

کتاب کنکور

ریاضیات گسسته  
و آمار و احتمال  
جامع پلایا

(دهم . یازدهم . دوازدهم)

از مجموعه مرشد

رشته ریاضی فیزیک

علی اصغر شریفی  
دانیال ابراهیمی

پدربزرگ از محل کارش به خانه برگشته بود. یک روزنامه دستش بود که تنها نشریه آن زمان محسوب می‌شد. روزنامه را روی میز گذاشت و من با اشتیاق رفته سرخ روزنامه و با کلی ژست روشن فکری (!) شروع به خواندنش کردم. پدربزرگ گفت این روزنامه مال من نیست و فردا صبح باید ببرم برای صاحبش. این را که شنیدم فوراً شروع کردم به خواندن مطالب روزنامه. حتی صبح زود با کلی شوق و ذوق بیدار شدم تا بقیه مطلب‌های روزنامه را بخوانم. لحظه آخر که پدر بزرگ می‌خواست سر کار برود روزنامه را به زور از زیر دستم کشید و رفت. پدربزرگ از آن پس عصرها با یک روزنامه می‌آمد و صبح روز بعد روزنامه را با خودش می‌برد. من هم هر دفعه حریص‌تر می‌شدم و تلاش می‌کردم تا مطالب بیشتری از روزنامه‌ها را بخوانم ...

از این ماجرا تعجب نکنید! آن زمان‌ها روزنامه به قول امروزی‌ها «لاکچری» محسوب می‌شد! مردم روی کسی که روزنامه می‌خواند یا حتی دستش بود، یک جور دیگر حساب می‌کردند، برای همین، خیلی‌ها روزنامه‌های چند روز قبل را از هم قرض می‌گرفتند و می‌خواندند تا وسط جمع حرفی برای زدن داشته باشند.

یک روز عصر که منتظر بودم پدربزرگم با روزنامه بیاید، با یک کتاب دست‌نویس گران قیمت وارد خانه شد، کتاب را به من داد و گفت: «این کتاب مال خودته». کلی متعجب شدم که چرا چنین هدیه با ارزشی را بدون هیچ دلیل خاصی به من داده است. با خوشحالی کتاب را گرفتم و گذاشتم بهترین جای قفسه تا همه ببیننش!

چند روز بعد، پدربزرگ سؤال کرد «کتابتو خوندی؟»  
گفتم: «نه»

وقتی دلیل را پرسید، گفتم: «گذاشتم سر فرصت بخونمش»  
لبخندی زد و رفت ...

چند روز بعدی هم کتاب داخل قفسه مانده بود تا سر فرصت خوانده شد!

پدربزرگ من را صدا کرد و گفت: «حکایت زندگی ما، حکایت همین روزنامه و کتابه. تا زمانی که فکر کنی کل عمرت برای خودته و قرار نیست کسی ازت بگیردش، قدرشو نمی‌دونی. اما اگر بفهمی که زندگی روز به روز به تو داده میشه و روز به روز ازت پس گرفته میشه، قدر تک تک لحظه‌هاتو می‌دونی. حواست باشه روزی رو که ازت پس بگیرن، دیگه برگشتنی نیست. پس تا اون موقع که دست خودته قدرشو بدون، نه وقتی که از دست رفت»

همین که از این کتاب استفاده می‌کنید، یعنی وارد دوره‌ای از زندگی‌تان شده‌اید که ارزش زمان برای شما بیشتر از قبل شده است و باید از لحظه‌هاتون به بهترین نحو استفاده کنید! در نگارش این کتاب، سعی کرده‌ایم که به وقت شما احترام بگذاریم و کتابی بنویسیم که به اندازه کافی جامع و مانع باشد. جامع از این نظر که تمام مطالب کتاب‌های درسی نظام جدید را پوشش دهد و مانع از این جهت که مطالب اضافی نداشته باشد تا وقت‌تان تلف نشود. نحوه استفاده از این کتاب ساده است. کافی است درسنامه هر مبحث را بخوانید، مثال‌های آن را با دقت بررسی کنید و سپس تست‌های آن مبحث را بزنید! برای موفقیت در کنکور سراسری، یاد گرفتن تمام تست‌های این کتاب لازم و کافی است. تست‌هایی که حس می‌کردیم امکان کمی برای طرح در کنکور دارند را با عنوان «برای مطالعه» انتهای فصل‌ها آورده‌ایم. اگر فرصت کافی داشتید، حتماً این تست‌ها را هم بررسی کنید.

برای نگارش و ویرایش این کتاب از دانش‌آموزان سابق‌مان کمک گرفته‌ایم. دانش‌آموزانی که در کنکور ۹۷ رتبه‌های برتر را کسب کرده‌اند: سید محمد صادق کشاورزی (رتبه ۱ منطقه و ۲ کشوری)، محمدرضا اسکندری (رتبه ۲ منطقه و ۴ کشوری)، مهرداد صاحبی (رتبه ۱۲ منطقه و ۱۹ کشوری)، امیررضا دانشور آملی (رتبه ۳۳ منطقه و ۴۸ کشوری)، علی محسنی‌نژاد (رتبه ۵۰ منطقه و ۷۴ کشوری)، علی قوام‌پور (رتبه ۶۴ منطقه و ۹۸ کشوری)، محمد مقدم (رتبه ۶۵ منطقه و ۹۹ کشوری) و ...

به جز دانش‌آموزان سابق‌مان، دوستان زیادی در تهیه این کتاب زحمت کشیدند که بدون حضورشان انجام کار غیرممکن بود. از مهندس حسین حاجیلو و مهندس سهیل حسن‌خان‌پور بسیار سپاس گزاریم که با نظرات سازنده‌شان ساختار کتاب را منسجم‌تر نمودند. از جناب آقای عزیززاده تشکر می‌کنیم که بی‌نهایت صبور بودند و در تمام مراحل تهیه کتاب در کنارمان بودند. همچنین از خانم‌ها لیلیا مهرعلی‌پور (صفحه‌آرا)، نگار امیری (تایپیست)، مریم رسولی و بهاره خدای (گرافیست‌ها) و مینا هرمزی (طراح جلد) بسیار سپاسگزاریم و برای همه این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

در انتها، از دانش‌آموزان و دبیران ریاضیات گسسته یک درخواست نامتعارف داریم! همیشه به عنوان معلم و مشاور به دانش‌آموزان توصیه کرده‌ایم که خودتان را با کسی مقایسه نکنید. الان از شما درخواست داریم که لطفاً کتاب ما را مقایسه کنید! مقایسه کردن دو تا خوبی دارد: اولیش برای شماست که بهترین را انتخاب می‌کنید و دومیش برای ماست که می‌توانیم از نظرات شما استفاده کنیم. در همین راستا، لطفاً پیشنهادهای خود را از طریق آی‌دی تلگرام @Math\_MobtakeranSupp به اطلاع مؤلفین برسانید تا در ویرایش‌های بعدی در نظر بگیریم.

علی‌اصغر شریفی / دانیال ابراهیمی

## فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی ..... ۶

درس ۲: مجموعه - زیرمجموعه (+ مباحث مرتبط با پایه دهم) ..... ۲۰

درس ۳: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) ..... ۳۴

پاسخنامه تشریحی ..... ۴۷

## فصل دوم: احتمال

درس ۱: مبانی احتمال (+ مباحث مرتبط با پایه دهم) ..... ۸۲

درس ۲: احتمال غیرهم‌شانس ..... ۱۰۴

درس ۳: احتمال شرطی ..... ۱۰۸

درس ۴: پیشامدهای مستقل و وابسته ..... ۱۲۶

پاسخنامه تشریحی ..... ۱۳۶

## فصل سوم: آمار توصیفی

درس ۱: مقدمات علم آمار، توصیف و نمایش داده‌ها (+ مباحث مرتبط با پایه دهم) ..... ۱۹۰

درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز ..... ۲۰۰

درس ۳: معیارهای پراکندگی ..... ۲۰۷

پاسخنامه تشریحی ..... ۲۱۷

## فصل چهارم: آمار استنباطی

درس ۱: گردآوری داده‌ها ..... ۲۴۲

درس ۲: برآورد ..... ۲۵۱

پاسخنامه تشریحی ..... ۲۶۲

## فصل پنجم: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی ..... ۲۷۲

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح ..... ۲۸۲

درس ۳: هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها ..... ۳۱۰

پاسخنامه تشریحی ..... ۳۳۹

## فصل ششم: گراف و مدلسازی

درس ۱: معرفی گراف ..... ۴۱۲

درس ۲: مدلسازی با گراف ..... ۴۴۲

پاسخنامه تشریحی ..... ۴۵۴

## فصل هفتم: ترکیبیات (شمارش)

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات (+ مباحث مرتبط با پایه دهم) ..... ۴۸۸

درس ۲: روش‌هایی برای شمارش ..... ۵۱۷

پاسخنامه تشریحی ..... ۵۳۰

سؤالات کنکور ۹۸: ..... ۵۵۳

پاسخ سؤالات کنکور ۹۸: ..... ۵۵۷



فصل اول:  
آشنایی با مبانی ریاضیات

$$A = \{1, 2, \emptyset\}$$

$$p \Rightarrow q$$

## آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی، یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به کار برده می‌شود.

### گزاره

به جمله‌ای خبری که دارای ارزش درست یا نادرست (در حال حاضر یا آینده) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف  $p$ ،  $q$ ،  $r$  و... نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال هر یک از عبارات زیر یک گزاره هستند:

- (۱) به اصفهان، نصف جهان نیز می‌گویند.
- (۲) سرعت صوت در خلأ  $340$  متر بر ثانیه است.
- (۳)  $\sqrt{2}$  عددی گویا است.

**نکته ۱:** جملات پرسشی، امری و عاطفی (تعجبی یا نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، چون خبری را بیان نمی‌کنند.

برای مثال عبارات زیر گزاره نیستند:

- (۱) معلم ریاضی این کلاس کیست؟ (پرسشی)
- (۲) به پیمان زنگ بزن. (امری)
- (۳) چه سرعتی! (نشان‌دهنده احساسات)

### مثال ۱: چه تعداد از عبارات زیر یک گزاره هستند؟

- (الف) صدمین رقم بعد از ممیز عدد  $\pi$  برابر با ۵ است.  
 (ب) لطفاً درب کلاس را ببندید.  
 (ج) ایران کشور اروپایی است.  
 (د) چه هوای خوبی!  
 (ه) آیا  $3+4$  برابر با ۷ است؟

۳ (ب)

۲ (د)

۱ (ه)

۰ (ج)

**پاسخ:** **گزینه ۲** می‌دانیم که جملات امری، عاطفی و پرسشی، گزاره محسوب نمی‌شوند؛ بنابراین عبارات **ب** (امری)، **د** (عاطفی)، نشان‌دهنده احساسات) و **ه** (پرسشی) گزاره نیستند. عبارت **الف** و **ج**، هر کدام یک خبر را بیان می‌کنند؛ بنابراین گزاره هستند.

دقت داشته باشید که یک جمله برای گزاره بودن، کفایت خبری را بیان کند و درست یا نادرست بودن آن اهمیتی ندارد.

ارزش یک گزاره درست را با « $T$ » یا «د» و ارزش یک گزاره نادرست را با « $F$ » یا «ن» نمایش می‌دهیم. واضح است که یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد. به بیان ساده‌تر، هر گزاره فقط یک ارزش دارد، هر چند ارزش گزاره برای ما معلوم نباشد. برای مثال حدس‌ها در ریاضیات مسائلی هستند که هنوز اثبات نشده‌اند و از طرفی برای آنها مثال نقضی هم یافت نشده است؛ پس ارزش این گزاره‌ها هنوز برای ما مشخص نیست؛ اما در هر صورت حدس‌ها هم فقط یک ارزش دارند. حدس گلدباخ یکی از مشهورترین حدس‌ها در ریاضیات است که می‌گوید هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

$$4 = 2 + 2, \quad 8 = 3 + 5, \quad 22 = 11 + 11$$

برای مثال:

### مثال ۲: چه تعداد از جملات زیر، یک گزاره درست را مشخص می‌کنند؟






- (الف) هر عدد مربع کاملی، مرکب است.  
 (ب) آمار، علم اعداد و اطلاعات است.  
 (ج) ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.  
 (د) در بین اعداد یک رقمی طبیعی، ۲ مربع کامل داریم.  
 (ه) هر معادله درجه دوم، دو ریشه حقیقی دارد.

۱ (ب)

۲ (د)

۳ (ه)

۴ (ج)

P(A|B)  
 C.V.  
  
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 ریاضیات گسسته دوازدهم  
 $a/b+c$   
  
 $x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$   
 $p \Rightarrow q$   
 $\binom{n}{1}$   
  
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 $a/b+c$   
  
 $x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$   
 C.V.  
 $p \Rightarrow q$   
 $\binom{n}{1}$   
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 $a/b+c$   
  
 $x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$

### پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا دقت کنید که عبارت ج یک جمله خبری نیست؛ در نتیجه گزاره محسوب نمی‌شود. عبارات الف، ب، د و ه همگی یک خبر را بیان می‌کنند؛ بنابراین گزاره هستند. در بین این گزاره‌ها، فقط گزاره ب یک گزاره درست است و بقیه گزاره‌ها نادرست‌اند. به بررسی علت نادرستی این گزاره‌ها می‌پردازیم:

گزاره الف: مثال نقض این گزینه، عدد ۱ می‌باشد. عدد ۱، مربع کامل است؛ اما می‌دانیم که عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

گزاره د: در بین اعداد یک رقمی ۳ مربع کامل داریم ۱، ۴ و ۹ مربع کامل هستند.

گزاره ه: معادله درجه دوم می‌تواند یک ریشه حقیقی (ریشه مضاعف) داشته باشد یا اصلاً ریشه حقیقی نداشته باشد.

**نکته ۲:** اگر  $n$  گزاره داشته باشیم، ارزش آنها  $2^n$  حالت مختلف می‌تواند داشته باشد. در واقع ارزش هر گزاره ۲ حالت (درست یا نادرست) دارد که برای  $n$  گزاره، طبق اصل ضرب  $2^n$  حالت پیش می‌آید.

برای مثال برای ۲ گزاره  $p$  و  $q$ ،  $2^2 = 4$  حالت و برای ۳ گزاره  $p$ ،  $q$  و  $r$ ،  $2^3 = 8$  حالت داریم:

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

به جدول‌های بالا، جدول ارزش گزاره‌ها می‌گوییم.

**مثال ۳:** اگر بدانیم جدول ارزش‌های  $2n+2$  گزاره، دارای ۲۵۶ حالت متمایز است، آنگاه جدول ارزش‌های  $3n+3$  گزاره، چند حالت متمایز دارد؟

- ۲۵۶ (۱)      ۱۲۸ (۲)      ۶۴ (۳)      ۳۲ (۴)

### پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم که اگر  $n$  گزاره داشته باشیم، ارزش آنها  $2^n$  حالت دارد؛ بنابراین جدول ارزش‌های  $3n+2$  گزاره، دارای  $2^{3n+2}$  حالت متمایز خواهد بود:

همچنین جدول ارزش‌های  $2n+3$  گزاره، دارای  $2^{2n+3}$  حالت متمایز خواهد بود؛ بنابراین داریم:

$$2^{3n+2} = 256 = 2^8 \Rightarrow 3n+2=8 \Rightarrow n=2$$

$$2^{2n+3} = 2^7 = 128$$

### گزاره‌نما

گزاره‌نما یک جمله خبری است که در آن از یک یا چند متغیر استفاده شده است و با جایگذاری عدد به جای متغیرها به یک گزاره تبدیل می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آنها یک متغیره، دو متغیره و... می‌نامیم. به عنوان مثال به گزاره‌نماهای زیر توجه کنید:

(۱)  $x^3 - 1 \geq 2x$       (۲)  $r+s$ ، مضرب ۳ است.

عبارت اول یک گزاره‌نمای یک متغیره است که به ازای  $x=2$ ، به یک گزاره درست و به ازای  $x=1$  به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود. عبارت دوم، یک گزاره‌نمای دو متغیره است که به ازای  $\begin{cases} r=4 \\ s=5 \end{cases}$  به یک گزاره درست و به ازای  $\begin{cases} r=4 \\ s=6 \end{cases}$  به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود.

P(A|B)  
C.V.  
P(A) = n(A)/n(S)

ریاضیات گسسته دوازدهم  
a/b+c

x+2=5  
P(A|B)  
p⇒q

$\binom{n}{1}$   
P(A|B)

P(A) = n(A)/n(S)  
a/b+c

x+2=5

P(A|B)  
C.V.  
p⇒q

۸  $\binom{n}{1}$   
P(A) = n(A)/n(S)

a/b+c

x+2=5  
P(A|B)

**نکته ۳:** طبق تعریف بالا، همه معادلات و نامعادلات گزاره‌نما هستند.

دامنه متغیر گزاره‌نما (D) مجموعه مقادیری است که می‌توان آنها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا گزاره‌نما به یک گزاره تبدیل شود. مجموعه جواب گزاره‌نما (S) مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر است (S ⊆ D) که به ازای آنها گزاره‌نما به یک گزاره درست تبدیل می‌شود. به عنوان مثال در گزاره‌نمای  $3x^2 + 5x - 2 = 0$ ، دامنه متغیر  $D = \mathbb{R}$  و مجموعه جواب  $S = \{-2, \frac{1}{3}\}$  است.

**مثال ۴:** دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نمای زیر را مشخص کنید.

$$(1) \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

**پاسخ:** واضح است که دامنه این معادله، مجموعه اعداد حقیقی است؛ پس  $D = \mathbb{R}$ .

حال عبارت فوق را تجزیه می‌کنیم:

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow S = \{-\frac{1}{2}, 2\}$$

بنابراین مجموعه جواب این معادله،  $S = \{-\frac{1}{2}, 2\}$  خواهد بود.

(۲) عدد صحیح  $x + 3$  مضرب ۷ است.

**پاسخ:** داریم:

$$D = \mathbb{Z}$$

$$S = \{\dots, -10, -3, 4, 11, 18, \dots\} \Rightarrow S = \{x = 7k - 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

**نقیض یک گزاره**

نقیض گزاره p به صورت  $\sim p$  نوشته می‌شود و به صورت «چنین نیست که p» خوانده می‌شود. به عنوان مثال، نقیض گزاره «۵ عددی فرد است» به صورت «چنین نیست که ۵ عددی فرد باشد» یا «۵ عددی فرد نیست» بیان می‌شود.

**نکته ۴:** ارزش گزاره  $\sim p$  همواره عکس ارزش گزاره p است.

دو گزاره هم ارز: در حالت کلی اگر گزاره q و p هم‌ارزش باشند، آنها را هم‌ارز منطقی (یا به طور خلاصه هم‌ارز) می‌نامیم و می‌نویسیم  $p \equiv q$ .

**نکته ۵:** طبق جدول زیر، ارزش گزاره‌های p و  $\sim(\sim p)$  یکسان است، یعنی  $\sim(\sim p) \equiv p$ .

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

**ترکیب گزاره‌ها**

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادوات ربط) گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند. به عنوان مثال گزاره «اگر ۴ فرد باشد، آنگاه عدد ۷ مربع کامل است» ترکیب شرطی دو گزاره «عدد ۴ فرد است» و «عدد ۷ مربع کامل است» می‌باشد. جدول زیر رابط‌های گزاره‌ای (ادوات ربط) را نشان می‌دهد:

نام	نماد	مفهوم
فاصل	∨	یا
عاطف	∧	و
شرطی	⇒	در نتیجه
دو شرطی	⇔	اگر و فقط اگر

حال به بررسی انواع ترکیب گزاره‌ها می‌پردازیم.

## ترکیب فصلی

از ترکیب گزاره‌های  $p$  و  $q$  با رابط منطقی «یا» ترکیب فصلی دو گزاره تشکیل می‌شود که آن را به صورت  $p \vee q$  نمایش می‌دهیم. ارزش گزاره مرکب  $p \vee q$  تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشد:

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

## ترکیب عطفی

از ترکیب گزاره‌های  $p$  و  $q$  با رابط منطقی «و» ترکیب عطفی دو گزاره ساخته می‌شود که آن را به صورت  $p \wedge q$  نمایش می‌دهیم. ارزش  $p \wedge q$  تنها زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشد.

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

## نکته ۶: (قوانین دمورگان).

برای دو گزاره  $p$  و  $q$  داریم:

$$1) \sim (q \wedge p) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$2) \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

طبق قانون ۱ دمورگان، نقیض گزاره «سارا فارغ‌التحصیل می‌شود و هنگامه ماشین می‌خرد»، می‌شود: «سارا فارغ‌التحصیل نمی‌شود یا هنگامه ماشین نمی‌خرد»

طبق قانون ۲ دمورگان، نقیض گزاره «امیر فوتبال بازی می‌کند یا مسعود والیبال بازی می‌کند» می‌شود «امیر فوتبال بازی نمی‌کند و مسعود والیبال بازی نمی‌کند»

## مثال ۵:

می‌دانیم ارزش گزاره  $p$  نادرست و ارزش گزاره  $(p \vee \sim q) \sim$  درست است. ارزش گزاره  $q$  را تعیین کنید.

$$\begin{cases} p \equiv F \\ \sim (p \vee \sim q) \equiv T \end{cases}$$

پاسخ: طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$\sim (p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim (\sim q) \equiv \sim p \wedge q \equiv T$$

قانون ۲ مورگان

عبارت دوم را ساده می‌کنیم:

با توجه به اینکه از صورت مسئله می‌دانیم:  $p \equiv F$ ، پس  $\sim p \equiv T$ .

همچنین می‌دانیم ترکیب عطفی دو گزاره تنها زمانی درست است که هر دو گزاره دارای ارزش درست باشند؛ بنابراین برای اینکه  $\sim p \wedge q \equiv T$ ، باید داشته باشیم:  $q \equiv T$

## ترکیب شرطی دو گزاره

گزاره مرکب  $p \Rightarrow q$  را ترکیب شرطی دو گزاره  $p$  و  $q$  می‌نامیم و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

(۱) اگر  $p$ ، آنگاه  $q$

(۲)  $p$  شرط کافی است برای  $q$

(۳)  $q$  شرط لازم است برای  $p$



در این ترکیب شرطی،  $p$  را مقدم (فرض) و  $q$  را تالی (حکم) می‌نامیم. ارزش گزاره  $p \Rightarrow q$  تنها زمانی نادرست است که  $p$  درست و  $q$  نادرست باشد (یعنی فرض درست و حکم نادرست باشد).

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

**نکته ۷:** با توجه به توضیحات بالا، ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  هم ارز  $\sim p \vee q$  است، یعنی  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ .

**نکته ۸:** در ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  هرگاه ارزش  $p$  (مقدم) نادرست باشد، گزاره مرکب همواره درست است و ارزش آن به ارزش  $q$  (تالی) بستگی ندارد. در این صورت می‌گوییم ارزش  $p \Rightarrow q$  به انتفای مقدم درست است. در واقع، از فرض نادرست هر حکمی را می‌توان نتیجه گرفت.

به عنوان مثال ارزش گزاره «اگر ۳ زوج باشد، آنگاه  $۲ > ۳$ » به انتفای مقدم درست است.

**تعریف:** گزاره‌هایی مانند  $(p \vee \sim p)$  یا  $(p \Rightarrow p)$  که همواره درست هستند را گزاره‌های همیشه درست و گزاره‌هایی مانند  $(p \wedge \sim p)$  را که همواره نادرست هستند، گزاره‌های همیشه نادرست می‌گوییم.

**عکس ترکیب شرطی دو گزاره:** اگر در یک ترکیب شرطی جای فرض و حکم را عوض کنیم، عکس ترکیب شرطی به دست می‌آید. به عبارت ساده‌تر، عکس ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  گزاره  $q \Rightarrow p$  است.

**عکس نقیض ترکیب شرطی دو گزاره:** عکس نقیض ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  گزاره  $\sim p \Rightarrow \sim q$  است.

**نکته ۹:** هر ترکیب شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است، یعنی  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ .

**مثال ۶:** درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید.

الف)  $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$       ب)  $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

**پاسخ:** الف) دقت کنید که سطرهای ۲، ۳ و ۴ به انتفای مقدم درست هستند.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

ب) سطرهای ۳ و ۴ به انتفای مقدم درست هستند.

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

### ترکیب دوشروطی دو گزاره

برای دو گزاره  $p$  و  $q$ ، گزاره مرکب  $(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)$  را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دوشروطی  $p$  و  $q$  می‌نامیم.

ریاضیات گسسته دوازدهم  
 $P(A|B)$   
 C.V.  
 $x + 2 \equiv 5$   
 $P(A|B) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 $a/b+c$   
 $x + 2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$   
 $p \Rightarrow q$   
 $\binom{n}{1}$   
 $P(A|B) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 $a/b+c$   
 $x + 2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$   
 C.V.  
 $p \Rightarrow q$   
 $\binom{n}{1}$   
 $P(A|B) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 $a/b+c$   
 $x + 2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$

گزاره  $p \Leftrightarrow q$  را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

۱) اگر و تنها اگر  $q$ .

۲) شرط لازم و کافی برای  $q$  است.

۳) اگر  $p$ ، آن‌گاه  $q$  و برعکس.

ارزش گزاره دو شرطی  $p \Leftrightarrow q$  تنها زمانی درست است که  $p$  و  $q$  ارزش‌های یکسان داشته باشند، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

برای مثال، هر دو گزاره زیر درست هستند:

۱) شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه  $M$  از دو سر پاره خط  $AB$  به یک فاصله باشد، این است که  $M$  روی عمود منصف پاره خط  $AB$  باشد ( $p$  و  $q$  هر دو درست).

۲)  $7$  عددی زوج است اگر و فقط اگر  $5$  مربع کامل باشد ( $p$  و  $q$  هر دو نادرست).

**نکته ۱۰:** برای ساختن نقیض گزاره دو شرطی  $p \Leftrightarrow q$  باید  $p$  یا  $q$  را نقیض کنیم. به بیان ریاضی

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p) \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow (\sim q)$$

**نکته ۱۱:** (جمع‌بندی هم‌ارزی‌های مهم)

۱)  $p \wedge p \equiv p$

۲)  $p \vee p \equiv p$

۳)  $p \wedge T \equiv p$

۴)  $p \vee T \equiv T$

۵)  $p \wedge F \equiv F$

۶)  $p \vee F \equiv p$

۷)  $p \wedge q \equiv q \wedge p$

۸)  $p \vee q \equiv q \vee p$  (جاب‌جایی)

۹)  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

۱۰)  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$  (شرکت‌پذیری)

۱۱)  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۱۲)  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  (توزیع‌پذیری)

۱۳)  $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

۱۴)  $p \vee (p \wedge q) \equiv p$  (جذب)

۱۵)  $\sim(q \wedge p) \equiv \sim q \vee \sim p$

۱۶)  $\sim(q \vee p) \equiv \sim q \wedge \sim p$  (دمورگان)

۱۷)  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

۱۸)  $(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

۱۹)  $\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$

۲۰)  $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

**مثال ۷:** ساده شده عبارت  $\sim((\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim(\sim q \wedge \sim p))$  کدام است؟

۴)  $\sim p$

۳)  $\sim q$

۲)  $p \vee q$

۱)  $p \wedge q$

**پاسخ:** گزینه ۳ می‌دانیم گزاره  $\sim p \Rightarrow \sim q$  با گزاره  $q \vee \sim p$  هم‌ارز است. با استفاده از قوانین دمورگان و مفاهیم ترکیب‌های

فصلی و عطفی، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\sim((q \vee \sim p) \wedge \sim(\sim q \wedge \sim p)) \equiv \underbrace{\sim(q \vee \sim p)}_{\sim q \wedge p} \vee (\sim q \wedge \sim p) \equiv (\sim q \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim p) \equiv \sim q \wedge \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \equiv \sim q$$

### سورها

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» را سور می‌نامند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نما قرار بگیرند و گزاره‌نما را به گزاره‌ای با ارزش درست یا نادرست تبدیل کنند.

P(A|B)  
C.V.  
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

«به ازای هر» را سور عمومی می‌نامیم و با نماد  $\forall$  نشان می‌دهیم. گزاره‌نمایی که با سور عمومی همراه می‌شود، تنها وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند (هیچ مثال نقضی وجود نداشته باشد). برای مثال، گزاره  $\forall a \in \mathbb{R}; a^3 \geq 0$  نادرست است، زیرا  $a = -1$  یک مثال نقض برای آن است.

«برای بعضی مقادیر» (وجود دارد) را سور وجودی می‌نامیم و با نماد  $\exists$  نشان می‌دهیم. گزاره‌نمایی که با سور وجودی همراه می‌شود، زمانی درست است که مجموعه جواب آن، تهی نباشد. برای مثال، گزاره  $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 5 = 0$  نادرست است، چون مجموعه جواب آن در اعداد حقیقی تهی است.

ریاضیات گسسته دوازدهم

$a/b+c$   
 $x+2 \equiv 5$

**مثال ۸:** سورهای زیر را به زبان ریاضی بنویسید و ارزش هر یک را تعیین کنید.

- ۱) برای هر عدد طبیعی مانند  $a$  داریم  $a^2 - 3 \geq 2a$
- ۲) مکعب برخی از اعداد حقیقی نامثبت است.

**پاسخ:** برای گزاره اول داریم:

$$\forall a \in \mathbb{N}; a^2 - 3 \geq 2a \quad (۱)$$

این گزاره نادرست است؛ زیرا بیان می‌کند که برای تمام اعداد طبیعی نامساوی  $a^2 - 3 \geq 2a$  برقرار است، در صورتی که به ازای  $a = 2$ ، نامساوی بالا برقرار نخواهد بود.

برای گزاره دوم داریم:

$$\exists x \in \mathbb{R}; x^3 \leq 0 \quad (۲)$$

این گزاره بیان می‌کند که وجود دارد عدد حقیقی که مکعب آن نامثبت باشد، به عنوان مثال عدد  $(-1)$  چنین ویژگی‌ای دارد؛ بنابراین این گزاره درست است.

$x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$   
 $p \Rightarrow q$   
 $\binom{n}{1}$

**مثال ۹:** ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

- ۱)  $\forall a \in \mathbb{R}; a^2 \geq a$
- ۲)  $\forall a \in \mathbb{R}; \tan a \cdot \cot a = 1$
- ۳)  $\forall a \in \mathbb{Z}; a(a+1) = 2k$
- ۴)  $\exists x \in \mathbb{N}; |a| - 1 < 0$

**پاسخ:** گزینه ۳ به بررسی علت نادرستی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

**گزینه ۱:** چون سور عمومی داریم، کفایت مثال نقضی بزنیم. به ازای  $0 < a < 1$ ، نامساوی داده شده، برقرار نخواهد بود؛ زیرا اعداد بین  $0$  تا  $1$ ، وقتی به توان برسند، کوچکتر می‌شوند.

**گزینه ۲:** تساوی داده شده، تساوی درستی است؛ اما توابع تانژانت و کتانژانت در بعضی نقاط تعریف نشده‌اند؛ بنابراین گزاره در حالت کلی نادرست است.

**گزینه ۴:** نامساوی  $|a| - 1 < 0$  در مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ، برقرار نیست!

$P(A|B)$   
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 $a/b+c$   
 $x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$   
C.V.  
 $p \Rightarrow q$

**نقیض گزاره‌های سوری**

برای یافتن نقیض یک گزاره در زبان فارسی، نمی‌توان همیشه نقل گزاره را معکوس کرد. به طور مثال نقیض گزاره «هر ایرانی، اصفهانی است»، گزاره «هر ایرانی، اصفهانی نیست» نیست!

**نکته ۱۲:** برای یافتن نقیض یک گزاره سوری، کافی است سور عمومی را به سور وجودی و سور وجودی را به سور عمومی تبدیل و گزاره‌نما را نقیض کنیم.

به زبان ریاضی

- ۱)  $\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$
- ۲)  $\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

بنابراین نقیض گزاره «هر ایرانی، اصفهانی است»، می‌شود: «شخصی ایرانی وجود دارد که اصفهانی نباشد».

۱۲  
 $\binom{n}{1}$   
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$   
 $a/b+c$   
 $x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$

**مثال ۱۰:** ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و نقیض هر یک را بنویسید.

$$(۱) \quad \forall x \in \mathbb{R}^- ; x + \frac{1}{x} \leq -2$$

**پاسخ:** ارزش این گزاره درست است. می‌دانیم که برای یافتن نقیض یک گزاره سوری، کفایت سور عمومی را به وجودی و سور وجودی را به عمومی تبدیل کرده و گزاره‌نما را نقیض کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}^- ; x + \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in \mathbb{R}^- ; x + \frac{1}{x} > -2$$

$$(۲) \quad \exists x \in \mathbb{R} ; x^4 < 0$$

**پاسخ:** ارزش این گزاره نادرست است؛ زیرا  $x^4$  همواره نامنفی خواهد بود. نقیض این گزاره عبارت است از:

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R} ; x^4 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R} ; x^4 \geq 0$$

$$(۳) \quad \forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0$$

**پاسخ:** ارزش این گزاره نادرست است؛ زیرا  $x = 0$  مثال نقضی برای آن است. نقیض این گزاره عبارت است از:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R} ; x^2 \leq 0$$

$$(۴) \quad \exists y \in \mathbb{R} ; (y < 0) \wedge (y^2 \leq 1)$$

**پاسخ:** ارزش این گزاره درست است؛ زیرا  $x = -1$  در آن صدق می‌کند؛ پس مجموعه جواب آن ناتهی است. نقیض این گزاره عبارت است از:

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R} ; (y < 0) \wedge (y^2 \leq 1)) \equiv \forall y \in \mathbb{R} ; \sim ((y < 0) \wedge (y^2 \leq 1)) \equiv \forall y \in \mathbb{R} ; (y \geq 0) \vee (y^2 > 1)$$

# پرسش‌های چهارگزینه‌ای

## گزاره، گزاره نما و مفاهیم مربوط به آن

۱. چند مورد از جملات زیر، یک گزاره هستند؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  عددی گنگ است.  
 (۲) اینجا آشپز کیست؟  
 (۳) ایران کشوری آسیایی است.  
 (۴) مقدار تقریبی  $\sqrt{3}$  را به دست آورید.  
 (۵) چه هوای خوبی!  
 (۶) در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه تاس مضرب ۲ بیاید، برابر با  $\frac{1}{6}$  است.

۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۲. ارزش چند مورد از گزاره‌های زیر، درست است؟

- (۱) مربع هر عدد حقیقی از آن عدد بزرگتر است.  
 (۲) مقدار تقریبی  $\sqrt{3}$  با یک رقم اعشار برابر با  $1/7$  است.  
 (۳) حاصل ضرب عدد گویای  $\alpha$  در عدد گنگ  $\beta$ ، عددی گنگ می‌شود.  
 (۴) هر مثلث که ارتفاع و نیمسازش بر هم منطبق باشند، متساوی‌الساقین است.

۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۳. کدام عدد نادرست بودن ارزش گزاره «اگر  $n$ ، عدد طبیعی زوج باشد،  $2^n + 1$  عددی اول است.» را نشان می‌دهد؟

۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۸

۴. کدام یک از جملات زیر یک گزاره با ارزش درست می‌باشد؟

- ۱) هر متوازی‌الاضلاع یک لوزی است.  
 ۲) اگر  $n^2$  مضرب ۱۸ باشد، آنگاه  $n$  مضرب ۳ است.  
 ۳) یک عدد زوج مربع کامل است، اگر و تنها اگر مضرب ۴ باشد.  
 ۴) هر چهار ضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

۵. کدام گزینه درست است؟

- ۱) «حاصل جمع ۵ برابر عددی با ۳ برابر عددی دیگر برابر با ۷ است» یک گزاره نمای یک متغیره است.  
 ۲) در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره درست تبدیل شود، دامنه متغیر

می‌گوییم.

- ۳) مجموعه جواب یک گزاره‌نما، زیر مجموعه دامنه متغیر آن است.  
 ۴) ارزش ترکیب عطفی با درست بودن حداقل یکی از گزاره‌ها، درست است.

۶. گزاره نمای  $|x-2|(x^2-x-6)=0$  با دامنه‌ای برابر با دامنه گزاره نمای  $\sqrt{x+1} \geq 0$  به ازای چند مقدار از مجموعه  $\{-4, -2, 2, 3\}$  به

گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟  
 ۱) صفر      ۲) یک      ۳) دو      ۴) سه

۷. اگر بدانیم جدول ارزش‌های  $(3n-3)$  گزاره، دارای ۶۴ حالت متمایز است، آنگاه جدول ارزش‌های  $(2n+3)$  گزاره، چند حالت متمایز

دارد؟  
 ۱) ۱۲۸      ۲) ۲۵۶      ۳) ۵۱۲      ۴) ۱۰۲۴

ریاضیات گسسته دوازدهم



$x + 2 \equiv 5$

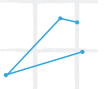
$P(A|B)$   
 $p \Rightarrow q$

$\binom{n}{1}$



$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$a/b+c$



$x + 2 \equiv 5$

$P(A|B)$

C.V.  
 $p \Rightarrow q$

۱۴  $\binom{n}{1}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$a/b+c$



$x + 2 \equiv 5$

$P(A|B)$

۸. اگر جدول ارزش‌های  $n$  گزاره، ۴۴۸ سطر بیشتر از جدول ارزش‌های  $(n-3)$  گزاره داشته باشد، جدول ارزش‌های  $n-5$  گزاره چند حالت دارد؟

- ۱) ۶۴      ۲) ۱۲۸      ۳) ۳۲      ۴) ۱۶

۹. برای گزارش جواب معادلات  $|x+1|+|y-7|=0$  و  $(x+1)(y-7)=0$ ، به ترتیب از کدام ترکیب‌های زیر استفاده می‌کنیم؟

- ۱) عطفی - عطفی      ۲) عطفی - فصلی      ۳) فصلی - عطفی      ۴) فصلی - فصلی

۱۰. اگر  $a \wedge b \equiv a$  باشد، آنگاه کدام یک از گزاره‌های زیر هیچگاه صحیح نیست؟

- ۱)  $b \Rightarrow a \wedge b$       ۲)  $a \vee b$       ۳)  $\sim b \wedge a$       ۴)  $(a \wedge b) \Leftrightarrow a$

۱۱. درباره گزاره  $p \Rightarrow \sim p$  کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) همواره درست است.      ۲) همواره نادرست است.  
۳) هم‌ارزش با  $p$  است.      ۴) هم‌ارزش با  $\sim p$  است.

۱۲. ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

- ۱)  $\sim p \vee F$       ۲)  $p \wedge F$       ۳)  $T \Rightarrow p$       ۴)  $F \Rightarrow p$

۱۳. کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر درباره دو گزاره دلخواه  $p$  و  $q$ ، همواره درست است؟

- ۱)  $p \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$       ۲)  $p \Rightarrow \sim (p \vee q)$       ۳)  $p \Rightarrow \sim p \vee \sim q$       ۴)  $p \Rightarrow p \vee q$

۱۴. اگر  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، به طوری که ترکیب عطفی آن دو دارای ارزش نادرست باشد، کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

- ۱)  $p \Leftrightarrow q \equiv F$       ۲)  $\sim p \Rightarrow q$   
۳)  $\sim q \Rightarrow p$       ۴)  $(\sim p \vee q) \wedge p \equiv F$

۱۵. از گزاره‌های  $p$  و  $q$ ، اگر بدانیم  $q$  درست است، آنگاه چند مورد از گزاره‌های زیر همواره درست خواهند بود؟

- الف)  $p \Rightarrow q$       ب)  $q \Rightarrow p$       ج)  $p \Rightarrow \sim q$       د)  $\sim q \Rightarrow p$   
۱) صفر      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۳

۱۶. نقیض گزاره  $p \Rightarrow q$  کدام است؟

- ۱)  $p \Rightarrow \sim q$       ۲)  $\sim p \Rightarrow q$       ۳)  $p \wedge \sim q$       ۴)  $\sim p \wedge q$

۱۷. اگر  $a \Rightarrow b$  و  $b \Rightarrow c$  گزاره‌های درستی باشند، آنگاه گزاره  $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$  هم‌ارز با کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

- ۱)  $a$       ۲)  $b$       ۳)  $c$       ۴)  $a \vee b \vee c$

۱۸. مربع بودن یک چهارضلعی چه نوع شرطی برای مستطیل بودن آن است؟

- ۱) فقط لازم      ۲) فقط کافی      ۳) لازم و کافی      ۴) نه لازم و نه کافی

۱۹. برای اعداد حقیقی  $x$  و  $y$ ، شرط  $|x|=|y|$  چه نوع شرطی برای  $x^1 = y^1$  است؟

- ۱) لازم و کافی      ۲) غیر لازم ولی کافی      ۳) نه لازم و نه کافی      ۴) لازم ولی غیرکافی

۲۰. برای عدد حقیقی  $a$ ،  $a^3 < a^4$  چه نوع شرطی برای  $a > 1$  می‌باشد؟

- ۱) لازم      ۲) کافی      ۳) لازم و کافی      ۴) نه لازم نه کافی

۲۱. کدام مورد در رابطه با گزاره  $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$  درست است؟

- ۱) هم‌ارز گزاره  $\sim p \Rightarrow q$  می‌باشد.      ۲) همواره درست است.  
۳) هم‌ارز گزاره  $\sim q \Rightarrow p$  می‌باشد.      ۴) می‌تواند نادرست یا درست باشد.

P(A|B)  
C.V.  
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

ریاضیات گسسته دوازدهم  
 $a/b+c$

$x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$   
 $p \Rightarrow q$   
 $\binom{n}{1}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$a/b+c$   
 $x+2 \equiv 5$

$P(A|B)$   
C.V.  
 $p \Rightarrow q$

۱۶  $\binom{n}{1}$   
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$a/b+c$   
 $x+2 \equiv 5$   
 $P(A|B)$

۲۲. جدول ارزش گزاره  $\sim(p \vee q) \vee \sim q$  به کدام صورت می باشد؟

p	q	$\sim(p \vee q) \vee \sim q$		p	q	$\sim(p \vee q) \vee \sim q$	
د	د	ن	۲	د	د	د	۱
د	ن	د		د	ن	ن	
ن	د	ن		ن	د	د	
ن	ن	ن		ن	ن	ن	

p	q	$\sim(p \vee q) \vee \sim q$		p	q	$\sim(p \vee q) \vee \sim q$	
د	د	ن	۴	د	د	ن	۳
د	ن	د		د	ن	د	
ن	د	د		ن	د	ن	
ن	ن	د		ن	ن	د	

۲۳. جدول زیر مربوط به کدام گزاره است؟

- ۱.  $\sim p \vee q$
- ۲.  $p \vee \sim q$
- ۳.  $\sim p \wedge q$
- ۴.  $p \wedge \sim q$

p	q	?
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	ن

۲۴. از کدام یک از گزاره های زیر می توان نتیجه گرفت: «p اگر و تنها اگر q»؟

- ۱. نقیض p شرط کافی برای نقیض q و p شرط لازم برای q باشد.
- ۲. نقیض p شرط کافی برای q یا نقیض q شرط لازم برای p باشد.
- ۳. p شرط کافی برای q و نقیض q شرط لازم برای نقیض p باشد.
- ۴. p شرط لازم برای q یا نقیض p شرط لازم برای نقیض q باشد.

۲۵. نقیض گزاره «اگر  $2k$  مضرب ۴ نباشد،  $2k+2$  مضرب ۴ خواهد بود.» کدام است؟

- ۱. « $2k$  مضرب ۴ باشد و  $2k+2$  مضرب ۴ نباشد.»
- ۲. « $2k$  مضرب ۴ نباشد و  $2k+2$  مضرب ۴ نباشد.»
- ۳. « $2k$  مضرب ۴ نباشد و  $2k+2$  مضرب ۴ باشد.»
- ۴. « $2k$  مضرب ۴ باشد و  $2k+2$  مضرب ۴ باشد.»

۲۶. اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند و a و b دو عدد طبیعی غیر یک باشند و بدانیم  $ab = pq$ ، ارزش کدام یک از گزاره های زیر صحیح است؟

- ۱.  $(a = p) \vee (b = q)$
- ۲.  $(a = q) \vee (b = p)$
- ۳.  $((a = p) \vee (b = q)) \wedge ((a = q) \vee (b = p))$
- ۴.  $((a = p) \wedge (b = q)) \vee ((a = q) \wedge (b = p))$

۲۷. کدام یک از گزاره های زیر با گزاره  $p \wedge (q \Rightarrow p)$  هم ارز منطقی است؟

- ۱. q
- ۲.  $\sim q$
- ۳. p
- ۴.  $\sim p$

۲۸. اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره های  $p \Rightarrow (p \vee q)$  و  $p \Rightarrow (p \wedge q)$  به ترتیب هم ارز با ..... و ..... خواهند بود؟

- ۱.  $\sim p \vee q$  و T
- ۲.  $\sim q \wedge p$  و T
- ۳.  $p \vee q$  و  $p \vee q$
- ۴.  $\sim p \vee q$  و T

۲۹. اگر p و q دو گزاره دلخواه و r گزاره ای درست باشد، کدام یک از گزاره های زیر می تواند نادرست باشد؟

- ۱.  $q \Rightarrow [r \vee (q \wedge p)]$
- ۲.  $p \Rightarrow (p \wedge r)$
- ۳.  $[r \vee (q \wedge p)] \Rightarrow q$
- ۴.  $[\sim r \wedge (q \vee r)] \Rightarrow r$

۳۰. اگر k و k' دو عدد صحیح باشند، به طوری که  $k' > k$  و همچنین بدانیم:  $\begin{cases} a = 2k \\ b = 2k' - 3 \end{cases}$ ، ارزش کدام یک از گزاره های زیر صحیح است؟

- ۱.  $(b > a) \vee (|a - b| = 1)$
- ۲.  $(b > a) \wedge (|a - b| = 1)$
- ۳.  $b > a \Rightarrow |a - b| \leq 1$
- ۴.  $|a - b| = 1 \Rightarrow b > a$

۳۱. جدول تعیین ارزش پنج گزاره را رسم کرده‌ایم. در چند درصد سطرهای این جدول، ترکیب عطفی حداقل دو گزاره، ارزش درست دارد؟

- ۱) ۸۰      ۲) ۸۱/۲۵      ۳) ۸۲      ۴) ۹۰

۳۲. اگر گزاره‌های  $p$  و  $q$  به ترتیب « $x$  بر ۳ بخش پذیر است» و « $x$  بر ۴ بخش پذیر نیست» باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر در ترکیب شرطی با  $p \wedge q$  تالی (حکم) است؟

- ۱) باقی مانده  $x$  بر ۱۲ برابر با ۹ می‌باشد.      ۲) باقی مانده  $x$  بر ۶ برابر با ۰ یا ۳ می‌باشد.  
 ۳) باقی مانده  $x$  بر ۱۲ برابر با ۶ می‌باشد.      ۴) باقی مانده  $x$  بر ۱۲ برابر با ۳ یا ۹ می‌باشد.

۳۳. اگر  $p, q$  و  $r$  سه گزاره منطقی باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر، نقیض گزاره  $(p \wedge r \wedge (q \vee \sim r)) \sim p$  می‌باشد؟

- ۱)  $r$       ۲)  $q$       ۳)  $p$       ۴)  $\sim r \vee \sim q$

۳۴. برای سه گزاره  $p, q$  و  $r$  می‌دانیم که ارزش گزاره  $p \wedge (r \vee q)$  هم‌ارز با ارزش گزاره  $q$  است. کدام گزاره همواره دارای ارزش درست است؟

- ۱)  $p \Rightarrow \sim q$       ۲)  $q \Rightarrow r$       ۳)  $p \Rightarrow q$       ۴)  $q \Rightarrow p$

۳۵. اگر برای سه گزاره  $p, q$  و  $r$  بدانیم  $p \wedge q \equiv q \wedge r \equiv p \wedge r \equiv F$ ، آنگاه کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- ۱)  $p \wedge q \Leftrightarrow \sim r$       ۲)  $p \equiv r \equiv q$       ۳)  $T \equiv (p \vee r) \Rightarrow q$       ۴)  $T \equiv (p \vee q) \Rightarrow \sim r$

۳۶. اگر  $p, q$  و  $r$  سه گزاره باشند و بدانیم  $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \equiv \sim p$ ؛ آنگاه در جدول زیر مقادیر  $t, z, y, x$  به ترتیب کدام است؟

p	q	r
د	د	x
د	ن	y
ن	د	z
ن	ن	t

- ۱) د - د - د - ن  
 ۲) د - د - د - ن  
 ۳) ن - د - د - ن  
 ۴) ن - ن - د - د

۳۷. ارزش کدام گزاره زیر به انتفای مقدم درست است؟

- ۱) اگر عدد ۲، تنها عدد زوج اول باشد، ۱ عضو خنثای ضرب است.  
 ۲) اگر در مثلث قائم‌الزاویه، نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها روی یکی از رئوس باشد، نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها نیز روی یک رأس است.  
 ۳) اگر مجموع هر ۴ عدد متوالی زوج باشد، مضرب آن اعداد بر ۴ بخش پذیر خواهد بود.  
 ۴) اگر به ازای هر  $n^2$  بخش پذیر بر ۴،  $n$  نیز بر ۴ بخش پذیر باشد، آنگاه از هر ۳ نقطه در فضا تنها یک صفحه می‌گذرد.

۳۸. عکس نقیض ترکیب شرطی  $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$  کدام است؟

- ۱)  $\sim p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$       ۲)  $p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$       ۳)  $p \Rightarrow (p \vee \sim q)$       ۴)  $\sim p \Rightarrow (\sim p \vee q)$

۳۹. کدام یک از گزاره‌های دو شرطی زیر، ارزش درستی دارد؟

- ۱) یک چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر هر چهار ضلع آن با یکدیگر برابر باشند.  
 ۲) چهار ضلع یک چهارضلعی باهم برابرند، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی مربع باشد.  
 ۳)  $(a-b)^3 = 0$  اگر و تنها اگر  $a=1$   
 ۴) یک عدد طبیعی، اول است، اگر و تنها اگر فقط دو مقسوم علیه مثبت داشته باشد.

۴۰. عکس نقیض گزاره «اگر  $x^2$  عددی گنگ باشد،  $x$  نیز عددی گنگ است.» کدام است؟

- ۱) اگر  $x^2$  عددی گویا باشد،  $x$  می‌تواند گنگ باشد.      ۲) اگر  $x$  عددی گویا باشد،  $x^2$  عددی گنگ است.  
 ۳) اگر  $x^2$  عددی گویا باشد،  $x$  عددی گویاست.      ۴) اگر  $x$  عددی گویا باشد،  $x^2$  عددی گویاست.



P(A|B)  
C.V.  
  
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

ریاضیات گسسته دوازدهم  
a/b+c  


$x+2 \equiv 5$

P(A|B)  
p → q

$\binom{n}{1}$



$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

a/b+c



$x+2 \equiv 5$

P(A|B)

C.V.  
p → q

۱۸  $\binom{n}{1}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

a/b+c



$x+2 \equiv 5$

P(A|B)

۴۱. کدام یک از گزاره‌های زیر به انتفای مقدم درست است؟

- ۱) اگر ۲ اول باشد، عدد بعد از آن اول نیست.
- ۲) اگر در مثلث ۲ ضلع برابر باشد، حداقل ۲ زاویه در آن مثلث برابر هستند.
- ۳) اگر ۴ زوج نباشد، به ۷ بخش پذیر است.
- ۴) اگر ۶ مضرب ۳ باشد، ۸ مضرب ۴ است.

۴۲. کدام گزینه به انتفای مقدم دارای ارزش درست است؟

- ۱) اگر ۱۸ مضرب ۳ باشد، آنگاه ۵ فرد است.
- ۲) اگر  $\sqrt{۸۱}$  گنگ باشد، آنگاه  $\sqrt{۲}$  گویاست.
- ۳) اگر  $x^2 > ۴$  آنگاه  $x^2 > ۲$  یا  $x < -۲$  است.
- ۴) اگر عدد ۱ مربع کامل باشد، آنگاه  $\sqrt{۷}$  گنگ است.

۴۳. اگر گزاره‌های  $r, \sim r, p \vee q, r \Rightarrow t$  نادرست باشند، کدام گزاره زیر نادرست است؟

- ۱)  $r \vee t$
- ۲)  $t \Rightarrow q$
- ۳)  $r \Rightarrow p$
- ۴)  $p \vee \sim q$

۴۴. چه تعداد از هم‌ارزی‌های زیر صحیح می‌باشد؟

- الف)  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q \equiv q \vee p$  (۱) صفر
- ب)  $p \wedge (q \vee p) \equiv p$  (۲) ۱
- ج)  $p \Leftrightarrow F \equiv \sim p$  (۳) ۲
- د)  $p \Leftrightarrow F \equiv \sim p$  (۴) ۳

۴۵. ساده شده عبارت  $\sim((q \vee \sim p) \wedge \sim(\sim q \wedge \sim p))$  کدام است؟

- ۱)  $p \wedge q$
- ۲)  $p \vee q$
- ۳)  $\sim q$
- ۴)  $\sim p$

۴۶. گزاره  $(p \Rightarrow \sim q) \vee \sim q$  هم‌ارز با کدام گزاره است؟

- ۱)  $p$
- ۲)  $\sim q \wedge p$
- ۳)  $\sim q$
- ۴)  $q \vee \sim p$

### سورها

۴۷. عبارتی که ارزش آن وابسته به مقدار متغیر موجود در آن باشد، ..... نامیده می‌شود و نوعی از سور که ارزش آن را می‌توان با

مثال نقض مشخص نمود، ..... نام دارد.

- ۱) گزاره - سور عمومی
- ۲) گزاره - سور وجودی
- ۳) گزاره نما - سور عمومی
- ۴) گزاره نما - سور وجودی

۴۸. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- ۱)  $\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{4 \sin x} \leq ۲$
- ۲)  $\forall x \in \mathbb{R}^+; x + \frac{1}{x} \geq ۲$
- ۳)  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}; \frac{x-1}{x} < ۱$
- ۴)  $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \cdot \cot x = ۱$

۴۹. ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

- ۱) اگر به ازای عدد طبیعی  $x$  داشته باشیم:  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ، آنگاه  $x \in \mathbb{R}$  یافت می‌شود که  $x^2 + x + 1 = 0$ .
- ۲) اگر  $\sqrt{2}$  را بتوان به صورت  $\frac{a}{b}$  نوشت،  $x \in \mathbb{R}$  یافت می‌شود که  $x^2 - x + 1 = 0$ .
- ۳) اگر دو عدد متوالی اول باشند، تفاضل آن دو عدد نیز عددی اول است.
- ۴) نقیض یک سور وجودی می‌تواند سور وجودی دیگر باشد.

۵۰. اگر  $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq -۲$  یک گزاره سوری باشد، نقیض آن کدام است؟

- ۱)  $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 > -۲$
- ۲)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > -۲$
- ۳)  $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \geq +۲$
- ۴)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq -۲$

۵۱. نقیض جمله «در هر مثلث ارتفاع مثلث در داخل آن قرار می‌گیرد». کدام است؟

۱. همیشه ارتفاع مثلث در خارج آن قرار می‌گیرد.
۲. وجود ندارد مثلی که ارتفاع آن در خارج آن قرار بگیرد.
۳. وجود دارد مثلی که ارتفاع آن در خارج آن قرار می‌گیرد.
۴. وجود ندارد مثلی که ارتفاع آن در داخل آن قرار بگیرد.

۵۲. نقیض گزاره «هر دانش‌آموز موفق می‌شود و همه انسان‌ها با هم برابر نیستند». کدام است؟

۱. هر دانش‌آموز موفق نمی‌شود و همه انسان‌ها با هم برابرند.
۲. بعضی دانش‌آموزان موفق نمی‌شوند و بعضی انسان‌ها با هم برابرند.
۳. همه دانش‌آموزان موفق نمی‌شوند یا همه انسان‌ها با هم برابرند.
۴. بعضی دانش‌آموزان موفق نمی‌شوند یا بعضی از انسان‌ها با هم برابرند.

۵۳. نقیض گزاره «همه اعداد طبیعی، اول یا مرکب هستند». کدام است؟

۱. همه اعداد طبیعی اول یا مرکب نیستند.
۲. هیچ یک از اعداد طبیعی اول و مرکب نیستند.
۳. حداقل یک عدد طبیعی وجود دارد که اول و مرکب نیست.
۴. حداقل یک عدد طبیعی وجود دارد که اول و مرکب است.

۵۴. چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

- |  |  |
|--|--|
| $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}; xy = 0$ <b>ب</b>  | $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; x + y = 0$ <b>الف</b> |
| $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}; xy = -1$ <b>د</b> | $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N}; x + y = 0$ <b>ج</b>   |
| ۳ <b>۴</b>   | ۱ <b>۲</b>   |
| ۲ <b>۳</b>   | صفر <b>۱</b>   |

۵۵. چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست هستند؟

- |  |   |
|--|---|
| $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 - 5x + 7 = 0$ <b>ب</b>            | $\forall x \in \mathbb{N}; (x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3)$ <b>الف</b>    |
| $\forall x \in \mathbb{N}; (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0)$ <b>د</b> | $\forall x \in \{2, -\frac{1}{2}, -1, -3\}; x^2 - 4x + 3 \neq 0$ <b>ج</b> |
| ۳ <b>۴</b>   | ۱ <b>۲</b>  |
| ۲ <b>۳</b>   | صفر <b>۱</b>  |

۵۶. نقیض گزاره  $\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{Z}; a + b = 0 \Rightarrow b < 0$  کدام است؟

- |   |  |
|---|--|
| $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{Z}; (a + b \neq 0) \wedge (b < 0)$ <b>۲</b>    | $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{Z}; (a + b = 0) \wedge (b > 0)$ <b>۱</b>    |
| $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{Z}; (a + b \neq 0) \wedge (b \leq 0)$ <b>۴</b> | $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{Z}; (a + b = 0) \wedge (b \geq 0)$ <b>۳</b> |

۵۷. نقیض گزاره  $\exists x \in \mathbb{R}; (x + 3 = 0) \Leftrightarrow (x - 5 = 0)$  کدام است؟

- |   |  |
|---|--|
| $\forall x \in \mathbb{R}; (x + 3 = 0) \Leftrightarrow (x - 5 \neq 0)$ <b>۲</b> | $\forall x \in \mathbb{R}; (x + 3 \neq 0) \Leftrightarrow (x - 5 \neq 0)$ <b>۱</b> |
| گزینه‌های ۲ و ۳ صحیح هستند. <b>۴</b>  | $\forall x \in \mathbb{R}; (x + 3 \neq 0) \Leftrightarrow (x - 5 = 0)$ <b>۳</b>    |

## مجموعه - زیر مجموعه

**تعریف (مجموعه):** مجموعه از مفاهیم اولیه است که برای توضیح آن می توان گفت دسته ای از اشیاء مشخص و متمایز است که آن را با حروف بزرگ مثل A، B و ... نام گذاری می کنیم.

به عنوان مثال، اعداد اول یک رقمی، یک مجموعه هستند و به صورت  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  نوشته می شوند.

**تعریف (عدد اصلی مجموعه):** به تعداد اعضای مجموعه A، عدد اصلی مجموعه A گفته می شود و آن را با  $n(A)$  یا  $|A|$  نمایش می دهیم.

**نکته ۱:** تکرار اعضا در مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی دهد.

به عنوان مثال، مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  با مجموعه  $B = \{1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$  برابر است و این دو مجموعه هیچ فرقی با هم ندارند.

**نکته ۲:** تغییر ترتیب اعضا در مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی دهد.

به عنوان مثال، مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  با مجموعه های  $B = \{1, 3, 2\}$  و  $B = \{2, 1, 3\}$  برابر است و این سه مجموعه هیچ فرقی با هم ندارند.

**مثال ۱:** مجموعه  $A = \{a, \{b\}, a, \{c, d\}\}$  چند عضو دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

**پاسخ: گزینه ۲**

این مجموعه سه عضو دارد و اعضای آن عبارتند از:  $\{a\}$ ،  $\{b\}$  و  $\{c, d\}$  دقت داشته باشید که عضو  $a$  دو بار نوشته شده است.

### روش های بیان یک مجموعه

معمولاً مجموعه ها را به یکی از سه روش زیر نمایش می دهیم:

(الف) تفضیلی:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ب) توصیفی: مجموعه اعداد طبیعی کوچک تر از ۶

(ج) ریاضی:  $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 6\}$

### بررسی چند مجموعه مهم

(۱) مجموعه اعداد طبیعی ( $\mathbb{N}$ )

(۲) مجموعه اعداد حسابی ( $\mathbb{W}$ )

(۳) مجموعه اعداد صحیح ( $\mathbb{Z}$ )

(۴) مجموعه اعداد گویا ( $\mathbb{Q}$ )

(۵) مجموعه اعداد گنگ ( $\mathbb{Q}'$ )

(۶) مجموعه اعداد حقیقی ( $\mathbb{R}$ )

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(الف) اعداد طبیعی زوج } E \\ \text{(ب) اعداد طبیعی فرد } F \text{ یا } O \\ \text{(ج) اعداد طبیعی اول } P \end{array} \right\} \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد  $\mathbb{Q}'$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

### تعلق (عضویت)

اگر شیء  $x$  عضوی از مجموعه  $A$  باشد، می نویسیم:  $x \in A$  و اگر  $x$  عضوی از مجموعه  $A$  نباشد، می نویسیم:  $x \notin A$ .

**مثال ۲:** در مورد مجموعه  $A = \{2, \{2\}, \{3, 5\}\}$  کدام گزینه نادرست است؟

$\{2\} \in A$  (۲)

$2 \in A$  (۱)

$\{5\} \in A$  (۴)

$\{3, 5\} \in A$  (۳)