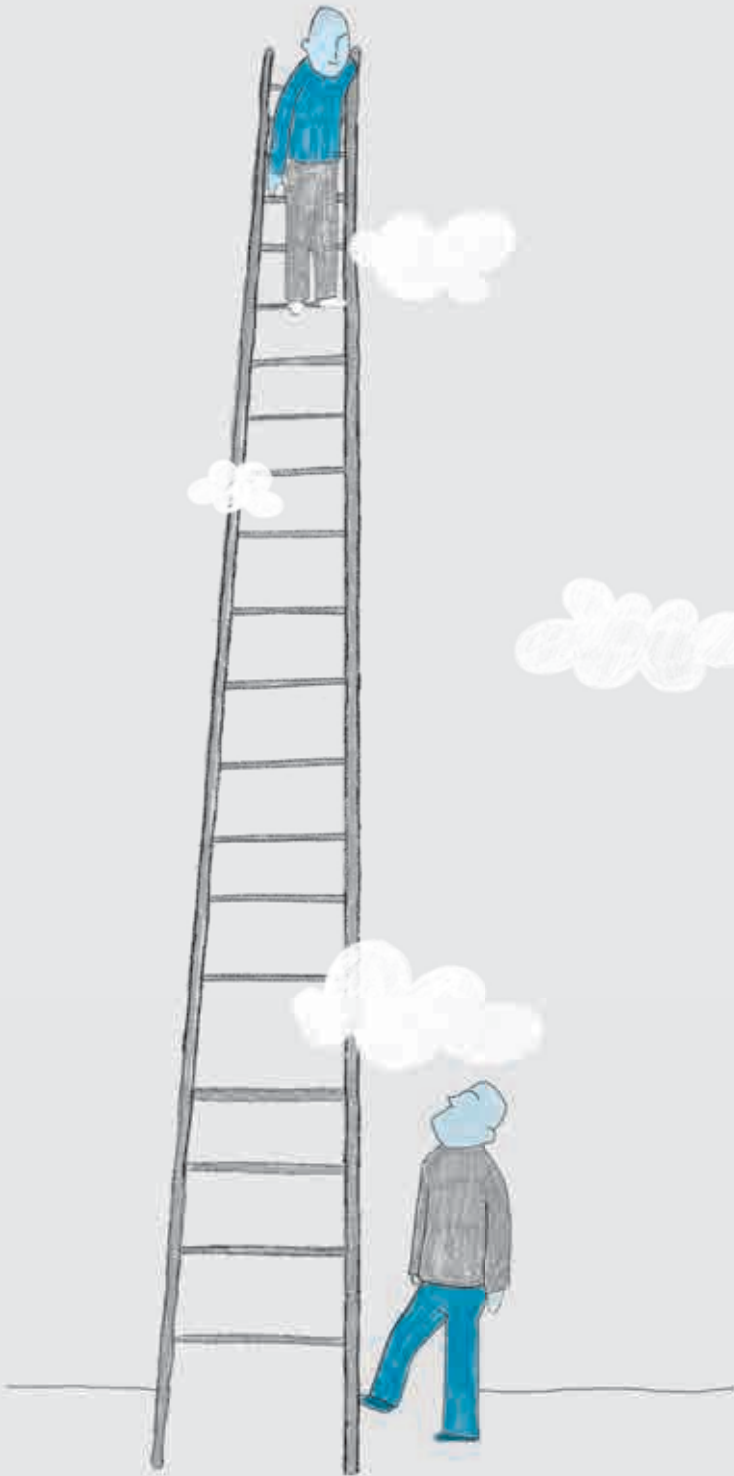




۴	فصل سوم: نوسان و امواج
۵	بخش ۱: نوسان
۴۷	بخش ۲: موج
۱۲۶	فصل چهارم: آشنایی با فیزیک اتمی و هسته‌ای
۱۶۰	پاسخ‌نامه تشریحی
۳۱۰	پاسخ‌نامه کلیدی

# فصل ۳ نویسن و امواج



# بخش پنجم نوسان

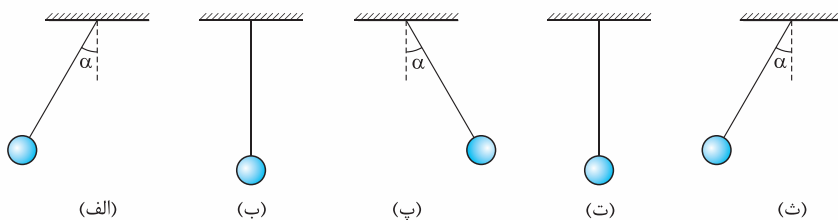
## (۱) نوسان دوره‌ای

**تعریف نوسان دوره‌ای:** به حرکت‌هایی که در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی عیناً تکرار شود، حرکت‌های دوره‌ای می‌گوییم. اگر این حرکت به شکل نوسانی (رفت و برگشت) باشد، آن را «نوسان دوره‌ای» می‌گوییم.

**نمونه** ضربان منظم قلب، تاب خوردن یک بچه، حرکت رفت و برگشتی پیستون در موتور اتومبیل نمونه‌هایی از نوسان دوره‌ای‌اند. **چرخه (سیکل):** هر نوسان کامل را یک «چرخه (سیکل)» می‌نامیم.

**دوره تناوب:** مدت زمان انجام یک چرخه را «دوره تناوب» حرکت می‌نامیم و آن را با  $T$  نشان می‌دهیم.

**نمونه** در شکل ۱- الف، آونگی را به اندازه  $\alpha$  از وضع قائم، منحرف و سپس رها کرده‌ایم. آونگ در مدت  $\Delta t = \frac{T}{4}$  یک بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند و در وضعیت نشان داده شده در شکل ۱- پ قرار می‌گیرد و پس از مدت  $T$  به وضعیت اولیه‌اش برمی‌گردد (شکل ۱- ث) و ... (این داستان ادامه دارد!)



شکل ۱: وضعیت یک نوسانگر در لحظه‌های: الف)  $t = 0$ ، ب)  $t = \frac{T}{4}$ ، پ)  $t = \frac{T}{2}$ ، ت)  $t = \frac{3T}{4}$ ، ث)  $t = T$

**نتیجه** نوسانگر، در یک نوسان کامل، دو بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند. (پس یاد تون نره؛ هر رفت یا هر برگشت، می‌شه نیم نوسان؛ رفت و برگشت می‌شه یک نوسان.)

**نکته** اگر نوسانگر در مدت  $t$ ،  $n$  نوسان کامل انجام دهد، داریم:

$$n = \frac{t}{T} \quad (\text{رابطه ۱})$$

**بسامد:** تعداد نوسان‌هایی که در  $1$  S انجام می‌شود، «بسامد» یا «فرکانس» نام دارد و با نماد  $f$  نشان داده می‌شود. یکای بسامد در SI، «هرتز Hz»

است و رابطه آن با دوره مطابق رابطه (۲) است.

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{رابطه ۲})$$

**نکته** دو آونگ ساده  $A$  و  $B$  را با هم و با دامنه کم به نوسان درمی‌آوریم. اگر دوره نوسان آونگ  $A$  برابر  $1/8$  ثانیه و دوره نوسان آونگ  $B$  برابر  $1/5$  ثانیه باشد، پس از گذشت ۳۶ ثانیه، آونگ  $B$  چند نوسان بیشتر از آونگ  $A$  انجام می‌دهد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۲ (۱)

**پاسخ** گزینه «۳» تعداد نوسان آونگ‌ها را با استفاده از رابطه (۱) به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} n_A &= \frac{t}{T_A} = \frac{36}{1/8} = 288 \\ n_B &= \frac{t}{T_B} = \frac{36}{1/5} = 180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n_B - n_A = 180 - 288 = -108$$

# بررسی‌های هم‌گره‌ای

۷۱۰- فاصله نوسانگری از مرکز نوسان، در لحظه‌های  $t = 2n + 1$  ثانیه ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) بیشینه می‌شود. بسامد این نوسانگر چند هرتز است؟

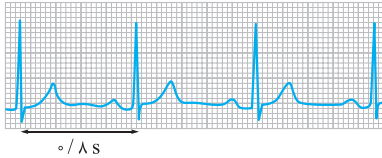
۴ (۴)

۲ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۲۵ (۱)

۷۱۱- شکل روبه‌رو، نوار قلب شخصی را نشان می‌دهد. قلب این شخص در هر دقیقه چند بار می‌زند؟



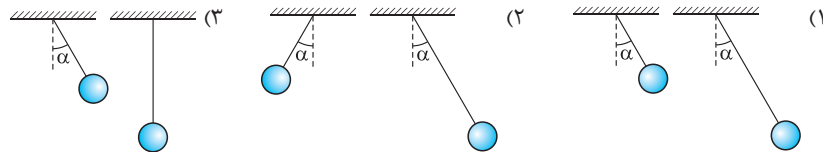
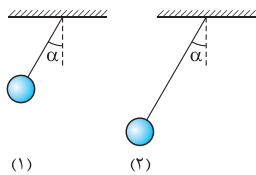
۴۸ (۱)

۶۵ (۲)

۷۲ (۳)

۷۵ (۴)

۷۱۲- دو آونگ (۱) و (۲) با دوره‌های  $T_1 = 2/5$  s و  $T_2 = 4$  s، به طور هم‌زمان، از وضعیتی که در شکل روبه‌رو نشان داده شده است، شروع به حرکت می‌کنند. پس از مدت  $10$  s از لحظه آغاز حرکت، دو آونگ در کدام یک از نماهای زیر دیده می‌شوند؟ (اثر مقاومت هوا ناچیز است.)



۷۱۳- در تست ۷۱۲، آونگ ۱ پس از چند ثانیه ۶ نوسان از آونگ ۲ جلو می‌افتد؟

۶۰ (۴)

۴۰ (۳)

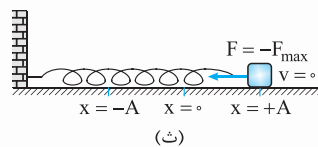
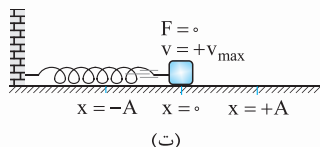
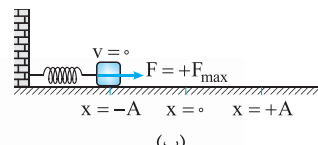
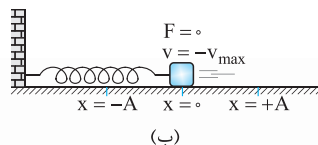
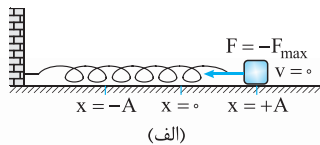
۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

## ۲) ویژگی‌های حرکت هماهنگ ساده

حرکت هماهنگ ساده نوع خاصی از حرکت نوسانی است که روی یک پاره‌خط و حول نقطه وسط آن انجام می‌شود. برای این که به ویژگی‌های این حرکت پی ببرید، حرکت نوسانی وزنه متصل به فنری را بررسی می‌کنیم.

**نمونه** وزنه متصل به فنر افقی‌ای را در نظر بگیرید که مطابق شکل (۲)، روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. مکان  $x = 0$  را منطبق بر نقطه تعادل دستگاه در نظر گرفته‌ایم و مکان‌های سمت راست آن را با علامت مثبت و مکان‌های سمت چپش را با علامت منفی نشان داده‌ایم. وزنه را مطابق شکل ۲-الف، به اندازه  $A$  از نقطه تعادل، خارج و سپس آن را رها می‌کنیم. طبق قانون هوک ( $F_e = -kx$ )، نیروی کشسانی فنر در خلاف جهت جابه‌جایی وزنه از نقطه تعادل ( $x$ ) به وزنه اثر می‌کند و آن را به سمت نقطه تعادل می‌کشاند. در این مدت، چون نیروی وارد بر وزنه در جهت حرکت آن است، حرکت وزنه به صورت تندشونده است. وقتی وزنه به نقطه تعادل می‌رسد، فنر طول طبیعی‌اش را پیدا می‌کند (شکل ۲-ب) و نیروی کشسانی فنر صفر می‌شود؛ با این حال، وزنه به خاطر لختی‌ای که دارد، به حرکت رو به چپ خود ادامه می‌دهد و فنر را فشرده می‌کند. فنر فشرده‌شده نیرویی به سمت راست به وزنه وارد می‌کند که باعث کندشدن و در نهایت، توقف وزنه در مکان  $x = -A$  می‌شود (شکل ۲-پ). در این لحظه، وزنه بیشترین فاصله را از نقطه تعادل دارد و نیروی کشسانی فنر، بیشینه است. سپس، وزنه در خلاف جهت اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ تا کجا؟ تا وقتی که به مکان اولیه‌اش ( $x = +A$ ) برسد (شکل ۲-ت). وزنه در این لحظه متوقف می‌شود و دوباره حرکتش را از نو تکرار می‌کند؛ به این ترتیب، وزنه بین نقاط  $x = A$  و  $x = -A$  مرتب پس و پیش می‌شود.



(شکل ۲)

۱- در فصل قبلی قانون هوک را به شکل  $F = kx$  معرفی کردیم که  $x$  اندازه نیرو و جابه‌جایی از نقطه تعادل بودند. اصل این رابطه به شکل  $\vec{F} = -k\vec{x}$  است که علامت منفی جهت مخالف  $\vec{x}$  و  $\vec{F}$  را نشان می‌دهد.



**نتیجه ۱** بیشترین فاصله نوسانگر از نقطه تعادل را «دامنه» می‌نامیم و آن را با نماد  $A$  نشان می‌دهیم ( $x_{\max} = A$ ). دامنه همواره با عددی مثبت بیان می‌شود.

**نتیجه ۲** در حرکت هماهنگ ساده، معمولاً مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز نوسان می‌گیرند. با این قرارداد، مکان نوسانگر در هر لحظه، برابر جابه‌جایی آن از نقطه تعادل است. اگر نوسانگر روی محور  $x$  حرکت کند، مکان آن را با  $x$  و اگر روی محور  $y$  حرکت کند، مکان آن را با  $y$  نشان می‌دهیم.

**نتیجه ۳** نوسانگر در مکان‌های  $x = \pm A$  تغییر جهت می‌دهد. از این رو به این نقاط «نقطه‌های بازگشت» می‌گویند.

### اسئله‌های و نکات لازم برای حل مسأله‌های این بخش

**۱** در حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر روی یک پاره‌خط و حول نقطه تعادلش نوسان می‌کند؛ به طوری که نیروی وارد بر نوسانگر، متناسب با جابه‌جایی آن از نقطه تعادل و در خلاف جهت آن است.

**نتیجه ۱** جهت نیروی وارد بر نوسانگر (و شتاب) همواره به سمت نقطه تعادل (مرکز نوسان) است. بنابراین، وقتی نوسانگر در مکان مثبت است، علامت نیروی وارد بر آن منفی و وقتی در مکان منفی است، علامت نیروی وارد بر آن مثبت است ( $x > 0 \Rightarrow F < 0$ ,  $x < 0 \Rightarrow F > 0$ ).

**نتیجه ۲** اندازه نیروی وارد بر نوسانگر ثابت نیست و با فاصله نوسانگر از نقطه تعادل متناسب است؛ در دو انتهای مسیر که فاصله نوسانگر از نقطه تعادل بیشینه است، اندازه نیروی وارد بر نوسانگر (و شتاب آن)، بیشینه است ( $x = \pm A \Rightarrow F = \mp F_m$ ) و در مرکز نوسان که فاصله نوسانگر از نقطه تعادل صفر است، نیروی وارد بر نوسانگر (و شتاب آن) صفر است ( $x = 0 \Rightarrow F = 0$ ).

**۲** در مدتی که نوسانگر به نقطه تعادل نزدیک می‌شود، حرکت آن به صورت تندشونده و در مدتی که نوسانگر از نقطه تعادل دور می‌شود، حرکت آن به صورت کندشونده است؛ طوری که سرعت نوسانگر در دو انتهای مسیر صفر است ( $x = \pm A \Rightarrow v = 0$ ) و در مرکز نوسان بیشینه است ( $x = 0 \Rightarrow v = \pm v_{\max}$ ).

**۳** طول مسیر نوسان ۲ برابر دامنه است:  $2A =$  طول مسیر نوسان

**نتیجه ۴** از آن‌جا که نوسانگر در هر دوره، ۲ بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند، مسافت طی‌شده توسط نوسانگر در هر دوره، ۴ برابر دامنه است ( $I = 4A$ ).

**۴** زمان جابه‌جایی نوسانگر از مرکز نوسان تا یک انتهای مسیر (و برعکس)، برابر ربع دوره ( $\frac{T}{4}$ ) است.

**۵** زمان جابه‌جایی نوسانگر بین دو انتهای مسیر، برابر نصف دوره ( $\frac{T}{2}$ ) است.

**۶** زمان بین دو عبور متوالی نوسانگر از مرکز نوسان، برابر نصف دوره ( $\frac{T}{2}$ ) است.

**مسئله** متحرکی میان دو نقطه  $A$  و  $B$  حرکت هماهنگ ساده دارد. اگر در لحظه  $t_1 = 1$  s در نقطه  $B$  و در لحظه  $t_2 = 7$  s در نقطه  $A$  باشد، بزرگ‌ترین دوره حرکت چند ثانیه است؟ (سراسری ریاضی ۸۶، با تغییر)

۱) ۱۲	۲) ۸	۳) ۴	۴) ۲
-------	------	------	------

**پاسخ** گزینه «۱» بازه زمانی جابه‌جایی متحرک بین دو نقطه  $A$  و  $B$  برابر ۶ s است:  $\Delta t = t_2 - t_1 = 7 - 1 = 6$  s

اگر متحرک در این مدت فقط یک بار طول مسیر  $AB$  را طی کرده باشد، دوره آن بیشینه خواهد بود. زمان یک بار طی کردن مسیر نوسان، برابر نصف دوره است:  $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 6 \Rightarrow T = 12$  s

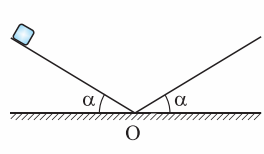
## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۷۱۴- تندی جسمی ثابت است. حرکت این جسم چگونه می‌تواند باشد؟ (سراسری تهرانی قدیمی)

- ۱) امکان ندارد دوره‌ای باشد. ۲) ممکن است دوره‌ای باشد. ۳) ممکن است هماهنگ ساده باشد. ۴) گزینه‌های ۲ و ۳

◀ تست بعدی رو برای این طرح کردیم که بهتون بگیم هر نوسانگری نوسانگر ساده نیست!!

۷۱۵- در شکل روبه‌رو، جسم کوچکی از ارتفاع معینی روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاک رها می‌شود و پس از عبور از نقطه  $O$  روی سطح شیب‌دار مشابهی تا همان ارتفاع اولیه بالا می‌رود. نوع حرکت جسم چگونه است؟



۱) دوره‌ای است، اما نوسانی نیست. ۲) نوسانی است، اما هماهنگ ساده نیست. ۳) هماهنگ ساده است. ۴) دوره‌ای نیست.

۷۱۶- در لحظه‌ای که بزرگی شتاب یک نوسانگر هماهنگ ساده کاهش می‌یابد، کدام یک از کمیت‌های آن افزایش می‌یابد؟

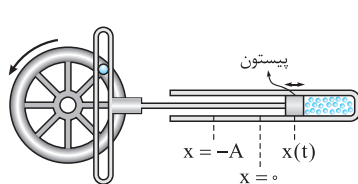
- ۱) تکانه ۲) جابه‌جایی از نقطه تعادل ۳) بسامد ۴) انرژی مکانیکی

۷۱۷- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای حول مبدأ مختصات، روی محور  $y$ ها در نوسان است. در لحظه‌ای که نیروی وارد بر نوسانگر منفی باشد، علامت‌های مکان و سرعت آن، به ترتیب از راست به چپ، چگونه است؟  
(سراسری تهرنی قدیمی)

(۱) مثبت - مثبت یا منفی (۲) مثبت یا منفی - منفی (۳) منفی - مثبت یا منفی (۴) مثبت یا منفی - مثبت

۷۱۸- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در لحظه‌های  $t = 1\text{ s}$ ،  $t = 3\text{ s}$  و  $t = 7\text{ s}$  به ترتیب برای اولین، دومین و سومین بار به فاصله ۲ سانتی‌متری از نقطه تعادلش قرار می‌گیرد. دوره تناوب نوسانگر چند ثانیه است؟

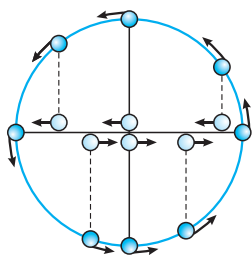
(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴



۷۱۹- شکل مقابل، الگوی ساده‌ای از چرخ در یک موتور را نشان می‌دهد که در آن، حرکت هماهنگ ساده پیستون به چرخش یکنواخت چرخ تبدیل می‌شود. مساحت مقطع پیستون  $100\text{ cm}^2$  و کم‌ترین و بیشترین حجم گاز محبوس در سمت راست پیستون، به ترتیب  $1\text{ L}$  و  $3\text{ L}$  می‌شود. اگر تندی گردش چرخ  $54\text{ km/h}$  باشد، بسامد نوسان پیستون چند هرتز است؟  
(برگرفته از کتاب «فیزیک دانشگاهی»، نوشته «سروی و ...»، با تغییرات اساسی!)

(۱)  $\frac{75}{2\pi}$  (۲)  $\frac{75}{\pi}$  (۳)  $\frac{150}{\pi}$  (۴)  $\frac{300}{\pi}$

### ۳) معادله حرکت هماهنگ ساده



(شکل ۳)

**دایره مرجع:** به شکل (۳) نگاه کنید! در این شکل، ذره‌ای به طور یکنواخت، در جهت مثلثاتی (پادساعت‌گرد) روی دایره‌ای می‌چرخد. تصویر ذره روی قطر افقی دایره، در چند نقطه نمایش داده شده است. همان‌گونه که از شکل پیدا است، تصویر ذره روی قطر دایره حرکت رفت‌وبرگشتی دارد و در مدت یک دوره که ذره محیط دایره را یک دور کامل می‌زند، تصویر آن بر روی قطر، یک نوسان کامل انجام می‌دهد.

**نتیجه ۱:** تصویر ذره روی قطر قائم هم نوسان می‌کند که این حرکت را در شکل نشان نداده‌ایم.

اگر جسم روی قطر دایره حرکت هماهنگ ساده انجام دهد، تصویر آن روی دایره به طور یکنواخت می‌چرخد. پس یک حرکت هماهنگ ساده را می‌توان به کمک تصویر آن بر روی دایره‌ای به قطر  $2A$  (طول مسیر نوسان) نمایش داد. این دایره را «دایره مرجع» می‌نامیم. این دایره، واقعاً ابزار مفیدی برای نمایش هندسی حرکت هماهنگ ساده و درک کمیت‌های مرتبط با آن است.

در شکل (۴)، نقطه  $P$  روی محور  $x$  حرکت هماهنگ ساده می‌کند. تصویری از  $P$  را که روی دایره مرجع در جهت پادساعت‌گرد دوران می‌کند، «نقطه مرجع» می‌نامیم و آن را با  $P'$  نمایش داده‌ایم. زاویه‌ای را که شعاع حامل ذره روی دایره مرجع با محور مکان می‌سازد با  $\theta$  نشان داده‌ایم. جابجایی ذره  $P$  از مبدأ ( $O$ ) در هر لحظه دلخواه برابر  $x$  است که مکان نوسانگر را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۴، معادله حرکت نوسانگر به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{A} \Rightarrow x = A \cos \theta \quad (\text{رابطه ۳})$$

چون نقطه مرجع با دوره ثابت  $T$  دوران می‌کند، رابطه مقابل در مورد آن برقرار است: (این رابطه را در مبحث جریان متناوب دیده‌اید.)  $\Delta \theta = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \Delta t$  نسبت « $\frac{2\pi}{T}$ » را «بسامد زاویه‌ای» می‌نامیم و آن را با  $\omega$  نشان می‌دهیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{رابطه ۴}), \quad f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f \quad (\text{رابطه ۵}) \Rightarrow \Delta \theta = \omega \Delta t \quad (\text{رابطه ۶})$$

در چارچوب کتاب درسی در این بخش فرض می‌شود نوسانگر در مبدأ زمان از مکان  $x = +A$  در جهت منفی محور مکان شروع به حرکت می‌کند. بنابراین  $\theta$  در مبدأ زمان صفر فرض می‌شود و داریم:

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0) \quad \theta - 0 = \omega(t - 0) \Rightarrow \theta = \omega t \Rightarrow x = A \cos \omega t \quad (\text{رابطه ۷})$$

**نتیجه ۲:** به  $\theta = \omega t$  شناسه تابع یا فاز نوسانگر گفته می‌شود.

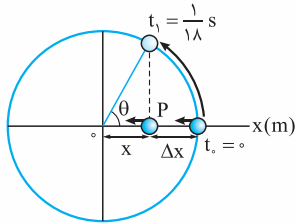
**نتیجه ۳:** اگر نوسانگر به جای حرکت روی محور  $x$ ، روی محور  $y$  نوسان کند، تمام مطالب بالا برقرار است؛ فقط برای بیان مکان، به جای نماد  $x$ ، از نماد  $y$  استفاده می‌شود و اصل قضیه تغییر نمی‌کند.





**نمونه** فرض کنید معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 4 \cos 6\pi t$  است. از مقایسه این معادله با معادله حرکت هماهنگ ساده متوجه می شویم:

$$\begin{cases} x = 4 \cos 6\pi t \\ x = A \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow A = 4 \text{ m}, \omega = 6\pi \text{ rad/s}$$



(شکل ۵)

در لحظه دلخواه  $t_1 = \frac{1}{18} \text{ s}$ ، عبارت  $\omega t_1$  برابر  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  و نوسانگر در فاصله ۲ متری از مبدأ قرار می گیرد.

$$x = 4 \cos 6\pi \times \frac{1}{18} = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2 \text{ m}$$

نحوه حرکت نوسانگر و تصویر آن روی دایره مرجع در بازه زمانی  $t_0 = 0$  تا  $t_1 = \frac{1}{18} \text{ s}$  در شکل (۵) دیده می شود؛ ببین!

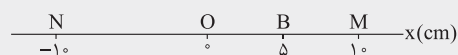
### اسئله‌های و نکات لازم برای حل مسأله‌های این بخش

**۱** بیشترین استفاده‌ای که از دایره مرجع می شود، تشخیص موقعیت نوسانگر است. در جدول (۱) نحوه تشخیص جایگاه متحرک با توجه به وضعیت حرکتی آن آورده شده است.

موقعیت نقطه مرجع	نوع حرکت	جهت حرکت	علامت مکان	ناحیه مثلثاتی	محدوده $\theta$
	تندشونده	منفی	مثبت	اول	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
	کندشونده	منفی	منفی	دوم	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$
	تندشونده	مثبت	منفی	سوم	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$
	کندشونده	مثبت	مثبت	چهارم	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

جدول (۱)

**مسئله** در شکل زیر، ذره‌ای روی محور x بین نقاط M و N حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد. اگر نوسانگر در مبدأ زمان از نقطه M گذشته و سرعتش در این لحظه منفی باشد و در لحظه  $t = 0 / 2 \text{ s}$  برای اولین بار از نقطه B عبور کند، معادله حرکت آن در SI کدام است؟



$$x = 0 / 2 \cos \frac{\Delta\pi}{3} t \quad (۴)$$

$$x = 0 / 2 \cos \frac{\Delta\pi}{6} t \quad (۳)$$

$$x = 0 / 1 \cos \frac{\Delta\pi}{3} t \quad (۲)$$

$$x = 0 / 1 \cos \frac{\Delta\pi}{6} t \quad (۱)$$



**پاسخ** گزینه ۲

راه حل اول: (بر اساس کتاب درسی): بیشترین فاصله نوسانگر از مرکز نوسان ۱۰ cm است. پس دامنه حرکت نوسانگر ۱۰ cm است.

$$A = OM = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m} \Rightarrow x = A \cos \omega t = 0.1 \cos \omega t$$

در لحظه  $t = 0.2 \text{ s}$  نوسانگر برای اولین بار در مکان  $x_B = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$  واقع می‌شود. با این مختصات می‌توان  $\omega$  را حساب کرد.

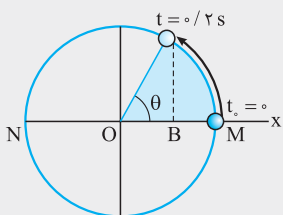
$$0.05 = 0.1 \cos \omega \times 0.2 \Rightarrow \cos 0.2\omega = 0.5 \Rightarrow 0.2\omega = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{0.6} \text{ rad/s} \Rightarrow x = 0.1 \cos \frac{\pi}{3} t$$

راه حل دوم: (بر اساس دایره مرجع): در شکل روبه‌رو، موقعیت نقطه مرجع را در لحظه‌های  $t_0 = 0$  و  $t = 0.2 \text{ s}$  روی دایره مرجع نشان داده‌ایم. با توجه به این که نقطه مرجع در لحظه  $t = 0.2 \text{ s}$  در ناحیه اول مثلثاتی قرار دارد، داریم:

$$\cos \theta = \frac{x_B}{A} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

با این حساب، نقطه مرجع در مدت  $\Delta t = 0.2 \text{ s}$  به اندازه  $\Delta \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$  دوران می‌کند.

$$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \omega \times 0.2 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{0.6} \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \cos \omega t = 0.1 \cos \frac{\pi}{3} t$$



**۲** محاسبه سریع زمان جابه‌جایی بین دو نقطه: برای محاسبه زمان جابه‌جایی بین دو نقطه می‌توانید زاویه  $\theta$  را در مکان‌های اولیه و ثانویه

نوسانگر حساب کنید و با توجه به تناسب  $\Delta \theta$  و  $\Delta t$  (بر اساس رابطه  $\Delta \theta = \omega \Delta t$ ) به جواب برسید. این کارها را از دو راه می‌توانیم انجام دهیم:

**الف**  $\theta$  در مدت یک دوره (T) به اندازه  $2\pi \text{ rad}$  تغییر می‌کند (اسم این رو می‌ذاریم هم‌ارزی  $2\pi \equiv T$ ).

بنابراین، با توجه به نسبت مستقیم  $\Delta \theta$  و  $\Delta t$ ، زاویه  $\theta$  در مدت  $\frac{T}{4}$  به اندازه  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  رادیان، در مدت  $\frac{T}{5}$  به اندازه  $\frac{2\pi}{5}$  رادیان و ... تغییر می‌کند.

(ضریب  $\pi$  در  $\Delta \theta$  رو نصف کن، می‌شه ضریب T در  $\Delta t$ .)

**ب** برای محاسبه  $\theta$  از روی مکان نوسانگر، از معادله حرکت نوسانگر،  $\cos \theta$  را حساب می‌کنیم. دوتا جواب به دست می‌آید که با توجه به جهت

حرکت نوسانگر، یکی از آنها را انتخاب می‌کنیم. در ضمن، استفاده از شکل معمولاً خیلی سریع‌تر ما را به نتیجه می‌رساند. بر اساس این شکل، اگر

کم‌ترین زاویه‌ای که نقطه مرجع با محور افقی می‌سازد،  $\alpha$  باشد، نوسانگر در مکان  $x = A \cos \alpha$  یا  $x = -A \cos \alpha$  قرار دارد. در جدول (۲)

جایگاه نوسانگر و نقطه مرجع را در سه موقعیت بسیار مهم نشان داده‌ایم:

مکان نوسانگر در موقعیت $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	مکان نوسانگر در موقعیت $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$	مکان نوسانگر در موقعیت $\cos \theta = \pm \frac{1}{2}$

جدول (۲)

$$x = \pm \frac{1}{2} A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

**نیز بدان!** محاسبه زاویه  $\alpha$  خیلی مهمه! با  $\frac{1}{2}$  یا  $\frac{\pi}{3}$  رادیان بیفت!

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

با  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، یا  $\frac{\pi}{4}$  رادیان بیفت!

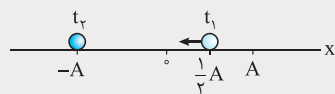
$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

و اگر  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  رو دیدی،  $\frac{\pi}{6}$  رادیان رو تحویل بگیر!



**تست** دوره نوسانگری در یک حرکت هماهنگ ساده  $1/2$  s است و در یک لحظه، مکان نوسانگر مثبت و برابر نصف دامنه و حرکت آن در این لحظه تندشونده است. حداقل چند ثانیه طول می کشد تا نوسانگر به بیشترین فاصله خود از نقطه تعادل برسد؟

- ۰/۱ (۱)      ۰/۲ (۲)      ۰/۴ (۳)      ۰/۵ (۴)



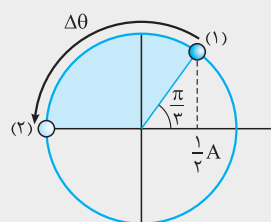
**پاسخ** گزینه «۳» راه حل اول (بر مبنای کتاب درسی): همانند کتاب درسی فرض می کنیم نوسانگر از مکان  $x = +A$  در خلاف جهت محور  $x$  به حرکت درآمده و مطابق شکل روبه رو در لحظه  $t_1$  برای اولین بار به صورت تندشونده از مکان  $x = \frac{1}{3}A$  عبور می کند و در لحظه  $t_2$  به بیشترین فاصله از وضع تعادل (مکان  $x = -A$ ) می رسد. لحظه های  $t_1$  و  $t_2$  را حساب می کنیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/2} = \frac{4\pi}{1} \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \cos \omega t = A \cos \frac{4\pi}{1} t$$

$$x_1 = \frac{1}{3}A \Rightarrow \frac{1}{3}A = A \cos \frac{4\pi}{1} t_1 \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{1} t_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{1} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{12} \text{ s}$$

$$x_2 = -A \Rightarrow -A = A \cos \frac{4\pi}{1} t_2 \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{1} t_2 = -1 \Rightarrow \frac{4\pi}{1} t_2 = \pi \Rightarrow t_2 = \frac{1}{4} \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \text{ s}$$



راه حل دوم (به کارگیری دایره مرجع): با دایره مربع بین به قدر این تست می شه راحت حل کرد! طبق فرض تست، نوسانگر ابتدا در مکان  $x = \frac{1}{3}A$  قرار دارد. با دیدن عدد  $\frac{1}{3}$  یاد  $\frac{\pi}{3}$  rad می افتیم. از طرفی چون حرکت نوسانگر به صورت تندشونده است، نقطه مرجع در ناحیه اول قرار دارد و موقعیت اولیه آن روی دایره مرجع به شکل مقابل (موقعیت ۱) است. وقتی نوسانگر در بیشینه مکان خود قرار می گیرد (موقعیت ۲)  $\theta = \pi$  rad می شود. پس:

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$\theta$  در مدت  $T$  به اندازه  $2\pi$  رادیان تغییر می کند. پس زمان لازم برای این که  $\theta$  به اندازه  $\frac{2\pi}{3}$  رادیان افزایش یابد،  $\frac{T}{3}$  است.

$$\Delta t = \frac{T}{3} = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6} \text{ s}$$

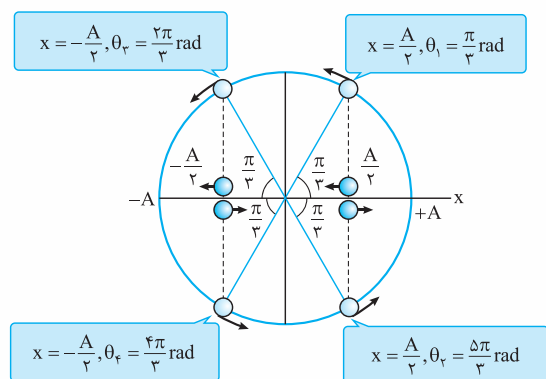
با این حساب، زمان لازم برای این که نوسانگر از موقعیت (۱) تا (۲) جابه جا شود، برابر است با:

**نمونه** فرض کنید نوسانگری روی محور  $x$  حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد و در یک لحظه به فاصله  $\frac{A}{3}$  از مرکز نوسان قرار می گیرد. در این صورت، نقطه مرجع ممکن است در یکی از موقعیت های زیر قرار داشته باشد.

$$x = A \cos \theta \Rightarrow \frac{A}{3} = A \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{(اگر: n=0)} \theta_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ \theta_2 = 2n\pi + \frac{5\pi}{3} \xrightarrow{(اگر: n=0)} \theta_2 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$$

و اگر نوسانگر در مکان  $x = -\frac{A}{3}$  باشد:

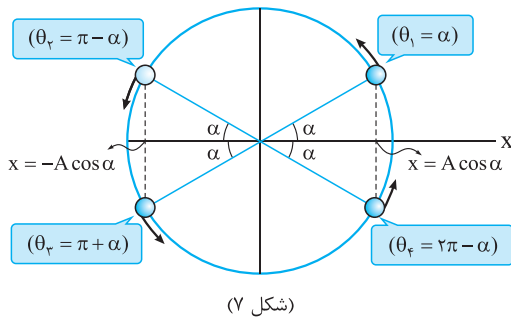
$$x = A \cos \theta \Rightarrow -\frac{A}{3} = A \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \theta_3 = 2n\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{(اگر: n=0)} \theta_3 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \\ \theta_4 = 2n\pi + \frac{4\pi}{3} \xrightarrow{(اگر: n=0)} \theta_4 = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$$



(شکل ۶)

- ◀ اگر نوسانگر در مکان مثبت باشد و به سمت مرکز حرکت کند، نقطه مرجع در ناحیه اول قرار دارد و پاسخ  $\theta_1$  را می پذیریم.
- ◀ اگر نوسانگر در مکان مثبت باشد و از مرکز دور شود، نقطه مرجع در ناحیه چهارم قرار دارد و جواب قابل قبول  $\theta_2$  است.
- ◀ اگر نوسانگر در مکان منفی باشد و از مرکز نوسان دور شود، نقطه مرجع در ناحیه دوم قرار دارد و  $\theta_3$  را می پذیریم.
- ◀ اگر نوسانگر در مکان منفی باشد و به سمت مرکز حرکت کند، نقطه مرجع در ناحیه سوم و پاسخ  $\theta_4$  است.

**نتیجه** اگر  $\theta$  در محدوده  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $\cos \theta = \pm \cos \alpha$  باشد، (طوری که  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  باشد)، آن گاه:



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_1 = \alpha$$

۱ اگر  $\theta$  در ناحیه اول باشد:

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \Rightarrow \theta_2 = \pi - \alpha$$

۲ اگر  $\theta$  در ناحیه دوم باشد:

$$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \theta_3 = \pi + \alpha$$

۳ اگر  $\theta$  در ناحیه سوم باشد:

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow \theta_4 = 2\pi - \alpha$$

۴ اگر  $\theta$  در ناحیه چهارم باشد:

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای

### معادله حرکت هماهنگ ساده

۷۲۰- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.04 \cos 20\pi t$  است. این نوسانگر در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برای اولین بار، تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۰/۰۲۵ (۱)      ۲) ۰/۰۵ (۲)      ۳) ۰ (۳)      ۴) ۱۰ (۴)

۷۲۱- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.04 \cos \frac{\pi}{4} t$  است. در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) تندی این نوسانگر برای اولین بار بیشینه می‌شود؟

۱) ۱ (۱)      ۲) ۲ (۲)      ۳)  $\frac{1}{8}$  (۳)      ۴)  $\frac{1}{16}$  (۴)

۷۲۲- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.04 \cos \pi t$  است. این نوسانگر در مدت یک دقیقه چند چرخه را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۰ (۱)      ۲) ۶۰ (۲)      ۳) ۱۲۰ (۳)      ۴) ۲۴۰ (۴)

۷۲۳- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 2 \cos 10\pi t$  است. این نوسانگر در مدت یک دقیقه چند بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند؟

۱) ۱۲ (۱)      ۲) ۲۴ (۲)      ۳) ۳۰۰ (۳)      ۴) ۶۰۰ (۴)

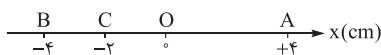
۷۲۴- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.04 \cos \frac{\pi}{6} t$  است. این نوسانگر در چه لحظه‌ای برای اولین بار به صورت کندشونده از ۲ سانتی‌متری نقطه تعادل عبور می‌کند؟

۱) ۱ (۱)      ۲) ۲ (۲)      ۳) ۳ (۳)      ۴) ۴ (۴)

۷۲۵- دوره تناوب و دامنه حرکت نوسانگر A به ترتیب ۲ s و ۲ cm بیشتر از دوره و دامنه حرکت نوسانگر B است. اگر معادله مکان - زمان نوسانگر B در SI به صورت  $x_B = \cos \pi t$  باشد و دو نوسانگر به طور هم‌زمان شروع به حرکت کرده باشند، معادله مکان - زمان نوسانگر A در SI کدام است؟

۱)  $x_A = 1/2 \cos \frac{\pi}{4} t$  (۱)      ۲)  $x_A = 1/2 \cos 2\pi t$  (۲)      ۳)  $x_A = 1/0.2 \cos \frac{\pi}{4} t$  (۳)      ۴)  $x_A = 1/0.2 \cos 2\pi t$  (۴)

۷۲۶- در شکل زیر، ذره‌ای روی محور x بین نقاط A و B حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر نوسانگر در مبدأ زمان از نقطه A شروع به حرکت کرده و در لحظه  $t = 2$  s برای اولین بار از نقطه C عبور کند، معادله مکان - زمان آن در SI کدام است؟



۱)  $x = 0.04 \cos \frac{\pi}{3} t$  (۱)      ۲)  $x = 0.08 \cos \frac{\pi}{3} t$  (۲)      ۳)  $x = 0.08 \cos \frac{5\pi}{12} t$  (۳)      ۴)  $x = 0.04 \cos \frac{5\pi}{12} t$  (۴)

۷۲۷- ذره‌ای در یک حرکت هماهنگ ساده پاره‌خطی به طول ۲۰ cm را در هر دقیقه ۱۲۰۰ بار می‌پیماید. این نوسانگر در مبدأ زمان از ۱۰ سانتی‌متری نقطه تعادل در جهت منفی محور x شروع به حرکت می‌کند. معادله مکان - زمان این نوسانگر در SI کدام است؟

۱)  $x = 0.1 \cos 10\pi t$  (۱)      ۲)  $x = 0.1 \cos 20\pi t$  (۲)      ۳)  $x = 0.2 \cos 10\pi t$  (۳)      ۴)  $x = 0.2 \cos 20\pi t$  (۴)

۷۲۸- ذره‌ای در یک حرکت هماهنگ ساده پاره‌خطی به طول ۲۰ cm را در هر ثانیه ۲۰ بار طی می‌کند. اگر این نوسانگر از ۱۰ سانتی‌متری نقطه تعادل در جهت منفی محور x شروع به حرکت کرده باشد، در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برای اولین بار از نقطه تعادل عبور می‌کند؟

۱)  $\frac{1}{40}$  (۱)      ۲)  $\frac{1}{20}$  (۲)      ۳)  $\frac{1}{10}$  (۳)      ۴)  $\frac{1}{80}$  (۴)

۷۲۹- ذره‌ای در حرکت هماهنگ ساده طول پاره‌خط نوسان را در هر دقیقه ۶۰۰ بار طی می‌کند. اگر تندی این نوسانگر در مبدأ زمان بیشینه باشد، در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد؟

- (۱)  $0.075$  (۲)  $0.05$  (۳)  $0.15$  (۴)  $0.2$

۷۳۰- جسمی روی محور  $x$  با دامنه  $A$  حرکت هماهنگ ساده می‌کند. اگر جسم از حال سکون رها شده باشد و تندی آن در لحظه  $t = 0.8$  s برای اولین بار بیشینه شود، در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) تندی آن دومین بار بیشینه می‌شود؟

- (۱)  $0.8$  (۲)  $1/6$  (۳)  $2/4$  (۴)  $3/2$

۷۳۱- دامنه نوسانگر هماهنگ ساده‌ای  $10$  cm و دوره تناوب آن  $12$  s است. اگر این نوسانگر در مبدأ زمان از مکان  $x = +10$  cm به حرکت درآمده باشد،  $7$  s پس از شروع حرکت در چه مکانی (برحسب سانتی‌متر) قرار می‌گیرد؟

- (۱)  $5$  (۲)  $5\sqrt{3}$  (۳)  $-5$  (۴)  $-5\sqrt{3}$

۷۳۲- نوسانگر ساده‌ای حرکت خود را روی محور  $x$  و از نقطه  $x = +A$  رو به سمت مبدأ شروع می‌کند. شناسه تابع نوسان هنگامی که نوسانگر برای  $n$  امین بار از نقطه تعادل می‌گذرد، ..... رادیان و هنگامی که برای  $n$  امین بار از یکی از نقطه‌های بازگشت (از جمله نقطه آغاز حرکت) می‌گذرد، ..... رادیان است.

- (۱)  $(n+1)\pi$  و  $(n+\frac{1}{2})\pi$  (۲)  $(n-1)\pi$  و  $(n+\frac{1}{2})\pi$  (۳)  $(n-1)\pi$  و  $(n-\frac{1}{2})\pi$  (۴)  $(n-1)\pi$  و  $(n-\frac{1}{2})\pi$

۷۳۳- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.2 \cos \pi t$  است. این نوسانگر در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 2$  s چند بار از مکان  $x = +10$  cm عبور می‌کند؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۷۳۴- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.2 \cos \pi t$  است. این نوسانگر در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 1/6$  s چند بار در فاصله  $10$  سانتی‌متری از نقطه تعادل قرار می‌گیرد؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴)  $4$

۷۳۵- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در لحظه‌های  $t_1 = 1$  s،  $t_2 = 3$  s،  $t_3 = 5$  s به ترتیب برای اولین، دومین و سومین بار در فاصله  $2$  سانتی‌متری از وضع تعادل قرار دارد. این نوسانگر در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه برای بیست و پنجمین بار در مکان  $x = +2$  cm قرار می‌گیرد؟ (فرض کنید نوسانگر در مبدأ زمان بیشترین فاصله از مبدأ مکان را دارد.)

- (۱)  $77$  (۲)  $84$  (۳)  $97$  (۴)  $111$

۷۳۶- رابطه مکان-زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت  $x = A \cos(\frac{\pi}{T} t)$  است. در  $10$  ثانیه اول حرکت، نوسانگر چند بار از نقطه‌های وسط دامنه (وسط نقطه تعادل و یک نقطه بازگشت حرکت) می‌گذرد؟

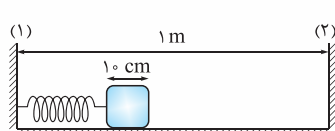
- (۱)  $5$  (۲)  $6$  (۳)  $7$  (۴)  $8$

۷۳۷- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در مبدأ زمان از دورترین فاصله نسبت به نقطه تعادل شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی نوسانگر در  $\frac{T}{13}$  دوم حرکت چند برابر جابه‌جایی آن در  $\frac{T}{13}$  اول حرکت است؟

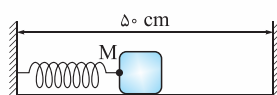
- (۱)  $1$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{3}-1$  (۴)  $\sqrt{3}+1$

۷۳۸- معادله حرکت هماهنگ ساده ذره‌ای به صورت  $x = A \cos \omega t$  است. در مدت یک دوره چند درصد احتمال دارد ذره به نقطه تعادل نزدیک‌تر باشد تا به یکی از نقطه‌های بازگشت حرکت؟

- (۱) دقیقاً  $25\%$  (۲) تقریباً  $23\%$  (۳) دقیقاً  $50\%$  (۴) تقریباً  $67\%$



- (۱)  $44$  (۲)  $46$  (۳)  $54$  (۴)  $56$



- (۱)  $\frac{1}{12}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$



۷۴۱- معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به صورت  $x = \Delta \cos \pi t$  است که در آن  $x$  بر حسب سانتی‌متر و  $t$  بر حسب ثانیه است. اگر در یک لحظه معین، مکان نوسانگر  $3 \text{ cm} +$  و حرکت آن تندشونده باشد، فاصله همان نقطه از وضع تعادل  $125^\circ$  ثانیه بعد چند سانتی‌متر می‌شود؟

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (سراسری ریاضی ۸۶، با تغییر)

۷۴۲- در لحظه  $t_1$  از یک حرکت هماهنگ ساده، فاصله نوسانگر از یکی از نقطه‌های بازگشت حرکت  $25$  برابر فاصله‌اش از نقطه بازگشت دیگر است. در لحظه  $t_2 = t_1 + \frac{\Delta T}{4}$ ، فاصله نوسانگر از نقطه بازگشت دورتر چند برابر فاصله‌اش از نقطه بازگشت نزدیک‌تر است؟ ( $T$  دوره حرکت می‌باشد).

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $\frac{25}{9}$

۷۴۳- نوسانگر ساده‌ای حرکت خود را از مکان  $x = +A = 5 \text{ cm}$  و رو به نقطه تعادل  $x = 0$  آغاز می‌کند. اگر مکان نوسانگر در لحظه  $t_1$  برابر

$x_1 = 4 \text{ cm}$  باشد، در لحظه  $t_2 = 2t_1 + \frac{\Delta T}{4}$ ، فاصله نوسانگر از نقطه بازگشت دورتر چند میلی‌متر است؟ ( $T$  دوره حرکت می‌باشد).

(۱) ۴۸ (۲) ۴۹ (۳) ۹۶ (۴) ۹۸

### بررسی حرکت دو نوسانگر

۷۴۴- دو نوسانگر  $A$  و  $B$  به ترتیب با دامنه  $90 \text{ cm}$  و  $30\sqrt{3} \text{ cm}$  حول نقطه  $O$  و روی محور  $x$  حرکت هماهنگ ساده می‌کنند. اگر این دو نوسانگر در مبدأ زمان از بیشینه مکان خود واقع در مکان‌های مثبت شروع به نوسان کنند و در لحظه  $t$  در مکان  $x = +45 \text{ cm}$  در دو جهت مخالف از کنار یکدیگر عبور کنند، دوره نوسانگر  $A$  چند برابر دوره نوسانگر  $B$  است؟ ( $t$  از دوره تناوب هر دو نوسانگر کوچک‌تر است).

(۱)  $0/1$  (۲) ۴ (۳)  $5/5$  (۴)  $5/5$  یا  $0/1$

### رابطه جابه‌جایی و زمان جابه‌جایی بین دو نقطه

اگر می‌توانی روشن حل تست‌های این قسمت با دایره مربع رو یادگیری حتماً حتماً حتماً راهل دو ۳ این تست رو دقیق بفون!

۷۴۵- معادله حرکت نوسانگری در  $SI$  به صورت  $x = 0/04 \cos \frac{\pi}{12} t$  است. نوسانگر در لحظه  $t_1$  برای اولین بار و در لحظه  $t_2$  برای دومین بار از مکان  $x = +2 \text{ cm}$  عبور می‌کند.  $\Delta t = t_2 - t_1$  چند ثانیه است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۷۴۶- معادله حرکت نوسانگری در  $SI$  به صورت  $x = 0/04 \cos \frac{\pi}{12} t$  است. حداکثر زمان لازم برای دو عبور متوالی نوسانگر از مکان  $x = -2 \text{ cm}$  چند برابر حداقل زمان لازم برای دو عبور متوالی از همین مکان است؟

(۱)  $1/5$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۴۷- معادله حرکت نوسانگری در  $SI$  به صورت  $x = 0/1 \cos \frac{\pi}{4} t$  است. این نوسانگر حداقل در چه مدتی (بر حسب ثانیه)، از مکان  $x = +10 \text{ cm}$  تا مکان  $x = -5\sqrt{3} \text{ cm}$  جابه‌جا می‌شود؟

(۱)  $\frac{10}{3}$  (۲)  $\frac{12}{3}$  (۳)  $\frac{14}{3}$  (۴)  $\frac{16}{3}$

۷۴۸- ذره‌ای به طور هماهنگ با دامنه  $A$  و دوره  $T$  در راستای افقی نوسان می‌کند. اگر این نوسانگر در مبدأ زمان از مکان  $x = +A$  شروع به حرکت کرده باشد، فاصله آن از نقطه تعادل در لحظه  $t = \frac{1}{6} T$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $\frac{1}{2} A$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2} A$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2} A$

۷۴۹- در یک حرکت هماهنگ ساده با دامنه  $A$  و دوره  $T$ ، حداقل چه مدت طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان  $x = \frac{A}{4}$  به  $x = 0$  برسد؟ ( $T$  دوره تناوب نوسانگر است).

(۱)  $\frac{T}{12}$  (۲)  $\frac{T}{8}$  (۳)  $\frac{T}{6}$  (۴)  $\frac{T}{4}$

۷۵۰- ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دامنه  $A$  و دوره تناوب  $T$  است. در یک لحظه، مکان ذره  $\frac{A}{4} +$  و سرعت آن منفی است. حداقل چه مدت پس از این لحظه مکان ذره  $-\frac{A}{4}$  و سرعت آن مثبت می‌شود؟

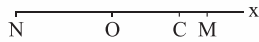
(۱)  $\frac{T}{6}$  (۲)  $\frac{T}{3}$  (۳)  $\frac{T}{2}$  (۴)  $\frac{2T}{3}$

۷۵۱- ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دامنه  $A$  است و در مدت  $5/0$  از مکان  $x = -\frac{A}{4}$  بدون تغییر جهت به مکان  $x = +\frac{A}{4}$  می‌رسد. بسامد ذره چند هرتز است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۳ (۳)  $\frac{5}{6}$  (۴)  $\frac{6}{5}$



۷۵۲- در شکل زیر، جسمی روی پاره خط MN و حول نقطه O حرکت هماهنگ ساده می‌کند. اگر  $OC = \frac{\sqrt{2}}{4} A$  باشد، نوسانگر فاصله CM را حداقل در چه مدتی طی می‌کند؟ (A دامنه نوسان و T دوره حرکت نوسانگر است.)



$$\frac{T}{4} \quad (4)$$

$$\frac{T}{6} \quad (3)$$

$$\frac{T}{8} \quad (2)$$

$$\frac{T}{12} \quad (1)$$

۷۵۳- ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دوره تناوب T و دامنه A روی محور y است. حداقل چه مدت طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان  $y = +\frac{\sqrt{2}}{4} A$  به مکان  $y = +\frac{\sqrt{3}}{4} A$  منتقل شود؟

$$\frac{T}{8} \quad (4)$$

$$\frac{T}{12} \quad (3)$$

$$\frac{T}{6} \quad (2)$$

$$\frac{T}{24} \quad (1)$$

۷۵۴- x و A به ترتیب، مکان و دامنه یک نوسانگر ساده است. در لحظه  $t_1$ ،  $x = \frac{\sqrt{3}}{4} A$  است و جهت حرکت نوسانگر در آن لحظه، به سمت مرکز نوسان است. اگر یک ثانیه بعد، نوسانگر دوباره به همان مکان برسد، دوره این نوسانگر چند ثانیه است؟ (سراسری ریاضی قاجار ۹۲)

$$3/6 \quad (4)$$

$$2/4 \quad (3)$$

$$1/6 \quad (2)$$

$$1/2 \quad (1)$$

۷۵۵- در یک حرکت هماهنگ ساده با دامنه A، نوسانگر در مبدأ زمان از مکان  $x = +A$  در جهت منفی محور x شروع به حرکت می‌کند و پس از ۱/۸ s برای اولین بار به مکان  $x = +\frac{\sqrt{3}}{4} A$  می‌رسد. از این لحظه، چند ثانیه دیگر طول می‌کشد تا نوسانگر دوباره به مکان اولیه‌اش برگردد؟

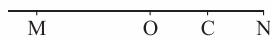
$$1/6 \quad (4)$$

$$1/2 \quad (3)$$

$$1/1 \quad (2)$$

$$0/8 \quad (1)$$

۷۵۶- نوسانگری روی پاره خط MN و حول نقطه O حرکت هماهنگ ساده می‌کند و نقطه C وسط پاره خط ON قرار دارد. اگر کم‌ترین زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از نقطه C تا N جابه‌جا شود، ۲ s باشد، بیشترین زمان جابه‌جایی بین این دو نقطه (در مدت یک دوره) چند ثانیه است؟



$$14 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۷۵۷- متحرکی روی پاره خطی به طول ۲۰ cm حرکت هماهنگ ساده دارد. اگر متحرک در مدت ۲ s و بدون تغییر جهت، از مکان  $x = +5\sqrt{2}$  cm تا  $x = -5\sqrt{2}$  cm جابه‌جا شود، معادله حرکت آن در SI مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟

$$x = 0/1 \cos \frac{\pi}{4} t \quad (4)$$

$$x = 0/1 \cos \frac{\pi}{4} t \quad (3)$$

$$x = 0/2 \cos \frac{\pi}{4} t \quad (2)$$

$$x = 0/2 \cos \frac{\pi}{4} t \quad (1)$$

۷۵۸- فاصله نقطه P روی پاره خط نوسان یک ذره تا یکی از نقطه‌های بازگشت حرکت، سه برابر فاصله P تا نقطه بازگشت دیگر است. اگر بدون تغییر جهت، ذره در مدت  $t_1$  از نقطه بازگشت نزدیک‌تر به نقطه P و در مدت  $t_2$  از نقطه P به نقطه بازگشت دورتر برسد،  $\frac{t_2}{t_1}$  برابر کدام است؟

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

۷۵۹- در یک حرکت هماهنگ ساده، بیشترین اندازه جابه‌جایی نوسانگر در مدت  $\frac{T}{6}$  کدام است؟ (T، دوره و A، دامنه حرکت نوسانگر است.)

$$A \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} A \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} A \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} A \quad (1)$$

۷۶۰- در یک حرکت هماهنگ ساده، در مدت دلخواه  $\frac{1}{4}$  دوره، کم‌ترین مسافتی که نوسانگر طی می‌کند، چند برابر دامنه است؟ ( $\sqrt{2} = 1/4$ ) (سراسری ریاضی قاجار ۹۳)

$$1/4 \quad (4)$$

$$0/7 \quad (3)$$

$$0/6 \quad (2)$$

$$0/3 \quad (1)$$

### مسافت طی شده توسط نوسانگر

۷۶۱- معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت  $x = 2 \cos \frac{\pi}{4} t$  است. این نوسانگر در مدت ۴ s چه مسافتی را (بر حسب متر) طی می‌کند؟

$$8 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

۷۶۲- دامنه نوسان یک حرکت هماهنگ ساده ۵ cm و دوره آن ۱۲ s است. اگر این نوسانگر در مبدأ زمان از مکان  $x = +5$  cm شروع به حرکت کرده باشد، در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 8$  s مسافت چند سانتی‌متر را طی می‌کند؟

$$15 \quad (4)$$

$$12/5 \quad (3)$$

$$7/5 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$

۷۶۳- رابطه مکان-زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده در SI، به صورت  $x = 0/44 \cos 3\pi t$  است. از لحظه  $t = 0$  تا لحظه‌ای که نوسانگر مسافت ۲ m را پیموده است، ..... بار از نقطه تعادل و ..... بار از نقطه‌های بازگشت حرکت گذشته است و در فاصله ..... سانتی‌متری از نقطه تعادل است.

$$24 - 2 - 3 \quad (4)$$

$$20 - 2 - 3 \quad (3)$$

$$24 - 3 - 2 \quad (2)$$

$$20 - 3 - 2 \quad (1)$$



۷۶۴- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در مدت زمان ۸ s مسافتی به اندازه  $\frac{2}{5}$  برابر دامنه حرکت خود را می‌پیماید. اگر نوسانگر از نقطه بازگشتی در خلاف جهت محور x شروع به حرکت کرده باشد، دوره تناوب نوسانگر چند ثانیه است؟

- ۶ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۸ (۴)

**تعیین نوع و جهت حرکت نوسانگر**

۷۶۵- معادله مکان - زمان نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.02 \cos \frac{\pi}{5} t$  است. در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 8$  s، چند ثانیه بردارهای سرعت و مکان هم جهت‌اند؟

- ۲/۵ (۱)      ۳ (۲)      ۳/۵ (۳)      ۵ (۴)

۷۶۶- معادله مکان - زمان نوسانگری در SI به صورت  $x = A \cos 4\pi t$  است. در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 0.8$  s جهت حرکت نوسانگر چند بار تغییر می‌کند؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۷۶۷- معادله حرکت نوسانگری در SI، به صورت  $x = 2 \cos \frac{\pi}{3} t$  است. نوع حرکت نوسانگر در لحظه‌های  $t_1 = 1$  s و  $t_2 = 5$  s، به ترتیب (از راست به چپ) چگونه است؟

- (۱) تندشونده، تندشونده      (۲) تندشونده، کندشونده      (۳) کندشونده، تندشونده      (۴) کندشونده، کندشونده

۷۶۸- معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به صورت  $x = 0.05 \cos \frac{\pi}{6} t$  است. این نوسانگر در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 4$  s چند ثانیه به صورت تندشونده حرکت کرده است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

**سرعت متوسط و تندی متوسط در حرکت هماهنگ ساده**

۷۶۹- معادله مکان - زمان نوسانگری در SI به صورت  $x = 2 \cos \omega t$  است. سرعت متوسط نوسانگر در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 1$  s برای اولین بار صفر می‌شود.  $\omega$  چند رادیان بر ثانیه است؟

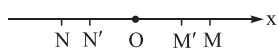
- ۰/۵ (۱)      ۱ (۲)       $2\pi$  (۳)       $4\pi$  (۴)

۷۷۰- دوره یک حرکت هماهنگ ساده ۱۲ s و دامنه آن A است. اگر نوسانگر در مبدأ زمان از مکان  $x = +A$  شروع به حرکت کرده باشد، تندی متوسط آن در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 1$  s چند برابر تندی متوسط آن در بازه زمانی  $t = 1$  s تا  $t = 3$  s است؟

- $\frac{1}{2}$  (۱)      ۲ (۲)       $1/\sqrt{5} + \sqrt{3}$  (۳)       $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$  (۴)

۷۷۱- مطابق شکل، نوسانگری روی پاره خط MN و حول نقطه O نوسان می‌کند و معادله حرکت آن در SI به صورت  $x = 0.05 \cos \frac{\pi}{6} t$  است. این

نوسانگر فاصله‌های  $MM'$  و  $ON'$  را بدون تغییر جهت به ترتیب در مدت ۲ s و ۱ s می‌پیماید. نسبت تندی متوسط نوسانگر در فاصله  $MM'$  چند برابر تندی متوسط آن در فاصله  $ON'$  است؟



- $\frac{1}{2}$  (۱)      ۱ (۲)       $\frac{3}{4}$  (۳)      ۲ (۴)

۷۷۲- اگر دامنه یک نوسانگر ۱۰ cm و دوره تناوب آن  $\frac{1}{12}$  ثانیه باشد، تندی متوسط آن وقتی که بدون تغییر جهت از مکان  $x = +5$  cm به مکان  $x = -5$  cm می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟

- ۵ (۱)      ۱۰ (۲)       $2/\sqrt{5}$  (۳)       $1/\sqrt{25}$  (۴)

۷۷۳- نوسانگری در یک بُعد، در لحظه  $t_1$  در مکان  $+A/\sqrt{2}$  و در لحظه  $t_2$  در مکان  $+A/4$  قرار دارد. اندازه بیشترین سرعت متوسط نوسانگر در بازه

$t_1$  تا  $t_2$  کدام است؟ (A، دامنه نوسان، T دوره حرکت و در  $t = 0$ ، نوسانگر از مکان  $+A$  شروع به حرکت می‌کند.) (سراسری ریاضی ۸۴، با تغییر)

- $12(\sqrt{2}+1) \frac{A}{T}$  (۱)       $12(\sqrt{2}-1) \frac{A}{T}$  (۲)       $\frac{12(\sqrt{2}+1)A}{V} \frac{A}{T}$  (۳)       $12(\sqrt{2}-1) \frac{A}{T}$  (۴)

۷۷۴- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در مبدأ زمان در مکان  $x = +A$  قرار دارد و حرکت خود را رو به مبدأ مکان آغاز می‌کند. اگر نوسانگر در لحظه  $t_1$

در مکان  $x_1 = +A/\sqrt{2}$  و در لحظه  $t_2$  در مکان  $x_2 = -A/4$  باشد، کمترین تندی متوسط نوسانگر در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$ ، چند برابر  $\frac{A}{T}$  است؟ (A دامنه

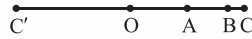
و T دوره نوسان و  $t_1 < t_2 < T$  می‌باشد.)

- $\frac{12}{13}(\sqrt{2}+3)$  (۱)       $\frac{12}{5}(\sqrt{2}+3)$  (۲)       $\frac{12}{13}(\sqrt{2}+1)$  (۳)       $\frac{12}{13}(\sqrt{2}+3)$  (۴)





۷۷۵- در شکل زیر،  $O$  نقطه تعادل و  $C$  و  $C'$  نقطه‌های بازگشت حرکت نوسانگر ساده‌ای با بسامد  $\frac{1}{3}$  Hz هستند. اگر  $OA = 1$  cm ،  $AB = (\sqrt{3} - 1)$  cm و  $BC = (2 - \sqrt{3})$  cm باشند، تندی متوسط نوسانگر هنگامی که بدون تغییر جهت از  $C$  به  $A$  می‌رسد، چند متر بر ثانیه کم‌تر از تندی متوسط آن در مدتی است که به صورت تندشونده از  $B$  عبور کرده و پس از یک بار تغییر جهت به  $A$  می‌رسد؟



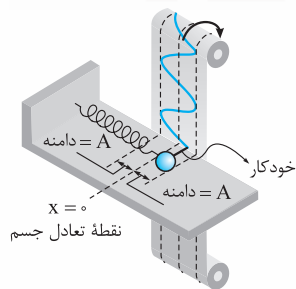
$$\frac{1}{6}(\sqrt{3} + 1) \quad (4) \quad \frac{1}{6}(-2\sqrt{3} + 11) \quad (3) \quad \frac{2}{9}(\sqrt{3} + 1) \quad (2) \quad \frac{2}{9}(-2\sqrt{3} + 11) \quad (1)$$

۷۷۶- اگر دامنه حرکت یک نوسانگر هماهنگ ساده  $5$  cm و دوره آن  $0.2$  s باشد، بزرگی سرعت متوسط آن در یک بازه زمانی به مدت  $0.1$  s، چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد؟

$$2 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

$$(4) \text{ هر یک از سه گزینه دیگر، ممکن است باشد.} \quad (3) \quad 10$$

#### ۴) نمودار مکان-زمان حرکت هماهنگ ساده



از آنجا که معادله مکان - زمان در حرکت هماهنگ ساده به فرم یک تابع سینوسی است، نمودار مکان - زمان آن یک نمودار سینوسی است که با نحوه رسم آن در درس ریاضی آشنا شده‌اید. شکل (۸) یکی از روش‌های نمایش تصویری نمودار مکان - زمان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده را در مدت یک دوره نشان می‌دهد.

**رسم نمودار از راه نقطه‌یابی:** ساده‌ترین روش برای رسم نمودار مکان - زمان یک جسم، روش نقطه‌یابی است که در قالب مثال زیر، به شرح آن می‌پردازیم:

**مثال** دامنه حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای  $A$  است و نوسانگر از مکان  $x = +A$  شروع به حرکت می‌کند. نمودار مکان - زمان این نوسانگر را در مدت یک دوره رسم کنید.

**پاسخ** برای رسم نمودار مکان - زمان نوسانگر در یک دوره، لازم نیست مکان نوسانگر در تمام لحظه‌ها را حساب کنیم؛ چون عمر نوح هم برای تکمیل این پروژه کفایت نمی‌کند! با دانستن مختصات جسم در لحظه‌های  $0$ ،  $T$  و لحظه‌هایی که مکان نوسانگر، صفر یا بیشینه می‌شود، به سادگی می‌توان نمودار مکان - زمان نوسانگر را رسم کرد. چرا که سایر نقاط نمودار، مابین این نقاط قرار می‌گیرند.

معادله حرکت نوسانگر به صورت  $x = A \cos \omega t$  است. لحظه‌هایی (از یک دوره) که نوسانگر از مرکز نوسان می‌گذرد، با جای‌گذاری  $x = 0$  در معادله مکان - زمان نوسانگر به دست می‌آید.

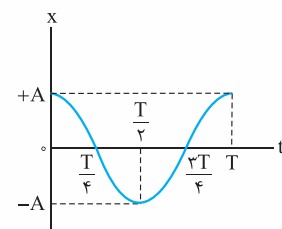
$$x = 0 \Rightarrow A \cos \omega t = 0 \Rightarrow \cos \omega t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{T}{4} \\ \omega t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3T}{4} \end{cases}$$

$\omega t$  می‌تواند  $\frac{5\pi}{2}$  rad هم شود؛ ولی به ازای آن  $t > T$  می‌شود؛ پس تا همین جا بسه! حالا لحظه‌هایی را حساب می‌کنیم که نوسانگر از مکان‌های

$$x = +A \text{ و } x = -A \text{ عبور می‌کند.} \quad \begin{cases} \omega t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \omega t = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = 2\pi \Rightarrow t = T \end{cases}$$

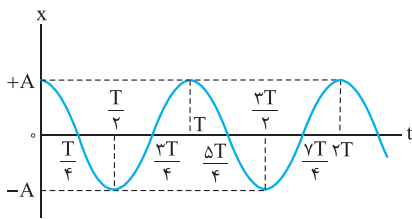
$$x = -A \Rightarrow \cos \omega t = -1 \Rightarrow \cos \omega t = -1 \Rightarrow \omega t = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \pi \Rightarrow t = \frac{T}{2}$$

حالا کافی است مقادیر بالا را در جدولی به شکل روبه‌رو بیاورید و محدوده نمودار مکان - زمان نوسانگر را با کمک این جدول رسم کنید (شکل ۹).



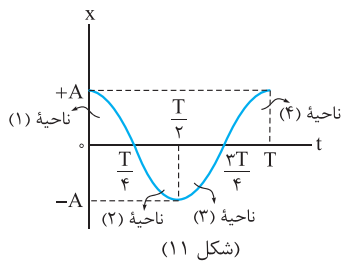
(شکل ۹)

t	x
0	A
$\frac{T}{4}$	0
$\frac{T}{2}$	-A
$\frac{3T}{4}$	0
T	A

**استراتژی و نکات لازم برای حل تست‌های این بخش**


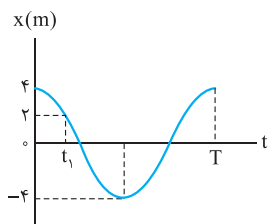
(شکل ۱۰)

**۱۱** حرکت نوسانگر از لحظه  $T$  به بعد دوباره از نو تکرار می‌شود. پس نمودار مکان - زمان آن نیز از لحظه  $T$  به بعد مثل روز اول (لحظه  $t = 0$ ) تکرار می‌شود. پس نمودار مکان - زمان نوسانگر مطابق شکل (۱۰) تکمیل می‌شود.



(شکل ۱۱)

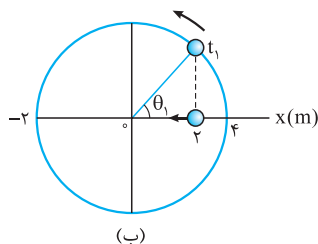
**۲** از روی نمودار مکان - زمان نوسانگر باید بتوانید جایگاه آن و همچنین نقطه مرجع را تشخیص دهید. شکل (۱۱) جایگاه نقطه مرجع را در مدت یک دوره نشان می‌دهد.



(الف)

**نمونه** فرض کنید نمودار مکان - زمان نوسانگری به شکل (الف) است. با توجه به شکل، لحظه  $t_1$  را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

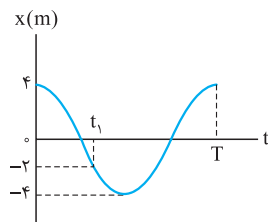
$$x = A \cos \omega t \Rightarrow 2 = 4 \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \checkmark \\ \omega t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad } \times \end{cases}$$



(ب)

چرا  $\theta_1 = \omega t_1$  در ناحیه اول است؟ چون مکان نوسانگر در این لحظه مثبت است و نوسانگر به طرف مرکز می‌رود. شکل (ب) نحوه حرکت نوسانگر و نقطه مرجع را روی دایره مرجع نشان می‌دهد.

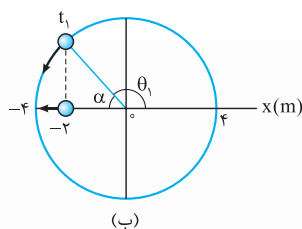
$$\omega t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}$$



(الف)

**نمونه** حالا فرض کنید در شکل روبه‌رو (الف) می‌خواهیم لحظه  $t_1$  را حساب کنیم. مکان نوسانگر در لحظه  $t_1$  منفی است و در حال دور شدن از مرکز نوسان است. پس نقطه مرجع در ناحیه دوم است و داریم:

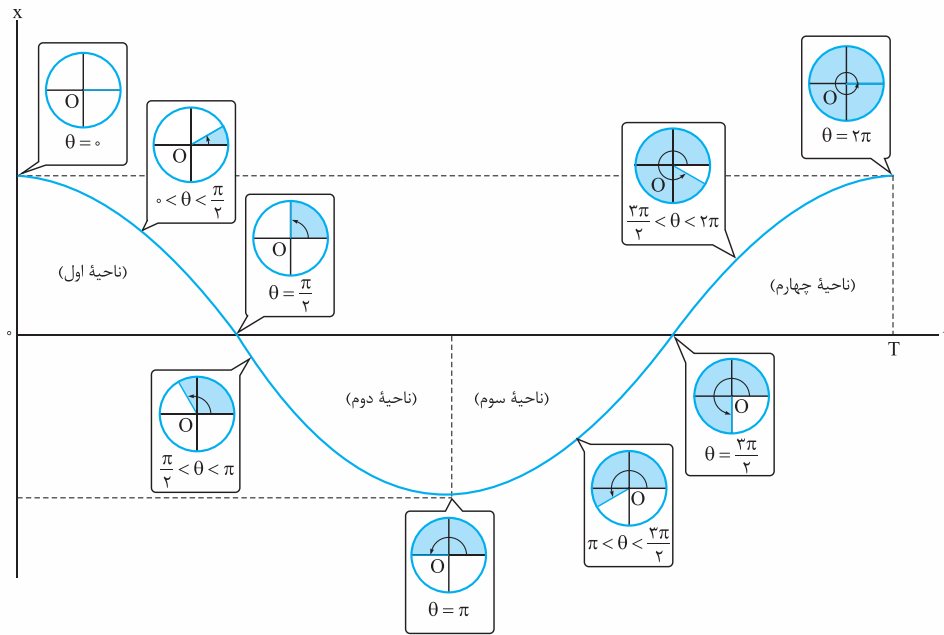
$$x = A \cos \omega t_1 \Rightarrow -2 = 4 \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \omega t_1 = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{3}$$



(ب)

(توجه بفرمایید که در لحظه  $t_1$ ،  $x = -\frac{1}{2}A$  و  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  rad است.)

**۳** مهم‌ترین مهارتی که در حل تست‌های این بخش باید به آن دست پیدا کنید تشخیص  $\theta = \omega t$  در نقاط مختلف است.  $\cos \theta$  را از رابطه  $x = A \cos \theta$  به دست می‌آورید. دوتا جواب برای  $\theta$  به دست می‌آید که با توجه به نحوه حرکت نوسانگر یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. شکل (۱۲) موقعیت نقطه مرجع را در لحظه‌های مختلف نشان می‌دهد.



(شکل ۱۲)

ما در حل تست‌های این قسمت باز هم راحت‌تریم به جای محاسبه  $\theta = \omega t$ ،  $\alpha$  (یعنی کم‌ترین زاویه‌ای که نقطه مرجع روی دایره مرجع، با محور افقی می‌سازد) را حساب کنیم. یادتون نرفته که ...  $(x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} A : \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A : \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}, x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad})$

**تست** نمودار مکان - زمان نوسانگری مطابق شکل است. فاصله نوسانگر از مبدأ در لحظه  $t = 1 \text{ s}$  چند سانتی‌متر است؟

گزینه «۱» راه‌حل اول: نوسانگر در مدت ربع دوره از مکان  $x = +A$  به مکان  $x = 0$  منتقل می‌شود. پس:

$$\frac{T}{4} = 1/5 \Rightarrow T = 6 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

$$x = A \cos \omega t = 2 \cos \frac{\pi}{3} t \xrightarrow{(t=1\text{s})} x = 2 \cos \frac{\pi}{3} \times 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ cm}$$

راه‌حل دوم: در حل تست‌های این قسمت مرتب تکرار می‌کنیم: «باید ببینیم در زمان داده‌شده چه زاویه‌ای طی شده». زاویه طی شده توسط نقطه مرجع در مدت  $\Delta t = 1 \text{ s}$  برابر است با:

$$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \Delta t = \frac{2\pi}{6} \times 1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

از هم‌ارزی  $2\pi \equiv T$  هم می‌شد به همین نتیجه رسید:  $2\pi \equiv (T = 6 \text{ s}) \xrightarrow{(\div 6)} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \equiv (\Delta t = 1 \text{ s})$

پس نقطه مرجع در لحظه  $t = 1 \text{ s}$  زاویه  $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$  را با محور مکان می‌سازد. مکان نوسانگر در این لحظه برابر است با:

$$x_1 = A \cos \alpha = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ cm}$$

**تست** شکل مقابل نمودار مکان - زمان نوسانگری را نشان می‌دهد که در هر دقیقه ۴۰ نوسان انجام می‌دهد. در این نمودار،  $t_1$  برابر با چند ثانیه است؟

(سراسری تهرنی فارغ ۸۵، با تغییر)

گزینه «۱»  $\frac{5}{4}$

گزینه «۲»  $\frac{11}{8}$

گزینه «۳»  $\frac{5}{6}$

گزینه «۴»  $\frac{6}{5}$

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 40 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = \frac{3}{4} \text{ s}$$

راه حل اول: ابتدا دوره تناوب نوسانگر را حساب می‌کنیم:

$$x = A \cos \omega t = A \cos \frac{2\pi}{T} t = 4 \cos \frac{2\pi}{3} T = 4 \cos \frac{4\pi}{3} t$$

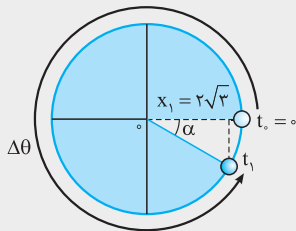
و معادله حرکت نوسانگر:

$$2\sqrt{3} = 4 \cos \frac{4\pi}{3} t_1$$

در لحظه  $t_1$  نوسانگر برای دومین بار از مکان  $x = 2\sqrt{3} \text{ cm}$  عبور می‌کند. پس:

$$\cos \frac{4\pi}{3} t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} t_1 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{11}{8} \text{ s}$$

**نتیجه** اولین جواب معادله  $\cos \frac{4\pi}{3} t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ،  $\frac{4\pi}{3} t = \frac{\pi}{6}$  است که به ازای آن اولین لحظه عبور نوسانگر از مکان  $x = 2\sqrt{3} \text{ cm}$  به دست می‌آید.



راه حل دوم (دایره مرجع): براساس شکل (۱۰) در لحظه  $t_1$  نقطه مرجع در ناحیه چهارم قرار دارد و مطابق شکل روبه‌رو دوران می‌کند. باز هم باید ببینیم در مدت  $t_1$  چه زاویه‌ای طی شده.

$$x_1 = A \cos \alpha \Rightarrow 2\sqrt{3} = 4 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

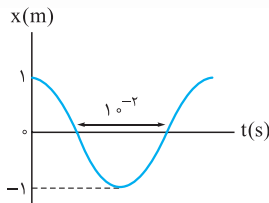
$$(2\pi \equiv T \Rightarrow \frac{11\pi}{6} \equiv t_1) \Rightarrow t_1 = \frac{11}{12} T$$

حالا نوبت هم‌ارزی  $T \equiv 2\pi$  است:

$$t_1 = \frac{11}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{16} \text{ s}$$

T را از راه حل اول قرض می‌گیریم!

## پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۷۷۷- نمودار مکان - زمان نوسانگری در یک حرکت هماهنگ ساده مطابق شکل روبه‌رو است. معادله مکان - زمان

نوسانگر در SI کدام است؟

$$x = 2 \cos 10 \cdot \pi t \quad (2)$$

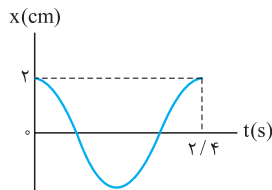
$$x = \cos 10 \cdot \pi t \quad (1)$$

$$x = 2 \cos 20 \cdot \pi t \quad (4)$$

$$x = \cos 20 \cdot \pi t \quad (3)$$

۷۷۸- نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل زیر است. نوسانگر در ثانیه اول حرکت، چند ثانیه به صورت کندشونده حرکت

کرده است؟



$$0/4 \quad (1)$$

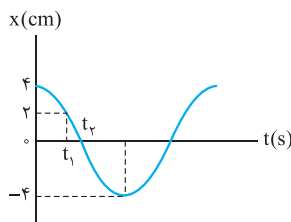
$$0/6 \quad (2)$$

$$0/3 \quad (3)$$

$$0/2 \quad (4)$$

۷۷۹- نمودار مکان - زمان نوسانگری مطابق شکل مقابل است ( $t_2 - t_1 = 0/1 \text{ s}$ ). معادله مکان - زمان نوسانگر

در SI کدام است؟



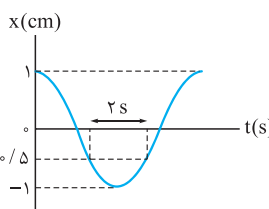
$$x = 0/04 \cos \frac{5\pi}{6} t \quad (2)$$

$$x = 0/04 \cos \frac{5\pi}{3} t \quad (1)$$

$$x = 0/08 \cos \frac{5\pi}{6} t \quad (4)$$

$$x = 0/08 \cos \frac{5\pi}{3} t \quad (3)$$

۷۸۰- نمودار مکان - زمان نوسانگری مطابق شکل روبه‌رو است. معادله مکان - زمان نوسانگر در SI کدام است؟



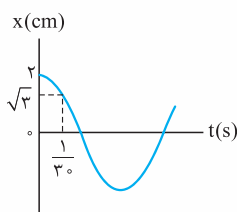
$$x = 5 \times 10^{-2} \cos \frac{\pi}{3} t \quad (2)$$

$$x = 10^{-2} \cos \frac{2\pi}{3} t \quad (1)$$

$$x = 5 \times 10^{-2} \cos \frac{2\pi}{3} t \quad (4)$$

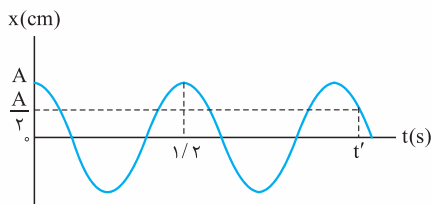
$$x = 10^{-2} \cos \frac{\pi}{3} t \quad (3)$$

۷۸۱- نمودار مکان - زمان نوسانگری مطابق شکل روبه‌رو است. دوره تناوب نوسانگر چند ثانیه است؟



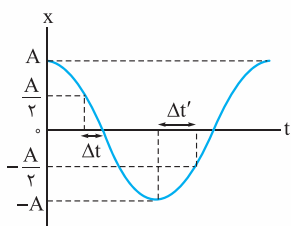
- ۰/۱ (۱)
- ۰/۲ (۲)
- ۰/۳ (۳)
- ۰/۴ (۴)

۷۸۲- نمودار مکان - زمان ذره‌ای که روی محور x حرکت هماهنگ ساده می‌دهد، مطابق شکل زیر است.  $t'$  چند ثانیه است؟



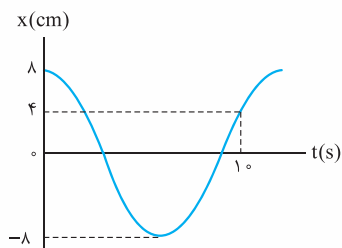
- ۲/۵ (۱)
- ۲/۶ (۲)
- ۲/۸ (۳)
- ۳ (۴)

۷۸۳- شکل مقابل، نمودار مکان - زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده است. نسبت  $\frac{\Delta t'}{\Delta t}$  کدام است؟



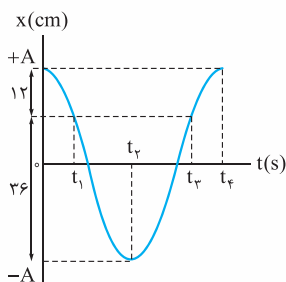
- ۱/۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۳/۲ (۳)
- ۲ (۴)

۷۸۴- نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام لحظه برحسب ثانیه، برای سومین بار فاصله نوسانگر از مبدأ مکان  $4\sqrt{2}$  cm است؟



- ۵/۵ (۱)
- ۷/۵ (۲)
- ۱۰/۵ (۳)
- ۱۳/۵ (۴)

۷۸۵- نمودار مکان - زمان نوسانگر ساده‌ای به شکل روبه‌رو است. اگر  $t_f = (t_p + 1)$  s باشد، در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_p$ ، به ترتیب و از راست به چپ، تندی متوسط و سرعت متوسط نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

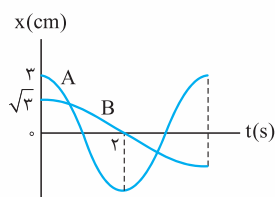


- ۱۸، ۶ (۱)
- ۶، صفر (۲)
- ۱۸، صفر (۳)
- ۶، ۱۸ (۴)

۷۸۶- معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت  $x = 0.01 \cos \frac{\pi}{6} t$  است. اگر در یک دوره،  $t_1$  و  $t_2$  لحظه‌هایی باشند که از مبدأ زمان تا آن لحظه‌ها، زمانی که نوسانگر به صورت تندشونده حرکت کرده ۱ s بیشتر از زمانی باشد که نوسانگر به صورت کندشونده حرکت کرده است و مکان نوسانگر در این لحظه‌ها منفی باشد، مسافت طی شده توسط نوسانگر بین این دو لحظه چند سانتی‌متر است؟

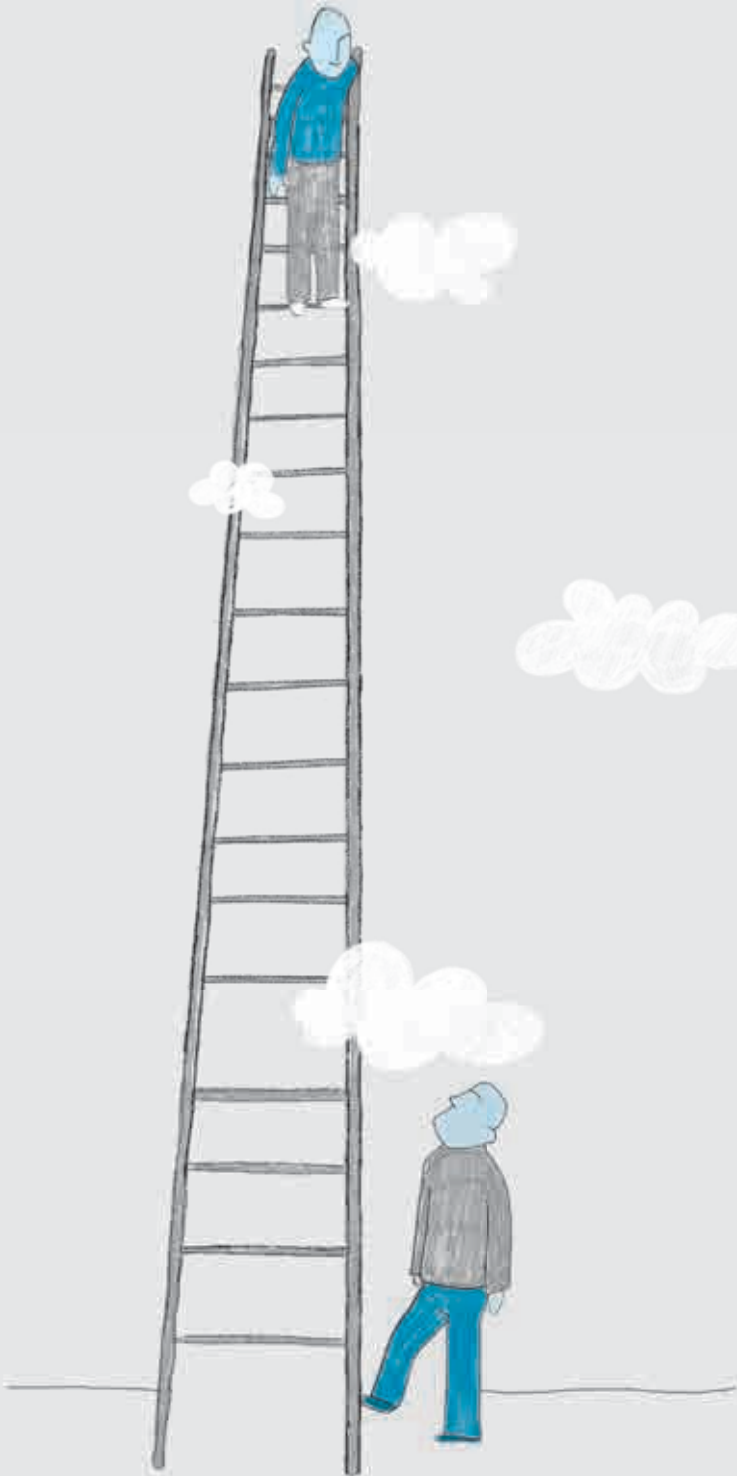
- ۲ -  $\sqrt{3}$  (۱)
- ۲ +  $\sqrt{3}$  (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

۷۸۷- نمودار مکان - زمان دو نوسانگر هماهنگ ساده A و B مطابق شکل مقابل است. این دو نوسانگر در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه برای اولین بار از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟



- ۳/۵ (۱)
- ۲/۳ (۲)
- ۳/۲ (۴)
- ۱ (۳)

# پاسخ نامہ نسری







## پاسخ نامه تشریحی

۷۱۰- فاصله نوسانگر از مرکز نوسان در لحظه  $t = 1\text{ s}$ ، برای اولین بار و در لحظه  $t = 3\text{ s}$  برای دومین بار بیشینه می‌شود:

$$n = 0 \Rightarrow t_1 = 1\text{ s}, \quad n = 1 \Rightarrow t_2 = 3\text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2\text{ s}$$

این بازه زمانی  $2\text{ s}$  طول می‌کشد:

در این مدت، نوسانگر از یک انتهای مسیر به انتهای دیگر می‌رود و یک بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند.

نوسانگر در مدت  $T$  دو بار طول مسیر نوسان را می‌پیماید؛ در مدت  $\frac{T}{4}$  چند بار؟ واضح است: یک بار. پس:

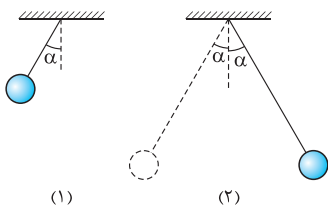
$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow 2 = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 8\text{ s} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8}\text{ Hz} \Rightarrow f = 0.125\text{ Hz}$$

۷۱۱- نوار قلب شخص نشان می‌دهد که دوره تناوب ضربان قلب شخص  $T = 0.8\text{ s}$  است. بنابراین با استفاده از رابطه (۱) درس‌نامه داریم:

$$n = \frac{t}{T} \xrightarrow{(t=1\text{ min}=60\text{ s})} n = \frac{60}{0.8} = \frac{600}{8} = 75$$

۷۱۲- آونگ اولی در مدت  $2/5\text{ s}$  یک نوسان کامل انجام می‌دهد و سر جای اولیه‌اش برمی‌گردد.

در نتیجه، در مدت  $1.0\text{ s}$ ، ۴ نوسان کامل انجام می‌دهد و در وضعیت اولیه‌اش واقع می‌شود:



$$n_1 = \frac{t}{T_1} = \frac{1.0}{2/5} = 2.5$$

$$n_2 = \frac{t}{T_2} = \frac{1.0}{4} = 0.25$$

و اما آونگ دوم در مدت  $1.0\text{ s}$ ،  $2/5$  نوسان کامل انجام می‌دهد:

یک نوسان کامل، معادل یک رفت و برگشت و نیم نوسان، معادل یک رفت (یا یک برگشت) است. بنابراین، آونگ دوم در مدت فوق،  $5$  بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند و در نقطه مقابل وضعیت اولیه‌اش قرار می‌گیرد.

۷۱۳- قرار است آونگ اولی  $6$  نوسان بیشتر از آونگ دومی انجام دهد؛ یعنی:

$$n_1 - n_2 = 6 \Rightarrow \frac{t}{T_1} - \frac{t}{T_2} = 6 \Rightarrow \frac{t}{2/5} - \frac{t}{4} = 6 \Rightarrow \frac{5t}{2} - \frac{t}{4} = 6 \Rightarrow \frac{10t - 2t}{4} = 6 \Rightarrow \frac{8t}{4} = 6 \Rightarrow 2t = 6 \Rightarrow t = 3\text{ s}$$

۷۱۴- حرکت جسمی که روی یک دایره به طور یکنواخت دوران می‌کند، دوره‌ای است؛ اما هماهنگ ساده نیست.

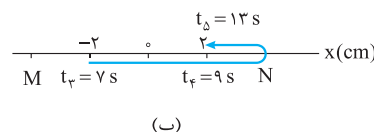
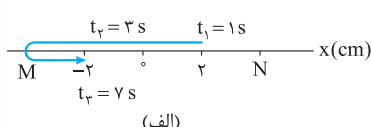
۷۱۵- حرکت جسم با آهنگ منظمی حول نقطه  $O$  تکرار می‌شود. پس حرکت جسم از نوع نوسان دوره‌ای است. اما حرکت جسم هماهنگ ساده نیست، چرا که نیروی خالص وارد بر جسم ثابت است (به جسم دو نیروی ثابت وزن و نیروی عمودی تکیه‌گاه وارد می‌شود). در حالی که در حرکت هماهنگ ساده، نیروی وارد بر نوسانگر متغیر است و به فاصله نوسانگر از نقطه تعادل بستگی دارد.

۷۱۶- در مدتی که نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک می‌شود، شتاب و نیروی وارد بر آن کاهش و تندی و تکانه آن افزایش می‌یابد. ضمناً بسامد و دوره تناوب در حرکت هماهنگ ساده ثابت می‌مانند.

۷۱۷- در تمام حرکت‌های هماهنگ ساده، علامت بردارهای نیرو و مکان (جابه‌جایی از وضع تعادل) مخالف است. پس مکان نوسانگر مثبت است. اگر در این حال، نوسانگر از مرکز نوسان دور شود، سرعتش مثبت و اگر به مرکز نوسان نزدیک شود، سرعتش منفی است.

۷۱۸- نحوه حرکت نوسانگر و موقعیت آن در زمان‌های مختلف می‌تواند مطابق شکل‌های زیر باشد (نوسانگر روی پاره خط  $MN$  نوسان می‌کند). مطابق شکل (الف)، نوسانگر در لحظه  $t_1 = 1\text{ s}$  برای اولین بار به مکان  $x = 2\text{ cm}$  و در لحظه‌های  $t_2 = 3\text{ s}$  و  $t_3 = 7\text{ s}$  به ترتیب، برای دومین و سومین بار به فاصله  $2$  سانتی‌متری مبدأ (مکان  $x = -2\text{ cm}$ ) می‌رسد. نوسانگر در این مدت، نیمی از یک نوسان کامل را انجام می‌دهد. نیمه دیگر را در شکل (ب) نشان داده‌ایم. از آن‌جا که نوسانگر، نیم نوسان را در نیم دوره انجام می‌دهد، داریم:

$$\Delta t = t_3 - t_1 = \frac{T}{2} \Rightarrow 7 - 1 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 12\text{ s}$$

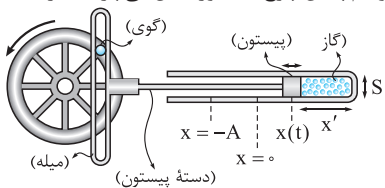


البته، با محاسباتی که در شکل (ب) انجام داده‌ایم و قطعاً خود شما می‌توانید این محاسبات را انجام دهید (محاسبه  $t_4$  و  $t_5$ )، دوره تناوب نوسانگر می‌شود:

$$\Delta t = t_5 - t_1 = T \Rightarrow 13 - 1 = T \Rightarrow T = 12\text{ s}$$



۷۱۹- **گزینه ۲** مطابق شکل، به ازای هر نوسان کامل پیستون، حجم گاز سمت راست پیستون تغییر می کند و هم چنین چرخ یک دور کامل می چرخد. در نتیجه،



دوره نوسان پیستون و دوره گردش چرخ برابرند. از طرفی حرکت پیستون از طریق دسته پیستون و میله به گوی روی چرخ انتقال پیدا می کند به طوری که با جابه جایی پیستون از وضعیت نوسانی  $x = +A$  تا  $x = 0$ ، گوی از سمت راست چرخ به بالای چرخ می رسد و در ادامه با جابه جایی پیستون از  $x = 0$  تا  $x = -A$ ، گوی از بالای چرخ به سمت چپ چرخ می رسد. بنابراین دامنه نوسان پیستون با شعاع گردش گوی روی چرخ یکسان است ( $A = r$ ).

هنگامی که پیستون در وضعیت  $x = +A$  است، به انتهای سمت راست استوانه نزدیک تر است و  $x'$  و در نتیجه حجم گاز محبوس کم ترین می شود و هنگامی که پیستون به وضعیت  $x = -A$  می رسد، از انتهای سمت راست استوانه دور تر است و  $x'$  و نیز حجم گاز محبوس بیشترین می شود. پس:  $(V)$  حجم گاز و  $(S)$  مساحت

مقطع داخلی پیستون است.  $V_{\min} = S \times x'_{\min} \Rightarrow 1 \times 10^{-3} = (100 \times 10^{-4}) \times x'_{\min} \Rightarrow 10^{-2} x'_{\min} = 10^{-3} \Rightarrow x'_{\min} = 10^{-1} \text{ m} = 10 \text{ cm}$

$V_{\max} = S \times x'_{\max} \Rightarrow 3 \times 10^{-3} = (100 \times 10^{-4}) \times x'_{\max} \Rightarrow 10^{-2} x'_{\max} = 3 \times 10^{-3} \Rightarrow x'_{\max} = 3 \times 10^{-1} \text{ m} = 30 \text{ cm}$

اندازه جابه جایی پیستون بین دو نقطه بازگشت نوسان ( $2A$ )، با اختلاف  $x'_{\max}$  و  $x'_{\min}$  برابر است. (چرا؟) پس:

$2A = x'_{\max} - x'_{\min} = 30 - 10 = 20 \text{ cm} \Rightarrow A = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$

و اما خواسته تست:  $T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{(v=54 \text{ km/h} = \frac{54}{3.6} \text{ m/s} = 15 \text{ m/s})} T = \frac{2\pi \times 0.1}{15} \xrightarrow{(T \text{ پیستون و چرخ برابرند})} f = \frac{1}{T} = \frac{15}{0.2\pi} = \frac{75}{\pi} \text{ Hz}$

۷۲۰- **گزینه ۲** از مقایسه معادله حرکت نوسانگر با فرم کلی آن ( $x = A \cos \omega t$ ) متوجه می شویم که ضریب  $t$  بیانگر  $\omega$  است:

$\omega = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 2\pi \Rightarrow T = 0.1 \text{ s}$

نوسانگر در مدت  $\Delta t = \frac{T}{4}$  از مکان  $x_1 = +A$  به مکان  $x_2 = -A$  منتقل می شود و در مکان  $x_3$  تغییر جهت می دهد:  $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05 \text{ s}$

۷۲۱- **گزینه ۱** نوسانگر پس از مدت  $\Delta t = \frac{T}{4}$  از مکان  $x = +A$  به مکان  $x = 0$  منتقل می شود و تندی آن بیشینه می شود.

$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 4 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ s}$

$\omega = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow T = 2 \text{ s} \Rightarrow n = \frac{t}{T} = \frac{6}{2} = 3$

۷۲۲- **گزینه ۱**

$\omega = 10\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 10\pi \Rightarrow T = 0.2 \text{ s}$

۷۲۳- **گزینه ۲** دوره نوسانگر برابر است با:

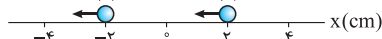
$n = \frac{t}{T} = \frac{6}{0.2} = 30$

تعداد نوسان های متحرک در مدت  $t = 6 \text{ s}$  برابر است با:

نوسانگر در هر نوسان ۲ بار پاره خط نوسان را طی می کند، بنابراین در ۳۰ نوسان ۶۰ بار طول مسیر نوسان طی می شود.

۷۲۴- **گزینه ۱** راه حل اول، دامنه حرکت نوسانگر  $A = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$  است. نوسانگر در لحظه عبور از نقطه (۱) برای اولین بار و در لحظه عبور از

نقطه (۲) برای دومین بار در فاصله ۲ سانتی متری از نقطه تعادل قرار می گیرد. حرکت نوسانگر در موقعیت (۱) به صورت تندشونده و در موقعیت (۲) به صورت کندشونده است. پس باید حساب کنیم در چه لحظه ای برای اولین بار  $x = -2 \text{ cm}$  می شود:



$x = 0.04 \cos \frac{\pi}{6} t \Rightarrow -0.02 = 0.04 \cos \frac{\pi}{6} t \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} t = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} t = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = 4 \text{ s}$

راه حل دوم (به کارگیری دایره مرجع): شکل مقابل نشان می دهد نقطه مرجع چگونه حرکت کرده. در

مکان  $x = -2 \text{ cm}$  داریم:

$x = -A \cos \alpha \Rightarrow -2 = -4 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

البته شما خیلی تیزید و زمانی که  $x = \pm \frac{1}{2} A$  است، سریع یاد زاویه  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  می افتید! با توجه به

شکل مقابل:  $\Delta \theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \Delta t \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$

۷۲۵- **گزینه ۲** دامنه  $A$ ،  $0.02 \text{ m}$  بیشتر از دامنه  $B$  است:

$A_A = A_B + 0.02 = 1 + 0.02 = 1.02 \text{ m}$

$\omega_B = \pi \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_B} = \pi \Rightarrow T_B = 2 \text{ s}$

دوره حرکت  $B$  برابر است با:

$T_A = T_B + 2 = 2 + 2 = 4 \text{ s} \Rightarrow \omega_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$

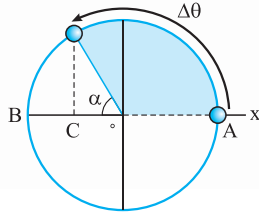
دوره حرکت  $A$ ،  $2 \text{ s}$  بیشتر از دوره حرکت  $B$  است؛ پس:

$x_A = A_A \cos \omega_A t \Rightarrow x_A = 1.02 \cos \frac{\pi}{2} t$



۷۲۶- **گزینه ۱** راه حل اول:  $x_C = A \cos \omega t \Rightarrow -2 = 4 \cos \omega \times 2 \Rightarrow \cos 2\omega = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\omega = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$

$A = 4 \text{ cm} \rightarrow x = A \cos \omega t = 4 \cos \frac{\pi}{3} t$



راه حل دوم (دایره مرجع): زاویه‌ای که نقطه مرجع با محور افقی در هنگام عبور نوسانگر از نقطه C می‌سازد، برابر  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  است.

$x_C = -A \cos \alpha \Rightarrow -2 = -4 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

$\Delta \theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

بنابراین، زاویه طی شده توسط نقطه مرجع در جابه‌جایی از A تا C برابر است با:

$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \omega \times 2 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \cos \omega t = 4 \cos \frac{\pi}{3} t$

$A = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$

۷۲۷- **گزینه ۲** گام اول: دامنه حرکت برابر نصف پاره خط نوسان است:

گام دوم: یک نوسانگر در یک چرخه ۲ بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند. بنابراین، نوسانگر در یک دقیقه (t = 60 s)، ۶۰۰ چرخه انجام می‌دهد. طبق رابطه (۱):

$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 600 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = 0.1 \text{ s}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi \text{ rad/s}$

و طبق رابطه (۵):

$x = A \cos \omega t = 0.1 \cos 20\pi t$

گام سوم: جای‌گذاری مقادیر A و  $\omega$  در معادله حرکت نوسانگر:

۷۲۸- **گزینه ۱** به خاطر اهمیت این تست، از سه راه حلش می‌کنیم.

راه حل اول (تشریحی): نوسانگر در هر ثانیه ۱۰ چرخه انجام می‌دهد (۱۰ بار پاره خط نوسان را در یک جهت و ۱۰ بار دیگر در جهت مخالف طی می‌کند). پس بسامد نوسانگر ۱۰ Hz است.

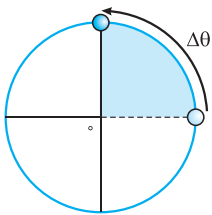
$f = 10 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 10 = 20\pi \text{ rad/s}$

$x = A \cos \omega t = 0.1 \cos 20\pi t$

معادله حرکت نوسانگر برابر است با:

$x = 0 \Rightarrow 0.1 \cos 20\pi t = 0 \Rightarrow 20\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{40} \text{ s}$

در لحظه عبور نوسانگر از نقطه تعادل X = 0 می‌شود:



راه حل دوم (دایره مرجع): یک راه حل خیلی خوب و سریع برای حل این نوع تست‌ها (یعنی تست‌هایی که زمان جابه‌جایی نوسانگر بین دو نقطه را می‌خواهند)، این است که زاویه طی شده توسط نقطه مرجع را به دست آورید و با استفاده از رابطه (۶)،

زمان طی این زاویه را حساب کنید. در لحظه‌ای که  $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  می‌شود، نوسانگر برای اولین بار در نقطه تعادل عبور می‌کند. زاویه طی شده توسط نقطه مرجع از مبدأ زمان تا این لحظه برابر است با:

$\Delta \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 20\pi \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{40} \text{ s}$

و زمان طی این جابه‌جایی:

راه حل سوم (خوب و سریع، اما نه به اندازه قبلی!): باز هم از دایره مرجع استفاده کنید. از آنجا که  $\omega$  ثابت است (با توجه به رابطه ۶)، بین تغییر  $\theta$  و زمان

انجام این تغییر، تناسب مستقیم وجود دارد. نقطه مرجع، زاویه  $2\pi \text{ rad}$  را در یک دوره (T) می‌پیماید؛ زاویه  $\Delta \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  را در چه مدت؟ حساب می‌کنیم:

تغییر زاویه (rad) / زمان (s)

$\frac{2\pi}{T = 0.1} \Rightarrow 2\pi \times \Delta t = 0.1 \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{40} \text{ s}$

$\Delta t \quad \Delta \theta = \frac{\pi}{2}$

$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{0.1}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{40} \text{ s}$

نقطه مرجع، کل دایره مرجع رو در مدت T و ربع دایره رو در مدت  $\frac{T}{4}$  طی می‌کند؛ پس:

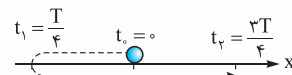
توجه: در لحظه  $t = \frac{1}{40} \text{ s}$ ، فاصله نوسانگر از وضع تعادل، اندازه نیروی وارد بر نوسانگر و شتاب آن، همگی برای اولین بار، صفر و سرعت آن برای اولین بار بیشینه می‌شود.

۷۲۹- **گزینه ۳**  $n = \frac{t}{T} \Rightarrow 300 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = 0.2 \text{ s}$

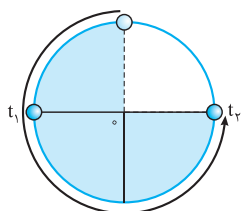
نوسانگر در هر دقیقه ۳۰۰ چرخه را انجام می‌دهد:

چون تندی نوسانگر در مبدأ زمان بیشینه است، در این لحظه از نقطه تعادل عبور می‌کند. زمان جابه‌جایی از مرکز تا نقطه بازگشت  $\frac{T}{4}$  است. بنابراین، نوسانگر

در لحظه  $t_1 = \frac{T}{4}$  برای اولین بار و در لحظه  $t_2 = \frac{3T}{4}$  برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد.



$t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{3 \times 0.2}{4} = 0.15 \text{ s}$



**نویسه** شکل روبه‌رو نشان می‌دهد نقطه مرجع چگونه حرکت کرده؛ وقتی نوسانگر برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد، نقطه مرجع  $\frac{3}{4}$  محیط دایره را طی می‌کند. کل دایره در مدت  $T$  طی می‌شود. آن در چه مدت؟

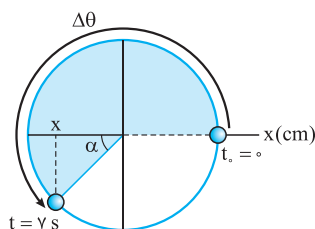
**۷۳۰- نکته** جسمی از حال سکون رها می‌شود و به سمت نقطه تعادل شروع به حرکت می‌کند. پس نوسانگر در مبدأ زمان بیشترین فاصله را از مرکز داشته است و پس از  $\Delta t_1 = 0/8$  s برای اولین بار از نقطه تعادل عبور می‌کند. این بازه زمانی  $\frac{T}{4}$  طول می‌کشد.  $\frac{T}{4} = 0/8 \Rightarrow T = 3/2$  s  
 زمان لازم برای این که نوسانگر دو بار متوالی از مرکز نوسان عبور کند  $\frac{T}{2}$  است:  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0/8 + 1/6 = 2/3$  s  
**۷۳۱- نکته** راه‌حل اول (تشریحی): با توجه به اطلاعات تست معادله حرکت نوسانگر را می‌نویسیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s} \Rightarrow x(\text{cm}) = A \cos \omega t = 10 \cos \frac{\pi}{6} t$$

چون  $A$  را برحسب سانتی‌متر در معادله مکان - زمان نوسانگر قرار دادیم، هر لحظه‌ای را که در معادله قرار دهیم، مکان برحسب سانتی‌متر در آن لحظه به دست می‌آید:

$$x = 10 \cos \frac{\pi}{6} \times 7 = 10 \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{(\cos(\pi+\alpha) = -\cos \alpha)} x = -10 \cos \frac{\pi}{6} = -10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ cm}$$

راه‌حل دوم (استفاده از دایره مرجع): اول با استفاده از تناسب  $z$  (یعنی زمان و زاویه) زاویه طی شده توسط نقطه مرجع را حساب می‌کنیم.



زمان (s)	زاویه (rad)	
$T = 12$	$2\pi$	
$\Delta t = 7$	$\Delta \theta$	$\Rightarrow \Delta \theta = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$

در این حالت نقطه مرجع با محور افقی زاویه  $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$  می‌سازد:

$$\Delta \theta = \pi + \alpha \Rightarrow \frac{7\pi}{6} = \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$x = -A \cos \alpha = -10 \cos \frac{\pi}{6} = -10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3} \text{ cm}$$

دانش‌آموز زرنگ با شنیدن زاویه  $\frac{\pi}{6}$  یاد  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  می‌افتد، شما چه طور؟

**۷۳۲- نکته** مطابق شکل، متحرک در شناسه  $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$  (فاز) برای اولین بار و در شناسه  $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$  (فاز) برای دومین بار از نقطه  $O$  (نقطه تعادل) می‌گذرد که می‌بینیم مضارب فرد  $\frac{\pi}{4}$  رادین هستند. به بیان دقیق‌تر:

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow{(\omega t = \theta)} x = A \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n-1)\frac{\pi}{2} = (n-\frac{1}{2})\pi \text{ (rad)}$$

توجه کنید که اگر در این‌جا از  $(2n+1)$  برای نمایش عدد فرد استفاده کنید، در شمارش تعداد دفعات عبور از  $O$  یک پله جلو می‌افتید!

متحرک در شناسه  $\pi$  (فاز) صفر برای اولین بار از نقطه بازگشت  $(+A)$  و در شناسه  $\pi \text{ rad}$  برای دومین بار از نقطه بازگشت  $(-A)$  می‌گذرد که می‌بینیم مضارب صحیح  $\pi$  رادین هستند. به بیان دقیق‌تر:

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow{(\omega t = \theta)} \pm A = A \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = (n-1)\pi \text{ (rad)}$$

دوباره توجه کنید که اگر در این‌جا، از  $n$  برای نمایش عدد صحیح استفاده کنید، باز هم در شمارش دفعات عبور از نقطه‌های بازگشت، یک پله جلو می‌پرید!

**نویسه** کدام گزینه است که اگر اندازه  $n$  را در آن ۱ بگذارید، به پاسخ  $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$  و صفر می‌رسید؟ بله: گزینه پایانی!

**۷۳۳- نکته** نوسانگر در هر دوره، ۲ بار طول مسیر نوسان را طی می‌کند. بنابراین، در هر دوره ۲ بار از یک نقطه (که در مسیر حرکت آن قرار دارد) می‌گذرد؛ یک بار در هنگام رفت و بار دیگر در هنگام برگشت. دوره حرکت نوسانگر ما برابر است با:

با توجه به توضیح‌های فوق، معلوم می‌شود نوسانگر در مدت  $2$  s، دو بار از مکان  $x = +10 \text{ cm}$  عبور می‌کند.

**۷۳۴- نکته** راه‌حل اول. باید حساب کنیم در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 1/6$  s چند بار  $x = +10 \text{ cm}$  یا  $x = -10 \text{ cm}$  و خلاصه  $x = \pm 10 \text{ cm}$  می‌شود.

$$x = 10 \cos \pi t$$

$$\pm 10 = 10 \cos \pi t \Rightarrow \cos \pi t = \pm 1 \Rightarrow \pi t = \frac{\pi}{2}, (\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}), (\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}), (2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}), \dots \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ s}, \frac{1}{2} \text{ s}, \frac{3}{2} \text{ s}, \frac{3}{2} \text{ s}, \dots$$

$t = \frac{1}{2} \text{ s}$  و  $t = \frac{3}{2} \text{ s}$  بزرگ‌تر از  $1/6 \text{ s}$  است. پس این مقدار  $t$  و مقادیر بزرگ‌تر از  $\frac{1}{6} \text{ s}$  را قبول نمی‌کنیم. در نتیجه، نوسانگر ۳ بار و در لحظه‌های  $t = \frac{1}{6} \text{ s}$ ،  $t = \frac{2}{6} \text{ s}$ ،  $t = \frac{3}{6} \text{ s}$

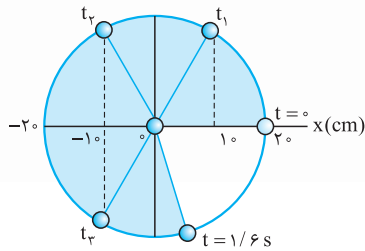
از  $10$  سانتی‌متری مرکز نوسان عبور می‌کند.



راه حل دوم (دایره مرجع): در حل اکثر تست‌ها با استفاده از دایره مرجع باید ببینیم در زمان داده شده چه زاویه‌ای طی شده. زاویه طی شده توسط نقطه مرجع

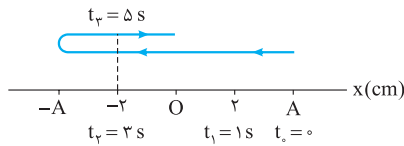
$$\Delta\theta = \omega t = \pi t = \pi \times 1/6 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 1/6$  s برابر است با:



$\frac{\pi \times 180^\circ}{6} = 288^\circ$  برابر  $\frac{\pi}{6}$  rad است. همان‌طور که شکل روبه‌رو نشان می‌دهد، در بازه زمانی  $t = 0$  تا

$t = 1/6$  s، نقطه مرجع روی محور  $x$ ، ۳ بار (در لحظه‌های  $t_1, t_2, t_3$ ) از  $10^\circ$  سانتی‌متری  $O$  عبور می‌کند.



**۷۳۵ - نکته ۳** گام اول: با فرض این که نوسانگر حول نقطه  $O$  و با دامنه  $A$  نوسان می‌کند، وضعیت

آن را در لحظات  $t_0, t_1, t_2, t_3$  بر روی شکل روبه‌رو نشان می‌دهیم:

گام دوم: با توجه به شکل روبه‌رو،  $2$  s طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان  $x = -2$  m عبور و پس از تغییر

جهت در مکان  $x = -A$  دوباره از مکان  $x = -2$  m عبور کند:  $\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 3 = 2$  s

زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر از مکان  $x = -2$  cm به مکان  $x = -A$  برسد نصف مقدار فوق است:

$$\Delta t' = \frac{1}{2} \Delta t = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ s}$$

گام سوم: دوره حرکت نوسانگر را با توجه به این مطلب که زمان لازم برای انتقال نوسانگر از مکان  $x = A$  به مکان  $x = -A$  برسد برابر  $\frac{T}{2}$  است، به دست می‌آوریم:

$$\frac{T}{2} = t_2 + \Delta t' \Rightarrow \frac{T}{2} = 3 + 1 = 4 \Rightarrow T = 8 \text{ s}$$

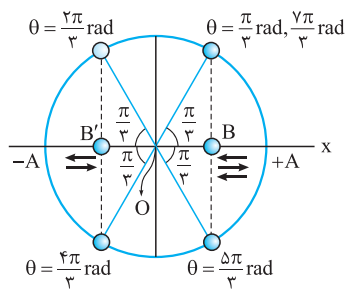
گام چهارم: نوسانگر در هر دوره، ۲ بار از مکان  $x = +2$  cm می‌گذرد، بنابراین در پایان ۱۲ دوره،  $12 \times 2 = 24$  بار از مکان  $x = +2$  cm عبور می‌کند و مطابق

$$t = 12T + t_1 = 12 \times 8 + 1 = 97 \text{ s}$$

شکل بالا زمان لازم برای این که برای بار بیست و پنجم از مکان  $x = 2$  cm بگذرد برابر است با:

**۷۳۶ - نکته ۱** گام اول (محاسبه دوره نوسان): با توجه به رابطه مکان - زمان:

$$x = A \cos \omega t = A \cos\left(\frac{\pi}{T} t\right) \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{T} t \xrightarrow{(\omega = \frac{2\pi}{T})} \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi t}{T} \Rightarrow T = 8 \text{ s}$$



گام دوم: در شکل مقابل، نقطه‌های وسط دامنه را  $B$  و  $B'$  نامیده‌ایم.  $B$  وسط نقطه تعادل ( $O$ ) و نقطه بازگشت  $x = +A$  است. پس:

$$x_B = \frac{0 + A}{2} = \frac{A}{2}$$

نقطه  $B'$  هم وسط نقطه تعادل ( $O$ ) و نقطه بازگشت  $x = -A$  است و:

$$x_{B'} = \frac{0 + (-A)}{2} = -\frac{A}{2}$$

نوسانگر در  $10^\circ$  ثانیه اول حرکت،  $\frac{5}{4}$  نوسان کامل (همون  $5$  تا  $\frac{1}{4}$  نوسان یا  $5$  دامنه نوسان) را طی می‌کند:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

یعنی پس از شروع نوسان از  $x = +A$  و برگشت آن به همین نقطه، چهار ناحیه (دامنه) را در  $T = 8$  s طی می‌کند و در  $\frac{T}{4} = 2$  s بعدی پنجمین ناحیه

(دامنه) را طی کرده به  $O$  می‌رسد. خب نوسانگر در هر ناحیه نوسان یک بار از یکی از دو نقطه  $B$  یا  $B'$  می‌گذرد و در کل، در  $5$  ناحیه،  $5$  بار از  $B$  یا  $B'$

می‌گذرد (سه بار از  $B$  دو بار از  $B'$ ). به بیان مثلثاتی می‌توان نوشت:

۳ بار:  $x_B = \frac{A}{2} \Rightarrow A \cos \theta = \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \left(\frac{\pi}{3} \text{ rad یا } \frac{5\pi}{3} \text{ rad یا } \frac{7\pi}{3} \text{ rad}\right)$

۲ بار:  $x_{B'} = -\frac{A}{2} \Rightarrow A \cos \theta = -\frac{A}{2} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \left(\frac{2\pi}{3} \text{ rad یا } \frac{4\pi}{3} \text{ rad}\right)$

برای درک کامل‌تر، زمان این عبورها را هم در  $10^\circ$  ثانیه اول حساب می‌کنیم:

۳ بار:  $\left(\frac{\pi}{3} t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{3} \text{ s}\right)$  یا  $\left(\frac{2\pi}{3} t = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \text{ s}\right)$  یا  $\left(\frac{7\pi}{3} t = \frac{7\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{7}{3} \text{ s}\right)$  : زمان‌های عبور از نقطه  $B$

۲ بار:  $\left(\frac{4\pi}{3} t = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{4}{3} \text{ s}\right)$  یا  $\left(\frac{5\pi}{3} t = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \text{ s}\right)$  : زمان‌های عبور از نقطه  $B'$





۷۳۷- کوبه ۴

راه حل اول (تشریحی): مکان نوسانگر را در لحظه  $t_1 = \frac{T}{12}$  و  $t_2 = \frac{2T}{12}$  حساب می‌کنیم.

$$x_1 = A \cos \omega t_1 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) \times \frac{T}{12} = A \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

$$x_2 = A \cos \omega t_2 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) \times \frac{2T}{12} = A \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} A$$

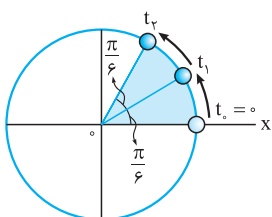
$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} A - A = \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right) A$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2} A - \frac{\sqrt{3}}{2} A = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) A$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) A}{\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right) A} = \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{گویاش کنیم}} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+3-2-\sqrt{3}}{4-3} = \sqrt{3}+1$$

جابه‌جایی نوسانگر در بازه زمانی  $t_0 = 0$  تا  $t_1$  برابر است با:

جابه‌جایی نوسانگر در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  برابر است با:



راه حل دوم (به‌کارگیری دایره مرجع): بین زمان و زاویه طی شده توسط نوسانگر نسبت مستقیم وجود دارد. نقطه مرجع

در مدت  $T$  زاویه  $2\pi \text{ rad}$  و در مدت  $\frac{T}{12}$  زاویه  $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$  را طی می‌کند. پس زاویه‌ای که نقطه مرجع با محور افق می‌سازد

در لحظه  $t_1 = \frac{T}{12}$  برابر  $\alpha_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$  و در لحظه  $t_2 = \frac{2T}{12}$  برابر  $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$  است.

$$x_1 = A \cos \alpha_1 = A \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

$$x_2 = A \cos \alpha_2 = A \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} A$$

بقیه مراحل حل تست مثل راه حل اول است.

نتیجه

جابه‌جایی در ثانیه دوم بزرگ‌تر از جابه‌جایی در ثانیه اول است، چون نوسانگر در ثانیه دوم به نقطه تعادل نزدیک‌تر و سرعت متوسط آن بیشتر است.

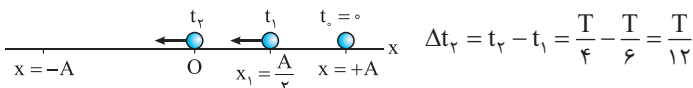
در نتیجه، جابه‌جایی با زمان جابه‌جایی نسبت مستقیم ندارد.

۷۳۸- کوبه ۲

زمان لازم را برای این‌که نوسانگر از مکان  $x_0 = +A$  تا  $x_1 = \frac{A}{2}$  جابه‌جا شود، با  $t_1$  نشان می‌دهیم.

$$x_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right) t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

از طرفی  $t_2 = \frac{T}{4}$  طول می‌کشد تا نوسانگر از انتهای مسیر تا مرکز ( $x_2 = 0$ ) جابه‌جا شود. ذره در بازه زمانی  $t_0$  تا  $t_1$  به انتهای مسیر و در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  به مرکز نزدیک‌تر است:



در ناحیه اول (بازه زمانی  $t_0 = 0$  تا  $t_2 = \frac{T}{4}$ )، احتمال (P) این‌که ذره به نقطه تعادل نزدیک‌تر باشد (یعنی بین  $x_1$  و O باشد)، برابر است با:

$$P = \frac{\text{(زمان جابه‌جایی بین مکان‌های O و } x_1)}{\text{(زمان جابه‌جایی در ناحیه اول)}} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{T}{4} - \frac{T}{6}}{\frac{T}{4} - 0} = \frac{\frac{T}{12}}{\frac{T}{4}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

در ناحیه‌های بعدی هم همین درصد، احتمال وقوع دارد. پس در کل یک دوره هم همین‌طور است.

۷۳۹- کوبه ۴

رسم فنر رو بی‌فیال! در شکل (الف)، وضعیت مکعب در دو لحظه  $t = 0$  که مکعب در مکان

$x = +A$  و  $t = \frac{T}{4}$  که مکعب در مکان  $x = -A$  است، رسم شده. با توجه به فاصله‌های  $33 \text{ cm}$  نزدیک‌ترین

نقطه مکعب تا دیواره نزدیک‌تر در دو وضعیت داده‌شده و ضلع مکعب ( $a = 10 \text{ cm}$ )، می‌بینیم که فاصله مرکز مکعب

تا دیواره نزدیک‌تر در هر دو وضعیت برابر است با:  $d_1 = d_2 = 33 + \frac{a}{2} = 33 + \frac{10}{2} = 33 + 5 = 38 \text{ cm}$

فاصله مرکز مکعب در دو لحظه یادشده دو برابر دامنه نوسان آن است؛ پس:

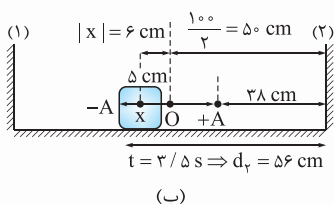
$$2A = 100 - 2 \times 38 = 100 - 76 = 24 \text{ cm} \Rightarrow A = 12 \text{ cm}$$

توجه کنید که با توجه به تقارن فاصله‌ها (برابری دو تا  $33 \text{ cm}$ )، نقطه تعادل (O) دقیقاً وسط دو دیواره و در فاصله  $50 \text{ cm}$  از آن‌ها می‌افتد که از این راه هم

$$A = \frac{100}{2} - 38 = 50 - 38 = 12 \text{ cm}$$

می‌توانیم به اندازه دامنه برسیم:

حالا نوسان مرکز مکعب را در نظر می‌گیریم و معادله نوسان آن حول نقطه O را می‌نویسیم:



$$x = A \cos \omega t \xrightarrow{(\omega=2\pi f)} x = A \cos(2\pi f t)$$

$$= 12 \times \cos\left[\left(2\pi \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{3}{5}\right] = 12 \cos \frac{14\pi}{5} = 12 \cos\left(4\pi + \frac{2\pi}{5}\right)$$

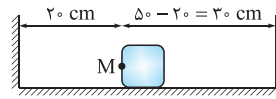
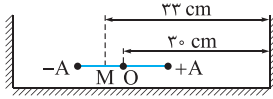
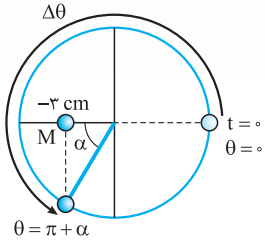
$$x = 12 \cos \frac{2\pi}{5} = 12 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = 12 \times \left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6 \text{ cm}$$





می‌بینیم که مطابق شکل (ب)، در لحظه  $t = 3/5$  s، مرکز مکعب در سمت چپ نقطه  $O$  و در فاصله  $6$  cm از آن قرار دارد ( $x = -6$  cm). چون فاصله  $O$  تا دیواره (۲)، برابر  $50$  cm است، فاصله مرکز مکعب تا دیواره (۲) در این لحظه مطابق شکل (ب) برابر است با:  $d_2 = 50 - (-6) = 50 + 6 = 56$  cm (در همین لحظه، فاصله مرکز مکعب از دیواره (۱)، برابر  $44$  cm است که خواسته نشده).

**۷۴۰- کوبه ۲** طول عادی فنر ( $20$  cm) مربوط به حالت تعادل است. بنابراین اگر نوسان نقطه  $M$  را در نظر بگیریم، وضعیت نقطه  $M$  در شکل صورت تست، نقطه تعادل آن را نشان می‌دهد. با توجه به شکل (الف)، فاصله  $M$  تا دیواره‌های عمودی سمت چپ و راست به ترتیب  $20$  cm و  $50 - 20 = 30$  cm است. پس، فاصله  $33$  cm داده شده بین  $M$  و دیواره عمودی سمت راست مطابق شکل (ب)، مربوط به زمانی است که نقطه  $M$  از مکان  $x = 30 - 33 = -3$  cm نسبت به نقطه تعادل ( $O$ ) می‌گذرد (یعنی  $3$  cm سمت چپ  $O$ ). چون از دومین عبور  $M$  از مکان  $x = -3$  cm سؤال شده، نوسانگر (و نقطه مرجع)، مطابق شکل (پ)، در ناحیه نوسانی سوم از اولین دوره نوسان هستند. می‌توان نوشت:



(پ) وضعیت نقطه مرجع در حالت بیان شده.

(ب) وضعیت نقطه  $M$  در مکان بیان شده؛ (دامنه نوسان  $OA = 6$  cm است.)

(الف) وضعیت نقطه  $M$  در نقطه تعادل نوسان.

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow[\substack{(\omega = 2\pi f) \\ (f = 4 \text{ Hz})}]{(\text{ناحیه سوم})} -3 = 6 \cos(2\pi \times 4 \times t) \Rightarrow \cos 8\pi t = -\frac{1}{2} \xrightarrow{(\cos \alpha = \frac{1}{2})} 8\pi t = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2t = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{6} \text{ s}$$

خودتان نشان دهید که گزینه نخست، لحظه اولین عبور  $M$  از مکان  $x = -3$  cm را نشان می‌دهد.

**۷۴۱- کوبه ۳** لحظه‌ای را که نوسانگر برای اولین بار و به صورت تندشونده از مکان  $x_1 = +3$  cm عبور می‌کند، با  $t_1$  و  $1/125$  s بعد از آن را با  $t_2$  نشان می‌دهیم.

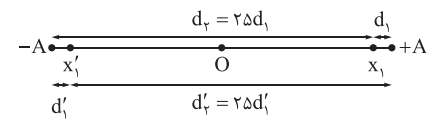
$$x_1 = 5 \cos 4\pi t_1 \Rightarrow 3 = 5 \cos 4\pi t_1 \Rightarrow \cos 4\pi t_1 = 3/5$$

$$x_2 = 5 \cos 4\pi t_2 = 5 \cos 4\pi(t_1 + 1/125) = 5 \cos(4\pi t_1 + \frac{\pi}{7})$$

$$\cos(\frac{\pi}{7} + \alpha) = -\sin \alpha \Rightarrow x_2 = -5 \sin 4\pi t_1$$

$$x_2 = -5 \times 3/5 = -3 \text{ cm} \Rightarrow |x_2| = 3 \text{ cm}$$

اگر کسینوس زاویه‌ای  $0/6$  باشد، سینوس آن زاویه  $0/8$  است؛ پس:



**۷۴۲- کوبه ۴** مطابق شکل (الف)، جسم در لحظه  $t_1$  یا در مکان  $x_1$  یا  $x_1'$  است. با توجه به این شکل:

(الف) ۲ وضعیت ممکن نوسانگر در لحظه  $t_1$ .

$$d_1 + d_2 = d_1' + d_2' = 2A \Rightarrow d_1 + 2\delta d_1 = 2A \Rightarrow 2\delta d_1 = 2A \Rightarrow A = \delta d_1 \Rightarrow x_1 = A - d_1 = \delta d_1 - d_1 = 12d_1$$

$$\Rightarrow d_1' + 2\delta d_1' = 2A \Rightarrow 2\delta d_1' = 2A \Rightarrow A = \delta d_1' \Rightarrow x_1' = -A + d_1' = -\delta d_1' + d_1' = 12d_1'$$

$$d_1 = d_1' = \frac{A}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{13}A, x_1' = -\frac{12}{13}A$$

بنابراین  $x_1$  و  $x_1'$  قرینه‌اند و در لحظه  $t_1$ :

$$x_1 = A \cos \omega t_1 = A \cos \theta_1 \xrightarrow{(|x_1| = |x_1'| = \frac{12A}{13})} |x_1| = |x_1'| = A |\cos \theta_1| \Rightarrow \frac{12}{13}A = A |\cos \theta_1| \Rightarrow |\cos \theta_1| = \frac{12}{13}$$

$$\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta_1 + (\frac{12}{13})^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta_1 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow |\sin \theta_1| = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \theta_1 = \pm \frac{5}{13} \quad (I)$$

چرا  $\sin \theta_1$  رو حساب کردیم؟! در زیر می‌بینید! حالا بریم سراغ لحظه  $t_2$  که نوسانگر در آن لحظه، در مکان  $x_2$  (یا قرینه‌اش  $x_2'$ ) است.

$$x_2 = A \cos \omega t_2 = A \cos \omega(t_1 + \frac{\Delta T}{4}) = A \cos(\omega t_1 + \frac{\Delta \omega T}{4}) \xrightarrow[\substack{(\omega t_1 = \theta_1) \\ (\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega T = 2\pi)}]{(\text{II})} x_2 = A \cos(\theta_1 + \frac{\Delta \times 2\pi}{4})$$

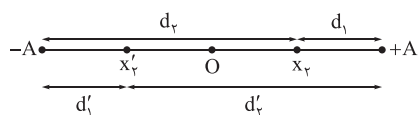
$$\Rightarrow x_2 = A \cos(\theta_1 + \frac{\Delta \pi}{4}) = A \cos(\theta_1 + \frac{\pi}{4} + 2\pi) \quad (II)$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha, \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\sin \alpha$$

در کتاب‌های ریاضی پایه‌های دهم و یازدهم می‌خوانید که:

$$x_2 = A \cos(\theta_1 + \frac{\pi}{4}) = A \times (-\sin \theta_1) = -A \sin \theta_1 \xrightarrow{(I)} x_2 = \pm \frac{5}{13}A$$

به کمک یادداشت ریاضی بالا و رابطه (II):



در شکل (ب)، مکان نقطه‌های  $x_r = \frac{\Delta}{13} A$  و  $x_r' = -\frac{\Delta}{13} A$  رسم شده است.

(ب) وضعیت ممکن نوسانگر در لحظه  $t_r$ .

$$d_r = d_r' = |A - x_r| = A - \frac{\Delta}{13} A = \frac{12}{13} A$$

با توجه به شکل (ب):

$$d_r = d_r' = A + x_r = A + \frac{\Delta}{13} A = \frac{14}{13} A$$

$$\frac{d_r}{d_r'} = \frac{\frac{12}{13} A}{\frac{14}{13} A} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

نسبت خواسته شده:

$$x_r = A \cos \omega t_r \Rightarrow \frac{6}{7} = \Delta \cos \omega t_r \Rightarrow \cos \omega t_r = \frac{6}{7} \quad (I)$$

با توجه به مکان نوسانگر در لحظه  $t_r$ : **گزینه ۴** - ۷۴۳

$$\sin^2 \omega t_r + \cos^2 \omega t_r = 1 \xrightarrow{(I)} \sin^2 \omega t_r + \left(\frac{6}{7}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \omega t_r = 1 - \frac{36}{49} = \frac{13}{49} \Rightarrow \sin \omega t_r = \pm \frac{\sqrt{13}}{7}$$

بنابراین:

$$x_r = A \cos \omega t_r = \Delta \cos \left[ \omega \times \left( \tau t_r + \frac{\Delta T}{\Delta} \right) \right] = \Delta \cos \left( \tau \omega t_r + \frac{\Delta \omega T}{\Delta} \right) \xrightarrow{\left( \omega = \frac{2\pi}{T} \right)} \xrightarrow{\left( \Rightarrow \omega T = 2\pi \right)} x_r = \Delta \cos \left( \tau \omega t_r + \frac{\Delta \times 2\pi}{\Delta} \right)$$

در لحظه  $t_r$ :

$$\Rightarrow x_r = \Delta \cos \left( \tau \omega t_r + \frac{\Delta \pi}{\Delta} \right) = \Delta \cos \left( \tau \omega t_r + \pi + 2\pi \right) = \Delta \cos \left( \tau \omega t_r + \pi \right)$$

### یادداشت ریاضی

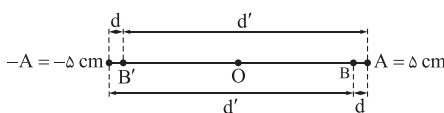
$$\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

از کتاب‌های ریاضی پایه‌های دهم و یازدهم می‌دانید که:

$$x_r = \Delta \cos \left( \frac{\pi}{2} + \tau \omega t_r \right) = \Delta \times (-\sin \tau \omega t_r) = -\Delta \sin \tau \omega t_r = -\Delta \times (2 \sin \omega t_r \cos \omega t_r) = -10 \sin \omega t_r \cos \omega t_r$$

بنابراین:

$$\Rightarrow x_r = -10 \times \left( \pm \frac{\sqrt{13}}{7} \right) \times \left( \frac{6}{7} \right) = \pm \frac{24}{7} \text{ cm} = \pm 4 / 7 \text{ cm} = \pm 48 \text{ mm}$$



اکنون به شکل مقابل توجه کنید. در لحظه  $t_r$ ، چه متحرک در نقطه B با مکان  $x_r = 48 \text{ mm}$  باشد چه در نقطه B' با مکان  $x_r = -48 \text{ mm}$ ، فاصله‌اش تا نقطه بازگشت نزدیک‌تر (d) برابر است با:

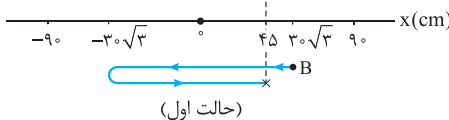
$$d = A - |x| = A - |x_r| \xrightarrow{(A=5 \text{ cm}=\Delta)} d = 5 - |\pm 48| = 5 - 48 = -43 \text{ mm}$$

و فاصله‌اش تا نقطه بازگشت دورتر (d') برابر  $2A - d$  است. زیرا:

$$d + d' = 2A \Rightarrow d' = 2A - d = 2 \times 5 - (-43) = 10 + 43 = 53 \text{ mm}$$

**گزینه ۴** - ۷۴۴ دو حالت ممکن است رخ دهد: **حالت اول:** نوسانگر A از سمت راست و نوسانگر B از سمت چپ به مکان  $x = 45 \text{ cm}$  برسند. در این حالت

با توجه به نمودار مقابل و با فرض این که دو نوسانگر در لحظه  $t_1$  از کنار یکدیگر عبور کنند، داریم:



$$x_A = 90 \cos \omega_A t \Rightarrow 45 = 90 \cos \omega_A t_1 \Rightarrow \omega_A t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{3 \omega_A} \quad (I)$$

$$x_B = 30\sqrt{3} \cos \omega_B t \Rightarrow 45 = 30\sqrt{3} \cos \omega_B t_1 \Rightarrow \cos \omega_B t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

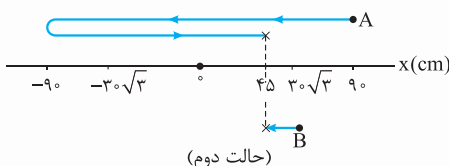
اولین جواب معادله صفحه قبل  $\omega_B t_1 = \frac{\pi}{6}$  است که اولین لحظه عبور نوسانگر B از مکان  $x = 45 \text{ m}$  را نشان می‌دهد. دومین جواب معادله بالا  $\omega_B t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

است که دومین لحظه عبور نوسانگر B از مکان  $x = 45 \text{ m}$  را مشخص می‌کند:

$$\omega_B t_1 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{11\pi}{6 \omega_B} \quad (II)$$

$$\frac{\pi}{3 \omega_A} = \frac{11\pi}{6 \omega_B} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{11}{2} \xrightarrow{\left( \omega = \frac{2\pi}{T} \right)} \frac{T_A}{T_B} = \frac{11}{2}$$

از مقایسه (I) و (II) نتیجه می‌گیریم:



**حالت دوم:** نوسانگر A از سمت چپ و نوسانگر B از سمت راست در مکان  $x = 45 \text{ cm}$  و در لحظه  $t_r$  از کنار یکدیگر عبور کنند، در این حالت با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:

$$x_A = 90 \cos \omega_A t \Rightarrow 45 = 90 \cos \omega_A t_r \Rightarrow \cos \omega_A t_r = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_A t_r = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega_A t_r = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t_r = \frac{5\pi}{3 \omega_A} \quad (III)$$

$$x_B = 3 \cdot \sqrt{3} \cos \omega_B t \Rightarrow 4\delta = 3 \cdot \sqrt{3} \cos \omega_B t_1 \Rightarrow \cos \omega_B t_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \omega_B t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6\omega_B} \quad (IV)$$

$$(III), (IV): \frac{\Delta\pi}{3\omega_A} = \frac{\pi}{6\omega_B} \Rightarrow \frac{\omega_B}{\omega_A} = 0/1 \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 0/1$$

**۷۴۵- گزینه ۲** راه حل اول: نوسانگر در مدت یک دوره ۲ بار از هر نقطه عبور می کند. برای تعیین لحظه های عبور نوسانگر از مکان  $x = 0/02 \text{ m}$  کافی است این مکان را در معادله حرکت نوسانگر قرار دهیم:

$$0/02 = 0/04 \cos \frac{\pi}{12} t \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{12} t = \frac{\pi}{3}$$

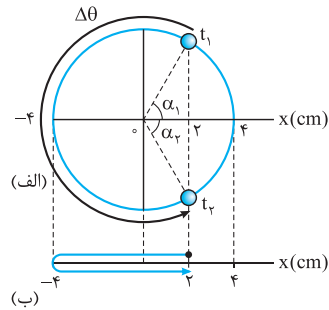
$$\frac{\pi}{12} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

$$\frac{\pi}{12} t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{12} t_2 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t_2 = 20 \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 4 = 16 \text{ s}$$

**راه حل دوم (به کارگیری دایره مرجع):** وقتی از دایره مرجع استفاده می کنی باید جایگاه نقطه مرجع رو در ابتدا و انتهای بازه زمانی مطرح شده تعیین کنی؛ بهر حال از تناسب «ز-ز» استفاده کنی! «ز-ز» مفقوف «زن ذلیل» نیست! مفقوف «زاویه-زمانه»!



$$x_1 = A \cos \alpha_1 \Rightarrow 2 = 4 \cos \alpha_1 \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \xrightarrow{(x_2 = x_1)} \alpha_2 = \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

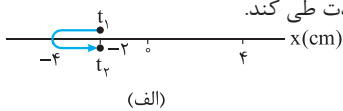
$$\Delta\theta = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

با این حساب زاویه ای که نقطه مرجع در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  طی می کند، برابر است با:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{12} \Delta t \Rightarrow \Delta t = 16 \text{ s}$$

$\Delta\theta$  را پیدا کردیم؛  $\Delta t$  را می خواهیم:

**۷۴۶- گزینه ۲** راه حل اول: گام اول: لحظه اولین عبور نوسانگر از مکان  $x = -2 \text{ cm}$  را با  $t_1$  و لحظه دومین عبور نوسانگر از همین نقطه را با  $t_2$  نشان می دهیم. بازه زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$  زمانی حداقل است که نوسانگر مطابق شکل (الف) کمترین مسافت را در این مدت طی کند.



$$x = 0/04 \cos \frac{\pi}{12} t \xrightarrow{(x = -0/02 \text{ m})} -0/02 = 0/04 \cos \frac{\pi}{12} t \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} t = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{12} t_1 = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{12} t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = 8 \text{ s}$$

از حل اولین جواب معادله بالا  $t_1$  به دست می آید:

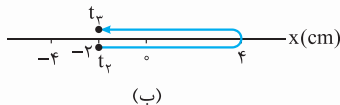
$$\frac{\pi}{12} t_2 = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{12} t_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_2 = 16 \text{ s}$$

از حل دومین جواب معادله بالا  $t_2$  به دست می آید:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 16 - 8 = 8 \text{ s}$$

بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  برابر است با:

**گام دوم:** حالت دیگری هم ممکن است پیش بیاید. نوسانگر مطابق شکل (ب) در جهت محور مکان جابه جا شود و پس از تغییر جهت در مکان  $x = +4 \text{ cm}$  در خلاف جهت محور  $x$  جابه جا شود. در این صورت، بازه زمانی دو عبور متوالی از مکان  $x = -2 \text{ cm}$  به حداکثر مقدار خود می رسد.  $t_2$  سومین لحظه ای است که  $x = -2 \text{ cm}$  می شود. برای محاسبه آن به صورت زیر عمل می کنیم:



$$x = 0/04 \cos \frac{\pi}{12} t \Rightarrow -0/02 = 0/04 \cos \frac{\pi}{12} t \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} t = -\frac{1}{2}$$

جواب معادله بالا در حالت کلی به صورت  $(2n-1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$  است که به ازای  $n=1$ ، اولین و دومین لحظه عبور نوسانگر از مکان  $x = -2 \text{ cm}$  و به ازای  $n=2$ ، سومین و چهارمین لحظه عبور نوسانگر از همین مکان به دست می آید.

$$\frac{\pi}{12} t_2 = 3\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{12} t_2 = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow t_2 = 32 \text{ s}$$

سومین و چهارمین لحظه عبور نوسانگر از همین مکان به دست می آید.

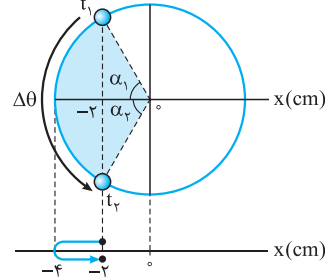
$$\Delta t' = t_2 - t_1 = 32 - 16 = 16 \text{ s}$$

بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  برابر است با:

با توجه به شکل‌های (الف) و (ب) نوسانگر در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  یک نوسان کامل انجام می‌دهد. پس این بازه زمانی یک دوره طول می‌کشد.

$$\omega = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow T = 24 \text{ s} \Rightarrow \Delta t' = T - \Delta t = 24 - 8 = 16 \text{ s}$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{16}{8} = 2$$



گام سوم: براساس محاسبات انجام‌شده در گام‌های قبلی داریم:  
 راه‌حل دوم (استفاده از دایره مرجع): گام اول: وقتی نوسانگر مطابق شکل (الف) جابه‌جا شود، نقطه مرجع مطابق شکل (پ) حرکت می‌کند. براساس شکل، داریم:

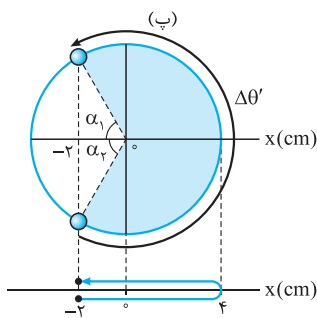
$$x_1 = -A \cos \alpha_1 \Rightarrow -2 = -4 \cos \alpha_1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \xrightarrow{(x_2=x_1)} \alpha_2 = \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

گام دوم: وقتی نوسانگر مطابق شکل (ب) جابه‌جا می‌شود، نقطه مرجع مطابق شکل (ت) دوران می‌کند. با توجه به شکل می‌نویسیم:

$$\Delta\theta' = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$



(ت)

گام سوم: زاویه طی شده توسط نقطه مرجع در شکل (ت) دو برابر زاویه طی شده در شکل (پ) است. زمان جابه‌جایی آن هم همین‌طور!

$$\Delta\theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta\theta'}{\Delta\theta} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\frac{4\pi}{3}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 2$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \times 0 = 0 \Rightarrow 1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

۷۴۷- **گام ۱** راه‌حل اول: نوسانگر در مبدأ زمان در مکان  $x = +10 \text{ cm}$  قرار دارد:

حالا اولین لحظه عبور نوسانگر از مکان  $x = -5\sqrt{3} \text{ cm}$  را حساب می‌کنیم:

$$x = -5\sqrt{3} \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow -5\sqrt{3} \times 10^{-2} = 10^{-1} \cos \frac{\pi}{4} t \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} t = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{4} t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{10}{3} \text{ s}$$

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{10}{3} - 0 = \frac{10}{3} \text{ s}$$

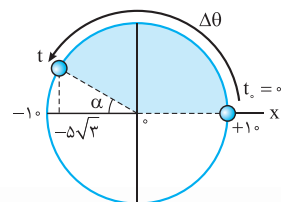
$$A = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

$$x = -A \cos \alpha \Rightarrow -5\sqrt{3} = -10 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

راه‌حل دوم: دامنه حرکت نوسانگر برابر است با:

در مکان  $x = -5\sqrt{3} \text{ cm}$ :

با توجه به شکل، زاویه طی شده توسط نقطه مرجع برابر است با:



$$\Delta\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{10}{3} \text{ s}$$

$$x = A \cos \omega t$$

۷۴۸- **گام ۲** راه‌حل اول: با استفاده از معادله مکان - زمان نوسانگر می‌نویسیم:

$$x = A \cos \frac{2\pi}{T} t \xrightarrow{(t=\frac{T}{6})} x = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{6} \right) = A \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} A$$

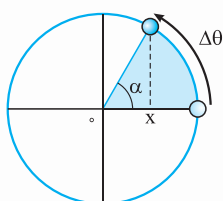
راه‌حل دوم (دایره مرجع): مطابق شکل مقابل، نقطه مرجع در مدت  $\Delta t = \frac{T}{6}$ ، زاویه  $\Delta\theta$  را روی دایره مرجع طی می‌کند:

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$x = A \cos \alpha = A \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} A$$

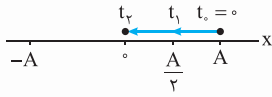
زاویه  $\alpha$  برابر  $\Delta\theta$  است؛ پس:





**نیزبایش** برای محاسبهٔ سریع  $\Delta\theta$ ، از مورد ۱ درس نامۀ ۲ استفاده کن!  $\theta$  در مدت  $T$  به اندازهٔ  $2\pi \text{ rad}$  و در مدت  $\frac{T}{6}$  به اندازهٔ  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  تغییر می‌کند.

**۷۴۹- کویزه ۱** راه‌حل اول: لحظه‌هایی را که نوسانگر برای اولین بار از مکان‌های  $x_1 = \frac{A}{3}$  و  $x_2 = 0$  عبور می‌کند، به ترتیب با  $t_1$  و  $t_2$  نشان می‌دهیم.

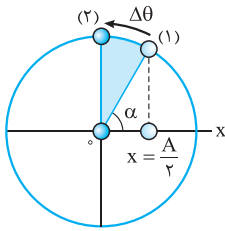


$$x_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \frac{A}{3} = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

$$x_2 = A \cos \omega t_2 \Rightarrow 0 = A \cos \omega t_2 \Rightarrow \cos \omega t_2 = 0 \Rightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{4}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = \frac{3T - 2T}{12} = \frac{T}{12}$$

ما بازهٔ زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  را می‌خواهیم:



**راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع):** دایرهٔ مرجع رو بکش و بین نقطهٔ مرجع چه زاویه‌ای رو طی کرده. در مکان  $x = \frac{A}{3}$ ، نقطهٔ مرجع زاویهٔ  $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$  رو با محور  $x$  می‌سازه:

$$x = A \cos \alpha \Rightarrow \frac{A}{3} = A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

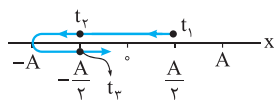
نقطهٔ مرجع در جابه‌جایی از  $x = \frac{A}{3}$  تا  $x = 0$  زاویهٔ  $\Delta\theta$  رو طی می‌کند:

$$2\pi \equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{6} \equiv \frac{T}{12}$$

نقطهٔ مرجع زاویه  $2\pi \text{ rad}$  رو در مدت  $T$  طی می‌کند؛ زاویهٔ  $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$  رو در چه مدت؟

$$\Delta\theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{12}$$

این جوری هم می‌توانستید به جواب برسید:



**۷۵۰- کویزه ۲** راه‌حل اول: فرض کنید ذره از مکان  $+A$  شروع به حرکت می‌کند و در لحظهٔ  $t_1$  برای اولین بار از مکان

$x_1 = \frac{A}{3}$  و در لحظه‌های  $t_2$  و  $t_3$  برای اولین و دومین بار از مکان  $x_2 = -\frac{A}{3}$  عبور می‌کند.

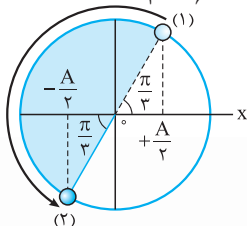
$$x_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \frac{A}{3} = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

$$x_2 = A \cos \omega t_2 \Rightarrow -\frac{A}{3} = A \cos \omega t_2 \Rightarrow \cos \omega t_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \omega t_2 = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{3}$$

$t_3$  اولین لحظه‌ای است که ذره از مکان  $x = -\frac{A}{3}$  عبور می‌کند. در این لحظه سرعت ذره منفی است. پس  $t_3$  را بی‌جهت حساب کردیم! (ما حساب کردیم که به شما بگیم حساب نکنید!)  $t_3$  دومین لحظه‌ای است که ذره از مکان  $x = -\frac{A}{3}$  عبور می‌کند. در این لحظه سرعت ذره مثبت است:

$$x = A \cos \omega t_3 \Rightarrow -\frac{A}{3} = A \cos \omega t_3 \Rightarrow \cos \omega t_3 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \omega t_3 = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_3 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_3 = \frac{2T}{3}$$

$$\Delta t = t_3 - t_1 = \frac{2T}{3} - \frac{T}{6} = \frac{4T - T}{6} = \frac{3T}{6} = \frac{T}{2}$$



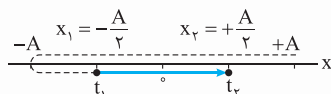
**راه‌حل دوم (دایرهٔ مرجع):**  $\frac{A}{3}$  و  $-\frac{A}{3}$  ما رو یاد  $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$  و دارودسته‌اش می‌اندازه!

ابتدا ذره در مکان مثبت و سرعت آن منفی است؛ پس نقطهٔ مرجع در ناحیهٔ اول و در موقعیت (۱) قرار دارد. نقطهٔ مرجع پس از این که نیمی از دایرهٔ مرجع را طی می‌کند، در موقعیت (۲) قرار می‌گیرد (مکان ذره، منفی و سرعت آن مثبت می‌شود). نقطهٔ مرجع کل دایره را در مدت  $T$  طی می‌کند؛ نصف دایره را در چه مدت؟

$$2\pi \equiv T \Rightarrow \pi \equiv \frac{T}{2}$$

**۷۵۱- کویزه ۱** راه‌حل اول: باز هم فرض می‌کنیم ذره از مکان  $x = +A$  شروع به حرکت کرده است. اگر ذره بخواهد بدون تغییر جهت از مکان  $x_1 = -\frac{A}{3}$

به مکان  $x_2 = +\frac{A}{3}$  منتقل شود، باید مطابق شکل زیر (مسیر توپر) جابه‌جا شود.  $t_1$  دومین لحظه‌ای است که ذره از مکان  $x_1 = -\frac{A}{3}$  و  $t_2$  دومین لحظه‌ای است که ذره از مکان  $x_2 = +\frac{A}{3}$  عبور می‌کند. بنابراین، برای تعیین  $t_1$  و  $t_2$  دومین پاسخ قابل قبول برای آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.



$$x_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow -\frac{A}{3} = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = -\frac{1}{3}$$



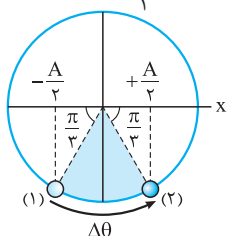
اولین پاسخ معادله بالا  $\omega t_1 = \pi - \frac{\pi}{3}$  و دومین پاسخ آن  $\omega t_1 = \pi + \frac{\pi}{3}$  است که دومی را می‌پذیریم:

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{2T}{3}$$

اولین پاسخ معادله بالا  $\omega t_2 = \frac{\pi}{3}$  و دومین پاسخ آن  $\omega t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3}$  است که دومی را قبول می‌کنیم:

$$\frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{6}$$

شکل روبه‌رو نحوه حرکت نقطه مرجع را در جابه‌جایی از  $x_1 = -\frac{A}{2}$  تا  $x_2 = \frac{A}{2}$  نشان می‌دهد. براساس شکل:



$$\Delta\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \times \frac{0}{5} \Rightarrow T = 3 \text{ s} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3} \text{ Hz}$$

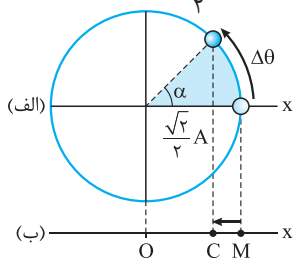
**۷۵۲- نکته ۲** راه‌حل اول: نوسانگر فاصله  $CM$  و  $MC$  را در یک مدت طی می‌کند. پس راحت‌تریم زمان جابه‌جایی جسم از  $M$  تا  $C$  را حساب کنیم. فرض می‌کنیم جسم از  $M$  شروع به حرکت می‌کند و در لحظه  $t$  از نقطه  $C$  عبور می‌کند.

$$x = A \cos \omega t$$

$$x_C = \frac{\sqrt{2}}{2} A \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} A = A \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{T}{8}$$

راه‌حل دوم (دایره مرجع): با دیدن  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  یاد  $\frac{\pi}{4}$  rad نمی‌افتی؟!  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$  rad

شکل روبه‌رو نحوه حرکت جسم روی محور مکان (شکل ب) و حرکت نقطه مرجع روی دایره مرجع (شکل الف) را نشان می‌دهد. با توجه به شکل:



$$\Delta\theta = \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$2\pi \equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{4} \equiv \frac{T}{8}$$

زمان لازم برای این که  $\theta$  به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  rad تغییر کند،  $\frac{T}{8}$  است:

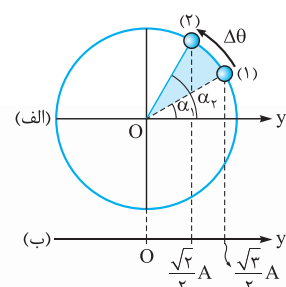
**۷۵۳- نکته ۱** راه‌حل اول: زمان جابه‌جایی از  $y_1$  تا  $y_2$  (بدون تغییر جهت) با زمان جابه‌جایی از  $y_2$  تا  $y_1$  (بدون تغییر جهت) برابر است. فرض می‌کنیم ذره

از مبدأ زمان از  $y = +A$  شروع به حرکت کند و در لحظه‌های  $t_1$  و  $t_2$  به ترتیب از مکان‌های  $y_1 = +\frac{\sqrt{3}}{2}A$  و  $y_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}A$  عبور کند. در این صورت:

$$y_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} A = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}$$

$$y_2 = A \cos \omega t_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} A = A \cos \omega t_2 \Rightarrow \cos \omega t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{8}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{8} - \frac{T}{12} = \frac{T}{24}$$



راه‌حل دوم (دایره مرجع): با دیدن  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  یاد  $\frac{\pi}{6}$  rad و با دیدن  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  یاد  $\frac{\pi}{4}$  rad می‌افتیم!

$$y_1 = A \cos \alpha_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} A = A \cos \alpha_1 \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$y_2 = A \cos \alpha_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} A = A \cos \alpha_2 \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

پس زاویه طی شده توسط نقطه مرجع در مدت جابه‌جایی از مکان  $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A$  به  $y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}A$  برابر است با:

$$\Delta\theta = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi - \pi}{12} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

$$2\pi \equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{12} \equiv \frac{T}{24}$$

$2\pi$  rad در مدت  $T$  و  $\frac{\pi}{12}$  rad در مدت  $\frac{T}{24}$  طی می‌کند:



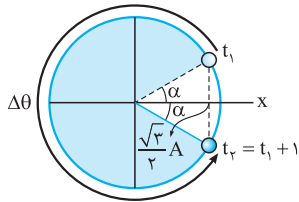
**۷۵۴- گزینه ۱** راه حل اول: با این فرض که نوسانگر در مبدأ زمان از مکان  $x = +A$  به حرکت درآمده باشد، لحظه‌های عبور متوالی نوسانگر از مکان  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$

را به دست می‌آوریم:  
 $x = A \cos \omega t \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A = A \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

اولین جواب معادله بالا اولین لحظه عبور متحرک از مکان  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$  را نشان می‌دهد:  
 $\omega t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{12}$

دومین جواب معادله بالا دومین لحظه عبور متحرک از مکان  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$  را نشان می‌دهد:  
 $\omega t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{11T}{12}$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 1s \Rightarrow \frac{11T}{12} - \frac{T}{12} = 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{6} = 1 \Rightarrow T = \frac{6}{\Delta} = 1/2 s$



**راه حل دوم (دایره مرجع):** نوسانگر در لحظه  $t_1$  در مکان مثبت و در حال نزدیک شدن به مبدأ است. پس نقطه مرجع در این لحظه در ناحیه اول قرار دارد و برای رسیدن نوسانگر به مکان اولیه‌اش، باید مسیر طولانی نشان داده شده در شکل روبه‌رو طی شود:

$x = A \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A = A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow 2\pi - 2\alpha = \frac{2\pi}{T} (t_2 - t_1) \Rightarrow 2\pi - \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} \times 1 \Rightarrow T = 1/2 s$

البته می‌توانستید از هم‌ارزی  $2\pi \equiv T$  (تناسب زمان - زاویه) استفاده کنید.

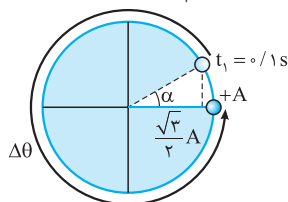
**۷۵۵- گزینه ۲** راه حل اول: در لحظه  $t = 0/1s$ ،  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$  می‌شود؛ پس:

$x = A \cos \omega t \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A = A \cos \omega \times 0/1 \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{T} \times 0/1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0/1 \times \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 1/2 s$

نوسانگر پس از  $1/2s$  به مکان اولیه‌اش برمی‌گردد؛ بنابراین  $1/1s$  پس از لحظه  $t = 0/1s$  به جای اولیه‌اش برمی‌گردد.

**راه حل دوم (دایره مرجع):** در لحظه  $t_1 = 0/1s$  که نوسانگر از مکان  $x = +\frac{\sqrt{3}}{2}A$  عبور می‌کند، نقطه مرجع زاویه  $\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$  را با محور مکان می‌سازد.

$x = A \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A = A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$



با توجه به شکل روبه‌رو، نقطه مرجع باید زاویه  $\Delta \theta = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$  را طی کند تا در مکان  $x = +A$  قرار بگیرد.

$\Delta \theta = 2\pi - \alpha \Rightarrow 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

نقطه مرجع زاویه  $\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$  را در مدت  $0/1s$  طی می‌کند، پس زاویه  $\Delta \theta = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$  را در مدت  $1/1s$  (یعنی  $11 \times 0/1s$ ) طی می‌کند.

**۷۵۶- گزینه ۳** راه حل اول: گام اول: فرض می‌کنیم نوسانگر از نقطه N شروع به حرکت کرده و در لحظه  $t_1$  برای اولین بار و در لحظه  $t_2$  برای دومین بار از نقطه C عبور می‌کند.

$x_C = A \cos \omega t \Rightarrow \frac{1}{2}A = A \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{1}{2}$

اولین جواب معادله بالا،  $t_1$  و دومین جواب این معادله  $t_2$  را مشخص می‌کند.

$\omega t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$

$\omega t_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{6}$

**گام دوم:** زمان جابه‌جایی نوسانگر از نقطه C تا N در صورتی حداکثر است که نوسانگر مطابق شکل (الف) جابه‌جا شده باشد و در صورتی حداقل است که نوسانگر مطابق شکل (ب) حرکت کرده باشد. با توجه به این که نوسانگر پس از مدت T یک نوسان کامل انجام می‌دهد و به مکان اولیه‌اش (نقطه N) می‌رسد،

زمان جابه‌جایی بین دو نقطه C و N در شکل (الف) برابر است با:

$\Delta t_1 = t_N - t_C = T - t_1 = T - \frac{T}{6} = \frac{5T}{6}$

زمان جابه‌جایی بین دو نقطه C و N در شکل (ب) برابر است با:

$\Delta t_2 = t_N - t_C = T - t_2 = T - \frac{5T}{6} = \frac{T}{6}$

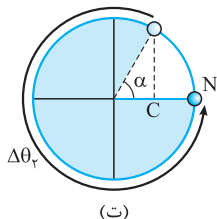
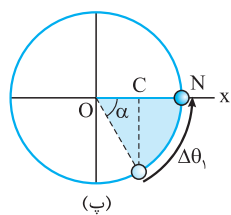
زمان جابه‌جایی بین دو نقطه C و N در شکل (ب) برابر است با:

$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\frac{5T}{6}}{\frac{T}{6}} \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 5 \Rightarrow \Delta t_1 = 5 \text{ s}$

بنابراین:



راه حل دوم (دایره مرجع): اگر نوسانگر بدون تغییر جهت از C به N جابه‌جا شود، نقطه مرجع مطابق شکل (پ) و اگر نوسانگر پس از یک بار تغییر جهت از C تا N جابه‌جا شود، نقطه مرجع مطابق شکل (ت) دوران می‌کند. وقتی جسم از نقطه C رد می‌شود، نقطه مرجع زاویه  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  rad را با محور تقارن می‌سازد.



$$x_C = A \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{2}A = A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Delta \theta_1 = \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

بنابراین، زاویه طی شده توسط نقطه مرجع در شکل (پ) برابر است با:

$$\Delta \theta_2 = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

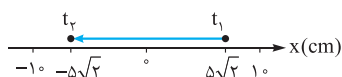
و در شکل (ت):

$\Delta \theta_1$ ،  $\Delta \theta_2$ ،  $\Delta \theta_1$  است، پس زمان جابه‌جایی نوسانگر در شکل (ت) برابر زمان جابه‌جایی نوسانگر در شکل

$$\Delta t_2 = \Delta \theta_2 = \Delta \theta_1 = 5 \times 2 = 10 \text{ s}$$

(پ) است:

۷۵۷- **گزینه ۳** راه حل اول: فرض کنید متحرک از مکان  $x = +1.0 \text{ cm}$  شروع به حرکت کرده و در لحظه  $t_1$  برای اولین بار از مکان  $x_1 = +5\sqrt{2} \text{ cm}$  و در لحظه  $t_2$  برای اولین بار از مکان  $x_2 = -5\sqrt{2} \text{ cm}$  عبور می‌کند.



$$x_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow 5\sqrt{2} = 1.0 \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad (\text{I})$$

در این صورت:

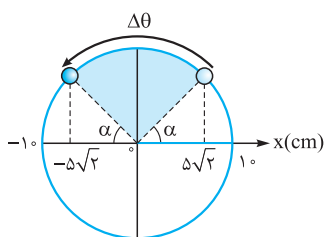
$$x_2 = A \cos \omega t_2 \Rightarrow -5\sqrt{2} = 1.0 \cos \omega t_2 \Rightarrow \cos \omega t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega t_2 = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \quad (\text{II})$$

از مقایسه (I) و (II) نتیجه می‌گیریم:

$$\omega t_2 - \omega t_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega(t_2 - t_1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega \times 2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow{(A=1.0 \text{ cm} = 1 \text{ m})} x = 1 \cos \frac{\pi}{4} t$$

راه حل دوم (دایره مرجع): با توجه به شکل روبه‌رو و اطلاعات عددی تست، داریم:

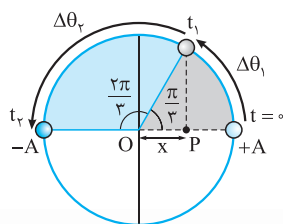


$$x = A \cos \alpha \Rightarrow +5\sqrt{2} = 1.0 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\Delta \theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \omega \times 2 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

$$x = A \cos \omega t = 1 \cos \frac{\pi}{4} t$$



۷۵۸- **گزینه ۳** اول به قطر افقی شکل روبه‌رو دقت کنید. گفته شده فاصله نقطه P از یک نقطه بازگشت (مثلاً

$-A$ ) سه برابر فاصله‌اش از نقطه بازگشت دیگر (مثلاً  $+A$ ) است. با توجه به شکل، فاصله نقطه P از نقطه  $-A$  برابر  $A+x$  و از نقطه  $+A$  برابر  $A-x$  است. بنابراین:

$$A+x = 3(A-x) \Rightarrow A+x = 3A-3x \Rightarrow 4x = 2A \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

حالا سراغ معادله نوسان می‌رویم:

$$x = A \cos \theta \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \xrightarrow{(\theta < \frac{\pi}{2} \text{ rad})} \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

پس با توجه به شکل، نوسانگر در مدت  $t_1$  از  $+A$  تا P می‌رود و نقطه مرجع روی دایره از زاویه صفر به  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  می‌رسد. در مدت  $t_2$  نوسانگر از P به نقطه بازگشت  $-A$  می‌رود و نقطه مرجع روی دایره از  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  به  $\pi \text{ rad}$  می‌رسد.

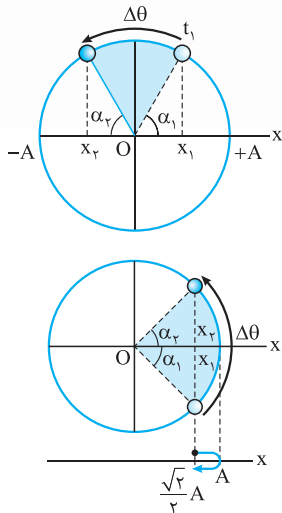
$$\Delta \theta = \omega t \xrightarrow{(\omega: \text{ ثابت})} \frac{\Delta \theta_2}{\Delta \theta_1} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} - 0} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2$$



$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

نقطه مرجع در مدت  $\Delta t = \frac{T}{6}$  به اندازه  $\Delta\theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$  دوران می‌کند: **گزینه ۲** - ۷۵۹

برای این که جابه‌جایی نوسانگر در مدت فوق بیشینه باشد، باید سرعت متوسط آن در این مدت بیشینه باشد و این اتفاق در صورتی می‌افتد که نوسانگر حول مرکز نوسان (که سرعتش بیشینه است) جابه‌جا شود، طوری که نیمی از زمان  $\Delta t$  را در مکان‌های منفی و نیم دیگر را در مکان‌های مثبت جابه‌جا شود. (چرا؟) در این صورت براساس شکل زیر، داریم:



$$\alpha_2 = \alpha_1 = \frac{\pi - \Delta\theta}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$x_1 = A \cos \alpha_1 = A \cos \frac{\pi}{3} = A \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} A$$

$$x_2 = -A \cos \alpha_2 = -A \cos \frac{\pi}{3} = -A \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} A$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A = -A \Rightarrow |\Delta x| = A$$

به روش مشابه با تست قبلی، معلوم می‌شود زمانی مسافت طی شده توسط نوسانگر کمینه است **گزینه ۲** - ۷۶۰

که نوسانگر حول یک انتهای مسیر (که سرعت متوسط در آن کمینه است) جابه‌جا شود؛ به گونه‌ای که نیمی از زمان را با سرعت مثبت و نیم دیگر را با سرعت منفی طی کند. (چرا؟) با توجه به این که نقطه مرجع در مدت  $\Delta t = \frac{T}{4}$  به اندازه  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$  دوران می‌کند، داریم:

$$\alpha_2 = \alpha_1 = \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$x_1 = x_2 = A \cos \alpha_1 = A \cos \frac{\pi}{4} = A \times \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{(\sqrt{2}=1/4)} x_2 = x_1 = 0 / \sqrt{2} A$$

نوسانگر فاصله  $\frac{\sqrt{2}}{2} A$  تا A را طی و همین مسیر را برمی‌گردد. بنابراین، مسافت طی شده توسط نوسانگر برابر است با:  $I = 2(A - 0 / \sqrt{2} A) = 2 \times 0 / \sqrt{2} A = 0 / \sqrt{2} A$  **گزینه ۲** - ۷۶۱

آیا این جمله را به یاد دارید؟ نوسانگر در هر دوره، مسافتی به اندازه  $4A$  را طی می‌کند. (اگر به یاد ندارید، به نتیجه ۳ درس‌نامه ۲ مراجعه کنید تا یادتان بیاید!)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 4 \text{ s}$$

$$I = 4A = 4 \times 2 = 8 \text{ m}$$

خب؛ دوره حرکت نوسانگر هم ۴ s است؛ مسافت طی شده توسط نوسانگر در این مدت برابر است با:

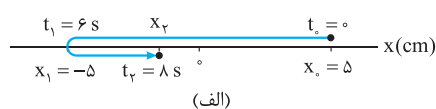
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

**گزینه ۳** - ۷۶۲ راه‌حل اول؛ معادله حرکت نوسانگر را تعیین می‌کنیم:

$$A = 5 \text{ cm} \Rightarrow x(\text{cm}) = A \cos \omega t = 5 \cos \frac{\pi}{2} t$$

$$x_2 = 5 \cos \frac{\pi}{2} \times 8 = 5 \cos(\pi + \frac{\pi}{2}) = -5 \cos \frac{\pi}{2} = -5 \times \frac{1}{2} = -2 / 5 \text{ cm}$$

مکان نوسانگر در لحظه  $t_2 = 8 \text{ s}$  برابر است با:



با توجه به شکل روبه‌رو مسافت طی شده توسط نوسانگر در بازه زمانی  $t_1 = 6 \text{ s}$  تا  $t_2 = 8 \text{ s}$  برابر است با:

$$I = |x_1 - x_2| + (x_2 - x_1) = |-5 - (-2/5)| + [-2/5 - (-5)] = 10 + 2/5 = 12 / 5 \text{ cm}$$

راه‌حل دوم (دایره مرجع)؛ زاویه‌ای که نقطه مرجع در بازه زمانی  $t_1 = 6 \text{ s}$  تا  $t_2 = 8 \text{ s}$  طی می‌کند برابر است با:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = \frac{2\pi}{4} \times 2 = \frac{2\pi}{2} \text{ rad}$$

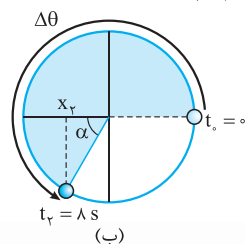
$$\Delta\theta = \pi + \alpha \Rightarrow \frac{2\pi}{2} = \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

شکل (ب) نحوه حرکت نقطه مرجع را نشان می‌دهد:

$$x_2 = -A \cos \alpha = -5 \cos \frac{\pi}{2} = -5 \times \frac{1}{2} = -2 / 5 \text{ cm}$$

مکان جسم در لحظه  $t_2 = 8 \text{ s}$ :

بقیه‌اش مثل راه‌حل اوله!



$$x = A \cos \omega t = 0 / 44 \cos \omega t \Rightarrow A = 0 / 44 \text{ m} = 44 \text{ cm}$$

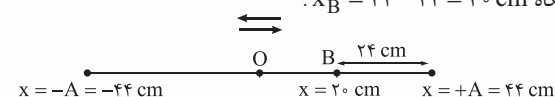
**گزینه ۱** - ۷۶۳ گام اول:

گام دوم؛ مطابق شکل، نوسانگر حرکت خود را از مکان  $x = A = 44 \text{ cm}$  آغاز می‌کند و در هر ناحیه از نوسان، مسافتی به اندازه دامنه ( $44 \text{ cm}$ ) را طی می‌کند. صحبت از مسافت ۲ متر شده و:

$$\frac{2}{44} = \frac{20}{44} = \frac{24}{44} \text{ (n ناحیه طی شده)}$$

پس زمانی که متحرک مسافت ۲ m را طی می‌کند، ۴ ناحیه نوسانی به همراه  $24 \text{ cm}$  دیگر را پشت سر می‌گذرد، یعنی یک نوسان کامل و رسیدن دوباره به

نقطه بازگشت +A و سپس  $24 \text{ cm}$  دیگر به سمت A و قرار گرفتن در نقطه B. در جایگاه  $x_B = 44 - 24 = 20 \text{ cm}$ .

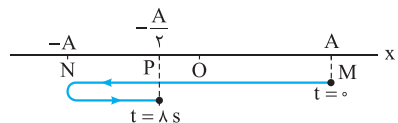




خب؛ ساده شد: متحرک در لحظه‌های  $t = \frac{T}{4}$  و  $t = \frac{3T}{4}$  یعنی ۲ بار از نقطه تعادل می‌گذرد؛ در لحظه‌های  $t = 0$  و  $t = T$  از نقطه بازگشت  $+A$  و در لحظه  $t = \frac{T}{2}$  از نقطه بازگشت  $-A$  می‌گذرد و در مجموع، ۳ بار از نقطه‌های بازگشت عبور می‌کند و دیدید که در پایان در  $x_B = 2 \text{ cm}$  قرار می‌گیرد.

**گزینه ۲** - ۷۶۴

راه حل اول: مطابق شکل زیر، نوسانگر از نقطه  $M$  شروع به نوسان روی پاره خط  $MN$  می‌کند و پس از پیمودن مسافت  $2/5A$  در نقطه  $P$  قرار می‌گیرد:

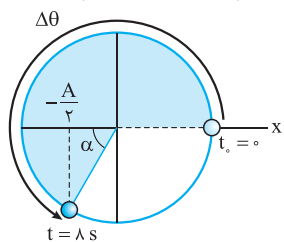


$$x_P = -\frac{A}{2} \Rightarrow A \cos \omega t_P = -\frac{A}{2} \Rightarrow \cos \omega t_P = -\frac{1}{2}$$

اولین جواب معادله بالا  $\omega t_P = \pi - \frac{\pi}{3}$  است که به ازای آن اولین لحظه عبور نوسانگر از نقطه  $P$  به دست می‌آید. دومین جواب معادله بالا با دومین لحظه عبور نوسانگر از نقطه  $P$  (یعنی  $t_P = 8 \text{ s}$ ) متناظر است:

$$\omega t_P = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega \times 8 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 12 \text{ s}$$

راه حل دوم (استفاده از دایره مرجع): شکل روبه‌رو، نحوه حرکت نقطه مرجع را در بازه زمانی  $t_0 = 0$  تا  $t = 8 \text{ s}$  نشان می‌دهد. نوسانگر در لحظه  $t = 8 \text{ s}$  از مکان  $x = -\frac{A}{2}$  عبور می‌کند. ضریب  $A$  (یعنی  $\frac{1}{2}$ ) شما رو یاد



کسینوس چه زاویه‌ای می‌اندازد؟

بله!  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ :  $x = -A \cos \alpha \Rightarrow -\frac{A}{2} = -A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

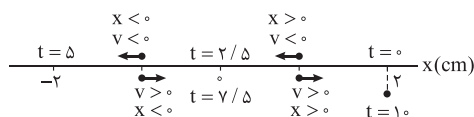
پس زاویه طی شده توسط نقطه مرجع در ۸ ثانیه اول حرکت برابر است با:  $\Delta\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

$$\Delta\theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \times 8 \Rightarrow T = 12 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 12 \text{ s}$$

**گزینه ۲** - ۷۶۵

دوره حرکت نوسانگر برابر است با: یعنی نوسانگر پس از  $1 \text{ s}$  برمی‌گردد در سر جای اولیه‌اش. همان‌طور که شکل روبه‌رو نشان می‌دهد در بازه زمانی  $t = 2/5 \text{ s}$  تا  $t = 5 \text{ s}$  سرعت و مکان نوسانگر، هر دو منفی و در بازه زمانی  $t = 7/5 \text{ s}$  تا  $t = 10 \text{ s}$  سرعت و مکان نوسانگر هر دو مثبت است. پس در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 8 \text{ s}$ ، به مدت  $3 \text{ s}$  سرعت و مکان نوسانگر هم‌جهت‌اند:



$$\Delta t = (5 - 2/5) + (10 - 7/5) = 2/5 + 9/5 = 3 \text{ s}$$

سرعت نوسانگر در دو انتهای مسیر صفر می‌شود و سپس تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، جهت حرکت نوسانگر در دو انتهای مسیر  $(x = \pm A)$  عوض می‌شود. پس باید حساب کنیم نوسانگر در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 8 \text{ s}$  چند بار از مکان  $x = +A$  یا  $x = -A$  عبور می‌کند:

$$x = A \cos 4\pi t = \pm A \Rightarrow \cos 4\pi t = \pm 1 \Rightarrow 4\pi t = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(توجه بفرمایید که به ازای  $n = 0$ ،  $t = 0$  می‌شود. در مبدأ زمان نوسانگر در مکان  $x = +A$  قرار دارد، اما از حال سکون به حرکت درمی‌آید و تغییر جهت نمی‌دهد. به همین دلیل  $n \geq 1$  انتخاب شد.)

$$\Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow 4\pi t = \pi \Rightarrow t = \frac{1}{4} \text{ s} \checkmark \\ n=2 \Rightarrow 4\pi t = 2\pi \Rightarrow t = \frac{2}{4} \text{ s} \checkmark \\ n=3 \Rightarrow 4\pi t = 3\pi \Rightarrow t = \frac{3}{4} \text{ s} \checkmark \\ n=4 \Rightarrow 4\pi t = 4\pi \Rightarrow t = \frac{4}{4} \text{ s} \times \text{ (در این حالت } t > \frac{8}{4} \text{ s است.)} \end{cases}$$

$$0 < 4\pi t < 4\pi \times 8/4 = 8\pi$$

**نیز باین** از آن‌جا که قرار است  $0 < t < 8 \text{ s}$  باشد، می‌توان نوشت:

$$0 < 4\pi t < 3/2\pi \xrightarrow{(4\pi t = n\pi)} 0 < n\pi < 3/2\pi \Rightarrow 0 < n < 3/2$$

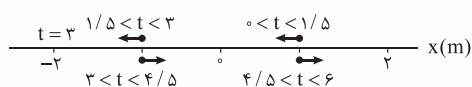
$n$  باید عددی صحیح در بازه  $0$  تا  $3/2$  باشد؛ یعنی  $n$  می‌تواند یکی از مقادیر صحیح  $1$ ،  $2$  و  $3$  باشد و جهت حرکت نوسانگر ۳ بار تغییر می‌کند.

**گزینه ۲** - ۷۶۷ باید تشخیص دهیم نوسانگر در لحظه‌های  $t_1$  و  $t_2$  کجا است. اگر از مرکز دور شود، حرکت آن کندشونده و اگر به مرکز نزدیک شود، حرکت آن تندشونده است.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 6 \text{ s}$$

آن تندشونده است. دوره حرکت نوسانگر  $6 \text{ s}$  است:

با توجه به این‌که حرکت نوسانگر از یک انتهای مسیر تا مرکز  $\frac{T}{4} = 1/5 \text{ s}$  طول می‌کشد نحوه حرکت نوسانگر مطابق شکل زیر است. با توجه به شکل نوسانگر در لحظه  $t_1 = 1 \text{ s}$  در حال نزدیک شدن و در لحظه  $t_2 = 5 \text{ s}$  در حال دور شدن از مرکز نوسان است. پس حرکت نوسانگر در لحظه  $t_1$  تندشونده و در لحظه  $t_2$  کندشونده است.



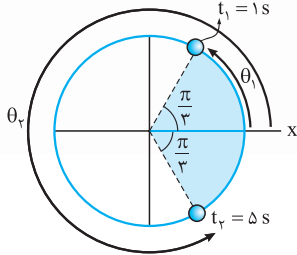


شیراز با تشخیص جایگاه نقطه مرجع، می توان مکان نوسانگر رو تشخیص بدی.  
در لحظه  $t_1 = 1s$ :

$$\theta = \frac{\pi}{3} t \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} \times 1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} t \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3} \times \Delta = \frac{\Delta\pi}{3} \text{ rad}$$

و در لحظه  $t_2 = 5s$ :

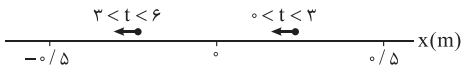


شکل روبه رو نشون می ده نقطه مرجع در لحظه  $t_1$  در ناحیه اول و در لحظه  $t_2$  در ناحیه چهارم است. حرکت نوسانگر در ناحیه اول تندشونده و در ناحیه چهارم کندشونده است.

$$\omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 12s$$

۷۶۸- دوره تناوب نوسانگر ۱۲s است: **کوتاه ۳**

نوسانگر  $\frac{T}{4}$  اول حرکت (یعنی از لحظه  $t = 0$  تا  $t = 3s$ ) به مرکز نوسان نزدیک و در  $\frac{T}{4}$  دوم (از لحظه  $t = 3s$  تا  $t = 6s$ ) از مرکز نوسان دور می شود. پس



نوسانگر در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 4s$  به مدت ۳s تندشونده حرکت می کند.

۷۶۹- نوسانگر پس از یک دوره دوباره به مکان اولیه اش ( $x = +A$ ) برمی گردد و جابه جایی و سرعت متوسط آن برای اولین بار صفر می شود. پس

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/s}$$

۷۷۰-  $T = 1s$  است و: **کوتاه ۴**

اول معادله مکان - زمان نوسانگر را بر حسب دامنه حرکت آن می نویسیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \cos \omega t = A \cos \frac{\pi}{6} t$$

مسافت طی شده توسط نوسانگر در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $t = 1s$  را با  $l$  و مسافت طی شده در بازه زمانی  $t = 1s$  تا  $t = 3s$  را با  $l'$  نشان می دهیم. متحرک تا لحظه  $t = 6s$  (یعنی  $\frac{T}{2}$ ) تغییر جهت نمی دهد و مسافت طی شده توسط نوسانگر هم اندازه با جابه جایی آن است.

$$t_1 = 1s: x_1 = A \cos \frac{\pi}{6} \times 1 = A \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

$$t_2 = 3s: x_2 = A \cos \frac{\pi}{6} \times 3 = A \times 0 = 0$$

$$l = |x_1 - x_2| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} A - 0 \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} A \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} A}{(3-1)s} \rightarrow s_{av} = \frac{\sqrt{3}}{4} A$$

$$l' = |x_2 - x_1| = \left| 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} A \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} A \Rightarrow s'_{av} = \frac{l'}{t_1 - t_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} A}{(1-3)s} \rightarrow s'_{av} = \frac{\sqrt{3}}{4} A$$

$$\frac{s_{av}}{s'_{av}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} A}{\frac{\sqrt{3}}{4} A} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$$

۷۷۱- گام اول: با توجه به معادله حرکت نوسانگر فاصله های  $MM'$  و  $ON'$  را به دست می آوریم: **کوتاه ۳**

$$x = 0.05 \cos \frac{\pi}{6} t \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 12s$$

$$M \text{ نقطه: } t_M = 0 \Rightarrow x_M = +A = 0.05 \text{ m}$$

$$M' \text{ نقطه: } t_{M'} = 2s \Rightarrow x_{M'} = 0.05 \cos \left( \frac{\pi}{6} \times 2 \right) = 0.05 \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) = 0.05 \times \frac{1}{2} = 0.025 \text{ m}$$

$$MM' \text{ فاصله: } l_1 = |x_{M'} - x_M| = |0.025 - 0.05| = 0.025 \text{ m}$$

$$O \text{ نقطه: } t_O = \frac{T}{4} = \frac{12}{4} = 3s \Rightarrow x_O = 0$$

$$N' \text{ نقطه: } t_{N'} = t_O + 1 = 3 + 1 = 4s \Rightarrow x_{N'} = 0.05 \cos \left( \frac{\pi}{6} \times 4 \right) = 0.05 \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) = 0.05 \left( -\frac{1}{2} \right) = -0.025 \text{ m}$$

$$(ON' \text{ فاصله}) l_2 = |x_{N'} - x_O| = |-0.025 - 0| = 0.025 \text{ m}$$



گام دوم: حالا می‌توان تندی متوسط نوسانگر در فواصل  $MM'$  و  $ON'$  و در پایان خواسته تست یعنی نسبت این دو را به دست آورد:

$$s_1 = \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{0.25}{2} \text{ m/s}$$

$$s_2 = \frac{l_2}{\Delta t_2} = \frac{0.25}{1} \text{ m/s}$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2}$$

۷۷۲- **گزینه ۱** راه‌حل اول: با این فرض که نوسانگر از مکان  $x = +1 \text{ cm}$  شروع به حرکت کرده باشد، معادله مکان - زمان آن را تعیین می‌کنیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.12} = \frac{50\pi}{3} \text{ rad/s}$$

$$x = A \cos \omega t \Rightarrow x(\text{cm}) = 1 \cdot \cos \frac{50\pi}{3} t$$

اولین لحظه‌ای را که نوسانگر از مکان  $x_1 = 5 \text{ cm}$  عبور می‌کند با  $t_1$  و اولین لحظه‌ای را که نوسانگر از مکان  $x_2 = -5 \text{ cm}$  عبور می‌کند با  $t_2$  نشان می‌دهیم.

$$x_1 = 1 \cdot \cos \frac{50\pi}{3} t_1 \Rightarrow 5 = 1 \cdot \cos \frac{50\pi}{3} t_1 \Rightarrow \cos \frac{50\pi}{3} t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{50\pi}{3} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{50} \text{ s}$$

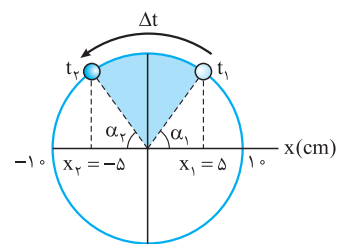
$$x_2 = 1 \cdot \cos \frac{50\pi}{3} t_2 \Rightarrow -5 = 1 \cdot \cos \frac{50\pi}{3} t_2 \Rightarrow \cos \frac{50\pi}{3} t_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{50\pi}{3} t_2 = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{50\pi}{3} t_2 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{2}{50} \text{ s}$$

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-5 - 5}{\frac{2}{50} - \frac{1}{50}} = \frac{-10}{\frac{1}{50}} = -500 \text{ cm/s} = -5 \text{ m/s}$$

$$s_{av} = |v_{av}| = 5 \text{ m/s}$$

چون نوسانگر تغییر جهت نداده، تندی متوسط آن هم‌اندازه با سرعت متوسطش است:

راه‌حل دوم (دایره مرجع): در حل تست‌ها به کمک دایره مرجع باید زاویه طی شده توسط نقطه مرجع را معلوم کنیم. با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$x_1 = A \cos \alpha_1 \Rightarrow 5 = 1 \cdot \cos \alpha_1 \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$x_2 = -A \cos \alpha_2 \Rightarrow -5 = -1 \cdot \cos \alpha_2 \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

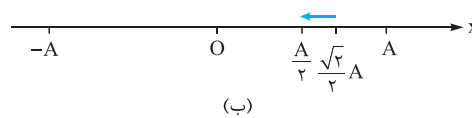
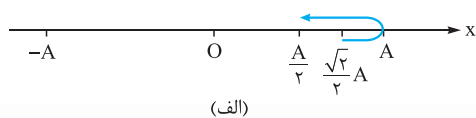
$$\Delta \theta = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$2\pi \equiv T \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{T}{6} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{T}{6} = \frac{0.12}{6} = 0.02 \text{ s}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-5 - 5}{0.02} = -500 \text{ cm/s} \Rightarrow |v_{av}| = 5 \text{ m/s} \Rightarrow s_{av} = 5 \text{ m/s}$$

۷۷۳- **گزینه ۴** راه‌حل اول: سرعت متوسط یک جسم در هنگام جابه‌جایی بین دو نقطه زمانی بیشینه است که نوسانگر فاصله آن دو نقطه را در کمترین

زمان ممکن طی کند. شکل‌های (الف) و (ب) دو روش انتقال نوسانگر از مکان  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} A$  به  $x_2 = \frac{1}{2} A$  را نشان می‌دهد. واضح است که مسیر (ب) در زمان کمتری طی می‌شود. با این فرض که نوسانگر از مکان  $x = +A$  به حرکت درآمده  $t_1$  و  $t_2$  را حساب می‌کنیم.

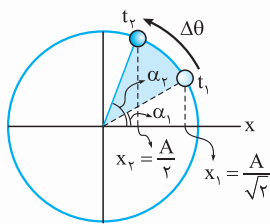


$$x_1 = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} A = A \cos \frac{2\pi}{T} t_1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{8}$$

$$x_2 = A \cos \omega t_2 \Rightarrow \frac{1}{2} A = A \cos \frac{2\pi}{T} t_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{6}$$

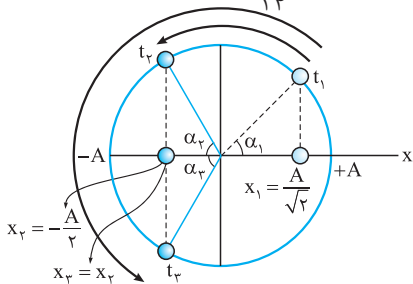
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} A - \frac{\sqrt{2}}{2} A}{\frac{T}{6} - \frac{T}{8}} = \frac{(\frac{1-\sqrt{2}}{2}) A}{\frac{T}{24}} = 12(1-\sqrt{2}) \frac{A}{T} \Rightarrow |v_{av}| = 12(\sqrt{2}-1) \frac{A}{T}$$





$$2\pi \equiv T \Rightarrow \frac{\pi}{12} \equiv \frac{T}{24}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{\frac{A}{2} - \frac{A}{\sqrt{2}}}{\frac{T}{24}} = \frac{12(1 - \sqrt{2})A}{T} \Rightarrow |v_{av}| = 12(\sqrt{2} - 1) \frac{A}{T}$$



راهحل دوم (دایره مرجع): باز هم باید ببینید نقطه مرجع در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  چه زاویه‌ای را طی می‌کند. با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:

$$x_1 = A \cos \alpha_1 \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{2}} = A \cos \alpha_1 \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$x_2 = A \cos \alpha_2 \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cos \alpha_2 \Rightarrow \cos \alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Delta \theta = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$$

۷۷۴- **گزینه ۴** با توجه به رابطه  $t_1 < t_2 < T$ ، حرکت نوسانگر در اولین دوره (T) مورد پرسش است. با توجه به شکل:

در لحظه  $t_1$ :

$$x_1 = A \cos \theta_1 \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{2}} = A \cos \theta_1$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

در لحظه  $t_2$ :

$$x_2 = A \cos \theta_2 \Rightarrow -\frac{A}{2} = A \cos \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \xrightarrow{(\theta_2 \text{ در ناحیه دوم است.})} \theta_2 = \pi - \alpha_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

در لحظه  $t_3$ :

$$x_3 = A \cos \theta_3 \xrightarrow{(x_3 = x_2)} -\frac{A}{2} = A \cos \theta_3 \Rightarrow \cos \theta_3 = -\frac{1}{2} \xrightarrow{(\theta_3 \text{ در ناحیه سوم است.})} \theta_3 = \pi + \alpha_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

پس یا نقطه مرجع از وضعیت (۱) در لحظه  $t_1$  به وضعیت (۲) در لحظه  $t_2$  رفته یا از وضعیت (۱) در لحظه  $t_1$  به وضعیت (۳) در لحظه  $t_3$  رسیده است. هر چه نوسانگر به مرکز تعادل نزدیک‌تر باشد، تندی‌های لحظه‌ای و تندی متوسط آن بیشتر و هر چه از مرکز تعادل دورتر شود، تندی‌های لحظه‌ای و تندی متوسط آن کمتر می‌شود. (به تندشونده یا کندشونده بودن حرکت در ناحیه‌های نوسانی دقت کنید).

در ضمن، توجه کنید که چون  $t_1 < t_2$  است، ناحیه چهارم را برای  $x_1$  در نظر نگرفتیم. از آنجا که کم‌ترین تندی متوسط خواسته شده، پاسخ مربوط به جابه‌جایی نقطه مرجع از وضعیت (۱) به وضعیت (۳) می‌باشد:

$$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) \Rightarrow \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1)$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) = \frac{16\pi - 3\pi}{12} = \frac{13\pi}{12} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{13T}{24} \quad \text{(I)}$$

در جابه‌جایی نقطه مرجع از وضعیت (۱) به (۳)، نوسانگر از نقطه  $x_1$  (در ناحیه اول) به نقطه تعادل و سپس به سمت نقطه بازگشت  $-A$  می‌رود (انتهای ناحیه دوم) و سپس از آنجا به نقطه  $x_3$  می‌رسد (ناحیه سوم). مسافت طی شده توسط نوسانگر در این بازه زمانی را به دست می‌آوریم:

$$I_{13} = x_1 + |-A| + |x_3 - (-A)| = \frac{A}{\sqrt{2}} + A + |-\frac{A}{2} + A| = \frac{\sqrt{2}}{2}A + A + \frac{A}{2} = \frac{(\sqrt{2} + 3)A}{2} \quad \text{(II)}$$

$$(s_{av})_{\min} = \frac{I_{13}}{t_2 - t_1} \xrightarrow{\text{(I)}} \xrightarrow{\text{(II)}} (s_{av})_{\min} = \frac{\frac{(\sqrt{2} + 3)A}{2}}{\frac{13T}{24}} = \frac{12}{13}(\sqrt{2} + 3) \left(\frac{A}{T}\right)$$

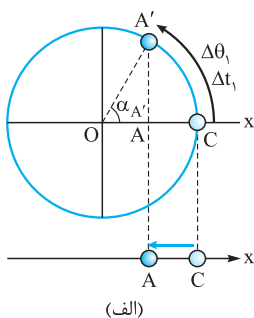
پاسخ نهایی تست برابر است با:

برای تمرین بیشتر، خودتان نشان دهید که **۱** بیشترین تندی متوسط و **۲** کم‌ترین اندازه سرعت متوسط را نشان می‌دهد.

۷۷۵- **گزینه ۲** گام اول: با توجه به داده‌های تست، مکان نقطه‌های A، B و C را به دست می‌آوریم:

$$x_A = OA = 1 \text{ cm} \quad , \quad x_B = x_A + AB = 1 + (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$x_C = x_B + BC = \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \xrightarrow{(x_C = A)} \xrightarrow{(A \text{ دامنه نوسان است.})} A = 2 \text{ cm}$$



گام دوم: مطابق شکل (الف)، هنگامی که نوسانگر بدون تغییر جهت از C به A' می‌رود. با توجه به مکان A:

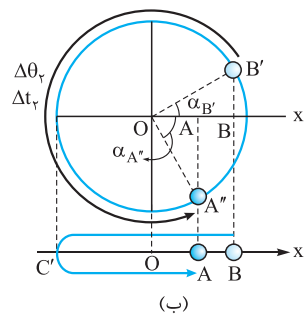
$$x_A = A \cos \alpha_{A'} \Rightarrow 1 = 2 \cos \alpha_{A'} \Rightarrow \cos \alpha_{A'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_{A'} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

متحرک این حرکت را در زمان  $\Delta t$  طی می‌کند:

$$\omega = \frac{\Delta \theta_1}{\Delta t_1} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{\Delta \theta_1}{2\pi} = \frac{\Delta t_1}{T} \xrightarrow{(\Delta \theta_1 = \alpha_{A'} = \frac{\pi}{3} \text{ rad})} \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\Delta t_1}{T} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{1}{2} \text{ s}$$

تندی متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$s_{av(1)} = \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{|x_A - x_C|}{\Delta t_1} = \frac{|1 - 2|}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ m/s}$$



گام سوم: با توجه به شکل (ب)، هنگامی که نوسانگر تندشونده از B عبور کرده و پس از یک بار تغییر جهت به A می‌رسد (یعنی از B به C' می‌رود و سپس تا A برمی‌گردد)، نقطه مرجع روی دایره از B' به A'' می‌رسد. با توجه به مکان نقطه‌های B و A:

$$x_B = A \cos \alpha_{B'} \Rightarrow \sqrt{2} = 2 \cos \alpha_{B'} \Rightarrow \cos \alpha_{B'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha_{B'} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$x_A = A \cos \alpha_{A''} \Rightarrow 1 = 2 \cos \alpha_{A''} \Rightarrow \cos \alpha_{A''} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_{A''} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

این حرکت در مدت  $\Delta t_2 = \frac{3T}{4}$  انجام می‌شود:

$$\omega = \frac{\Delta \theta_2}{\Delta t_2} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{\Delta \theta_2}{2\pi} = \frac{\Delta t_2}{T} \xrightarrow{(\Delta \theta_2 = 2\pi - \alpha_{B'} - \alpha_{A''} = 2\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad})} \frac{\frac{7\pi}{6}}{2\pi} = \frac{\Delta t_2}{T} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{7}{12} \text{ s}$$

تندی متوسط متحرک در این بازه:

$$s_{av(2)} = \frac{l_2}{\Delta t_2} = \frac{|BC'| + |C'A|}{\Delta t_2} = \frac{(x_B + A) + (A + x_A)}{\Delta t_2} = \frac{x_A + x_B + 2A}{\Delta t_2} = \frac{(1 + \sqrt{2} + 2 \times 2)}{\frac{7}{12}} = \frac{4(\sqrt{2} + 5)}{7} \text{ m/s}$$

گام چهارم: خواسته تست:

$$\Delta s_{av} = s_{av(2)} - s_{av(1)} = \frac{4(\sqrt{2} + 5)}{7} - 2 = \frac{(4\sqrt{2} + 20) - 14}{7} = \frac{4\sqrt{2} + 6}{7} = \frac{2(2\sqrt{2} + 3)}{7} \text{ m/s}$$

۷۷۶- **گزینه ۱** روی هم زرفته، تست فوبی است!! اول باید ببینیم نوسانگر در مدت  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ، حداکثر چند متر می‌تواند جابه‌جا شود. قبول دارید  $\Delta t = \frac{T}{4}$  است؟ این رو هم قبول دارید که نوسانگر در مدت  $\frac{T}{4}$ ، می‌تواند بیشترین جابه‌جایی ممکن ( $2A$ ) را داشته باشد و آن زمانی است که نوسانگر از یک انتهای مسیر، بدون تغییر جهت به انتهای دیگر کوچ می‌کند! پس می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{\max} = 2A = 2 \times 5 = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

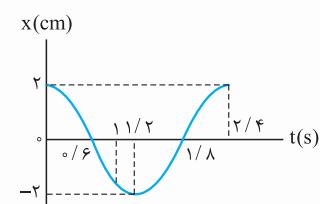
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av(\max)} = \frac{\Delta x_{\max}}{\Delta t} = \frac{0.1}{0.1} = 10 \text{ m/s}$$

لذا، هر سه عدد عنوان شده در ۱، ۲ و ۳، می‌توانند بیانگر بزرگی سرعت متوسط نوسانگر باشند.

۷۷۷- **گزینه ۱** بازه زمانی بین دو عبور متوالی نوسانگر از مرکز نوسان (مکان  $x = 0$ ) برابر نصف دوره ( $\frac{T}{2}$ ) است.

$$\Delta t = 10^{-2} \text{ s} \Rightarrow \frac{T}{2} = 10^{-2} \Rightarrow T = 2 \times 10^{-2} \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \times 10^{-2}} = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$A = 1 \text{ m} \Rightarrow x = A \cos \omega t = \cos 100\pi t$$



۷۷۸- **گزینه ۱** با توجه به شکل روبه‌رو، نوسانگر در بازه زمانی  $t_0 = 0$  تا  $t_1 = 0.6 \text{ s}$  به سمت مبدأ حرکت می‌کند ( $|x|$  کاهش می‌یابد) و در بازه زمانی  $t_1 = 0.6 \text{ s}$  تا  $t_2 = 1 \text{ s}$  از مبدأ دور می‌شود ( $|x|$  افزایش می‌یابد). بنابراین، در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  حرکت نوسانگر به صورت کندشونده است:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1 - 0.6 = 0.4 \text{ s}$$

۷۷۹- **گزینه ۱** راه‌حل اول: در لحظه  $t_1$  برای اولین بار از مکان  $x = 2 \text{ cm}$  عبور می‌کند. بنابراین داریم:

$$x = A \cos \omega t = 4 \cos \omega t \Rightarrow 2 = 4 \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

$t_2$  را لازم نیست حساب کنیم، معلومه که ربع دورۀ س!

$$t_2 = \frac{T}{4}$$

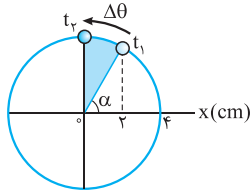
$$t_2 - t_1 = 0/1 \Rightarrow \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = 0/1 \Rightarrow \frac{T}{12} = 0/1 \Rightarrow T = 1/2 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/2} = \frac{4\pi}{1} \text{ rad/s}$$

$$x = A \cos \omega t \quad (A = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}) \rightarrow x = 0.04 \cos \frac{4\pi}{1} t$$

راهحل دوم (دایرة مرجع): باید ببینیم در زمان داده شده ( $t_2 - t_1 = 0/1 \text{ s}$ ) چه زاویه‌ای طی شده، در لحظه  $t_1$  نوسانگر در مکان  $x = 2 \text{ cm}$  قرار دارد. یعنی در مکان  $x = \frac{1}{2} A$  است. با دیدن  $\frac{1}{2}$  یاد کسینوس چه زاویه‌ای می‌افتید؟ بله!  $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ . به عبارت دیگر:

$$x = A \cos \alpha \Rightarrow 2 = 4 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

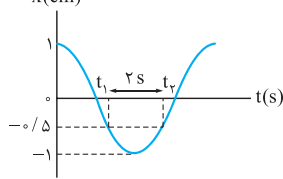


بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو زاویه طی شده توسط نقطه مرجع برابر است با:

$$\Delta \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \omega \times 0/1 \Rightarrow \omega = \frac{\Delta \pi}{3} \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \cos \omega t = 0.04 \cos \frac{\Delta \pi}{3} t$$

۷۸۰- **گزینه ۳** راهحل اول: با توجه به نمودار روبه‌رو، نوسانگر در لحظه  $t_1$  برای اولین بار و در لحظه  $t_2$  برای دومین بار از مکان  $x = -0.5 \text{ cm}$  عبور می‌کند. پس:

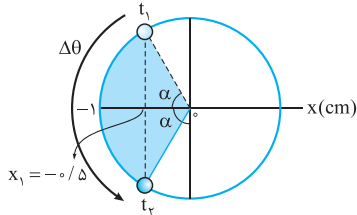


$$x = -0.5 \text{ cm} \Rightarrow -0.5 = 1 \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega t_1 = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{3} \\ \omega t_2 = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{2T}{3} \end{cases}$$

$$t_2 - t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow \frac{2T}{3} - \frac{T}{3} = 2 \Rightarrow \frac{T}{3} = 2 \Rightarrow T = 6 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

$$x = A \cos \omega t \quad (A = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}) \rightarrow x = 10^{-2} \cos \frac{\pi}{3} t$$

راهحل دوم (دایرة مرجع): در لحظه‌های  $t_1$  و  $t_2$  موقعیت نقطه مرجع را مشخص می‌کنیم. براساس شکل روبه‌رو:



$$x_1 = -A \cos \alpha \Rightarrow -0.5 = -1 \times \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

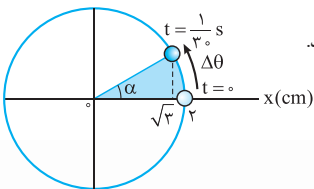
$$\Delta \theta = 2\alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Delta \theta = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \omega \times 2 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \cos \omega t = 10^{-2} \cos \frac{\pi}{3} t$$

۷۸۱- **گزینه ۴** راهحل اول: نوسانگر در لحظه  $t = \frac{1}{30} \text{ s}$  برای اولین بار از مکان  $x = \sqrt{3} \text{ cm}$  عبور می‌کند. بنابراین:

$$x = A \cos \omega t \Rightarrow \sqrt{3} = 2 \cos \omega \times \frac{1}{30} \Rightarrow \cos \frac{\omega}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\omega}{30} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega = 5\pi \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 5\pi \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

راهحل دوم (دایرة مرجع): نقطه مرجع در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = \frac{1}{30} \text{ s}$  مطابق شکل روبه‌رو دوران و زاویه  $\Delta \theta$  را طی می‌کند.



$$x = A \cos \alpha \Rightarrow \sqrt{3} = 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \Rightarrow \Delta \theta = \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\Delta \theta = \omega \Delta t = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} \times \frac{1}{30} \Rightarrow T = 0.4 \text{ s}$$

۷۸۲- **گزینه ۳** راهحل اول: به شکل روبه‌رو نگاه کنید. نوسانگر تا لحظه  $t'$  چهار بار دیگر (در

لحظه‌های  $t_1, t_2, t_3, t_4$  و  $t_5$ ) از مکان  $x = \frac{A}{2}$  عبور می‌کند. پس  $t'$  پنجمین لحظه‌ای است که

$$x = A \cos \omega t \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cos \omega t' \Rightarrow \cos \omega t' = \frac{1}{2} \quad x = \frac{A}{2} \text{ می‌شود.}$$

$$\omega t' = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi - \frac{\pi}{3}, 4\pi + \frac{\pi}{3}$$

دامین جواب

$$\frac{2\pi}{T} t' = 4\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{1/2} t' = \frac{13\pi}{3} \Rightarrow t' = 2/6 \text{ s}$$



راه حل دوم: در مدت  $T$ ، نمودار مکان - زمان نوسانگر از نو تکرار می‌شود. بنابراین، با توجه به شکل (الف) داریم:

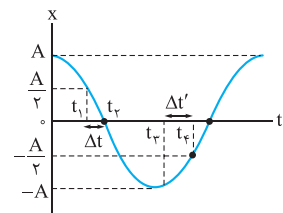
$$t' = 2T + \Delta t = 2 \times 1/2 + \Delta t = 1/2 + \Delta t \quad (I)$$

نقطه مرجع در بازه زمانی  $\Delta t$  مطابق شکل (ب) جابه‌جا می‌شود و زاویه  $\Delta\theta$  را روی دایره مرجع طی می‌کند.

$$x = A \cos \alpha \Rightarrow \frac{A}{2} = A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \xrightarrow{(\Delta\theta=\alpha)} \Delta\theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

نقطه مرجع زاویه  $2\pi \text{ rad}$  را در مدت  $T$  و زاویه  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  را در مدت  $\frac{T}{6}$  طی می‌کند. به عبارت دیگر:

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{6} \Rightarrow \Delta t = \frac{1/2}{6} = 0/2 \text{ s} \xrightarrow{(I)} t' = 1/2 + 0/2 = 1/2 \text{ s}$$



**۷۸۳ - نکته** راه حل اول: برای محاسبه فواصل زمانی  $\Delta t$  و  $\Delta t'$  لازم است در ابتدا لحظات  $t_1$  تا  $t_4$  در شکل روبه‌رو را به دست آوریم، با توجه به معادله مکان - زمان نوسانگر  $(x = A \cos \omega t)$  و محل قرارگیری لحظات  $t_1$  تا  $t_4$  داریم:

$$t_1 \text{ محاسبه: } \frac{A}{2} = A \cos \omega t_1 \Rightarrow \cos \omega t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

$$t_2 \text{ تعیین: } t_2 = \frac{T}{4}$$

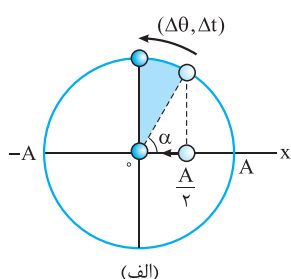
$$\Delta t \text{ محاسبه: } \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = \frac{T}{12}$$

$$t_3 \text{ تعیین: } t_3 = \frac{T}{2}$$

$$t_4 \text{ محاسبه: } -\frac{A}{2} = A \cos \omega t_4 \Rightarrow \cos \omega t_4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_4 = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_4 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_4 = \frac{2T}{3}$$

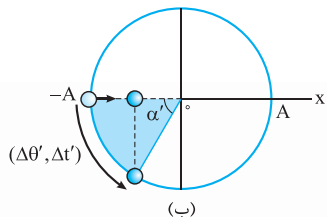
$$\Delta t' \text{ محاسبه: } \Delta t' = t_4 - t_3 = \frac{2T}{3} - \frac{T}{2} = \frac{T}{6}$$

$$\text{خواسته تست: } \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{T/6}{T/12} = \frac{12}{6} = 2$$



راه حل دوم (استفاده از دایره مرجع): گام اول: شکل (الف) نحوه حرکت نوسانگر و نقطه مرجع را در مدت  $\Delta t$  نشان می‌دهد. شما رو یاد کسینوس چه زاویه‌ای می‌اندازه؟ به!  $\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ . بنابراین زاویه‌ای که نقطه مرجع در جابه‌جایی از  $x = \frac{A}{2}$  تا  $x = 0$  طی می‌کند، برابر است با:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$



گام دوم: نوسانگر در مدت  $\Delta t'$  از مکان  $x = -A$  به مکان  $x = -\frac{A}{2}$  می‌رود و نقطه مرجع مطابق شکل (ب) زاویه  $\Delta\theta'$  را طی می‌کند.  $\Delta\theta' = \alpha'$

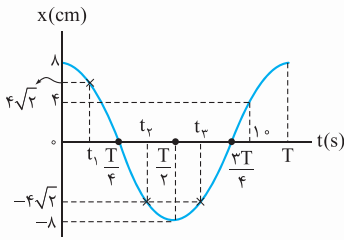
$$x = -A \cos \alpha' \Rightarrow -\frac{A}{2} = -A \cos \alpha' \Rightarrow \cos \alpha' = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha' = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta' = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad (\text{باز هم } \frac{1}{2} A \text{ و } \frac{\pi}{3} \text{ rad!})$$

$$\frac{\Delta\theta'}{\Delta\theta} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\pi/3}{\pi/6} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 2$$

گام سوم: براساس رابطه  $\Delta\theta = \omega \Delta t$  داریم:

**گزینه ۲** - ۷۸۴

تست را به صورت تشریحی حل می‌کنیم؛ حل به کمک دایره مرجع با شما



**گام اول:** نوسانگر در مبدأ زمان در بیشینه مکان خود قرار دارد، بنابراین معادله مکان - زمان آن به صورت

$$x = \lambda \cos \omega t$$

روبه‌رو است:

مطابق شکل، نوسانگر در لحظه  $t = 10 \text{ s}$  در مکان  $x = +4 \text{ cm}$  (واقع در ربع چهارم) قرار دارد، بنابراین:

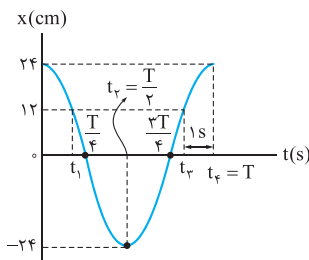
$$x = \lambda \cos \omega t \Rightarrow 4 = 8 \cos(\omega \times 10) \Rightarrow \cos 10\omega = \frac{1}{2} \Rightarrow 10\omega = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$10\omega = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$$

**گام دوم:** با توجه به شکل بالا، در لحظه  $t_p$ ، فاصله نوسانگر از مبدأ مکان برای سومین بار  $4\sqrt{2} \text{ cm}$  می‌شود.  $(x = -4\sqrt{2} \text{ cm})$ ؛ چون این نقطه در ربع سوم قرار دارد، داریم:

$$x = -4\sqrt{2} \Rightarrow -4\sqrt{2} = 8 \cos \omega t_p \Rightarrow \cos \omega t_p = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega t_p = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\omega t_p = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \times t_p = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t_p = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ s}$$



**گزینه ۲** - ۷۸۵ تابع کسینوسی مکان - زمان به شکل (الف) رسم شده. از شکل صورت تست هم داریم:

$$A - (-A) = 12 + 36 \Rightarrow 2A = 48 \Rightarrow A = 24 \text{ cm}$$

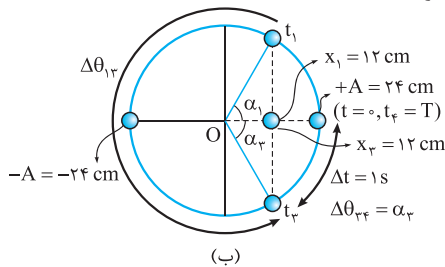
پس با توجه دوباره به شکل صورت تست و شکل (الف)، مکان در لحظه  $t_1$  برابر است با:

$$x_1 = A - 12 = 24 - 12 = 12 \text{ cm}$$

$$x_0 = x_p = 24 \text{ cm}, x_r = -A = -24 \text{ cm}, x_p = x_1 = 12 \text{ cm}$$

و در لحظه‌های دیگر:

مکان نوسانگر و نقطه مرجع در لحظه‌های داده‌شده در شکل (الف) را در شکل (ب) رسم کرده‌ایم. با توجه به هر دو شکل داریم:



$$x_1 = A \cos \alpha_1 \Rightarrow 12 = 24 \cos \alpha_1 \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$x_p = A \cos \alpha_p \Rightarrow 12 = 24 \cos \alpha_p \Rightarrow \cos \alpha_p = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_p = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

اکنون به سراغ اختلاف ۱ ثانیه‌ای  $t_p$  و  $t_1$  می‌رویم:

$$\Delta \theta_{p1} = \alpha_p - \alpha_1 = \omega(t_p - t_1) \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \omega \times 1 \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$$

$$\Delta \theta_{1p} = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_p = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \xrightarrow{(\Delta \theta_{1p} = \omega(t_p - t_1))} \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(t_p - t_1) \Rightarrow t_p - t_1 = 4 \text{ s}$$

از لحظه  $t_1$  تا  $t_p$ ، متحرک از مکان  $x_1$  به نقطه تعادل (O) و سپس به نقطه بازگشت  $-A$  می‌رود و سپس از نقطه بازگشت  $-A$  به نقطه  $O$  و سپس به  $x_p = x_1$  برمی‌گردد. مسافت طی شده بین  $t_1$  و  $t_p$  برابر است با:

$$l_{1p} = x_1 + A + A + x_p = 12 + 24 + 24 + 12 = 72 \text{ cm}$$

$$s_{av} = \frac{l_{1p}}{t_p - t_1} = \frac{72}{4} = 18 \text{ cm/s}$$

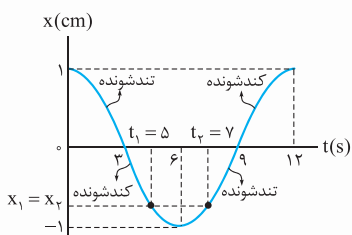
تندی متوسط بین  $t_1$  و  $t_p$ :

$$v_{av} = \frac{x_p - x_1}{t_p - t_1} = \frac{(x_p = x_1)}{(t_p \neq t_1)} \rightarrow v_{av} = 0$$

با توجه به برابری  $x_p = x_1$ ، جابه‌جایی و در نتیجه، سرعت متوسط نوسانگر بین  $t_1$  و  $t_p$  صفر است:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow T = 12 \text{ s}$$

**گام اول:** دوره تناوب نوسانگر را حساب می‌کنیم:



**گام دوم:** بر روی نمودار مکان - زمان، ناحیه‌هایی را که حرکت نوسانگر کندشونده یا تندشونده است مشخص می‌کنیم؛ با توجه به نمودار مشخص است که تا لحظه  $t_1 = 5 \text{ s}$ ، نوسانگر ۳ s به صورت تندشونده و ۲ s به صورت کندشونده حرکت کرده و بنابراین تا این لحظه، زمانی که نوسانگر به صورت تندشونده حرکت کرده ۱ s بیشتر از زمانی است که به صورت کندشونده حرکت کرده است. و به همین ترتیب تا لحظه  $t_p = 7 \text{ s}$  نیز نوسانگر ۱ s بیشتر به صورت تندشونده حرکت کرده است.



گام سوم: برای محاسبه مسافت طی شده توسط نوسانگر بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  کافی است مکان نوسانگر در این لحظات را به دست آوریم:

$$x_1 = (1 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{6} t_1 = \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$x_2 = (1 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{6} t_2 = \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$l = \left| -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right| = 2 \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 - \sqrt{3} \text{ cm}$$

گام اول: معادله مکان - زمان هر یک از نوسانگرهای A و B را با استفاده از نمودار داده شده مشخص می‌کنیم: گفته ۲ - ۷۸۷

$$\frac{T_A}{2} = 2 \Rightarrow T_A = 4 \text{ s} \Rightarrow \omega_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

$$x_A = A_A \cos \omega_A t \Rightarrow x_A = 2 \cos \frac{\pi}{2} t \quad (\text{I})$$

$$\frac{T_B}{4} = 2 \Rightarrow T_B = 8 \text{ s} \Rightarrow \omega_B = \frac{2\pi}{T_B} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

$$x_B = A_B \cos \omega_B t \Rightarrow x_B = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4} t \quad (\text{II})$$

$$x_A = x_B \xrightarrow[\text{(II)}]{\text{(I)}} 2 \cos \frac{\pi}{2} t = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4} t$$

گام دوم: در لحظه‌ای که دو متحرک از کنار یکدیگر عبور می‌کنند، داریم:

برای به دست آوردن  $t$  لازم است تا معادله مثلثاتی بالا را حل کنیم، ولی به عنوان یک روش بهتر می‌شود گزینه‌های داده شده را در معادله بالا قرار داد که نتیجه خواهیم گرفت  $t = \frac{2}{3} \text{ s}$  درست است.

### بحث بیشتر

$$2 \cos \left( 2 \times \frac{\pi}{4} t \right) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4} t \xrightarrow{(\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1)} 2(2 \cos^2 \frac{\pi}{4} t - 1) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4} t$$

اما حل معادله مثلثاتی بالا:

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \frac{\pi}{4} t - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{4} t - 2 = 0 \xrightarrow{(\cos \frac{\pi}{4} t = x)} 4x^2 - \sqrt{3}x - 2 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 4(4)(-2)}}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{75}}{12} = \frac{\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

از پاسخ  $\cos \frac{\pi}{4} t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  چون در این صورت  $\frac{\pi}{4} t > \frac{\pi}{2}$  و  $t > 2 \text{ s}$  به دست می‌آید که بزرگ‌تر از پاسخ  $t = \frac{2}{3} \text{ s}$  است (ما دنبال اولین

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \left( \frac{\pi}{4} t \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \left( \frac{\pi}{4} t \right) = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{4} t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \text{ s}$$

لحظه تلاقی دو نوسانگر بودیم.)