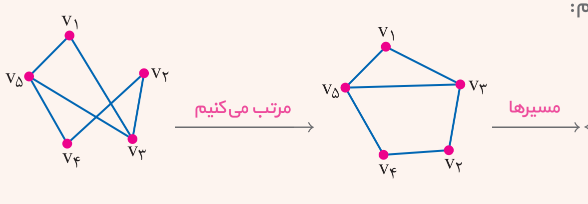
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

MiniBOX

اگر مجموعهٔ رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های یک گراف داده شود، برای پاسخ به هر سوالی [به جز سوال دربارهٔ تعداد اعضای آنها] باید گراف را رسم کنیم. بهترین راه برای رسم این است که رأس‌ها را گرد، دور هم بچینیم ویال‌های داده شده را به هم وصل کنیم.

در گراف G اگر $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E=\{v_1v_3, v_2v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_2v_4, v_1v_5\}$ باشد، مسیرهای بین v_1 و v_2 را نام ببرید.

ابتدا گراف را رسم می‌کنیم:

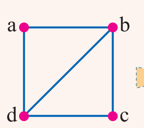


$$\begin{cases} v_1v_3v_2 \\ v_1v_3v_5v_4v_2 \\ v_1v_5v_3v_2 \\ v_1v_5v_4v_2 \end{cases}$$

اگر نمودار یک گراف به صورت توصیفی داده شود، [مثلاً تعداد یال‌ها و تعداد رأس‌ها داده شود] باید آن را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات گراف پی ببریم.

در گرافی با ۴ رأس و ۵ یال، بین دو رأس از درجهٔ کوچکتر چند مسیر وجود دارد؟

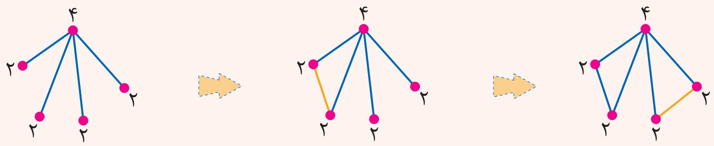
ابتدا گراف را رسم می‌کنیم، حال با توجه به شکل باید مسیرهای بین a و c را پیدا کنیم:



$$\begin{cases} abc \\ adc \\ abdc \\ adbc \end{cases}$$ ۴ مسیر

اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف داده شود نیز باید گراف را رسم کنیم تا بتوانیم به خصوصیات آن پی ببریم. بهترین راه برای رسم یک گراف از روی درجهٔ رأس‌های آن، این است که در گام اول رأس‌های با درجهٔ بزرگتر را رسم کنیم و در گام‌های بعدی، به ایجاد رأس‌های با درجهٔ کوچک‌تر بپردازیم.

برای رسم گرافی با درجه رئوس ۲، ۲، ۲، ۲، ۴ ابتدا ۵ نقطه قرار می‌دهیم و در گام اول رأس با درجهٔ ۴ را رسم می‌کنیم:



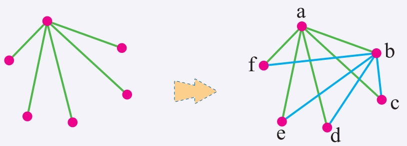
1 [رأس درجهٔ ۴ را رسم می‌کنیم]

2 [با وصل کردن دو رأس درجهٔ ۱، دو رأس درجهٔ ۲ حاصل می‌شود]

3 [با وصل کردن دو رأس درجهٔ ۱ دیگر، دو رأس درجهٔ ۲ حاصل می‌شود]

ANALYSE

ابتدا ۶ رأس قرار می‌دهیم و در گام اول یک رأس از درجهٔ ۵ رسم می‌کنیم و در گام دوم رأس درجهٔ ۵ بعدی را رسم می‌کنیم:



مسیرها $\begin{cases} ab \\ acb \\ adb \\ aeb \\ afb \end{cases}$ ← ۵ مسیر

پاسخ گزینهٔ ۳

NOTE

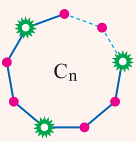
TEST 176 — عدد احاطه‌گری در C_n ، P_n ، T_n

اختلاف عدد احاطه‌گری گراف‌های $C_{۱۳}$ و $P_۹$ کدام است؟

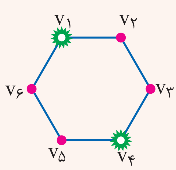
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

MiniBOX

- در گراف‌های C_n عدد احاطه‌گری برابر با $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ است.
- نوع مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در گراف‌های C_n مطابق شکل به‌صورت دو رأس در میان است:

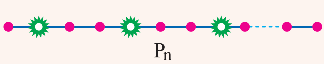


- در گراف $C_۶$ ، در شکل زیر ، یکی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم نمایش داده شده است:

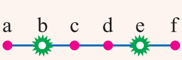


$D=\{v_۱, v_۴\}$

- در گراف‌های P_n عدد احاطه‌گری برابر با $\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$ است.
- همچنین نوع مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در گراف‌های P_n مطابق شکل به‌صورت دو رأس در میان است:

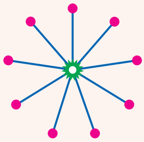


- در گراف $P_۶$ ، در شکل زیر، یکی از مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم نمایش داده شده است:



$D=\{b, e\}$

- در گراف‌های T_n [درخت‌های ستاره‌ای] عدد احاطه‌گری برابر $\gamma(T_n)=۱$ است.



ANALYSE

عدد احاطه‌گری در هر کدام از گراف‌های $C_{۱۳}$ و $P_۹$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases}\gamma(C_{۱۳})=\left\lceil \frac{۱۳}{۳} \right\rceil=\lceil ۴/... \rceil=۵ \\ \gamma(p_۹)=\left\lceil \frac{۹}{۳} \right\rceil=۳\end{cases} \Rightarrow \gamma(C_{۱۳})-\gamma(P_۹)=۵-۳=۲$$

پاسخ گزینهٔ ۲

TEST 177 عدد احاطه‌گری در K_n , $\overline{K_n}$, ...

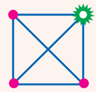
در گراف ۱- منتظم از مرتبهٔ ۸ عدد احاطه‌گری کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

MiniBOX

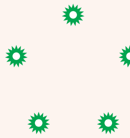
عدد احاطه‌گری در گراف K_n برابر $\gamma(K_n)=۱$ است.

در این گراف، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم (γ-مجموعه) هر کدام از رأس‌های گراف می‌تواند باشد.



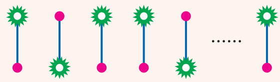
عدد احاطه‌گری در گراف $\overline{K_n}$ برابر $\gamma(\overline{K_n})=n$ است.

در این گراف، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یک مجموعه شامل تمام رأس‌هاست.



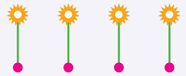
عدد احاطه‌گری در گراف‌های ۱- منتظم مرتبهٔ n برابر $\frac{n}{۲}$ است.

یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از این گراف‌ها مطابق شکل است.



ANALYSE

عدد احاطه‌گری گراف ۱- منتظم از مرتبهٔ ۸ برابر با ۴ است.



پاسخ گزینهٔ ۲

NOTE