

■ مبلغی که امروز بابت خرید این کتاب می پردازید،

در مقابل هزینه‌هایی که در آینده بابت

نخواندن آن پرداخت خواهید کرد،

بسیار ناچیز است ...

هندسه جامع کنکور

شناسنامه

سرشناسه: منصف شگری، علی

عنوان: مینی میکروطلایی هندسه جامع کنکور
مشخصات نشر: تهران، انتشارات بین المللی گاج،

۱۳۹۷

مشخصات ظاهری: ۵۹۲ ص، مصور (رنگی)

فروست: مجموعه کتاب‌های مینی میکروطلایی

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۰۳-۰۱۶۸-۴

شناسه افزودن: صحت‌کار، محمد

شناسه افزودن: حسینی فرد، محمدرضا

نوبت چاپ: اول (۱۳۹۷)

قیمت: ۵۵۰۰۰ تومان

وضعیت فهرست نویسی: فپای مختصر

شماره کتابشناسی ملی: ۵۵۲۹۷۳۲

- ناشر: انتشارات بین المللی گاج
- مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار
- معاونت علمی: مهندس محمد جوکار
- مدیران تألیف: مهندس محمد صحت‌کار، مهندس علی منصف شگری
- عنوان کتاب: مینی میکروطلایی هندسه جامع کنکور
- مؤلفین: علی منصف شگری، محمد صحت‌کار، سید محمد رضا حسینی فرد
- ویراستاران علمی: زهره شعر باف مقدم، فرزین جاهدپور، کیوان دارابی، سوگند روشنی، مهدی ستاری، فاطمه نجاتی، زینب دریس، مسعود درویشی
- ویراستاران فنی: زهرا عزیزی، زهره ذاکری
- مدیر کنترل پروژه: نرگس مشایخی
- امور اجرایی: محمدرضا الکاکی
- مدیر فنی: سامان شاهین پور
- صفحه‌آرما: شقایق محب شاهدین، زهره توماری، سارا نوری اینانلو
- سرپرست گروه گرافیک: اسماعیل شریف‌کازمی
- رسام: منصوره محمدی، آزاده نوریان، مصطفی صالح، فاطمه طرقی
- چاپ و صحافی: گاج
- مدیر چاپ: علی مزرعتی
- نوبت چاپ: اول (۱۳۹۷)
- شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه
- قیمت: ۵۵۰۰۰ تومان
- تلفن: ۰۲۱-۶۴۲۰
- صندوق پستی: ۳۷۷-۱۳۱۴۵
- دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهارراه ولیعصر (عج) و فلسطین، شماره ۹۱۹

کلیه حقوق این کتاب برای انتشارات گاج محفوظ است. هیچ شخص

حقیقی یا حقوقی حق چاپ و نشر تمام یا بخشی از این اثر را به

هر صورت اعم از فتوکپی، چاپ کتاب و جزوه ندارد و متخلفین به

موجب ماده ۵ قانون حمایت از حقوق مؤلفان، مصنفان و هنرمندان

مصوب ۱۳۴۸/۱۰/۱۱ تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

■ ارسال کتاب با پیک (گاجت): ۰۲۱-۶۴۲۰

■ اولیای عزیز جهت آگاهی از آخرین اخبار و اطلاعات کتاب‌های

منتشر شده، لطفاً به سایت www.gaj.ir مراجعه نمایید.

سخن‌ناثر



آیامی دانید برای تخی سیهی هر تن کاغذ سفید ۱۷۷ اصله درخت بقیع می شود؟ آیامی دانید برای تولید یک عنوان کتبات ۲ صفحه ای قطع صلی و در شمارگان ... نسخه یک تن کاغذ مصرف می شود؟ لذا شاید است پس از مطالعه می گفتا حاضر آن رادرو ب سایت mygaj.com قرار دهید تا از تولید آن جلوه گیری و در مصرف کاغذ فربجویی شود. باشد که شما دوست خواننده ایم با این حرکت به طاهر کوچک، گامی بلند در حفظ منابع طبیعی کرده ی زمین برداشته باشید.

ارادت شما
انجمن جوکار

مقدمهٔ مدیریت تألیف

♦ ما در رقابت با هیچ‌کس جز خودمان نیستیم...
هدف ما مغلوب نمودن آخرین کاری است که انجام داده‌ایم.

مقدمه مؤلفین

■ چشمه ساری در دل

و آبشاری در کف،

آفتابی در نگاه

و فرشته‌ای در پیراهن

از انسانی که توئی

قصه‌ها می‌توانم کرد

غم نان اگر بگذارد ...

■ احمد شاملو

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی و استدلال

- درس اول: ترسیم‌های هندسی ۸
 درس دوم: استدلال ۲۶

فصل ۲

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

- درس اول: نسبت و تناسب در هندسه ۴۸
 درس دوم: قضیهٔ تالس ۵۸
 درس سوم: تشابه مثلث‌ها ۹۳
 درس چهارم: کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها ۱۱۴

فصل ۳

چندضلعی‌ها

- درس اول: چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آن‌ها ۱۲۰
 درس دوم: مساحت و کاربردهای آن ۱۴۶

فصل ۴

تجسم فضایی

- درس اول: خط، نقطه و صفحه ۱۸۲
 درس دوم: تفکر تجسمی ۲۰۹

فصل ۱

دایره

- درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره ۲۴۰
 درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره ۲۶۱
 درس سوم: چندضلعی‌های محاطی و محیطی ۲۷۹

فصل ۲

تبدیلات هندسی و کاربردها

- درس اول: تبدیل‌های هندسی ۳۰۰
 درس دوم: کاربرد تبدیل‌ها ۳۴۰

فصل ۳

روابط طولی در مثلث

- درس اول: قضیهٔ سینوس‌ها ۳۵۲
 درس دوم: قضیهٔ کسینوس‌ها ۳۶۰
 درس سوم: قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها ۳۶۷
 درس چهارم: قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) ۳۷۲

فصل ۱

ماتریس و کاربردها

- درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها ۳۹۲
 درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان ۴۱۶

فصل ۲

آشنایی با مقاطع مخروطی

- درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی ۴۵۴
 درس دوم: دایره ۴۶۲
 درس سوم: بیضی و سهمی ۴۹۷

فصل ۳

بردارها

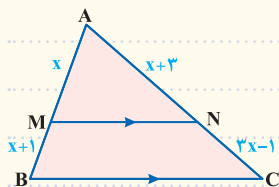
- درس اول: معرفی فضای \mathbb{R}^3 ۵۳۴
 درس دوم: ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها ۵۵۲

درس دوم: قضيه تالس

قضيه تالس [جزء به جزء]

TEST 038

در شكل مقابل MN موازي قاعده BC است، مقدار x کدام است؟



۲ (۱)

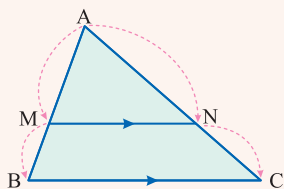
۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

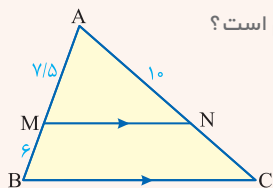
MiniBOX

هرگاه در يك مثلث، خطي راست موازي يكي از اضلاع، دو ضلع ديگر مثلث را در دو نقطه قطع كند، روي آن دو ضلع، ۴ پاره خط جدا مي كند كه اندازه آن ها تشكيل يك تناسب مي دهد [اين قضيه را تالس جزء به جزء مي نامند].



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

در شكل مقابل MN و BC موازي اند. طول پاره خط NC کدام است؟



$$\frac{7/5}{6} = \frac{10}{NC} \Rightarrow NC = \frac{6 \times 10}{7/5} = 4$$

ANALYSE

اگر در يك تست اندازه پاره خط MN نه داده شده بود و نه خواسته شده بود، بهتر است از تالس جزء به جزء استفاده كنيم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x+3}{3x-1} \Rightarrow 3x^2 - x = x^2 + 4x + 3$$

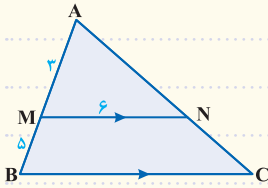
$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \text{ غرقي} \end{cases}$$

پاسخ گزينه ۲



قضیه تالس [جزء به کل]

TEST 039



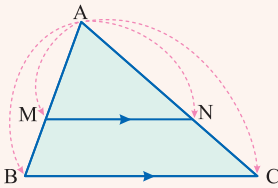
در شکل مقابل MN با BC موازی است، اندازه ضلع BC کدام است؟

۱۸ (۱)

۱۶ (۴)

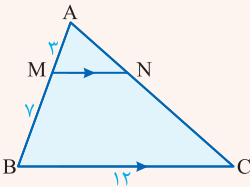
MiniBOX

اگر خطی دو ضلع از اضلاع مثلثی را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی را از مثلث اصلی جدا می‌کند که اندازه ضلع‌های آن، با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است این قضیه را [تالس جزء به کل] می‌نامند.



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

در شکل مقابل اندازه پاره خط MN کدام است؟



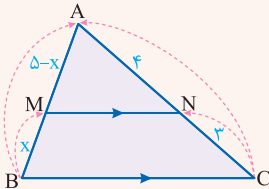
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{MN}{12} \Rightarrow MN = 3.6$$

به طور کلی زمانی از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم که پاره خط MN داده یا خواسته شده باشد.

تالس جزء به کل را از سمت قاعده به سمت رأس‌ها نیز می‌توان نوشت، اما در این حالت MN را نمی‌توان

در نسبت دخالت داد.

مقدار X در شکل مقابل برابر است با:



$$\Rightarrow \frac{X}{X + (5 - X)} = \frac{3}{3 + 4} \Rightarrow \frac{X}{5} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow 7X = 15 \Rightarrow X = \frac{15}{7}$$

ANALYSE

چون MN جزء داده‌های مسئله است، باید از تالس جزء به کل استفاده کنیم:

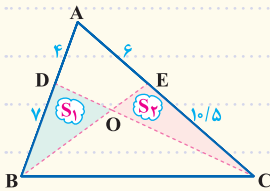
$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{3}{3 + 5} = \frac{6}{BC} \Rightarrow 3BC = 48 \Rightarrow BC = 16$$

پاسخ گزینه ۴



عکس تالس

TEST 040



مطابق شکل، رابطه بین دو مساحت رنگ شده کدام است؟

$3S_1 = 2S_2$ (۱)

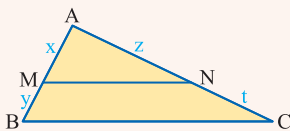
$S_1 = S_2$ (۲)

$2S_1 = 3S_2$ (۳)

$2S_1 = S_2$ (۴)

MiniBOX

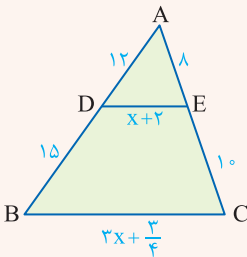
اگر خطی روی دو ضلع مثلثی چهار پاره خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آنگاه با ضلع سوم مثلث موازی است. [عکس قضیه تالس]



$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow MN \parallel BC$

با توجه به شکل مقابل، X کدام است؟

دقت کنید که در این مسئله، اشاره‌ای به موازی بودن DE و BC نشده است، پس ابتدا نسبت اندازه‌های پاره‌های ایجاد شده بر اضلاع AB و AC را با هم مقایسه می‌کنیم:



$\frac{12}{15} = \frac{8}{10} \Rightarrow DE \parallel BC$

بنابراین می‌توانیم از تالس جزء به کل برای محاسبه مقدار X به صورت زیر استفاده کنیم:

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{12}{27} = \frac{X+2}{3X+\frac{3}{4}} \Rightarrow 36X+9 = 27X+54 \Rightarrow 9X = 45 \Rightarrow X = 5$

در سؤال‌هایی که به کمک عکس تالس حل می‌شوند، معمولاً اشاره‌ای به خط موازی قاعده نمی‌شود و یا حتی گاهی اصلاً چنین خطی وجود ندارد؛ اما در این حالت طول هر ۴ قطعه روی ساق‌های مثلث معلوم است و اعداد طوری هستند که نسبت آن‌ها یک تناسب تشکیل می‌دهد.

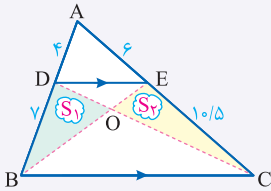




ANALYSE

همان طور که در شکل دیده می شود طول هر ۴ قطعه روی اضلاع مثلث مشخص است، و معلوم بودن هر ۴ قطعه روی ساق های مثلث خیراز عکس تالس می دهد [خبر آمد، خیری در راه است!] بنابراین کنترل می کنیم ببینیم واقعاً خبری هست یا نه؟!

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{10/5} \Rightarrow \underbrace{4 \times 10 / 5}_{42} = \underbrace{6 \times 7}_{42} \Rightarrow BC \parallel DE$$



پس در چهارضلعی DECB قاعده های DE و BC موازی اند، یعنی این چهارضلعی دوزنقه است. بنابراین مثلث های رنگ شده، هم مساحت هستند.

پاسخ گزینه ۲

NOTE



بیان غیرمستقیم واژه موازی در تالس

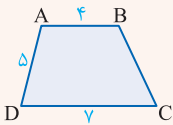
TEST 041

در مثلث قائم الزاویه ABC مطابق شکل $\hat{A} = \hat{D}$ است. اگر $AD = 3$ و $BE = 4$ باشد، مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟

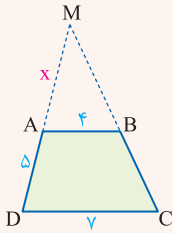
۶ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

MiniBOX

گاهی اوقات به جای این که به طور مستقیم بگویید دو خط d و d' موازی اند، می گویند فلان چهارضلعی، دوزنقه است.



در دوزنقه مقابل، اضلاع AD و BC را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. فاصله M از D چقدر است؟

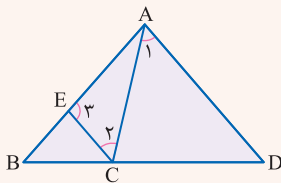


$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{4}{7}$$

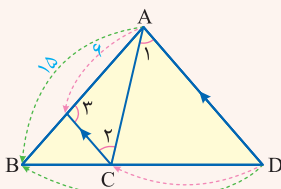
$$\Rightarrow 7x = 4x + 20 \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow MD = MA + AD = \frac{20}{3} + 5 = \frac{35}{3}$$

گاهی اوقات نه از کلمه موازی استفاده می شود و نه نامی از دوزنقه است، بلکه از عکس قضیه خطوط موازی و مورب استفاده می کنند و با این وسیله، به بیان موازی بودن دو خط می پردازند.



در شکل مقابل داریم: $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$. اگر $AB = 15$ و $AC = 6$ باشد، حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟



چون $\hat{1} = \hat{2}$ است، طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب می توان نتیجه گرفت که $CE \parallel AD$ است. همچنین تساوی $\hat{2} = \hat{3}$ نشان می دهد مثلث ACE متساوی الساقین است، یعنی $AE = AC = 6$ حال از قضیه تالس استفاده می کنیم:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$



ANALYSE

از برابری $\hat{A} = \hat{D}$ می‌توان فهمید که DE و AC موازی‌اند، بنابراین طبق تالس داریم:

$$\frac{BD}{3} = \frac{4}{EC} \Rightarrow BD \times EC = 12$$

از طرفی مساحت مثلث رنگ شده برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} BD \times EC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

✓ این تست در عین سادگی، بسیار زیبا و هوشمندانه طراحی شده و مربوط به کنکورهای کشور ترکیه بود!

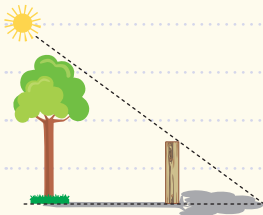
پاسخ گزینه ۱

NOTE



تالس جزء به کل کاربردی تیپ اول

TEST 042



در شکل مقابل اگر نوک سایه چوب $\frac{1}{5}$ متری بر نوک سایه درخت منطبق باشد و طول سایه چوب و درخت ۶ و ۱۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟

۲۴ (۲)

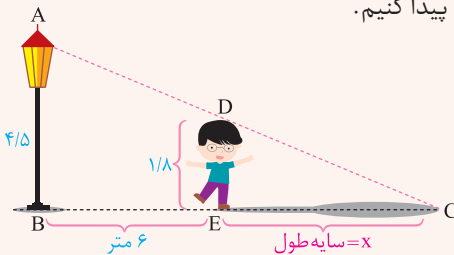
۳۶ (۱)

۲۵ (۴)

۳۰ (۳)

MiniBOX

منظور از **تالس کاربردی** مجموعه مسائلی است که طول سایه، بلندی یک درخت یا ارتفاع یک سازه و نظایر آن را از ما می‌خواهند و به‌طور مستقیم، صحبت از یک مثلث در هندسه نیست! تیپ اول این مسائل حالتی است که اطلاعات داده‌شده و خواسته‌شده در مسئله، درون یک مثلث قائم‌الزاویه قرار دارد. در این حالت باید به پاره‌خطی که موازی ضلع عمودی قرار دارد توجه و با استفاده از تالس جزء به کل خواسته مسئله را پیدا کنیم.



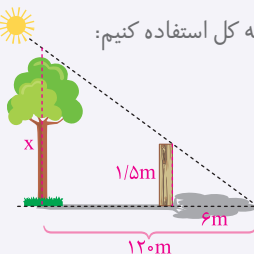
شخصی با قد 180 سانتی‌متر در فاصله 6 متری از تیر چراغ برق به ارتفاع $\frac{4}{5}$ متر ایستاده است، طول سایه این شخص روی زمین چقدر است؟

با توجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویه و فرضی ABC ، ضلع DE موازی ضلع AB است.

بنابراین: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{1/8}{4/5} = \frac{x}{x+6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{x+6} \xrightarrow{\text{تفصیل درمخرج}} \frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 4$

ANALYSE

کافی است شکل را به یک مثلث ساده‌تر تبدیل کنیم و از تالس جزء به کل استفاده کنیم:



$$\frac{1/5}{x} = \frac{6}{120} \Rightarrow x = 30$$

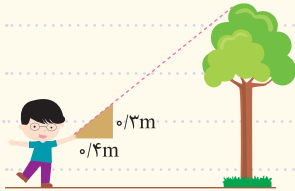
پاسخ گزینه ۳



تاس جزء به کل کاربردی تیپ دوم

TEST 043

شخصی برای پیدا کردن ارتفاع یک درخت، یک تکه مقوا به شکل $\frac{3}{4}m$ ساخت. اگر او در فاصله $\frac{8}{8}$ متری از درخت بایستد، می‌تواند با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث، نوک درخت را ببیند. اگر فاصله تقریبی چشم او از زمین $\frac{1}{6}$ متر باشد، ارتفاع تقریبی درخت کدام است؟



(۱) $\frac{7}{8}$

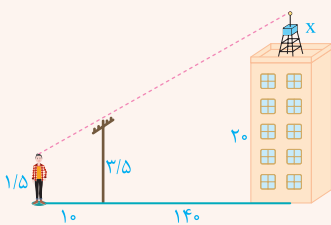
(۲) $\frac{8}{8}$

(۳) $\frac{8}{8}$

(۴) $\frac{8}{2}$

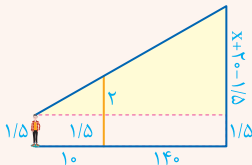
MiniBOX

در این تیپ از مسائل، اطلاعات داده‌شده در مسئله روی اضلاع یک دوزنقه قائم‌الزاویه قرار دارد که ساق قائم آن سطح زمین است. در این حالت با رسم یک خط به موازات ساق قائم، یک مثلث قائم‌الزاویه درون دوزنقه ایجاد و اطلاعات مسئله را به این مثلث منتقل می‌کنیم و در انتها قضیهٔ تالس را روی این مثلث می‌نویسیم.



در شکل مقابل، دکلی روی یک ساختمان به ارتفاع 20 متر نصب شده است. دید چشم ناظری با قد $\frac{1}{5}$ متر از نوک دکل و تیرک $\frac{3}{5}$ متری بین آن‌ها، در یک راستا است. ارتفاع دکل چقدر است؟

از چشم ناظر یک خط به موازات افق رسم می‌کنیم و اطلاعات مسئله را به مثلث ایجادشده منتقل می‌کنیم و سپس به سراغ تالس می‌رویم:

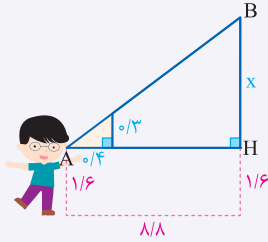


$$\Rightarrow \frac{2}{x + 18/5} = \frac{1}{15} \Rightarrow x + 18/5 = 30 \Rightarrow x = 11/5$$



ANALYSE

چون شکل حالت ذوزنقه دارد، کافی است از انتهای چشم ناظر خطی به موازات افق رسم کنیم و مثلثی ایجاد کنیم که اطلاعات مسئله درون آن نهفته است و سپس از قضیه تالس به صورت زیر استفاده کنیم:



$$\begin{aligned} \Delta AHB: \frac{\sin 3^\circ}{x} &= \frac{\sin 4^\circ}{8/8} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{4}{8/8} \\ \Rightarrow \frac{3}{x} &= \frac{1}{2/2} \Rightarrow x = 6/6 \end{aligned}$$

بنابراین ارتفاع درخت برابر است با:

$$L = 6/6 + 1/6 = 8/2$$

پاسخ گزینه ۴

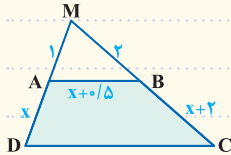
NOTE



ترکیب جزء به جزء و جزء به کل

TEST 044

از امتداد ساق‌های دوزنقه ABCD، مثلثی با اضلاع ۱ و ۲ پدید آمده است. اندازه قاعده بزرگ دوزنقه چقدر است؟



۷/۵ (۱)

۸ (۲)

۷ (۳)

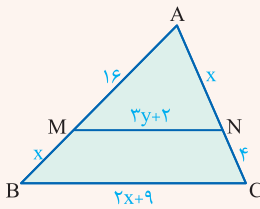
۶/۵ (۴)

MiniBOX

🍏 اگر در مسائل مربوط به تالس، هم اعداد روی ساق‌های مثلث و هم اعداد مربوط به قاعده‌ها [لااقل یکی دو قاعده] مجهول بودند، اما برحسب یک متغیر نبودند مجبوریم دو بار از تالس استفاده کنیم. یک بار جزء به جزء روی ساق‌ها و دیگری جزء به کل روی قاعده و خط موازی آن.

♣ در شکل مقابل MN موازی BC است. X و Y را بیابید.

🕒 ابتدا X را به دست می‌آوریم:



$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \frac{16}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = 16 + 8 = 24 \\ BC = (2 \times 8) + 9 = 25 \end{cases}$$

اینک می‌توانیم Y را به صورت زیر به دست آوریم:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{24} = \frac{3y+2}{25} \Rightarrow 72y+48=400 \Rightarrow y = \frac{352}{72} \Rightarrow y = \frac{44}{9}$$

ANALYSE

🟩 ابتدا به کمک تالس جزء به جزء، X را به دست می‌آوریم:

$$\frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \Rightarrow x+2=2x \Rightarrow x=2$$

حال با استفاده از تالس جزء به کل، ضلع DC را به دست می‌آوریم:

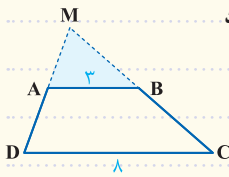
$$\frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{x+0.5}{DC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2.5}{DC} \Rightarrow DC = 7.5$$

پاسخ گزینه ۱



رابطه بین قاعده‌ها و امتداد ساق‌های ذوزنقه

TEST 045



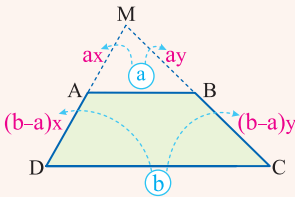
در شکل مقابل، محیط ذوزنقه ABCD برابر ۳۱ است. محیط مثلثی که از امتداد

ساق‌های ذوزنقه روی قاعده کوچک آن تشکیل می‌شود، کدام است؟

- ۱۷ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۶ (۳)
- ۱۵ (۴)

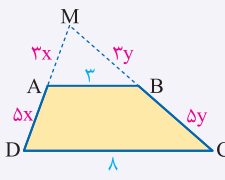
MiniBOX

اگر اندازه قاعده‌های ذوزنقه‌ای مشخص باشد و ساق‌ها را از یک طرف امتداد دهیم تا در یک نقطه، یکدیگر را قطع کنند، می‌توانیم اندازه ساق‌ها و اندازه امتداد ساق‌ها را برحسب قاعده‌ها پیدا کنیم.



فرض کنید اندازه قاعده‌های یک ذوزنقه مطابق شکل مقابل، a و b باشد، در این صورت طبق تالس ضریبی از تفاضل دو قاعده، به ساق‌ها و ضریبی از قاعده کوچک به امتداد ساق‌ها می‌رسد.

ANALYSE



طبق تالس و نکته بیان شده داریم:

$$ABCD \text{ محیط ذوزنقه} = 5x + 3 + 5y + 8 = 31 \Rightarrow x + y = 4$$

بنابراین محیط مثلث MAB برابر است با:

$$MAB \text{ محیط مثلث} = 3x + 3y + 3 = 3(x + y) + 3 = (3 \times 4) + 3 = 15$$

پاسخ گزینه ۴

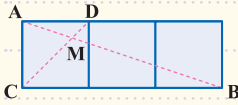
T O N



اشکال مشهور در تشابه [تیپ اول]

TEST 068

در شکل زیر سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار گرفته‌اند. فاصله MA چند برابر $\sqrt{10}$ است؟



$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{1}{5}$ (۴)

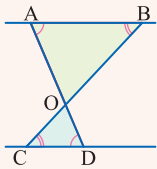
$\frac{2}{9}$ (۳)

MiniBOX

🍏 اگر در یک شکل هندسی شکلی شبیه پروانه دیده شود، به احتمال قوی بال‌های پروانه با هم

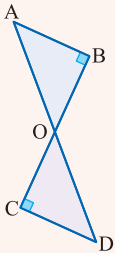
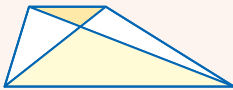
متشابه است. به موارد زیر که بال‌های پروانه متشابه است، دقت کنید:

👉 بال‌های پروانه اسیر بین دو خط موازی متشابه است.



$\triangle OAB \sim \triangle OCD$

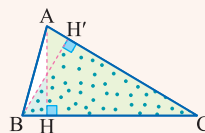
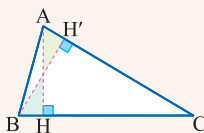
بنابراین پروانه‌های ایجادشده درون ذوزنقه، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع و لوزی متشابه‌اند.



👉 مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که دارای یک زاویهٔ متقابل به رأس [برابر] باشند،

متشابه‌اند.

بنابراین با رسم دو ارتفاع هر مثلث، مثلث‌های متشابه تولید می‌شود.

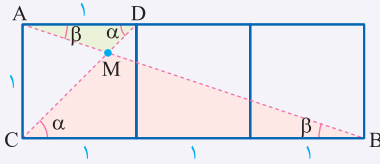




ANALYSE

مثلث‌های MAD و MCB مربوط به بال‌های یک پروانه‌ اسیرین دو خط موازی هستند و متشابه‌اند.

بنابراین:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$$

ترکیب در مخرج $\rightarrow \frac{AM}{AM+MB} = \frac{1}{3+1} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow AB = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{AM}{\sqrt{10}} = \frac{1}{4} \Rightarrow AM = \frac{1}{4} \sqrt{10}$$

پاسخ گزینه ۲

NOTE



اشکال مشهور در تشابه [تیپ دوم]

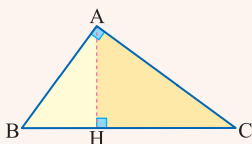
TEST 069

در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جز تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث اصلی $6/76$ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر باشد، نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

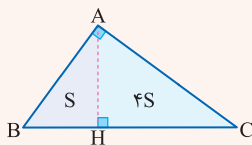
- ۴ (۱) $\frac{12}{5}$ (۲) $\frac{12}{7}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴)

MiniBOX

یکی دیگر از مشهورترین حالات در تشابه، مثلث‌های ایجادشده توسط ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه است.



$$\triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$$

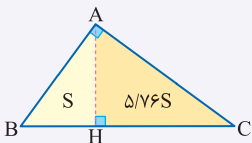


در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو جزء تقسیم می‌کند، اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

مساحت جزء کوچک‌تر را S و مساحت جزء بزرگ‌تر را $4S$ فرض می‌کنیم؛ حال داریم:

$$\frac{\text{مساحت این ارتفاع آن}}{\text{مساحت آن}} = \left(\frac{\text{ارتفاع این}}{\text{ارتفاع آن}}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{4S} = \left(\frac{h_1}{h_p}\right)^2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_p} = \frac{1}{2}$$

ANALYSE



چون مساحت مثلث اصلی $6/76$ برابر مثلث کوچک‌تر است، پس اگر مساحت مثلث کوچک را S فرض کنیم مساحت مثلث کناری آن $5/76S$ خواهد شد.

حال مثلث‌های AHB و AHC بنابر نکات بیان شده متشابه‌اند و در نتیجه مربع نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر با نسبت مساحت‌های آن‌هاست:

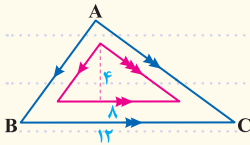
$$\left(\frac{h_1}{h_p}\right)^2 = \frac{S}{\frac{5}{76}S} \Rightarrow \left(\frac{h_1}{h_p}\right)^2 = \frac{5/76S}{S} \Rightarrow \frac{h_1}{h_p} = \frac{2}{4} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

پاسخ گزینه ۲



اشکال مشهور در تشابه [تیپ سوم]

TEST 070



مطابق شکل، مساحت مثلث بزرگ تر چه عددی است؟

۳۶ (۲)

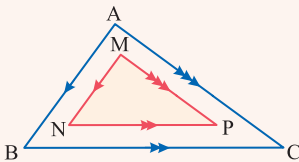
۲۸ (۱)

۵۴ (۴)

۴۸ (۳)

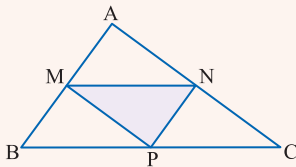
MiniBOX

اگر اضلاع دو مثلث نظریه نظیر موازی باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$

می‌دانیم اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، طبق عکس قضیه تالس، اضلاع مثلث ایجاد شده موازی اضلاع مثلث خواهد بود. بنابراین هر یک از ۴ مثلث پدید آمده، با مثلث اصلی متشابه هستند و نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ است.



$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \sim \triangle AMN \sim \dots$$

مساحت هر یک از مثلث‌های کوچک ایجاد شده، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است، چون:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ANALYSE

دو مثلث با اضلاع موازی متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر با نسبت دو چیز نظیر است:

$$k = \frac{a}{12} \Rightarrow \frac{4}{h} = \frac{a}{12} \Rightarrow h = 6$$

حال مساحت مثلث بزرگ‌تر قابل محاسبه است:

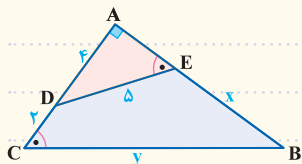
$$S = \frac{1}{2} h \times a = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36$$

پاسخ گزینه ۲



اشکال مشهور در تشابه [تیپ چهارم]

TEST 071

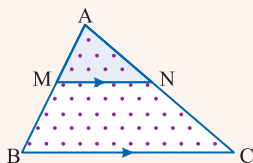


مطابق شکل، حاصل $x + y$ کدام است؟

۱۷ (۱) ۱۵ (۲)

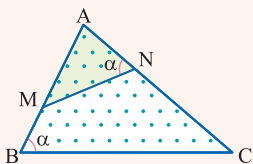
۱۲ (۳) ۱۶ (۴)

MiniBOX



🍏 اگر خطی موازی قاعدهٔ یک مثلث رسم شود، مثلث ایجاد شده با مثلث اصلی به یقین متشابه است.

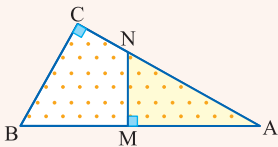
$$\triangle AMN \sim \triangle ABC$$



🍏 اگر خطی غیرموازی با قاعدهٔ مثلث رسم شود، مثلث کوچک به وجود آمده در صورتی می‌تواند با مثلث اصلی متشابه باشد که دو مثلث، به جز زاویهٔ مشترک (یعنی A)، یک زاویهٔ برابر دیگر نیز داشته باشند.

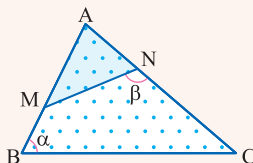
$$\triangle AMN \sim \triangle ABC$$

📌 یکی از حالات خاص این شکل به صورت زیر است:



$$\triangle ABC \sim \triangle AMN$$

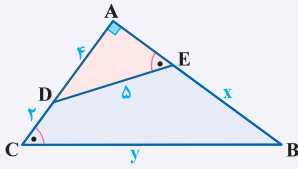
📌 گاهی اوقات مطابق شکل، خطی غیر موازی با قاعدهٔ مثلث رسم می‌شود و به جای این‌که گفته شود دو مثلث یک زاویهٔ برابر دارند، گفته می‌شود چهارضلعی BMNC دو زاویهٔ مکمل دارد یا ممکن است بگویند رأس‌های چهارضلعی BMNC روی محیط یک دایره هستند.



$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMN$$



ANALYSE



□ دو مثلث ADE و ABC متشابه اند. ابتدا اندازه ضلع AE را پیدا می‌کنیم که براساس قضیه فیثاغورس برابر با ۳ است. حال داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{4}{3+x} = \frac{5}{y} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Loading, Please wait ...

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=8 \Rightarrow x=5 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow x+y=15$$

پاسخ گزینه ۲

NOTE