

| | | |
|-----|-----|--|
| ۱۴۲ | ۸ | فصل اول: مجموعه‌ها |
| ۱۴۳ | ۱۴ | فصل دوم: الگو و دنباله |
| ۱۴۴ | ۱۹ | فصل سوم: هندسه تحلیلی |
| ۱۴۵ | ۲۵ | فصل چهارم: معادله درجه دو و تابع درجه دو |
| ۱۴۷ | ۳۴ | فصل پنجم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری |
| ۱۴۸ | ۴۰ | فصل ششم: معادله و نامعادله |
| ۱۴۹ | ۴۶ | فصل هفتم: تابع |
| ۱۵۸ | ۶۲ | فصل هشتم: توابع نمایی و لگاریتمی |
| ۱۶۰ | ۶۷ | فصل نهم: مثلثات |
| ۱۶۶ | ۷۹ | فصل دهم: حد و پیوستگی |
| ۱۷۲ | ۸۹ | فصل یازدهم: مشتق |
| ۱۷۶ | ۹۶ | فصل دوازدهم: کاربرد مشتق |
| ۱۷۸ | ۱۰۵ | فصل سیزدهم: شمارش، بدون شمردن |
| ۱۷۹ | ۱۱۰ | فصل چهاردهم: احتمال |
| ۱۸۴ | ۱۱۶ | فصل پانزدهم: آمار |
| ۱۸۷ | ۱۲۰ | فصل شانزدهم: هندسه |
| ۱۹۶ | ۱۲۹ | فصل هفدهم: مقاطع مخروطی |



فصل هشتم: توابع نمایی و لگاریتمی

★ اشاره

این فصل، یکی از آسون‌ترین فصلهای ریاضیات که به راحتی می‌توانید سوالاتش را حل کنید. چیزی که مهمه توی این فصل بهوش توجه کنید، دامنه لگاریتمه. هم‌پنین یادتون باشه برای حل نامعادلات نمایی، هتماً به پایه و برای حل نامعادلات لگاریتمی هتماً به مبنا دقت کنید؛ چون ممکنه جهت نامساوی رو عوض کنن. تازه! برای حل معادلات نمایی، فیلی وقتا می‌تونید از تغییر متغیر استفاده کنید.

تابع نمایی

قوانین مربوط به توان:

| | | | |
|---|---|----------------------------|-----|
| $a^m \div a^n = a^{m-n}$ | ب | $a^m \times a^n = a^{m+n}$ | الف |
| $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ | ت | $a^m \times b^m = (ab)^m$ | پ |
| $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ | ج | $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ | ث |
| $(a^m)^n = a^{mn}$ | ز | $a^0 = 1, a \neq 0$ | چ |

۲ **تابع نمایی:** هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ را که $a > 0$ و $a \neq 1$ است،

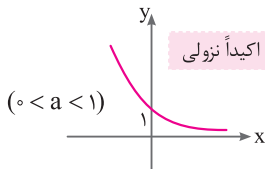
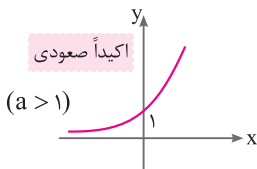
یک تابع نمایی می‌نامند.

♦ در حالت کلی هر تابع با ضابطه $y = ka^{bx+c}$ ($b \neq 0, a \neq 1, a > 0, k \neq 0$)

رفتار نمایی دارد. در این حالت x باید فقط در توان باشد و پایه توان و ضرایب

دیگر، اعدادی ثابت هستند.

۳ نمودار تابع $y = a^x$



◆ دامنه تابع نمایی، \mathbb{R} و برد آن، $(0, +\infty)$ است.

◆ تابع نمایی یک به یک و وارون پذیر است.

◆ تابع نمایی از نقطه $(0, 1)$ می‌گذرد.

◆ در حالت $a > 1$: با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز زیاد می‌شود.

◆ در حالت $0 < a < 1$: با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد.

◆ نمودار توابع با ضابطه $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0, a \neq 1$) نسبت به محور y ها قرینه‌اند.

۴ تابع با ضابطه $y = ka^x$ ($a > 0, a \neq 1$) یک ویژگی منحصر به فرد

دارد. اگر x های داده شده به تابع تشکیل دنباله حسابی (با قدر نسبت d) دهند، y های

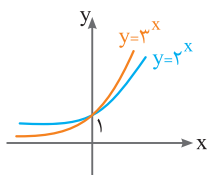
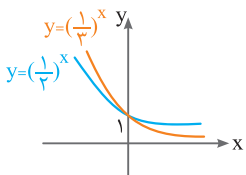
متناظر آن‌ها تشکیل دنباله هندسی (با قدر نسبت r) خواهند داد. داریم: $r = a^d$

۵ در یک دوره مسابقات جام حذفی داریم: تعداد مراحل ۲ = تعداد تیم‌ها

نکته: فرمول محاسبه نیمه عمر:

$$\text{جرم اولیه} \times \frac{\text{زمان طی شده}}{\text{نیمه عمر}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \text{جرم باقی مانده}$$

۶ به دو شکل زیر دقت کنید:





حل معادلات و نامعادلات نمایی

حل معادلات نمایی به سه دسته تبدیل می‌شوند:

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y$$

الف

ب استفاده از تغییر متغیر: به مثال زیر دقت کنید:

$$2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0 \xrightarrow{2^x = t} t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 = 2^0 \Rightarrow x = 0$$

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

پ لگاریتم‌گیری:

$$2^x - 1 = 5 \Rightarrow 2^x = 6 \Rightarrow \log_2 2^x = \log_2 6 \Rightarrow x = \log_2 6$$

مثال:

نامعادلات نمایی: به دو دسته تقسیم می‌شوند:

$$a^x \geq a^y \xrightarrow{0 < a < 1} x \leq y \quad \text{ب} \quad a^x \geq a^y \xrightarrow{a > 1} x \geq y \quad \text{الف}$$

نکته: اگر $c > b > a > 0$ باشد، آن‌گاه:

$$c^x < b^x < a^x \quad \text{الف} \quad \text{اگر } x > 0 \quad c^x > b^x > a^x \quad \text{ب} \quad \text{اگر } x < 0$$

تابع لگاریتمی

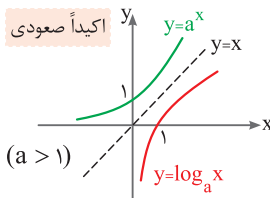
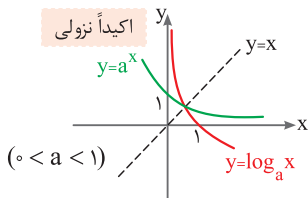
۹ وارون تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان

می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارتی اگر $a > 0$ و $a \neq 1$

$$f^{-1}(x) = \log_a x \Leftrightarrow f(x) = a^x$$

باشد، داریم:

۱۰ نمودار تابع $y = \log_a x$:



◆ دامنه تابع لگاریتمی، $(0, +\infty)$ و برد آن \mathbb{R} است.

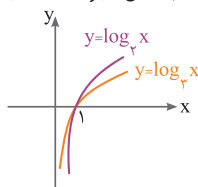
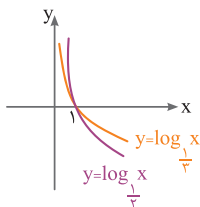
◆ تابع لگاریتمی یک به یک و وارون پذیر است.

◆ تابع لگاریتمی از نقطه $(1, 0)$ می گذرد.

◆ اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می یابد.

◆ اگر $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می یابد.

◆ به دو شکل زیر دقت کنید:



◆ دامنه توابع لگاریتمی:

$$y = \log_B A \Rightarrow D = (A > 0) \cap (B > 0) \cap (B \neq 1)$$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

◆ اگر مبنای لگاریتم، 10 باشد، مبنا را نمی نویسیم و به آن لگاریتم اعشاری

$$\log_{10} x = \log x$$

می گوئیم:

◆ قوانین لگاریتم:

| | |
|---|--|
| $\log_a a = 1$ (ب) | $\log_a 1 = 0$ (الف) |
| $\log_a A + \log_a B = \log_a AB$ (ت) | $\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$ (پ) |
| $\log_B A = \frac{\log_c A}{\log_c B}$ (ج) | $\log_{B^n} A^m = \frac{m}{n} \log_B A$ (ث) |
| $A^{\log_c B} = B^{\log_c A}$ (ح) | $\log_B A = \frac{1}{\log_A B}$ (چ) |
| $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a$ (خ) | |



۱۶ خوب است بدانید:

$$\log 2 = 1 - \log 5, \log 5 = 1 - \log 2$$

۱۷ برای تعیین محدوده $\log_b a$ ، ابتدا باید a را بین دو توان صحیح و

متوالی از b قرار دهید ($b^k < a < b^{k+1}$)، سپس از طرفین نامساوی به دست آمده، لگاریتم در مبنای b بگیرید.

۱۸ معادلات لگاریتمی:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، داریم:

۱۹ نامعادلات لگاریتمی:

چهار حالت داریم:

$$\log_a x \geq \log_a y \xrightarrow{a > 1} x \geq y$$

$$\log_a x \geq \log_a y \xrightarrow{0 < a < 1} x \leq y$$

$$\log_a x \geq y \xrightarrow{a > 1} x \geq a^y$$

$$\log_a x \geq y \xrightarrow{0 < a < 1} x \leq a^y$$

نکته: اگر $a > b > a > 0$ باشد، آن گاه:

$$\log_c x < \log_b x < \log_a x \quad \text{الف اگر } x > 1$$

$$\log_c x > \log_b x > \log_a x \quad \text{ب اگر } 0 < x < 1$$

۲۰ کاربرد لگاریتم در زلزله:

$$\log E = 1.178 + 1.5 M$$

M عدد زلزله بر حسب ریشتر و E میزان انرژی آزاد شده بر حسب اِرج (Erg) است.

الف

ب

پ

ت

نکته

الف

ب



فصل نهم: مثلثات



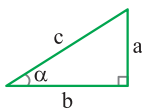
★ اشاره

واقعیتش رو بفوام! بگم و باهاتون روراست باشم، تعداد کسانی که مثلثات رو دوست ندارن، زیاده! چون ریزه کاری داره و درصد فطاش یه مقدار بالاست. اما آگه یه ذره دقت و مهارت داشته باشین همه مشکلات حل میشه. پیزی که مومه، دیدن سؤالی مفتلف و آشنا بودن با سؤالاس.

فرمول های مفیدی رو که برای تستا لازمتون میشه، توی درسنامه براتون آوردم. برای حل سؤالا، اول سؤال رو با دقت بفونین و اطلاعاتش رو استخراج کنین. از اطلاعات هر سؤال متوجه میشین که بوتره از کدوم فرمول و رابطه استفاده کنین. آگه به سؤالی کنگور این فعلل نگاه کنین، متوجه می شین طراهای کنگور علاقه زیادی به معادله مثلثاتی دارن. پس از دستش ندین و فاصله این که اگر این فصل رو جدی بگیرین، ضرر نمی کنین. (تازه توی فیزیک هم استفاده میشه، پقدر به فکر تونیم آفه! 😊)

دایره و نسبت های مثلثاتی

۱ نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه به صورت زیر است:

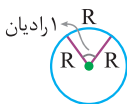


$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

۲ تبدیل درجه به رادیان و برعکس:

بر حسب رادیان $\leftarrow \frac{R}{2\pi} = \frac{D}{360}$ → بر حسب درجه



۳ رادیان: یک رادیان، اندازه زاویه مرکزی است که طول کمان

روبه رویش برابر شعاع دایره باشد. هر رادیان تقریباً $57/5^\circ$ است.



۴ طول کمان: در دایره‌ای به شعاع R ، اگر زاویه‌ای مرکزی برابر θ (برحسب رادیان) رسم کنیم، در این صورت **طول کمان** روبه‌روی آن زاویه برابر $R\theta$ خواهد بود.



$(L) = R\theta$ طول کمان

هم‌چنین اگر S را **مساحت قطاع** در نظر بگیریم، داریم:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} RL$$

نکته: زاویه بین عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|5/5 \text{ min} - 30 \cdot h|$$

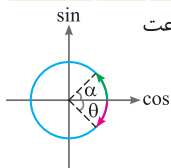
مثال: ساعت ۳ و ۴۰ دقیقه:

$$|5/5 \times 40 - 30 \times 3| = 13^\circ$$

که البته می‌توان گفت زاویه بین دو عقربه برابر $23^\circ = 36^\circ - 13^\circ$ نیز هست.

۵ نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم: (ت.ن = تعریف نشده)

| α | 0° | $\frac{\pi}{6}$ یا 30° | $\frac{\pi}{4}$ یا 45° | $\frac{\pi}{3}$ یا 60° | $\frac{\pi}{2}$ یا 90° | π یا 180° | $\frac{3\pi}{2}$ یا 270° | 2π یا 360° |
|---------------|-----------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------------|---------------------------------|-----------------------|
| نسبت | | | | | | | | |
| $\sin \alpha$ | ۰ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ۱ | ۰ | -۱ | ۰ |
| $\cos \alpha$ | ۱ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | ۰ | -۱ | ۰ | ۱ |
| $\tan \alpha$ | ۰ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ۱ | $\sqrt{3}$ | ت.ن | ۰ | ت.ن | ۰ |
| $\cot \alpha$ | ت.ن | $\sqrt{3}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | ۰ | ت.ن | ۰ | ت.ن |



۶ زاویه مثبت: حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

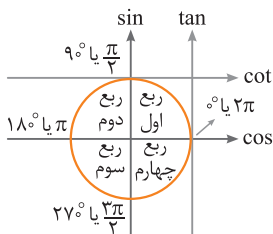
زاویه منفی: حرکت در جهت عقربه‌های ساعت

$\alpha \rightarrow$ زاویه‌ای مثبت

$\theta \rightarrow$ زاویه‌ای منفی

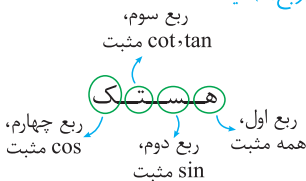
۷ دایره مثلثاتی و علامت‌ها:

| | |
|---|-------------------------------------|
| یا $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ربع اول | یا $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ |
| یا $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ربع دوم | یا $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ |
| یا $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ربع سوم | یا $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ |
| یا $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ربع چهارم | یا $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ |

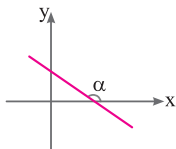


نکته: زوایای 0° ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π مرز نواحی مثلثاتی هستند، پس جزو هیچ کدام از ناحیه‌ها (ربع‌ها) نیستند.

♦ علامت‌ها:



۸ رابطه شیب خط و تانژانت:



$$m = \tan \alpha \quad (\text{شیب خط})$$

نکته: شیب خطوط افقی، صفر است چون $\tan 0^\circ = 0$ و شیب خطوط قائم، تعریف نشده است چون: $\tan 90^\circ = \text{تعریف نشده}$



روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{۹}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{۱۰}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad \text{۱۱}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{۱۲}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{۱۳}$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{۱۴}$$

$$(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = \cos^2 \alpha \quad \text{۱۵}$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad \text{۱۶}$$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad \text{۱۷}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \quad \text{۱۸}$$

$$(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{۱۹}$$

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

همهٔ نسبت‌های مثلثاتی، علامت منفی را از کمانِ مقابل خود به ضریب انتقال می‌دهند، به جز کسینوس. در واقع کسینوس منفی را می‌خورد پس:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha, \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

۲۱ در محاسبات مربوط به زاویه‌ها، به جای 2π و مضارب آن، صفر بگذارید.

پس داریم:

$$\sin(\overset{\circ}{2\pi} - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha - \overset{\circ}{4\pi}) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\overset{\circ}{12\pi}}{3} + \alpha\right) = \tan(\overset{\circ}{4\pi} + \alpha) = \tan \alpha$$

۲۲ زاویه در حضور π :

دو حالت داریم:

الف) نسبت‌های مثلثاتی $\pi - \alpha$ در ناحیه دوم قرار دارد:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

ب) نسبت‌های مثلثاتی $\pi + \alpha$ در ناحیه سوم قرار دارد:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha, \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

نکته: همواره در کمان‌ها به جای مضارب فرد π یعنی $3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$

بگذارید π .

۲۳ زاویه در حضور $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$:

چهار حالت داریم:

الف) نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{4} - \alpha$ در ناحیه اول قرار دارد:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

ب) نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{4} + \alpha$ در ناحیه دوم قرار دارد:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$



پ) نسبت‌های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ (در ناحیه سوم قرار دارد):

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

ت) نسبت‌های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ (در ناحیه چهارم قرار دارد):

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

۲۴) اگر داخل پرانتز کمان نسبتی، زاویه π دار منفی داشتید، کافی است آن را قرینه کرده و یک منفی بیرون آن نسبت، ضرب کنید به جز \cos .

$$\sin(\alpha - \gamma\pi) = -\sin(\gamma\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \pi - \alpha)$$

مثال:

$$= -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

۲۵) زوایای α و $\frac{\pi}{2} - \alpha$ متکم یکدیگرند و داریم:

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \sin 30^\circ = \cos 60^\circ, \quad \tan 0^\circ = \cot 90^\circ$$

مثال:

۲۶) زوایای α و $\pi - \alpha$ مکمل یکدیگرند و داریم:

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha), \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 45^\circ = \sin 135^\circ, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$$

مثال:

نسبت‌های مثلثاتی 2α

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{۲۷}$$

$$(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 \pm \sin 2\alpha \quad \text{۲۸}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \text{۲۹}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{فرمول طلایی: ۳۰}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{۳۱}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{۳۲}$$

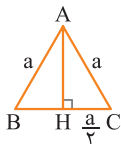
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{۳۳}$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha \quad \text{۳۴}$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad \text{۳۵}$$

برخی روابط در مثلث

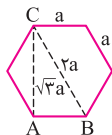
در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف وتر است. ۳۶



در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ، مساحت S و ۳۷

$$\text{ارتفاع } AH \text{ داریم: } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

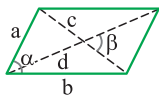
در شش‌ضلعی منتظم با ضلع a و مساحت S داریم: ۳۸



$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$(BC) = 2a \quad \text{طول قطر بزرگ}$$

$$(AC) = \sqrt{3}a \quad \text{طول قطر کوچک}$$



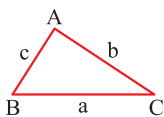
۴۹ مساحت متوازی الاضلاع: $S = ab \sin \alpha$

c و d قطرهای متوازی الاضلاع هستند:

$$S = \frac{1}{2} cd \sin \beta$$

نکته: مربع، مستطیل و لوزی نیز از این دو رابطه پیروی می کنند چون نوعی متوازی الاضلاع هستند.

۴۰ در هر مثلث دلخواه، مساحت برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:



$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \end{cases}$$

۴۱ مساحت هر مثلث با سه ضلع a, b و c طبق قاعده هرون برابر است با:

$$S_{\text{مثلث}} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \left(P = \frac{a+b+c}{2} \right)$$

↓
نصف محیط مثلث

۴۲ قضیه سینوسها: در هر مثلث دلخواه مانند مثلث فوق داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

دوره تناوب

۴۳ هرگاه عدد مثبت c موجود باشد به طوری که $f(x+c) = f(x)$ آن گاه f را تابعی متناوب و به کوچکترین عدد c دوره تناوب (T) گفته می شود.

$$y = k \sin(ax+b) + t \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$y = k \cos(ax + b) + t \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

۴۵

$$y = k \tan(ax + b) + t \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

۴۶

نکته: در یافتن T ، فقط ضریب x (همان a) تأثیرگذار است.

۴۷ در توابع $f(t) = a \cos(bt) + c$ و $f(t) = a \sin(bt) + c$ داریم:

$$a = \frac{\max - \min}{2}, \quad c = \frac{\max + \min}{2}, \quad |b| = \frac{2\pi}{T}$$

$$\max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

۴۸ اگر چند نسبت مثلثاتی با یکدیگر جمع شده بود برای یافتن T ، دو حالت

وجود دارد:

الف) بعد از جمع کردن با اتحادها و ... قابل ساده شدن هستند؛ که در این صورت ساده‌سازی را انجام داده و در نهایت به یک نسبت مثلثاتی تبدیل می‌شود و T را می‌یابیم.

ب) بعد از جمع کردن با اتحادها و ... قابل ساده شدن نیستند؛ که در این صورت، برای تک تک عبارات T را محاسبه کرده و بعد میان دوره تناوب‌ها ک.م.م می‌گیریم.

نکته: اگر عبارتهای کسری داشته باشیم ک.م.م برابر است با:

$$\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right] = \frac{[a \cdot c]}{(b \cdot d)}$$

[] نماد ک.م.م و () نماد ب.م.م است.

۴۹ توان فرد تأثیری بر T ندارد اما توان زوج روی \sin و \cos یا وجود قدرمطلق دور آنها، T را نصف می‌کند.

همه چیز در مورد تابع سینوس

۵۰ دامنه $y = \sin u$ برابر \mathbb{R} است مگر آن که u محدودیت داشته باشد (رادیکالی، کسری و ... باشد).

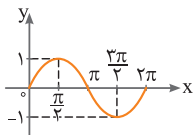
$$y = a \sin(bx + c) \xrightarrow{\text{برد}} R = [-a, a]$$

۵۱



۵۲ $y = \sin u$ به ازای $u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، ماکزیمم، به ازای $u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ، مینیمم

و به ازای $u = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) برابر صفر است (یعنی با محور x ها تلاقی یافته است).



۵۳ شکل تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$:

$$T = 2\pi$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

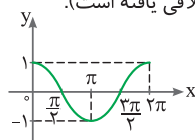
همه چیز در مورد تابع کسینوس

۵۴ دامنه $y = \cos u$ برابر \mathbb{R} است مگر آن که u محدودیتی داشته باشد:

$$y = a \cos(bx + c) \xrightarrow{\text{برد}} R = [-a, a]$$

۵۶ $y = \cos u$ به ازای $u = 2k\pi$ ، ماکزیمم، به ازای $u = 2k\pi + \pi$ ، مینیمم

و به ازای $u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ برابر صفر است (با محور x ها تلاقی یافته است).



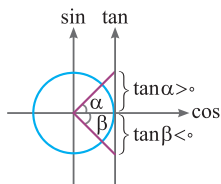
۵۷ شکل تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$:

$$T = 2\pi$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

همه چیز در مورد تابع تانژانت

۵۸ تابع تانژانت در دایره مثلثاتی:



در نواحی اول و سوم، مثبت و در

نواحی دوم و چهارم، منفی است.

۵۹ دامنه $y = \tan u$ برابر است با: $D = \mathbb{R} - \left\{ u \mid u = k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$

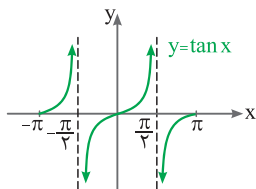
۶۰ این تابع در نقاط $\frac{k\pi}{2}$ که k صحیح و فرد است، تعریف نشده است.

$$y = \tan u \xrightarrow{\text{برد}} R = \mathbb{R}$$

۶۲ $y = \tan u$ ، ماکزیمم و مینیمم ندارد.

۶۳ $y = \tan u$ در $u = k\pi$ صفر می‌شود (با محور x ها تلاقی می‌یابد).

۶۴ یک تابع غیر یک‌به‌یک، وارون‌ناپذیر و غیریکنوا است.



شکل $y = \tan x$ در بازه $[-\pi, \pi]$: ۶۵

معادله مثلثاتی ❁

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha + \pi \end{cases}$$

۶۶

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

۶۷

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

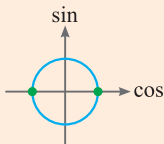
۶۸

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

۶۹

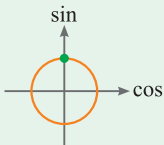
حالت‌های خاص \sin : ۷۰

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$



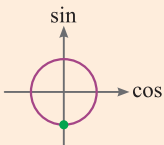
الف

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$



ب

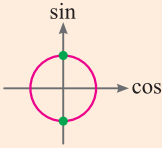
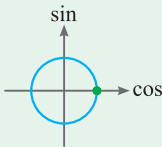
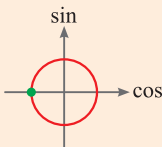
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$



پ



۷۱ حالت‌های خاص COS :

| | | |
|---|---|------------|
| $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ |  | <p>الف</p> |
| $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$ |  | <p>ب</p> |
| $\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$ |  | <p>پ</p> |

۷۲ به معادلات زیر و پاسخ آن‌ها توجه کنید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^{\vee} x = \sin^{\vee} \alpha \\ \cos^{\vee} x = \cos^{\vee} \alpha \\ \tan^{\vee} x = \tan^{\vee} \alpha \\ \cot^{\vee} x = \cot^{\vee} \alpha \end{array} \right. \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$



فصل ۸: توابع نمایی و لگاریتمی



۹۸ اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ ، کدام

است؟ (تجربی ۹۰)

- ۲ + ۴k (۴) ۱ + k (۳) ۴k (۲) ۲k (۱)

۹۹ اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1/6}$ کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۰)

- ۱ - k (۴) ۱ - ۲k (۳) ۲ - ۵k (۲) ۱ - ۴k (۱)

۱۰۰ در تابع با ضابطه $f(x) = a \cdot b^x$; $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{4}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ ، مقدار $f(\frac{3}{4})$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

- ۲۴ (۴) ۱۲ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱)

۱۰۱ تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت، بعد از t دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{kt}$

است. اگر تعداد این باکتری‌ها در شروع کشت ۸۰۰ و در دقیقه بیستم برابر

۳۲۰۰ باشد، در دقیقه سی‌ام تعداد آن‌ها کدام است؟ (تجربی ۹۱)

- ۷۲۰۰ (۴) ۶۴۰۰ (۳) ۵۶۰۰ (۲) ۴۸۰۰ (۱)

۱۰۲ از دو معادله $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ و $4^x + 2^x = 72$ ، مقدار y

کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۷)

- ۹ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

۱۰۳ اگر نمودار تابع $f(x) = ab^x - 1$ ، از دو نقطه $A(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ و $B(1, 1)$

بگذرد، $f(-1)$ کدام است؟ (تجربی ۹۳)

- $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

۱۰۴ از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام

است؟ (تجربی ۹۳)

- ۲ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) -1 (۱)

۱۰۵) فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه $A(0, 4)$ کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۳)

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۱۰۶) از تساوی $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۴ کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۳)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۷) از معادله لگاریتمی $\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه ۸، کدام است؟

(تجربی ۹۵)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۸) از معادله لگاریتمی $\log(x^2-x-6) - \log(x-3) = \log(2x-5)$ ، مقدار لگاریتم $\sqrt{x+1}$ در پایه ۴، کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۵)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۰۹) از معادله دو مجهولی $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ ، مقدار y کدام است؟

(تجربی ۹۶)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۱۰) از دو معادله دو مجهولی $\log(x+2y) = 1 + \log y$ و $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ ، مقدار x کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۶)

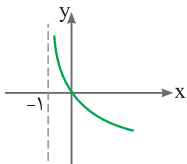
- ۱ (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۴ (۳) ۱/۵ (۴)

۱۱۱) اگر $x^2 = \left(\frac{125}{8}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1}$ باشد، $\log_8(9x+1)$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۱۱۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = \log_p U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)



(۱) $x + 1$

(۲) $(x + 1)^{-1}$

(۳) $x - 1$

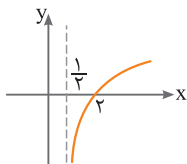
(۴) $1 - x$

۱۱۳ اگر $3^{x^2-2} = 81^x$ باشد، $\log_9(x-2)$ ، کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۸)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۱۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = -1 + \log_b(2x + a)$ است. این منحنی خط

$y = 1$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (تجربی فارغ ۹۸)



(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

فصل ۹: مثلثات

۱۱۵ جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{4}+x) - 2\sin(\pi-x) + 1 = 0$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۰)

(۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۱۱۶ جواب کلی معادله مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$ ، کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۰)

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۱۷ نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه

(تجربی ۹۱)

بیش‌ترین مقدار را دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۱۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sin^2 x - \cos^2 x$ به کدام

(تجربی ۹۱)

صورت است؟

- ۱ (۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴ (۴) $k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۱۱۹ نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ ، روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه

(تجربی فارغ ۹۱)

محور x ها را قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۱۲۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت

(تجربی فارغ ۹۱)

است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱ (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ۲ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ۳ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۱۲۱ در متوازی‌الاضلاع، اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویهٔ بین دو قطر ۱۳۵

(تجربی ۹۲)

درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

- ۱ (۱) ۱۸ (۱۸) ۲۴ (۲۴) ۳۶ (۳۶) ۴۲ (۴۲)

۱۲۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 \frac{5\pi}{4} x - \cos^2 x = \sin^2 x$ ، به کدام

(تجربی ۹۲)

صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱ (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۳ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۲۳ مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$

(تجربی فارغ ۹۲)

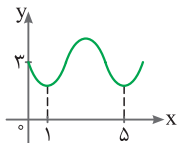
در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱ (۱) 8π ۲ (۲) 9π ۳ (۳) 10π ۴ (۴) 11π



۱۲۴ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در

(تجربی ۹۳)



نقطه $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟

۲ (۱)

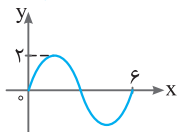
۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۳/۵ (۴)

۱۲۵ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام

(تجربی فارغ ۹۳)



است؟

$\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

$\frac{8}{3}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

۱۲۶ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟

(تجربی فارغ ۹۳)

$k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۱۲۷ حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{28}$ ، کدام

(تجربی ۹۴)

است؟

$-\frac{16}{9}$ (۱) $-\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴)

۱۲۸ جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت

(تجربی ۹۴)

است؟

$k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۱) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۴)

۱۲۹ حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ ، با فرض $\tan 2^\circ = \frac{1}{4}$ ، کدام

(تجربی فارغ ۹۴)

است؟

$-\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴)

۱۳۰ اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 1$ باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۴)

$\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

۱۳۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^3 x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۴)

$k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۱)

۱۳۲ اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

$\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{3}{8}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

۱۳۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۵)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۱)

$k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۳)

۱۳۴ اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4})$ کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۵)

۲ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) -2 (۱)

۱۳۵ اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۱)

۱۳۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۶)

$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۱)

۱۳۷ اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاعی ۱۲ و $8\sqrt{3}$ است. این دو قطر با زاویهٔ

۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۶)

۷۲ (۴) ۶۴ (۳) ۵۴ (۲) ۴۸ (۱)



۱۳۸ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ در بازهٔ

(تجربی فارغ ۹۷)

$[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{14\pi}{3}$
 (۲) 4π
 (۳) $\frac{9\pi}{2}$
 (۴) 5π

۱۳۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟ (تجربی ۹۷)

(۱) $\frac{k\pi}{4}$
 (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
 (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$
 (۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۱۴۰ مساحت مثلثی با طول اضلاع ۸، ۶ و ۴ واحد، کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۷)

(۱) $6\sqrt{3}$
 (۲) $3\sqrt{15}$
 (۳) $6\sqrt{5}$
 (۴) $4\sqrt{15}$

۱۴۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟ (تجربی فارغ ۹۷)

(۱) $\frac{k\pi}{5}$
 (۲) $\frac{2k\pi}{5}$
 (۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$
 (۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۱۴۲ اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل $(2\sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) \sqrt{1 + \tan^2 x}$

(تجربی ۹۸)

کدام است؟

(۱) $\sin x$
 (۲) $\cos x$
 (۳) $-\sin x$
 (۴) $-\cos x$

۱۴۳ حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

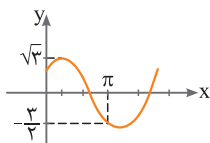
(تجربی ۹۸)

کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{2}$

۱۴۴ شکل زیر، قسمتی از تابع $y = a + b\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟

(تجربی ۹۸)



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$
 (۴) 2

۱۴۵) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $1 = 4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ در بازهٔ

(تجربی فارغ ۹۸)

$[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۱۴۶) اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x} - \sin x$ $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۸)

است؟

- ۱) $-\cos^2 x$ ۲) $-\cos x$ ۳) $\cos^2 x$ ۴) $\cos x$

۱۴۷) اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر

(تجربی فارغ ۹۸)

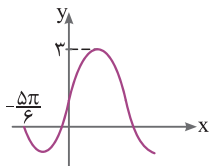
کدام است؟ $\sin\left(\frac{9\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$

- ۱) $-1/23$ ۲) $-0/52$ ۳) $0/27$ ۴) $0/48$

۱۴۸) شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ است. مقدار

(تجربی فارغ ۹۸)

تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



- ۱) $1/5$

- ۲) 2

- ۳) $2/5$

- ۴) $1 + \sqrt{3}$

۱۴۹) جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ ،

(تجربی فارغ ۹۸)

کدام است؟

- ۱) $k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۴ ۹۷

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda))$$

برای محاسبه $f^{-1}(\lambda)$ ، مقدار $f(x)$ را برابر λ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = \lambda \Rightarrow x = 30$$

برای محاسبه $g^{-1}(30)$ هم، مقدار $g(x)$ را برابر 30 قرار می‌دهیم:

$$x^3 + x = 30 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری گزینه‌ها}} x = 3$$

۲ ۹۸

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^2$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4$$

$$= 4 \log 2 \stackrel{\log 2 = k}{=} 4k$$

۱ ۹۹

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \log \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \log 1 - \frac{1}{3} \log 6$$

$$\stackrel{\log 1 = 0}{=} 0 - \log 6 - \frac{1}{3} \log 6 \stackrel{\log 6 = 3k}{=} 0 - 3k - \frac{1}{3}(3k) = 0 - 4k$$

۳ ۱۰۰

$$f(0) = \frac{3}{4} \Rightarrow ab^0 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4} b^x$$

$$f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{4} (b^{-2}) = \frac{3}{32} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

چون در صورت سؤال گفته شده که $b > 0$ ، پس $b = 4$ صحیح است.

$$f(x) = \frac{3}{4} \times 4^x \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \times 4^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} (4^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{4}} = \frac{3}{4} \times 8 = 12$$

۳ ۱۰۱

تعداد باکتری‌ها در شروع کشت یعنی $t = 0$ برابر 800 است، پس:

$$t = 0 \Rightarrow f(0) = 800 \Rightarrow Ae^{0 \times k} = 800 \Rightarrow A = 800$$