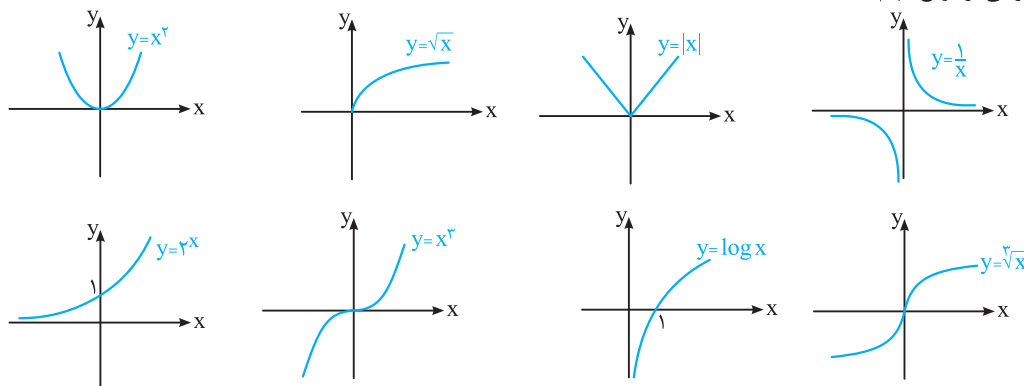


درسنامه ۱

تبدیل نمودارها

قبلاً با نمودار برخی از توابع مهم آشنا شدید:



اکنون می‌خواهیم با تبدیل نمودارهای بالا (در صورت امکان) نمودار برخی توابع دیگر را رسم کنیم.

انتقال نمودارها

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده باشد،

(آ) **انتقال عمودی:** برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

(۱) اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به بالا انتقال می‌دهیم. (۲) اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

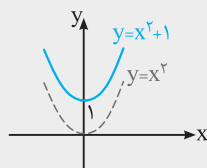
(ب) **انتقال افقی:** برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ؛

(۱) اگر $k > 0$ باشد، نمودار f را k واحد به چپ منتقل می‌کنیم. (۲) اگر $k < 0$ باشد، نمودار f را $|k|$ واحد به راست منتقل می‌کنیم.

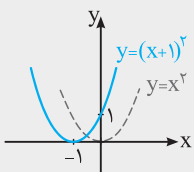
به کمک نمودار $y = x^2$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

- (آ) $y = x^2 + 1$
- (ب) $y = (x+1)^2$
- (پ) $y = x^2 - 1$
- (ث) $y = (x-1)^2 + 1$
- (ج) $y = (x+1)^2 - 1$

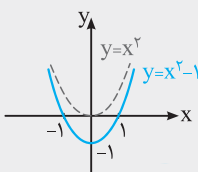
پاسخ: (آ) برای رسم $y = x^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



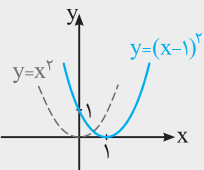
(ب) برای رسم $y = (x+1)^2$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم:



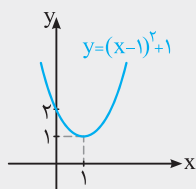
(پ) برای رسم $y = x^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



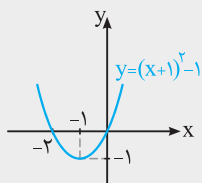
(ث) برای رسم $y = (x-1)^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم:



درستنامه ۱



ث) برای رسم $y = (x-1)^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



ج) برای رسم $y = (x+1)^2 - 1$ ، نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

نکته

اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب برابر با $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه:

(۱) دامنه تابع $y = f(x+h) + k$ با حل نامعادله زیر به دست می‌آید، زیرا باید $(x+h)$ در دامنه f باشد:

$$a \leq x+h \leq b \Rightarrow a-h \leq x \leq b-h$$

(۲) برد تابع $y = f(x+h) + k$ به صورت زیر به دست می‌آید، زیرا $f(x+h)$ در برد f قرار می‌گیرد:

$$c \leq f(x+h) \leq d \xrightarrow{+k} c+k \leq \underbrace{f(x+h)+k}_y \leq d+k \Rightarrow c+k \leq y \leq d+k$$

مثال

اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ برابر با $[-1, 3]$ و $[2, 5]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x) = f(x-2) - 3$ را بیابید.

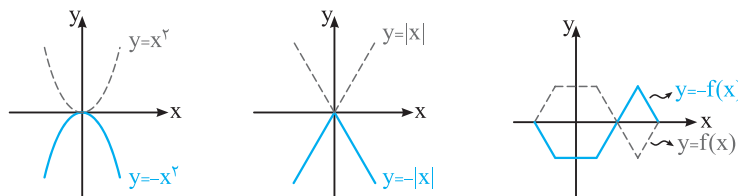
دامنه g : $-1 \leq x-2 \leq 3 \xrightarrow{+2} -1+2 \leq x \leq 3+2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$

برد g : $2 < f(x-2) \leq 5 \xrightarrow{-3} -1 < f(x-2) - 3 \leq 2 \Rightarrow -1 < y = g(x) \leq 2$

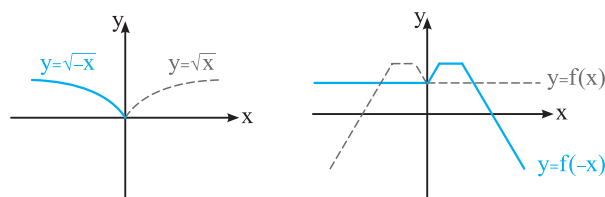
پاسخ:

انعکاس نمودارها

(۱) برای رسم نمودار $y = -f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است y ‌ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور x ‌ها قرینه کنیم. به طور مثال:



(۲) برای رسم نمودار $y = f(-x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، کافی است x ‌ها را قرینه کنیم یعنی نمودار تابع f را نسبت به محور y ‌ها قرینه کنیم. به طور مثال:



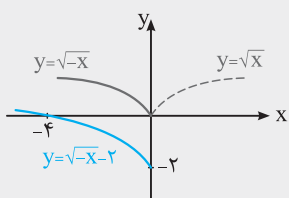
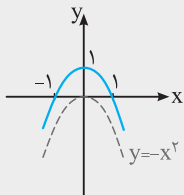
درستنامه ۱

مثال

نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

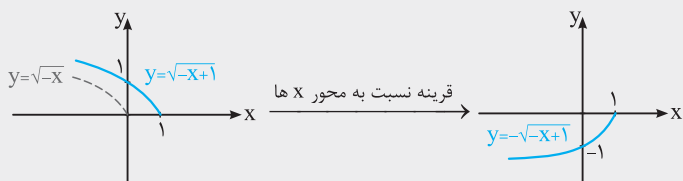
(آ) $y = -x^2 + 1$ (ب) $y = \sqrt{-x} - 2$ (پ) $y = -\sqrt{-x+1}$ (ت) $y = -(x-1)^2 + 1$

پاسخ: (آ) کافی است نمودار $y = -x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال دهیم:

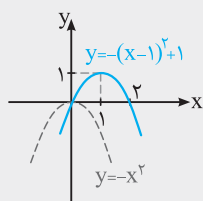


(ب) ابتدا نمودار $y = \sqrt{-x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس نمودار $y = \sqrt{-x}$ را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

(پ) ابتدا نمودار $y = \sqrt{-x}$ را ۱ واحد به راست منتقل می‌کنیم، تا نمودار $y = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{-x+1}$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



(ت) نمودار $y = -x^2$ را ۱ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



نکته

اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب برابر با $[a, b]$ و $[c, d]$ باشد، آن‌گاه:

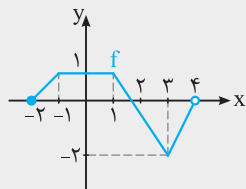
(۱) دامنه تابع $y = f(-x)$ برابر با $[-b, -a]$ است: $a \leq -x \leq b \xrightarrow{\times(-1)} -b \leq x \leq -a$

(۲) برد تابع $y = -f(x)$ برابر با $[-d, -c]$ است: $c \leq f(x) \leq d \xrightarrow{\times(-1)} -d \leq -f(x) \leq -c$

توجه: بازه‌های داده‌شده در دامنه و برد، می‌توانند باز یا نیم‌باز هم باشند.

مثال

اگر نمودار زیر مربوط به تابع f باشد، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را بیابید.



(آ) $g(x) = f(-x) + 1$

(ب) $k(x) = -f(x+1)$

(پ) $h(x) = -f(-x+1)$

پاسخ:

دامنه: $D_f = [-2, 4]$ ، برد: $R_f = [-2, 1]$

(آ) $D_g: -2 \leq -x < 4 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq x > -4 \Rightarrow D_g = (-4, 2]$

(ب) $R_g: -2 \leq f(-x) \leq 1 \xrightarrow{+1} -1 \leq f(-x) + 1 \leq 2 \Rightarrow R_g = [-1, 2]$

درستنامه ۱

$$\begin{cases} D_k: -2 \leq x+1 < 4 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq x < 3 \Rightarrow D_k = [-3, 3] \\ R_k: -2 \leq f(x+1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(x+1) \geq -1 \Rightarrow R_k = [-1, 2] \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} D_h: -2 \leq -x+1 < 4 \xrightarrow{+(-1)} -3 \leq -x < 3 \xrightarrow{\times(-1)} 3 \geq x > -3 \Rightarrow D_h = (-3, 3] \\ R_h: -2 \leq f(-x+1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(-x+1) \geq -1 \Rightarrow 2 \geq h(x) \geq -1 \Rightarrow R_h = [-1, 2] \end{cases} \quad (\text{پ})$$

انقباض و انبساط نمودارها

آ) انقباض و انقباض افقی

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، طول نقاط نمودار تابع f را در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌کنیم. در این صورت با فرض $k > 0$ ؛

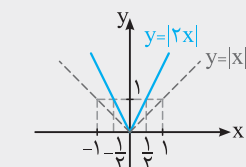
(۱) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌گردد.

(۲) اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای افقی (محور x ها) با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌گردد.

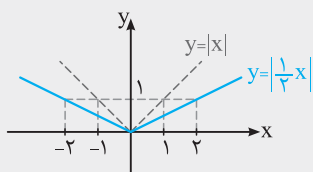
مثال

به کمک نمودار $y = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$\text{آ) } y = |2x| \quad (\text{ب) } y = \left| \frac{1}{2}x \right|$$



پاسخ: آ) برای رسم $y = |2x|$ ، نمودار $y = |x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌گردد:



ب) برای رسم $y = \left| \frac{1}{2}x \right|$ ، نمودار $y = |x|$ در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{2} = 2$ منبسط می‌گردد:

ب) انقباض و انقباض عمودی

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ موجود باشد، برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، عرض نقاط نمودار تابع f را در k ضرب می‌کنیم. در این صورت با فرض $k > 0$ ؛

(۱) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k منبسط می‌گردد.

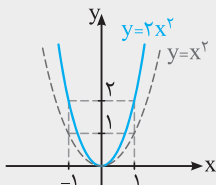
(۲) اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در راستای عمودی (محور y ها) با ضریب k منقبض می‌گردد.

مثال

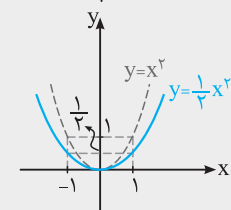
به کمک نمودار تابع $y = x^2$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$\text{آ) } y = 2x^2 \quad (\text{ب) } y = \frac{1}{2}x^2$$

پاسخ: آ) نمودار $y = x^2$ با ضریب $k = 2$ در راستای قائم منبسط می‌گردد:



ب) نمودار $y = \frac{1}{2}x^2$ با ضریب $k = \frac{1}{2}$ در راستای قائم منقبض می‌گردد:



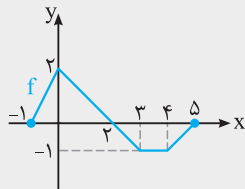
درستنامه ۱

نکته

برای رسم نمودار توابع $y = f(ax + b)$ ابتدا باید از ضریب x داخل پرانتز فاکتور بگیریم تا در ترتیب تبدیلات اشتباه نکنیم (و ابتدا با ضریب $\frac{1}{a}$ ، انبساط یا انقباض افقی و سپس انتقال را انجام دهیم).

$$y = f(ax + b) = f(a(x + \frac{b}{a}))$$

مثال



اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

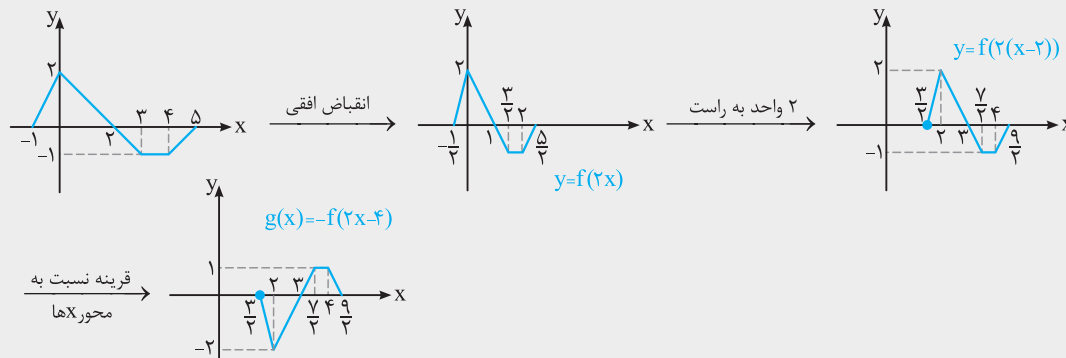
آ) $g(x) = -f(2x - 4)$

ب) $h(x) = 2f(-x + 1)$

پاسخ: آ) ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:

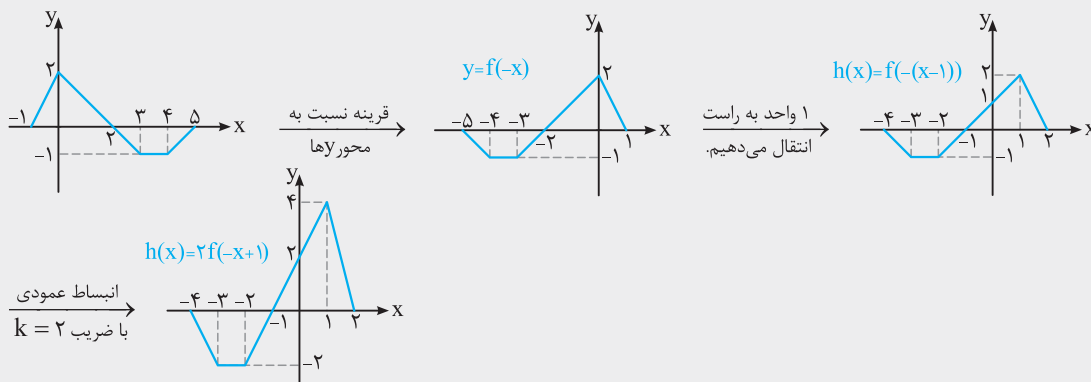
$g(x) = -f(2(x - 2))$

بنابراین نمودار تابع f را ابتدا با ضریب $\frac{1}{2} = \frac{1}{k}$ منقبض و سپس ۲ واحد به راست انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y = f(2(x - 2))$ به دست آید، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار g به دست آید:



$h(x) = 2f(-(x - 1))$

ب) ابتدا از ضریب x فاکتور می‌گیریم، داریم:



نکته

اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب برابر با $[m \cdot n]$ و $[c \cdot d]$ باشد، آنگاه

$m \leq ax + b \leq n$

(۱) برای محاسبه دامنه تابع $y = kf(ax + b) + h$ کافی است نامعادله مقابل را حل کنیم:

(۲) برای محاسبه برد تابع $y = kf(ax + b) + h$ ، طرفین نامعادله زیر را (با توجه به علامت k) برابر کرده، سپس طرفین نامعادله حاصل را با h جمع می‌کنیم تا برد تابع y به دست آید.

$c \leq f(ax + b) \leq d$

توجه: بازه‌های داده شده برای دامنه و برد می‌توانند باز یا نیم‌باز هم باشند.

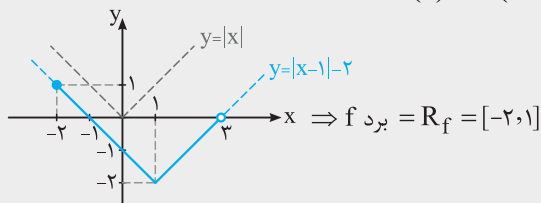
درسنامه ۱

مثال

تابع $f(x) = |x-1| - 2$ را در بازه $[-2, 3]$ در نظر بگیرید و دامنه و برد هر یک از توابع زیر را پیدا کنید.

$$(ب) \quad k(x) = 3f(2-x) - 1$$

$$(آ) \quad g(x) = -f(2x-1) + 3$$



پاسخ: (آ) ابتدا با رسم نمودار f ، برد تابع f را می‌یابیم. برای رسم نمودار f نیز کافی است نمودار $y = |x|$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم:

$$R_g : -2 \leq f(2x-1) \leq 1 \xrightarrow{\times(-1)} 2 \geq -f(2x-1) \geq -1 \xrightarrow{+3} 5 \geq -f(2x-1) + 3 \geq 2 \Rightarrow R_g = [2, 5]$$

دامنه تابع f همان بازه $[-2, 3]$ است، بنابراین:

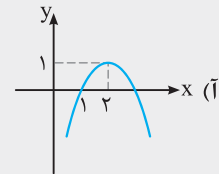
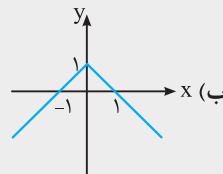
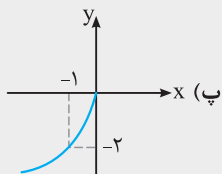
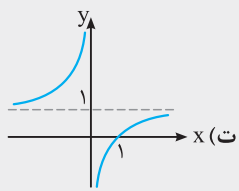
$$D_g : -2 \leq 2x-1 < 3 \xrightarrow{+1} -1 \leq 2x < 4 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \leq x < 2 \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{2}, 2)$$

$$D_k : -2 \leq 2-x < 3 \xrightarrow{+2} -4 \leq -x < 1 \xrightarrow{\times(-1)} 4 \geq x > -1 \Rightarrow D_k = (-1, 4] \quad (ب)$$

$$R_k : -2 \leq f(2-x) \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -6 \leq 3f(2-x) \leq 3 \xrightarrow{+(-1)} -7 \leq 3f(2-x) - 1 \leq 2 \Rightarrow R_k = [-7, 2]$$

مثال

ضابطه هر یک از توابع زیر را به کمک توابع $y = x^2$ ، $y = \sqrt{x}$ و $y = \frac{1}{x}$ بنویسید.



پاسخ: (آ) با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y = x^2$ ، درمی‌یابیم که نمودار $y = x^2$ نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -x^2 \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{واحد به راست}} y = -(x-2)^2 + 1$$

(ب) با مقایسه نمودار و نمودار $y = |x|$ ، درمی‌یابیم که نمودار $y = |x|$ نسبت به محور x ها قرینه و سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

$$y = |x| \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -|x| \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{واحد به بالا}} y = -|x| + 1$$

(پ) نمودار $y = \sqrt{x}$ نسبت به محور x ها و محور y ها قرینه و سپس با ضرب ۲ در راستای قائم منبسط شده است:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{انبساط عمودی}]{\text{واحد به بالا}} y = -2\sqrt{-x}$$

(ت) نمودار $y = \frac{1}{x}$ نسبت به محور y ها قرینه شده و سپس ۱ واحد به بالا انتقال یافته است:

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{واحد به بالا}} y = -\frac{1}{x} + 1$$

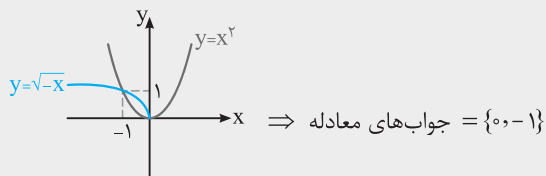
مثال

به کمک رسم نمودار، معادله $x^2 - \sqrt{-x} = 0$ را حل کنید.

پاسخ: برای حل معادله، نمودار توابع $y = x^2$ و $y = \sqrt{-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تقاطع، جواب‌های

$$x^2 - \sqrt{-x} = 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt{-x}$$

معادله‌اند:



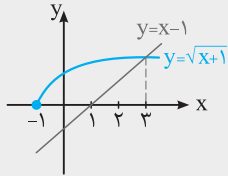
$$\Rightarrow \text{جواب‌های معادله} = \{0, -1\}$$

درسنامه ۱

مثال

به روش هندسی، نامعادله $\sqrt{x+1} \geq x-1$ را حل کنید.

پاسخ: باید نقاطی را بیابیم که در آن نقاط، نمودار $y = \sqrt{x+1}$ بالا یا روی نمودار $y = x-1$ قرار دارند:

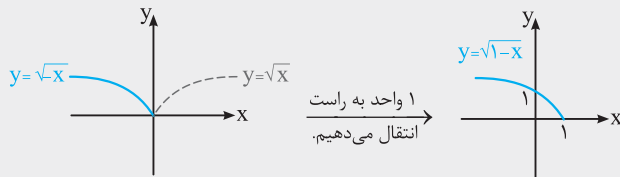


\Rightarrow مجموعه جواب $= \{-1 \leq x \leq 3\}$

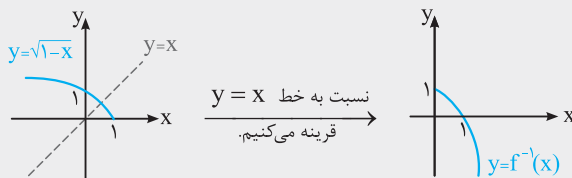
مثال

با رسم نمودار $f(x) = \sqrt{1-x}$ وارون پذیری تابع f را بررسی کنید. در صورت وارون پذیری نمودار تابع وارون آن را رسم کنید.

پاسخ: نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \sqrt{-x}$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را ۱ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{1-x}$ به دست آید.



با توجه به نمودار f ، f یک به یک و وارون پذیر است و برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



سؤالات امتحانی

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

- (الفرداد ۹۷) (ا) برای رسم نمودار تابع $g(x) = -f(x)$ از روی نمودار تابع f ، کافی است نمودار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرد.
- (ب) نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = f(-x)$ ، نسبت به محور y ها قرینه‌اند.
- (پ) برای رسم تابع $g(x) = |x+1| - 2$ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ ، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به راست و ۲ واحد به پایین حرکت می‌کند.
- (دی ۹۶) (ت) اگر دامنه تابع f برابر $[-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ است.

۲. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

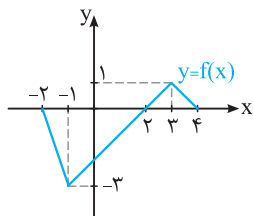
- (شهریور ۹۵) (ا) اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ باشد، برد این تابع مجموعه است.
- (۱) $[1, \sqrt{2}]$
- (۲) $[0, +\infty)$
- (ب) در رسم نمودار $y = f(ax)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار $y = f(x)$ در امتداد x ها می‌شود.
- (شهریور ۹۵) (۱) منبسط
- (۲) منقبض
- (ب) تابع $y = f(x)$ را با دامنه $[-2, 1]$ در نظر بگیرید. دامنه تابع $g(x) = -f(2x) + 1$ بازه است.
- (فرداد ۹۴) (۱) $[-4, 2]$
- (۲) $[-1, \frac{1}{4}]$
- (ت) در رسم نمودار $y = af(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار f در امتداد محور می‌گردد.
- (۱) y ها، منبسط
- (۲) x ها، منبسط
- (۳) y ها، منقبض
- (۴) x ها، منقبض

– نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

(برگرفته از کتاب درسی)

۳. $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ۴. $y = 1 - 2 \cos x$ ۵. $y = -2^{x-2} + 1$ ۶. $y = -\log(x+1)$
۷. $y = 3x^2 + 1$ ۸. $y = \frac{-1}{4}x^2 - 1$ ۹. $y = 1 - \cos 2x$ ۱۰. $y = 2 - \sqrt{x-2}$
۱۱. $y = 2\sqrt{-2x}$ ۱۲. $y = -2\sqrt{x+1}$ ۱۳. $y = -\sqrt{\frac{x}{2}}$ ۱۴. $y = 1 + \sqrt{-x+1}$

(برگرفته از کتاب درسی)



۱۵. نمودار تابع f داده شده است، به کمک آن نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.
- (آ) $y = f(-x)$ (ب) $y = -2f(x)$
- (پ) $y = -f(x-1) + 1$ (ت) $y = f(2x-4)$
- (ث) $y = f(2-x)$ (ج) $y = 1 - \frac{1}{3}f(x)$

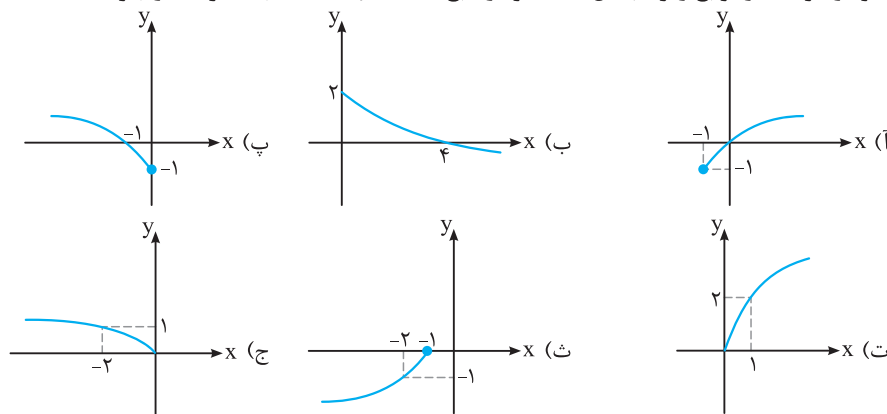
۱۶. نمودار تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید، سپس به کمک نمودار f ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و با نمودار f مقایسه کنید.

(برگرفته از کتاب درسی)

- (آ) $y = f(-x)$ (ب) $y = -f(x)$ (پ) $y = -f(-x)$ (ت) $y = 2f(x)$
- (ث) $y = \frac{1}{4}f(x)$ (ج) $y = f(2x)$ (چ) $y = -2f(\frac{x}{2})$ (ح) $y = \frac{1}{4}f(-2x)$

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۷. نمودار هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ است. ضابطه هر یک را بنویسید.



(فرداد ۹۷)

۱۸. به کمک رسم نمودار، تعداد ریشه‌های معادله $|x-3| = \sqrt{5-x}$ را بیابید.

(شهریور ۹۶ و شهریور ۹۲)

۱۹. با رسم نمودار، معادله $\sqrt{x+1} = x-1$ را حل کنید.

(دی ۹۴)

۲۰. معادله $|x| = \sqrt{2+x}$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

(فرداد ۹۱)

۲۱. معادله $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کنید.

(شهریور ۹۱ و مشتبه دی ۸۹)

۲۲. معادله $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید.

(شهریور ۹۰)

۲۳. نامعادله $x^2 \leq |x|$ را به روش هندسی حل کنید.

(شهریور ۹۴)

۲۴. نامعادله $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$ را با روش هندسی حل کنید.

۲۵. نامعادله $x+1 < |x|$ را به روش هندسی حل کنید.

۲۶. با رسم نمودار، نامعادله $|x+1| < x^2 - 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نمایش دهید. (دی ۹۶ و مشابه فراداد ۹۶)

۲۷. نامعادله $2^x \leq |x-1|$ را به روش هندسی (رسم نمودار) حل کنید.

۲۸. نامعادله $\log_{0.5} x \leq |x-1|$ را به روش هندسی حل کنید.

۲۹. نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ وارون پذیر است. سپس نمودار و ضابطه وارون آن را بنویسید. (مشابه فراداد ۹۷)

۳۰. با رسم نمودار، وارون پذیری $y = \sqrt{x+2} - 3$ را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را بیابید. (شهریور ۹۵)

۳۱. با رسم نمودار، وارون پذیری تابع $y = \sqrt{x+3} + 5$ را بررسی کنید و نمودار و ضابطه وارون آن را به دست آورید. (مشابه شهریور ۹۲)

۳۲. وارون پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4$ را روی دامنه $\{x > 0\}$ بررسی کنید و ضابطه و نمودار تابع وارون را به دست آورید. (دی ۹۶)

۳۳. ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2$ روی $x \geq 2$ وارون پذیر است. سپس ضابطه وارون آن را بیابید. (فراداد ۹۱)

۳۴. وارون پذیری تابع $g(x) = \frac{2}{x+3}$ را با رسم شکل بررسی کنید. (شهریور ۹۶)

۳۵. به کمک رسم نمودار وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید. (فراداد ۹۴)

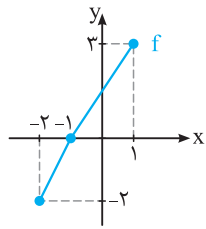
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۳۶. نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن وارون پذیری تابع را بررسی کنید. در صورت وارون پذیری، نمودار و ضابطه وارون f را تعیین کنید. (فراداد ۸۹)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^3 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۳۷. نقطه $(-3, 1)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. در تابع $g(x) = -f(2x)$ این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌گردد؟ (شهریور ۹۶)

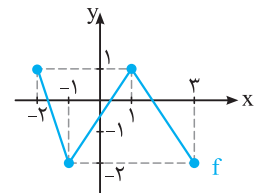
۳۸. نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است:



(آ) دامنه تابع $g(x) = f(\frac{x}{2})$ را تعیین کنید.

(ب) نمودار $h(x) = f(-x) + 1$ را رسم کنید.

۳۹. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. با استفاده از تبدیل نمودار، نمودار



(شهریور ۹۴)

تابع $y = f(\frac{1}{3}x) + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

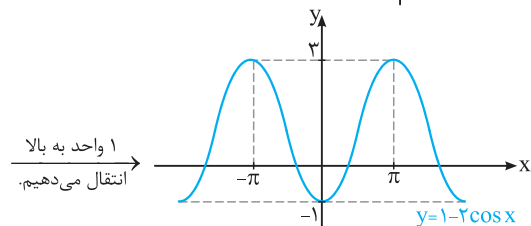
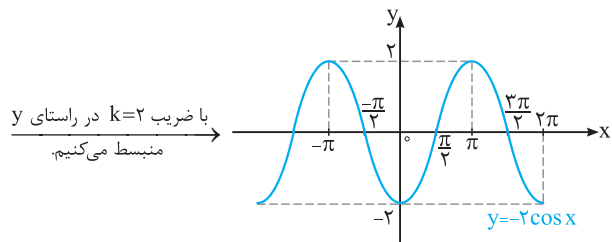
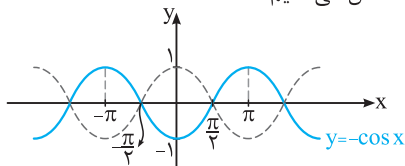
۴۰. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-1|$ را با دامنه $[0, 2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را بیابید. (شهریور ۹۳)

۴۱. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-3|$ را در بازه $[2, 4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع $y = f(-x)$ را رسم کنید. (دی ۹۱)

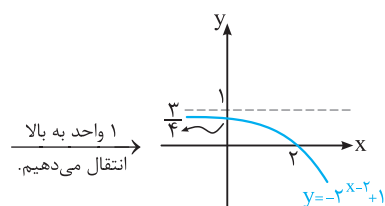
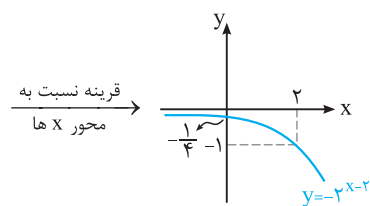
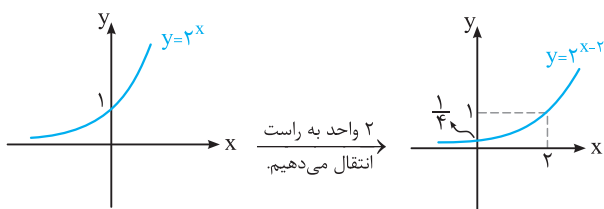
۴۲. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (فراداد ۹۲)

پاسخ‌های تشریحی

۴ نمودار $y = \cos x$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -\cos x$ به دست آید. سپس با ضریب ۲ در راستای y منبسط کرده و سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۵ برای رسم نمودار $y = -2^{x-2} + 1$ ، کافی است نمودار $y = 2^x$ را ۲ واحد به راست برده سپس نسبت به محور x ها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا انتقال دهیم:



۱ درست است. برای رسم $g(x) = -f(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار f را قرینه کنیم. بنابراین نمودار f را نسبت به محور x ها (طول‌ها) قرینه می‌کنیم.

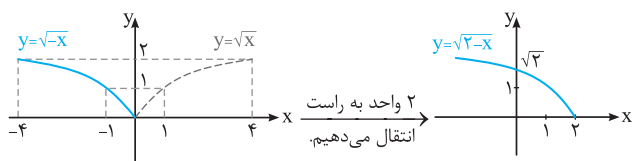
ب) درست است. چون x ها قرینه می‌گردد.

پ) نادرست است. برای رسم نمودار g ، نمودار f را ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

ت) درست است. زیرا داریم:

$$-1 \leq 2x \leq 3 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow D_g = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

۲ با رسم نمودار تابع f داریم:



بنابراین برد تابع برابر با $[0, +\infty)$ است.

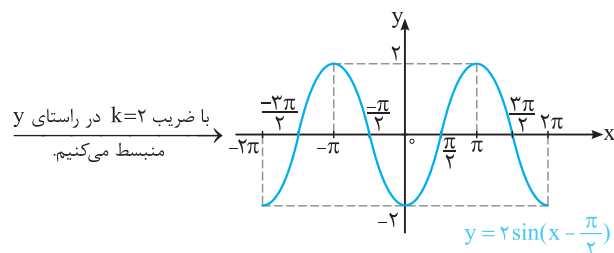
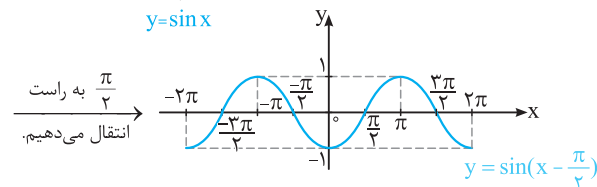
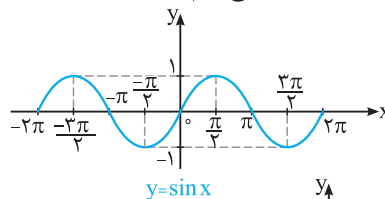
ب) اگر $0 < a < 1$ ، برای رسم $y = f(ax)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را با ضریب $\frac{1}{a} > 1$ در راستای x ها منبسط کنیم.

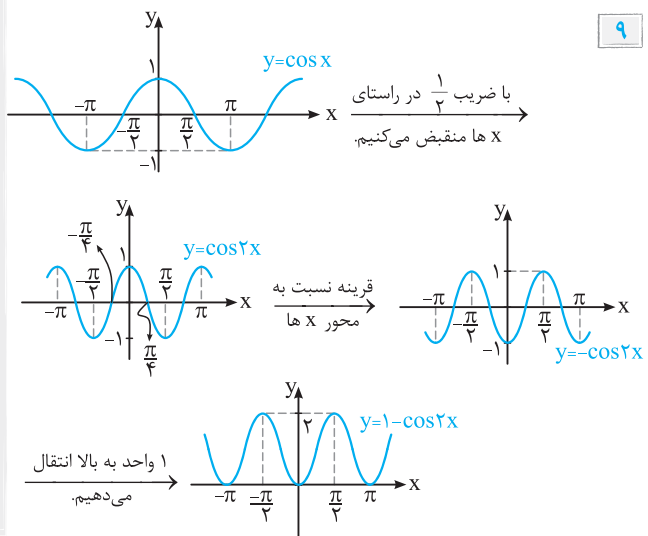
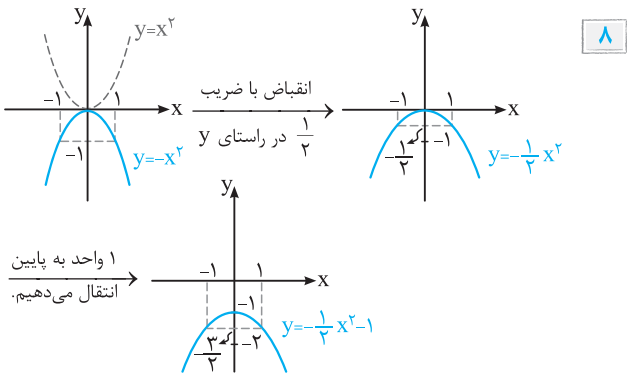
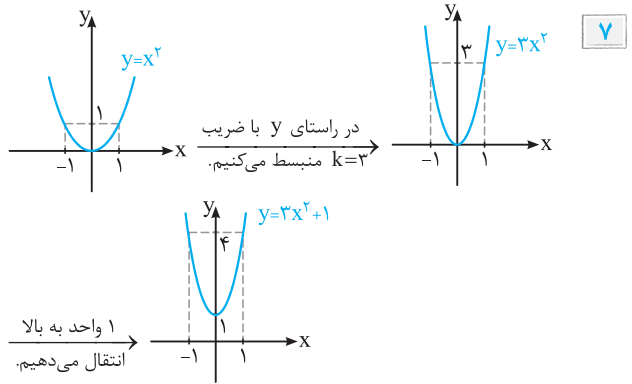
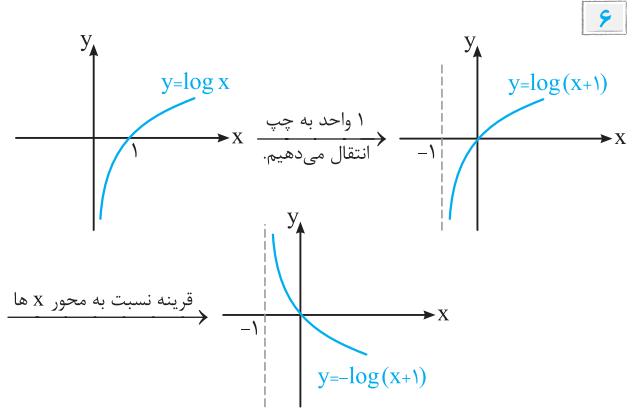
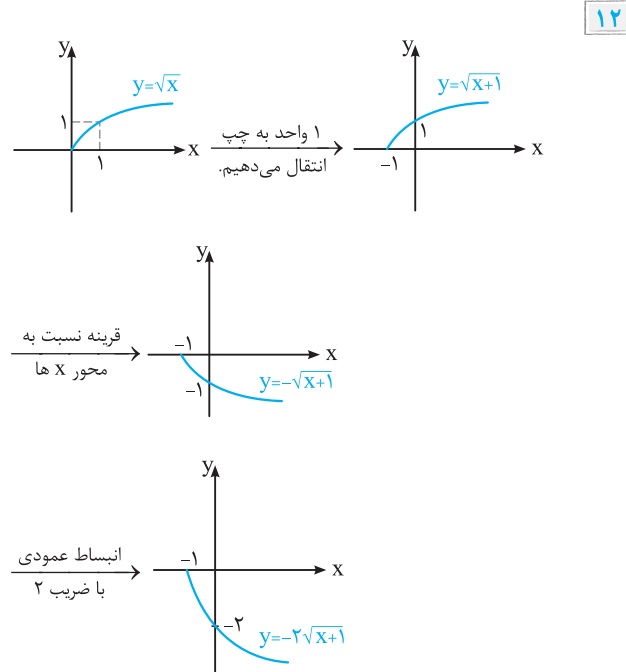
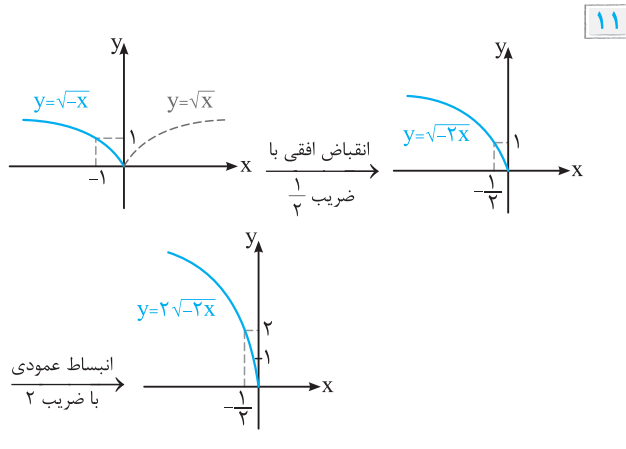
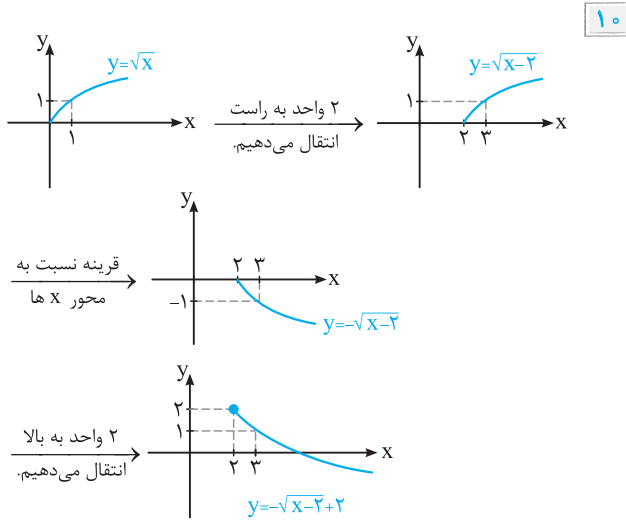
پ) باید $(2x)$ در دامنه تابع f قرار گیرد:

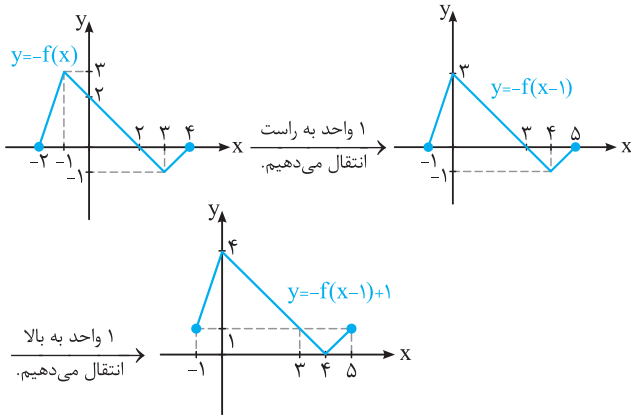
$$D_g = [-1, \frac{1}{2}] \xrightarrow{\div 2} -2 \leq 2x \leq 1$$

ت) برای رسم $y = af(x)$ وقتی $0 < a < 1$ ، نمودار f را در راستای y ها منقبض می‌کنیم.

۳ نمودار $y = \sin x$ را $\frac{\pi}{2}$ به راست انتقال می‌دهیم و سپس در راستای محور y ها، با ضریب $k=2$ منبسط می‌کنیم:

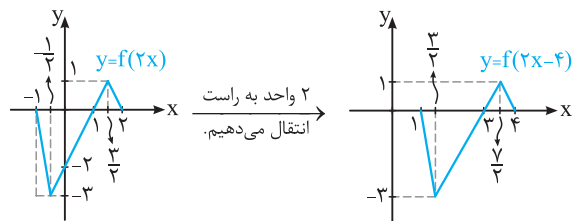






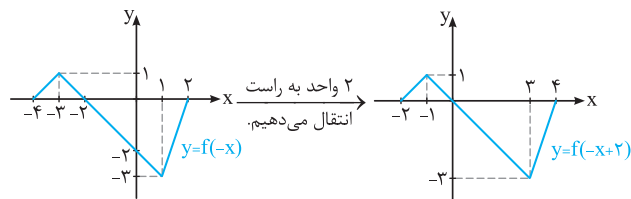
$y = f(2x - 4) = f(2(x - 2))$ (ت)

نمودار f را در راستای افقی با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌کنیم تا نمودار $y = f(2x)$ به دست آید، سپس 2 واحد به راست انتقال می‌دهیم:



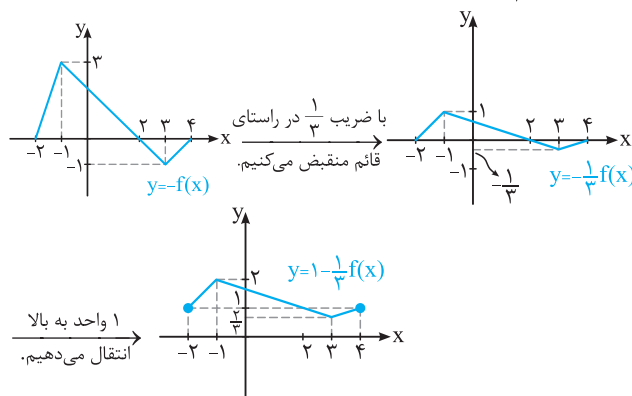
(ث) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = f(-x)$ به دست آید، سپس 2 واحد به راست انتقال می‌دهیم:

$y = f(-x + 2) = f(-(x - 2))$

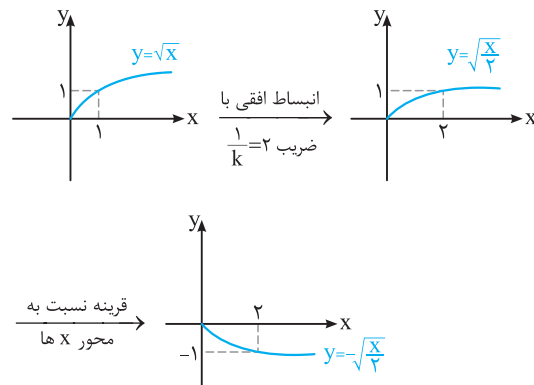


(ج) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید، سپس با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای قائم (عمودی) منقبض می‌کنیم تا نمودار $y = -\frac{1}{3}f(x)$ به دست آید و در نهایت 1 واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

نمودار $y = -\frac{1}{3}f(x)$ به دست آید و در نهایت 1 واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

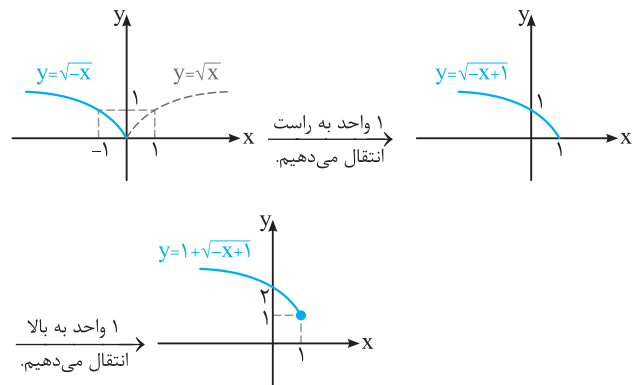


13



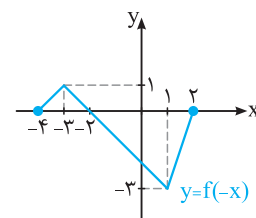
14

$y = 1 + \sqrt{-x+1} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{-(x-1)}$

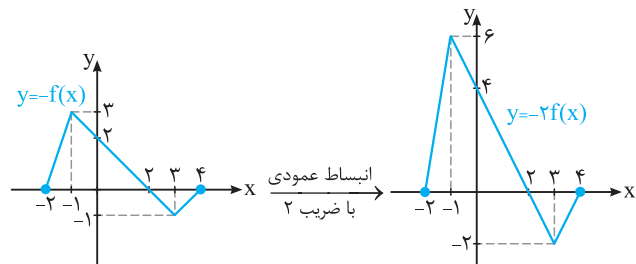


15

(آ) برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

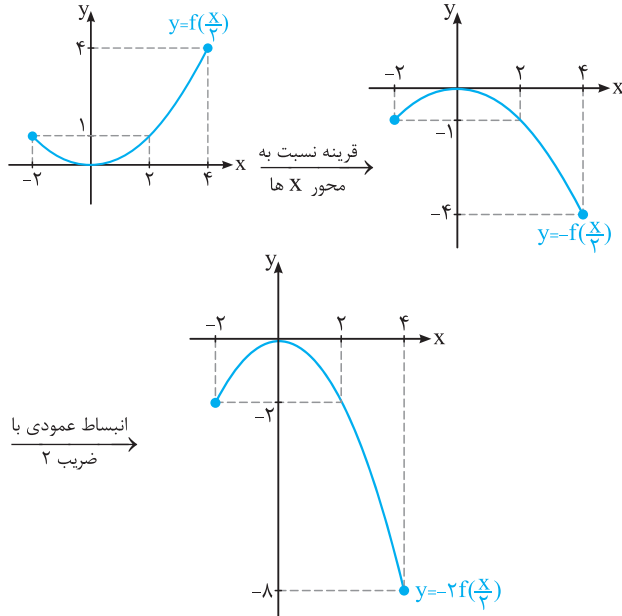


(ب) برای رسم نمودار $y = -2f(x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، سپس با ضریب 2 در راستای محور y منبسط می‌کنیم:

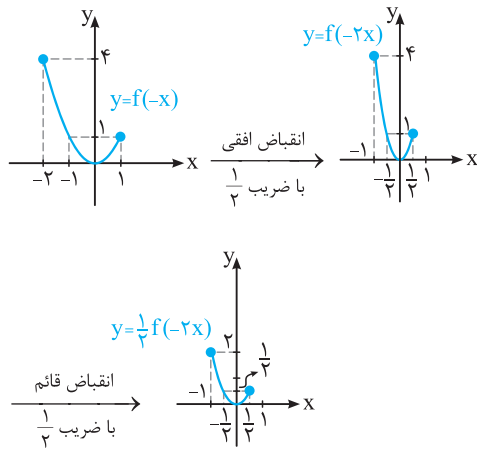


(پ) نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرده تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید و سپس 1 واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = -f(x-1)$ به دست آید و در نهایت 1 واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

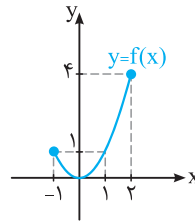
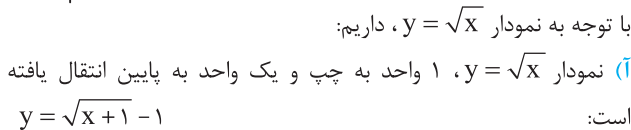
ج) برای رسم نمودار $y = -2f(\frac{x}{2})$ ، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط می‌کنیم، سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه و در نهایت با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



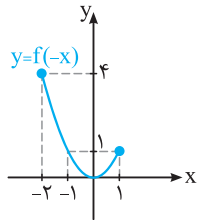
ح) برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2}f(-2x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم و با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم و در نهایت با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:



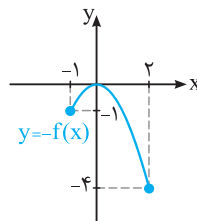
۱۷) نمودار $y = \sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



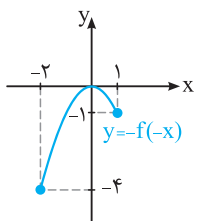
۱۶) ابتدا نمودار $y = x^2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم می‌کنیم:



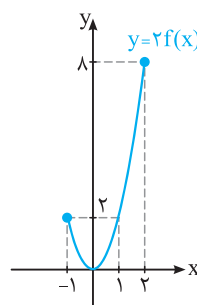
آ) برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:



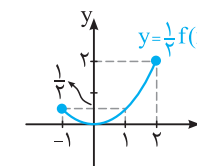
ب) برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



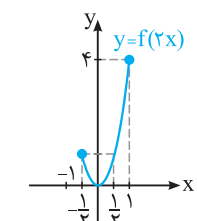
پ) برای رسم نمودار $y = -f(-x)$ ، نمودار f را نسبت به محور x ها و y ها قرینه می‌کنیم:



ت) برای رسم نمودار $y = 2f(x)$ ، نمودار f را با ضریب ۲ در راستای قائم منبسط می‌کنیم:



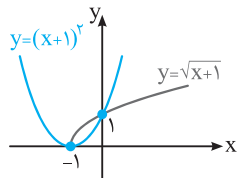
ث) برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2}f(x)$ ، نمودار f را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای قائم منقبض می‌کنیم:



ج) برای رسم نمودار $y = f(2x)$ ، نمودار f را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم:

21 $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = (x+1)^2$

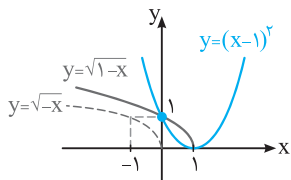
برای رسم $y = (x+1)^2$ نمودار $y = x^2$ را 1 واحد به چپ منتقل می‌کنیم و برای رسم $y = \sqrt{x+1}$ نمودار $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم:



\Rightarrow ریشه‌های معادله: $x = 0, x = -1$

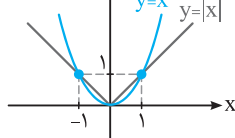
22 $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$

$\Rightarrow \sqrt{-x+1} = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{-(x-1)} = (x-1)^2$



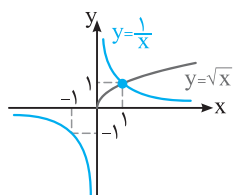
دارای جواب‌های $x = 1, x = 0$ است.

23 باید طول نقاطی را بیابیم که نمودار $y = x^2$ پایین یا روی $y = |x|$ قرار دارند:



\Rightarrow مجموعه جواب $= \{-1 \leq x \leq 1\}$

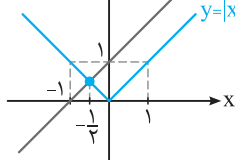
24 باید طول نقاطی را بیابیم که نمودار $y = \frac{1}{x}$ بالای $y = \sqrt{x}$ قرار نداشته باشد، یعنی $y = \frac{1}{x}$ پایین یا مساوی $y = \sqrt{x}$ باشد:



\Rightarrow مجموعه جواب $= \{x \geq 1\}$

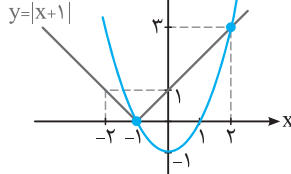
توجه کنید که برای $x < 0, y = \sqrt{x}$ وجود ندارد، پس مجموعه جواب را فقط برای $x \geq 0$ ، یعنی دامنه مشترک دو تابع می‌یابیم.

25 باید مجموعه نقاطی را که نمودار $y = x + 1$ پایین نمودار $y = |x|$ قرار دارد، بیابیم:



\Rightarrow جواب نامعادله $= \{x < -\frac{1}{3}\}$

26 باید طول نقاطی را بیابیم که نمودار $y = |x+1|$ پایین نمودار $y = x^2 - 1$ قرار دارد.



\Rightarrow مجموعه جواب $= \{x < -1 \text{ یا } x > 2\} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

ب) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور x ها قرینه شده و سپس دو واحد به بالا انتقال یافته است:

$y = -\sqrt{x} + 2$

پ) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور y ها قرینه شده و سپس یک واحد به پایین انتقال یافته است:

$y = \sqrt{-x} - 1$

ت) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، در راستای قائم با ضریب 2 منبسط شده است:

$y = 2\sqrt{x}$

ث) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور x ها و y ها قرینه شده و سپس 1 واحد به چپ انتقال یافته است:

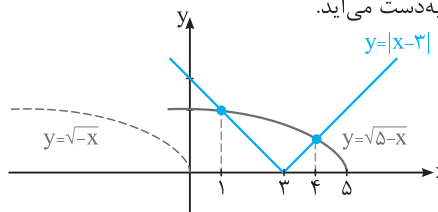
$y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{انتقال می‌دهیم.}]{\text{واحد به چپ}} y = -\sqrt{-(x+1)} \Rightarrow y = -\sqrt{-x-1}$

ج) نمودار $y = \sqrt{x}$ ، نسبت به محور y ها قرینه شده و با ضریب 2 در راستای افقی منبسط شده است:

$y = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{ضریب 2}]{\text{انبساط افقی}} y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$

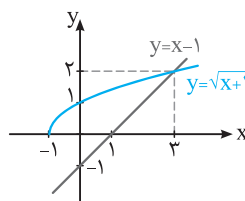
18 هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

نمودار $y = \sqrt{5-x} = \sqrt{-(x-5)}$ از انتقال $y = \sqrt{-x}$ به اندازه 5 واحد به راست به دست می‌آید و نمودار $y = |x-3|$ از انتقال $y = |x|$ به اندازه 3 واحد به راست به دست می‌آید.



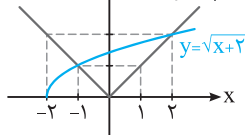
بنابراین این دو نمودار در نقاط به طول $x_1 = 1$ و $x_2 = 4$ یکدیگر را قطع می‌کنند و لذا معادله دارای دو ریشه $x = 1$ و $x = 4$ می‌باشد.

19 $y = \sqrt{x+1}$ از انتقال $y = \sqrt{x}$ به اندازه 1 واحد به چپ به دست می‌آید:



\Rightarrow جواب معادله $= x = 3$

20 روش هندسی: نمودار $y = \sqrt{2+x}$ و $y = |x|$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



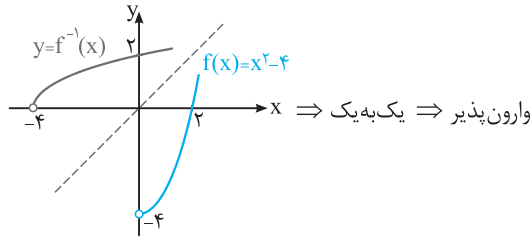
\Rightarrow طول نقاط تقاطع = ریشه‌های معادله $= \{-1, 2\}$

روش جبری:

$\sqrt{2+x} = |x| \xrightarrow{\text{به توان 2}} 2+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

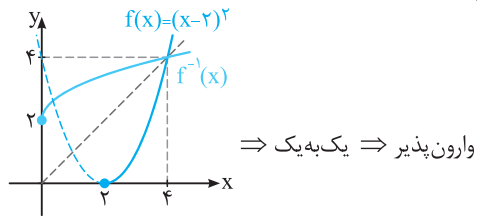
۳۲ نمودار $y = x^2$ را ۴ واحد به پایین انتقال می‌دهیم، با شرط $x > 0$ داریم:



$$y = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 = y + 4 \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{y + 4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}; (x \geq -4)$$

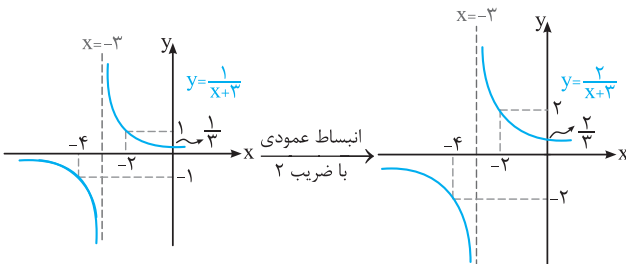
۳۳ نمودار $y = x^2$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم و با شرط $x \geq 2$ داریم:



$$y = (x - 2)^2 \Rightarrow |x - 2| = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq 2} x - 2 = \sqrt{y}$$

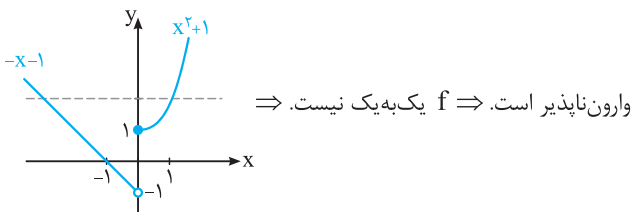
$$\Rightarrow x = 2 + \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}; (x \geq 0)$$

۳۴ برای رسم $g(x) = 2\left(\frac{1}{x+3}\right)$ کافی است نمودار $y = \frac{1}{x}$ را ۳ واحد به چپ انتقال دهیم، سپس با ضریب ۲ انبساط عمودی دهیم:

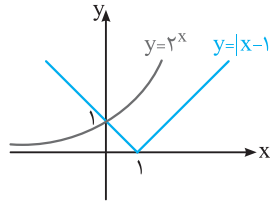


بنابراین یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است.

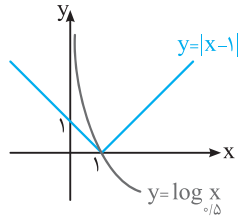
۳۵ هر کدام از ضابطه‌ها را روی دامنه مربوط به خودش رسم می‌کنیم. برای رسم $y = x^2 + 1$ نمودار $y = x^2$ را ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



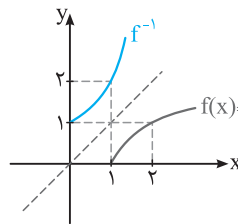
۲۷ باید طول نقاطی را که نمودار $y = |x - 1|$ پایین تر یا مساوی نمودار $y = 2^x$ می‌باشد، بیابیم: مجموعه جواب $\Rightarrow \{x \geq 0\}$



۲۸ طول نقاطی را که نمودار $y = |x - 1|$ پایین تر یا مساوی نمودار $y = \log_{0.5} x$ می‌باشد، بیابیم: مجموعه جواب $\Rightarrow \{0 < x \leq 1\} = (0, 1]$



۲۹ نمودار $y = \sqrt{x - 1}$ را با انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ به اندازه ۱ واحد به راست رسم می‌کنیم:



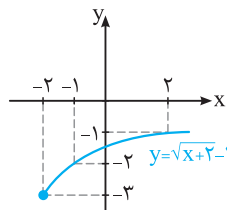
هر خط موازی محور x ها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است و ضابطه وارون آن عبارت است از:

$$y = \sqrt{x - 1} \Rightarrow y^2 = x - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1 (x \geq 0)$$

توجه کنید که دامنه f^{-1} با برد f برابر است.

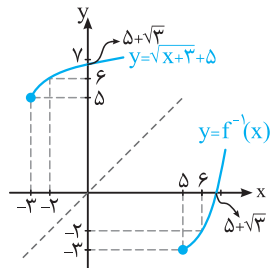
۳۰ نمودار $y = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم: وارون پذیر \Rightarrow یک به یک



$$y = \sqrt{x + 2} - 3 \Rightarrow \sqrt{x + 2} = y + 3 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x + 2 = (y + 3)^2$$

$$\Rightarrow x = (y + 3)^2 - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x + 3)^2 - 2; (x \geq -3)$$

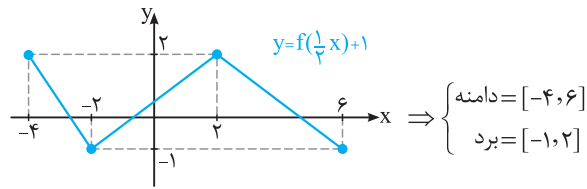
۳۱ نمودار $y = \sqrt{x}$ را ۳ واحد به چپ و ۵ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



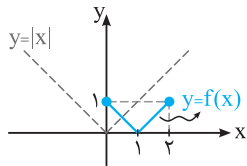
وارون پذیر \Rightarrow یک به یک

$$y = \sqrt{x + 3} + 5 \Rightarrow \sqrt{x + 3} = y - 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x + 3 = (y - 5)^2$$

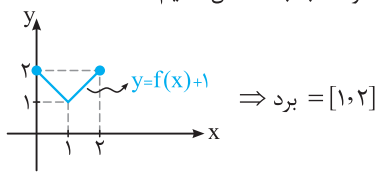
$$\Rightarrow x = (y - 5)^2 - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 5)^2 - 3; (x \geq 5)$$



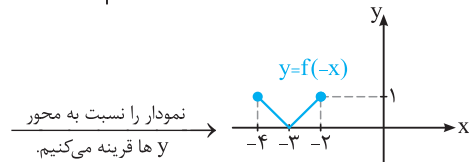
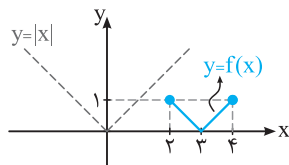
۴۰



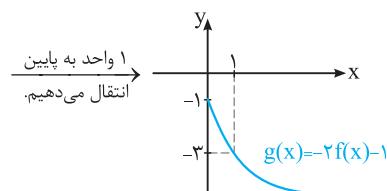
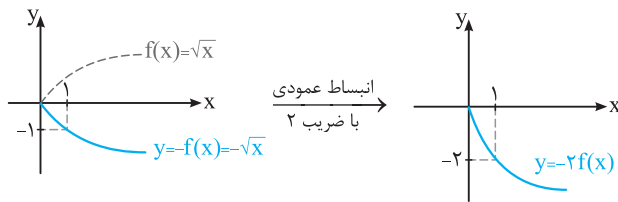
حال کافی است نمودار f را یک واحد به بالا انتقال دهیم.



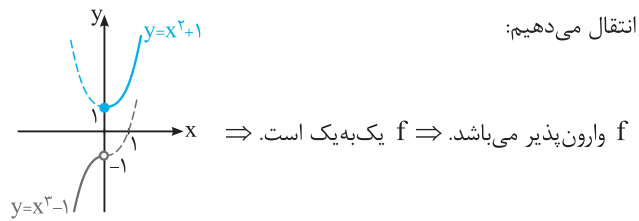
۴۱



۴۲ کافی است نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم تا نمودار $y = -\sqrt{x}$ به دست آید. سپس با ضریب ۲ در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و در نهایت ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



۳۶ برای رسم $y = x^2 + 1$ ، نمودار $y = x^2$ را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم و برای رسم $y = x^3 - 1$ نمودار $y = x^3$ را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y - 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} \quad (x \geq 1)$$

$$y = x^3 - 1 \Rightarrow x^3 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y + 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}, \quad (x < -1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & x \geq 1 \\ \sqrt[3]{x + 1} & x < -1 \end{cases}$$

۳۷ اگر نمودار f را با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای افقی منقبض کنیم و در نهایت نسبت به محور x ها قرینه کنیم، نمودار g به دست می‌آید:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{ضریب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض افقی با}} h(x) = f(3x)$$

$$\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} g(x) = -f(3x)$$

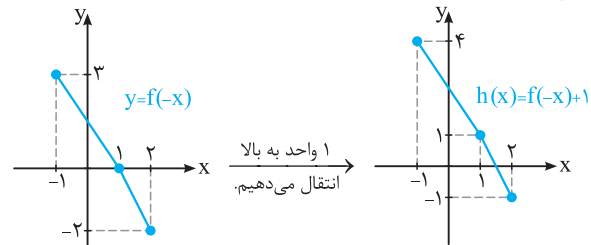
$$f(-3) = 1 \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} h\left(-\frac{3}{3}\right) = 1 \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{انقباض افقی}} g\left(-\frac{3}{3}\right) = -1$$

بنابراین این نقطه به نقطه $\left(-\frac{3}{3}, -1\right)$ متناظر می‌گردد.

$D_f = [-2, 1]$ (۳۸ آ)

$$-2 \leq \frac{x}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -4 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_g = [-4, 3]$$

ب) نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



۳۹ نمودار f را در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم، سپس ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:

