فصل ۱

قسمت اوّل
اصول شمارش

اصل ضرب و اصل جمع

مفاهیم اولیهٔ این بخش مربوط می‌شود به دو اصل مهم به نام‌های اصل جمع و اصل ضرب که با آن‌ها آشنا می‌شوید.

اصل جمع: اگر فقط یک کار (یک عمل) را بتوان به k یا m یا ... یا n حالت مختلف انجام داد، آن‌گاه تعداد کل حالت‌های انجام آن کار برابر است با:

$$k+m+\dots+n$$

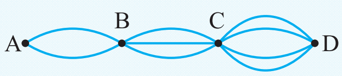
حرف «یا» در سؤالات، نشان‌دهندهٔ اصل جمع است. مثلاً فرض کنید محسن برای رفتن از منزل به دانشکده بتواند از یکی از ۵ خط تاکسی یا یکی از ۳ خط مترو یا یکی از ۸ خط اتوبوس استفاده کند، تعداد کل حالت‌هایی که محسن می‌تواند به دانشکده برود برابر است با:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \underset{\text{تاکسی}}{۵}+\underset{\text{مترو}}{۳}+\underset{\text{اتوبوس}}{۸}=۱۶$$

در این مثال، محسن نمی‌توانست هم‌زمان از هر سه وسیلهٔ نقلیه استفاده کند و برای رفتن به دانشکده فقط باید یکی از وسایل نقلیه را انتخاب کند، به همین علت از اصل جمع استفاده کرده‌ایم.

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام پذیرد به طوری‌که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم، هر کدام از این m طریق به n روش مختلف انجام‌پذیر باشند در کل، آن عمل به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است (اصل ضرب قابل تعمیم به بیش‌تر از ۲ مرحله نیز می‌باشد).

تست شکل زیر، مسیرهای دوطرفه بین شهرهای A، B، C و D را نمایش می‌دهد. فردی می‌خواهد از شهر A به شهر D برود و برگردد به طوری‌که در مسیر برگشت از راه‌هایی که رفته استفاده نکند. او به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟



۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ ۳) ۸۰ ۴) ۹۴

پاسخ: در مسیر رفت او باید ابتدا به B، سپس به C و در نهایت به D برود. چون باید این کارها را پشت سر هم انجام دهد از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. در مسیر برگشت از راه‌های بین هر دو شهر یکی را حذف می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{تعداد حالت‌های مسیر رفت} = ۲\times ۳\times ۴ = ۲۴\\ \text{تعداد حالت‌های مسیر برگشت} = ۳\times ۲\times ۱ = ۶\end{array}\right\}\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های رفت و برگشت} = ۲۴\times ۶ = ۱۴۴ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

نکته در آزمون‌های چندگزینه‌ای اگر پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد، تعداد کل حالت‌های پاسخ‌گویی طبق اصل ضرب برابر است با:

$$(\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}}$$

ولی اگر پاسخ‌گویی به سؤالات الزامی نباشد، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$(\text{تعداد گزینه‌ها} + ۱)^{\text{تعداد سؤالات}}$$

تست به یک آزمون ۲ گزینه‌ای که شامل ۳۰ سؤال است به چند حالت مختلف می‌توان جواب داد؟ (فرض کنید باید به همهٔ سؤالات جواب بدهیم.)

۱) $۲^{۳۰}$ ۲) $۳۰^{۲}$ ۳) $۲^{۱۵}$ ۴) $۱۵^{۲}$

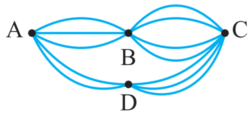
پاسخ: $$\text{تعداد حالت‌های جواب دادن به آزمون} = (\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}} = ۲^{۳۰} \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

تست یک کارخانهٔ خودروسازی، در خودروهای خود از ۲ نوع گیربکس، ۳ نوع موتور با حجم‌های مختلف و ۵ رنگ مختلف استفاده می‌کند. چند نوع خودرو با ویژگی‌های بالا تولید خواهد شد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: باید از اصل ضرب استفاده کنیم چون می‌توانیم به طور هم‌زمان از تمام موارد مطرح‌شده برای تولید خودرو استفاده کنیم:

$$\text{تعداد انواع خودروها} = ۲\times ۳\times ۵ = ۳۰ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.



نکته گاهی اوقات در یک مسئله، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به شکل مقابل توجه کنید، فرض کنید شخصی می‌خواهد از شهر A به C سفر کند. او دو مسیر کلی را می‌تواند انتخاب کند مسیر $(A \to B \to C)$ یا مسیر $(A \to D \to C)$. این حرف «یا» اصل جمع را نشان می‌دهد. حالا فرد هر مسیری را که انتخاب کند باید حالت‌های مختلف بین دو شهر را در هم ضرب کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A \to B \to C \text{ تعداد حالت‌های مسیر } = ۳ \times ۴ = ۱۲ \\ A \to D \to C \text{ تعداد حالت‌های مسیر } = ۲ \times ۳ = ۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اصل جمع}} C \text{ به } A \text{ تعداد کل حالت‌های مسیر رفت از } = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

دیدید که در این مثال، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده شد.

نماد فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد، $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) به‌صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$

یعنی برای یافتن فاکتوریل یک عدد طبیعی باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب کنیم، به عنوان مثال می‌توان گفت:

$$۱! = ۱ \,,\, ۲! = ۲ \times ۱ = ۲ \,,\, ۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \,,\, ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴ \,,\, ۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

توجه قرارداد می‌کنیم که $۰! = ۱$

تذکر گاهی اوقات لازم نیست فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم. در این‌گونه موارد کافی است هر جا که متوقف می‌شویم علامت فاکتوریل بگذاریم.

معمولاً در کسرها این اتفاق می‌افتد. یعنی لازم نیست تمام عددهایی را که فاکتوریل دارند تا ۱ باز کنیم مثلاً در کسر $\frac{۱۰!}{۸!}$ کافی است ۱۰ را تا ۸ باز کنیم:

$$\frac{۱۰!}{۸!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times \overset{۱}{\cancel{۸!}}}{\underset{۱}{\cancel{۸!}}} = ۱۰ \times ۹ = ۹۰$$

مثال دیگر : $\frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}} = n(n-۱)$

تست در چند مورد زیر، حاصل، اشتباه محاسبه شده است؟

آ) $۵! \times ۳! = ۱۵!$ ب) $\frac{۶!}{۲! \times ۴!} = ۱۵$ پ) $۵! - ۳! = ۲!$ ت) $\frac{(n+۲)!}{(n+۱)!} = n+۲$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ : قسمت‌های (آ) و (پ) اشتباه محاسبه شده‌اند. چون نمی‌توانیم عددها را با علامت فاکتوریل در هم ضرب کنیم یا از هم کم کنیم. بلکه باید حاصل $۵!$ و $۳!$ را در هم ضرب کنیم، هم‌چنین باید حاصل $۵!$ را منهای حاصل $۳!$ کنیم:

$۵! \times ۳! = ۱۲۰ \times ۶ = ۷۲۰ \Rightarrow$ ۷۲۰ با $۱۵!$ برابر نیست. ، $۵! - ۳! = ۱۲۰ - ۶ = ۱۱۴ \Rightarrow$ ۱۱۴ با $۲!$ برابر نیست.

$$\frac{۶!}{۲! \times ۴!} = \frac{۶ \times ۵ \times \overset{۱}{\cancel{۴!}}}{۲ \times ۱ \times \underset{۱}{\cancel{۴!}}} = ۱۵ \quad , \quad \frac{(n+۲)!}{(n+۱)!} = \frac{(n+۲)\overset{۱}{\cancel{(n+۱)!}}}{\underset{۱}{\cancel{(n+۱)!}}} = n+۲ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

جایگشت

مفهوم جایگشت: جایگشت یعنی نحوهٔ قرار گرفتن در کنار هم، یعنی افراد، اشیا و ... به‌صورت‌های مختلف می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. به هر یک از حالت‌های ممکن برای قرار گرفتن n شیء متمایز در کنار هم، یک جایگشت از آن n شیء می‌گوییم. به عنوان مثال می‌خواهیم جایگشت‌های حروف a، b و c را بنویسیم، یعنی می‌خواهیم تمام کلماتی را که با این حروف می‌توان ساخت، بنویسیم؛ این کلمات عبارتند از:

$\underbrace{abc, acb, bac, bca, cab, cba}_{\text{۶ جایگشت مختلف}}$

نکته تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$. مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمهٔ «NASER» می‌توان ساخت برابر است با: $۵! = ۱۲۰$

و یا تعداد جایگشت‌هایی که با ارقام ۱، ۲، ۴، ۷، ۸، ۹ می‌توان ساخت برابر است با: $۶! = ۷۲۰$

هم‌چنین ۴ دوست به نام‌های مریم، زهرا، فریماه و نازنین به $۴!$ حالت یعنی به ۲۴ حالت مختلف می‌توانند کنار هم در یک صف قرار گیرند.

تست تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را بر تعداد جایگشت‌های $(n-۲)$ شیء متمایز دیگر تقسیم کرده‌ایم، حاصل برابر ۲ شده است. مقدار n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ :

$$\frac{n!}{(n-۲)!} = ۲ \Rightarrow \frac{n(n-۱)\overset{۱}{\cancel{(n-۲)!}}}{\underset{۱}{\cancel{(n-۲)!}}} = ۲ \Rightarrow n^۲ - n - ۲ = ۰ \Rightarrow (n-۲)(n+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۲ & \text{(قق)} \\ n = -۱ & \text{(غقق)} \end{cases}$$

توجه کنید که n فقط باید عدد طبیعی باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

نکته معمولاً بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرایط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح باشد باید ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پُر کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ برویم و خانه‌ها را از چپ به راست پُر کنیم. (البته تشخیص این‌که از کدام خانه پُر کردن را شروع کنیم زیاد دشوار نیست.)

تست **با ارقام ۰،۱،۴،۷،۸ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)**

۱) ۹۶ ۲) ۸۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۱۸

پاسخ : در متن سوال در مورد زوج یا فرد بودن و یا شرط دیگری صحبت نشده، (فقط می‌خواهیم عددهای ۵ رقمی بسازیم) پس خانه‌ها را از چپ به راست پُر می‌کنیم، فقط دقت کنید پس از پُر کردن هر خانه، باید یکی از ارقام استفاده‌شده را به دلخواه حذف کنیم زیرا در متن سؤال گفته شده تکرار مجاز نیست. ضمناً دقت کنید که هیچ عددی با صفر شروع نمی‌شود. پس از پُر کردن هر خانه، در خانهٔ بعدی باید به دلخواه یکی از ارقامی را که استفاده شده خط بزنیم:

۱،۴،۷،۸ | ۰،۱،۴،۷،~~۸~~ | ۰،۱،۴،~~۷~~ | ۰،۱،~~۴~~ | ~~۰~~،۱

۴	۴	۳	۲	۱

گزینهٔ (۱) درست است. $\Leftarrow$ ۹۶ = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۴ = تعداد عددهای مطلوب $\Leftarrow$

تست **با ارقام ۰،۶،۷،۸،۹ چند عدد ۴ رقمی فرد می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)**

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

پاسخ : می‌دانیم در اعداد فرد، یکان حتماً باید رقمی فرد باشد، لذا به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۶،۷،۸،~~۹~~ | ۰،۶،۷،~~۸~~ | ۰،۶،~~۷~~ | ۷،۹

۳	۳	۲	۲

گزینهٔ (۳) درست است. $\Leftarrow$ ۳۶ = ۲ × ۲ × ۳ × ۳ = تعداد عددها $\Leftarrow$

نکته اگر صفر جزء ارقام داده‌شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد، باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم یکی وقتی که یکان صفر باشد و دیگری وقتی که یکان صفر نباشد. پس از یافتن تعداد حالت‌های هر قسمت، جواب‌ها را طبق اصل جمع با هم جمع می‌کنیم.

تست **با ارقام ۰،۵،۶،۷،۸،۹ چند عدد ۳ رقمی زوج می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)**

۱) ۴۹ ۲) ۸۰ ۳) ۶۳ ۴) ۵۲

پاسخ : صفر جزء رقم‌ها است و باید عدد زوج بسازیم، ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز است. پس دو حالت جداگانه در نظر می‌گیریم:

صفر باشد. ۵،۶،۷،۸،۹ | ~~۵~~،۶،۷،۸،۹

۵	۴	۱

۲۰ = ۱ × ۴ × ۵ = جواب $\Leftarrow$

صفر نباشد (۶،۸) | ۰،۵،۶،۷،~~۹~~ | ۵،۶،۷،~~۸~~،۹

۴	۴	۲

۳۲ = ۲ × ۴ × ۴ = جواب $\Leftarrow$

گزینهٔ (۴) درست است. $\Leftarrow$ ۵۲ = ۳۲ + ۲۰ = تعداد کل اعداد مطلوب $\Leftarrow$

تذکر مهم اگر در همین تست گفته می‌شد تکرار ارقام مجاز است، دیگر هیچ رقمی را خط نمی‌زدیم و ضمناً با یک حالت مسئله را حل می‌کردیم (به شکل مقابل توجه کنید.)

۰،۵،۶،۷،۸،۹ | ۵،۶،۷،۸،۹ | ۰،۶،۸

۵	۶	۳

۹۰ = ۳ × ۶ × ۵ = جواب $\Leftarrow$

نکته در بعضی سؤالات گفته می‌شود اشیا یا افراد خاصی همواره باید کنار هم قرار بگیرند. در این‌گونه سؤالات آن اشیا یا افراد را یک شیء فرض می‌کنیم، یعنی آن‌ها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. سپس تعداد اشیای بیرون بسته و تعداد خود بسته‌ها را شمرده و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم و آن را در جایگشت تعداد اشیای داخل بسته ضرب می‌کنیم. مثلاً می‌خواهیم با حروف کلمهٔ «RAMSIN» کلماتی بسازیم که در آن‌ها حروف M و S همواره کنار هم باشند:

$\boxed{M,S}$, R, A, I, N $\Rightarrow$ ۲۴۰ = ۲ × ۱۲۰ = !۲ × !۵ = تعداد کلمات مطلوب

۱ شیء

تست **با حروف «ق»، «ب»، «ن»، «ح» و «و» چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان ساخت که حروف نقطه‌دار در آن‌ها همیشه کنار هم باشند؟**

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

پاسخ : گزینهٔ (۴) درست است. $\Leftarrow$ ۳۶ = ۶ × ۶ = !۳ × !۳ = تعداد کلمات مطلوب $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ق، ب، ن}}$، ح، و

۱ شیء

فصل ۱

قسمت دوم
تبدیل ـ ترکیب

تبدیل

فرض کنید n شیء متمایز موجود است و می‌خواهیم r شیء از آن‌ها را طوری انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم، مهم باشد. در این‌صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $P(n،r)$ نشان داده و به‌صورت روبه‌رو محاسبه می‌کنیم:

$$P(n،r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تست **از بین ۷ نفر شرکت‌کننده در مسابقهٔ دو میدانی، به چند حالت می‌توان به ۳ نفر اول جایزه داد؟**

۱) ۲۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۳۰۰

پاسخ : در مسابقات، ترتیب انتخاب افراد برنده مهم است؛ لذا از فرمول تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$P(۷،۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}^{۱}}{\cancel{۴!}_{۱}}=۲۱۰$$

البته باز هم می‌توانستیم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم:

نفر اول، نفر دوم، نفر سوم

۷	۶	۵

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=۷\times۶\times۵=۲۱۰\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) درست است.

تست **شرکتی با ۳۰ نوع گزینش، برای استخدام یک فروشنده و یک کارمند اداری روبه‌رو شده است. داوطلبان این مشاغل چند نفر بوده‌اند؟**

۱) ۶ ۲) ۳۰ ۳) ۱۲ ۴) ۶۰

پاسخ : تعداد افراد را n فرض می‌کنیم. پس باید از بین n نفر، ۲ نفر را انتخاب کنیم:

$$P(n،۲)=۳۰\Rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!}=۳۰\Rightarrow\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}=۳۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)=۳۰\Rightarrow \underbrace{n^{۲}-n-۳۰}_{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}}=۰\Rightarrow(n-۶)(n+۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۶ & (\text{قق})\\ n=-۵ & (\text{غق})\end{cases}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

البته بدون حل معادلهٔ $\frac{n!}{(n-۲)!}=۳۰$ هم می‌توانستید سؤال را حل کنید یعنی از اعداد گزینه‌ها استفاده کنید و آن‌ها را تک‌تک در معادله قرار دهید فقط اگر $n=۶$ باشد، به یک تساوی درست می‌رسید: $\frac{۶!}{۴!}=۳۰\Rightarrow۳۰=۳۰$

ترکیب

فرض کنید n شیء متمایز موجود است و می‌خواهیم r شیء را از بین آن‌ها انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشد، در این‌صورت تعداد حالت‌های انتخابی را با $C(n،r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و خواهیم داشت:

$$C(n،r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

تست **به چند حالت می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب، برای هدیه دادن انتخاب کنیم؟**

۱) ۴۲ ۲) ۵۶ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۸

پاسخ : در این سؤال جابه‌جایی کتاب‌های انتخاب‌شده، مهم نیست، پس از فرمول ترکیب بهره می‌گیریم:

تعداد حالت‌ها $=\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{(۸-۳)!\times۳!}=\frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}^{۱}}{\cancel{۵!}_{۱}\times۳\times۲\times۱}=۵۶\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) درست است.

تست **با ۶ نقطهٔ متمایز روی محیط یک دایره، چند مثلث می‌توان ساخت؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۸

پاسخ : هر ۳ نقطه روی محیط دایره ، یک مثلث ایجاد می‌کنند. از طرفی می‌دانیم مثلث ABC با ACB یا BCA و امثال آن فرقی ندارد (مثلث را هر طور که نامگذاری کنیم، مهم نیست)، پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\times 3!} = \frac{6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{3!}} = 20 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می‌باشد. دقت دارید که در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا مهم نیست، به همین دلیل از ترکیب استفاده می‌کنیم.

تست **تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ کدام است؟**

۱) ۴۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

پاسخ : مجموعهٔ داده‌شده، ۶ عضو دارد که می‌خواهیم ۴ تای آن‌ها را انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!\times 4!} = \frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{2\times 1\times \cancel{4!}} = 15 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

انتخاب اجباری: اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم، به طوری‌که k شیء به‌خصوص حتماً انتخاب شوند، تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد؛ زیرا k شیء قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید k را هم از r و هم از n کم کنیم.

تست **تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی مجموعهٔ $\{a,b,c,,d,e,f,g,h\}$ به طوری‌که همهٔ آن‌ها شامل f باشند، کدام است؟**

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

پاسخ : حرف f حتماً باید انتخاب شود، پس باید ۴ عضو دیگر را از بین اعضای $\{a,b,c,d,e,g,h\}$ یعنی از بین ۷ عضو انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{8-1}{5-1} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!\times 4!} = \frac{7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{4!}} = 35 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) درست است.

چند فرمول تستی برای حل مسائل ترکیب: گاهی اوقات نیازی نیست از فرمول ترکیب به شکل $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ به طور کامل استفاده کنیم. بدون اثبات از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم تا سرعت حل کردن مسائل ترکیب را بالا ببریم:

۱) دو عدد بالا و پایین مساوی باشند $\Rightarrow \binom{n}{n} = 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{8}{8} = 1 \,,\, \binom{12}{12} = 1$

۲) عدد پایینی صفر باشد $\Rightarrow \binom{n}{0} = 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{4}{0} = 1 \,,\, \binom{30}{0} = 1$

۳) عدد پایینی ۱ باشد $\Rightarrow \binom{n}{1} = n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{7}{1} = 7 \,,\, \binom{35}{1} = 35$

۴) اختلاف دو عدد ۱ باشد $\Rightarrow \binom{n}{n-1} = n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{6}{5} = 6 \,,\, \binom{15}{14} = 15$

تست **به چند طریق می‌توان از بین ۳ استاد و ۴ دانشجو، سه نفر را انتخاب کرد به طوری‌که حداقل ۲ نفرشان استاد باشند؟**

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ : حداقل ۲ استاد، یعنی ۲ استاد یا بیش‌تر. لذا خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{۲ استاد}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{و ۱ دانشجو}} + \underbrace{\binom{3}{3}}_{\text{یا ۳ استاد}} = 3\times 4 + 1 = 13 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

فصل ۱ آمار و احتمال

قسمت اول: اصول شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

☆۱. فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد ۱ درس عمومی از بین ۳ درس عمومی ارائه‌شده و ۱ درس اختصاصی از بین ۴ درس اختصاصی ارائه‌شده انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند ۱ درس عمومی و ۱ درس اختصاصی انتخاب کند؟

۱) ۱۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

☆۲. به چند طریق می‌توانیم فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین ۵ خودکار بنفش، آبی، قرمز، سبز و مشکی و ۸ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های مختلف انتخاب کنیم؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۲

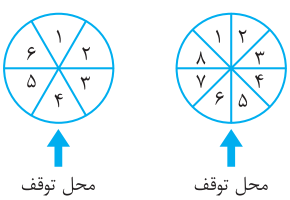
☆۳. اگر شخصی بتواند غذای خود را از بین ۴ نوع سوپ، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع دسر و ۴ نوع نوشیدنی است انتخاب کند، نفر بعدی چند نوع غذا می‌تواند داشته باشد؟ (هر شخص باید از هر نوع غذا دقیقاً یکی را انتخاب کند.)

۱) ۲۸۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۸ ۴) ۷۲

۴. یک تاس و ۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد اول آمده، کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۸۴

☆۵. هر دو دایرهٔ شکل مقابل را با هم به چرخش درمی‌آوریم. پس از توقف، دایره‌ها به چند حالت می‌توانند بایستند به طوری‌که دایرهٔ سمت چپ روی اعداد زوج و دایرهٔ سمت راست روی اعداد مربع کامل بایستد؟



۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۶. یک دانش‌آموز در کنکور سراسری رشتهٔ انسانی، به ۲۸۰ سؤال موجود در دفترچه‌ها به چند طریق می‌تواند پاسخ دهد؟ (پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی نیست.)

۱) $۴^{۲۸۰}$ ۲) $۲۸۰^{۴}$ ۳) $۵^{۲۸۰}$ ۴) $۲۸۰^{۵}$

۷. کلیدهایی با شکل‌های متفاوت، طوری طراحی می‌شوند که برای هر قسمت از آن‌ها الگوهای مختلفی وجود دارد. کلیدهای پراید ۶ قسمت دارند. اگر از ۴ الگو برای هر قسمت استفاده شود، چند طرح مختلف برای کلیدها وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) $۴^{۶}$ ۴) $۶^{۴}$

۸. تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی که هر سؤال ۲ گزینه دارد، چند برابر تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی ۴ گزینه‌ای است؟ (پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی است.)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۸

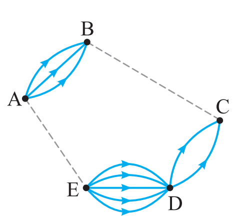
۹. مدیرعامل یک شرکت، کارمندان را به دو گروه فعال و ضعیف تقسیم‌بندی کرده است. ۱۲ نفر ضعیف و ۸ نفر فعال هستند. او به چند طریق می‌تواند فقط یک نفر را از یکی از گروه‌ها اخراج کند؟

۱) ۹۶ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۸

۱۰. در تست قبلی اگر مدیرعامل بخواهد از هر گروه یک نفر را اخراج کند، به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱) ۹۶ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۸

☆۱۱. تعداد راه‌های یک طرفه از شهر B به C و از شهر A به E به ترتیب چندتا باشند تا بتوان به ۲۹ طریق مختلف از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ (مسیرها یک‌طرفه هستند.)



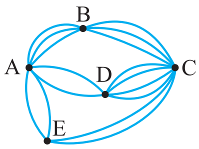
۱) ۳ ، ۲ ۲) ۴ ، ۵ ۳) ۳ ، ۴ ۴) ۶ ، ۵

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت حتماً به تست‌های دارای علامت ☆ پاسخ دهید. تست‌های دارای علامت ★ کمی دشوارتر هستند.

☆۱۲. یک کارخانهٔ تولید خودرو، خودروهایی در ۷ رنگ، ۳ حجم موتور، ۲ نوع گیربکس و ۲ نوع مختلف داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار بـرای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب خواهد داشت؟

۱) ۱۴　　۲) ۸۴　　۳) ۲۸　　۴) ۱۲۰

★۱۳. در شکل مقابل مسیرهای بین شهرها همگی دوطرفه هستند. به چند حالت می‌توان از شهر A به شهر C رفت و برگشت؟ (در برگشت، از مسیر رفت استفاده نکنیم و از همان شهر قبلی بگذریم.)



۱) ۱۲۸　　۲) ۱۶۸　　۳) ۹۰　　۴) ۲۱۸

۱۴. در تست قبلی به چند حالت می‌توان از شهر D و بدون عبور از شهر B، به شهر E مسافرت کرد؟ (فقط مسیر رفت)

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۴

فاکتوریل

☆۱۵. در کدام گزینه، با یک تساوی درست مواجه هستیم؟

۱) $(۰!+۱!+۲!)!=۵$　　۲) $(n+r)!=n!+r!$　　۳) $\sqrt{۳!-۲!}\times\sqrt{۴!-۳!}=۲\sqrt{۳}$　　۴) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=n^۲+n$

۱۶. رابطهٔ نادرست، کدام است؟

۱) $۵!=۴!\times۵$　　۲) $۵!=۴\times۵!$　　۳) $۵!=۳!\times۴\times۵$　　۴) $۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵$

☆۱۷. اگر $\frac{(x+۲)!}{(x+۱)!}=۴$ باشد، آن‌گاه حاصل ۲x کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) ۸

☆۱۸. معادلهٔ $(x^۲-۴)!=۱$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۹. مقدار n در عبارت $\frac{۲}{۳}=\frac{(n!)^۲}{(n+۱)!(n-۱)!}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

جایگشت افراد، اشیا، حروف و ارقام

☆۲۰. با حروف کلمهٔ « DANESH » چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که حرف S در هر رمز باشد؟ (سراسری- ۹۷)

۱) ۲۴۰　　۲) ۲۵۰　　۳) ۲۶۰　　۴) ۲۷۰

۲۱. ۴ فرد به نام‌های A، B، C و D می‌خواهند به ترتیب در یک همایش سخنرانی کنند. به چند حالت امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۸　　۲) ۱۲　　۳) ۲۴　　۴) ۴۸

۲۲. به چند طریق برای ۵ نفر شامل افراد x و y می‌توان برنامهٔ سخنرانی نوشت به طوری‌که فرد x قبل از فرد y سخنرانی کند؟

۱) ۶۰　　۲) ۹۰　　۳) ۱۲۰　　۴) ۱۵۰

☆۲۳. به چند طریق ۱۰ نفر می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند به طوری‌که ۳ نفر به خصوص، همیشه کنار هم باشند؟

۱) $۷!$　　۲) $۸!$　　۳) $۸!\times۳!$　　۴) $۷!\times۳!$

۲۴. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب عربی متمایز را در یک قفسه چید به طوری‌که کتاب‌های هم‌موضوع کنار هم باشند؟

۱) ۳۵۰　　۲) ۱۴۴　　۳) ۲۸۸　　۴) ۲۲۵

★۲۵. به چند طریق ۵ نفر می‌توانند برای سوار شدن به اتوبوس در یک صف قرار گیرند به طوری‌که دو نفر از آن‌ها از این‌که در کنار هم باشند، خودداری کنند؟

۱) ۴۸　　۲) ۷۲　　۳) ۱۱۶　　۴) ۱۲۰

۲۶. ۴ سرباز و ۲ فرمانده، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند به طوری‌که ۲ فرمانده کنار هم نباشند؟

۱) ۷۲۰　　۲) ۴۸۰　　۳) ۲۴۰　　۴) ۵۸۰

☆۲۷. با استفاده از حروف کلمهٔ «گلستان» چند کلمهٔ ۴ حرفی و با حروف متمایز می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

۱) ۹۶　　۲) ۱۲۰　　۳) ۱۸۰　　۴) ۲۴۰

☆۲۸. با حروف کلمهٔ «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «ت» شروع و به «ح» ختم شوند؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۶

☆۲۹. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ « DAMDARAN » به شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟ (سراسری- ۸۴)

۱) ۱۲۰　　۲) ۱۸۰　　۳) ۲۴۰　　۴) ۳۶۰

۳۰. با جایگشت حروف کلمهٔ « ASSIST » چند کلمهٔ متمایز می‌توان ساخت به طوری‌که با « S » شروع و به « S » هم ختم شوند؟

۱) ۶۴　　۲) ۱۲۸　　۳) ۱۶　　۴) ۲۴

★ ۳۱. حروف کلمهٔ « ASISST » را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم کنار هم قرار داد به طوری‌که حروف « S » یک در میان باشند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

★ ۳۲. به‌کمک حروف A، B، C، D، E، F چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری‌که شامل حرف D نباشد و حرف F در وسط باشد؟ (تکرار غیرمجاز است.)

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

★ ۳۳. به چند طریق می‌توان حروف کلمهٔ « MOHSEN » را کنار هم قرار داد به طوری‌که حروف M و N ابتدا و انتها قرار نگیرند؟

۱) ۴۸۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۱۶ ۴) ۶۷۲

۳۴. با حروف کلمهٔ « EXPORT » چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت به طوری‌که دو حرف « O » و « P » همواره کنار هم و در وسط واقع باشند؟ (بدون تکرار حروف)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۷۲

☆ ۳۵. چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟ (سراسری- ۸۸)

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

۳۶. چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟

۱) ۱۹۶ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۳۳۶

☆ ۳۷. عدد ۳۸۵۲۹۴ چند جایگشت دارد به طوری‌که ارقام فرد همواره کنار هم باشند؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

☆ ۳۸. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ چند عدد پنج‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۸۰۰

☆ ۳۹. با ارقام ۸،۷،۶،۵،۴،۰ چند عدد چهار رقمی و فرد بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۴۶ ۲) ۸۴ ۳) ۹۲ ۴) ۹۶

۴۰. چند عدد پنج‌رقمی زوج با ارقام ۵،۴،۳،۲،۱،۰ می‌توان نوشت؟ (با تکرار ارقام)

۱) ۳۴۲۰ ۲) ۳۲۴۰ ۳) ۳۸۰۰ ۴) ۳۶۰۰

☆ ۴۱. با ارقام ۸،۷،۶،۵،۳،۱ چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۵۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۰۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۳۸۰ ۴) ۲۸۰

۴۲. با ارقام ۸،۵،۳،۲،۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ (با تکرار ارقام)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۳۰۰

☆ ۴۳. با ارقام ۹،۷،۴،۲،۰ چند عدد ۳ رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۷

☆ ۴۴. چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۵۰۴ ۴) ۴۴۸

☆ ۴۵. چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ با ارقام مختلف می‌توان نوشت؟

۱) ۲۰۰۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۸۱۰ ۴) ۹۵۲

۴۶. با ارقام ۸،۵،۴،۱،۰ چند عدد ۳ رقمی مضرب ۱۰ و بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۶

۴۷. با تمام ارقام فرد طبیعی یک‌رقمی، چند عدد ۵ رقمی مضرب ۵ و بزرگ‌تر از ۷۰۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۴۸

☆ ۴۸. با ارقام ۸،۵،۳،۲،۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۵۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

☆ ۴۹. چند عدد پنج‌رقمی زوج با ارقام ۵،۴،۳،۲،۱،۰ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۸۶ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۱۲ ۴) ۴۱۸

★ ۵۰. قفلی دارای یک رمز ۳ رقمی است. اگر رمز را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ ثانیه طول بکشد به طور تقریبی حداکثر چند دقیقه طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۰

★ ۵۱. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۷،۶،۵،۳،۲،۱ می‌توان ساخت به طوری‌که ارقام ۵ و ۶ در آن‌ها به کار رفته و در کنار هم باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴

★ ۵۲. با ارقام ۵،۴،۳،۲،۱،۰ چند عدد ۳ رقمی بزرگ‌تر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

قسمت دوم: تبدیل ـ ترکیب

انتخاب اشیاء و افراد

☆**۵۳.** به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ (سراسری – ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

☆**۵۴.** از مخلوط کردن دوبه‌دوی رنگ‌های سبز، قرمز، سفید و آبی چند رنگ جدید ساخته می‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

☆**۵۵.** از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه به چند طریق می‌توان ۳ نفر را طوری انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر بین آن ۳ نفر باشد؟ (سراسری – ۸۰)

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۶۶ ۴) ۷۲

۵۶. به چند طریق می‌توان ۶ کارمند جدید را در اتاق‌های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟ (سراسری خارج از کشور– ۹۳)

۱) ۴۵ ۲) ۵۴ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

☆**۵۷.** از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دستهٔ ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟ (سراسری – ۸۱)

۱) ۲۴۱۰ ۲) ۲۴۲۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۵۴۰

۵۸. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز کلاس دهم، ۷ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس دوازدهم، ۳ نفر را برای رفتن به مسابقات انتخاب کنیم، به طوری‌که آن‌ها از پایه‌های مختلف باشند، به چند حالت امکان انجام این کار وجود دارد؟

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۶۰

۵۹. در یک دورهٔ بازی فوتبال بین ۸ تیم، بازی‌ها به‌صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره، چند بازی انجام خواهد شد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۸ ۴) ۴۶

☆**۶۰.** روی محیط یک دایره، ۱۰ نقطه وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

★**۶۱.** می‌خواهیم از بین ۴ کودک، ۵ نوجوان و ۷ جوان، یک گروه سرود ۵ نفره تشکیل دهیم. به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم، به شرط آن‌که حداقل ۳ نفر از آن‌ها نوجوان باشند؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۰۶ ۴) ۶۰۶

۶۲. در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی وجود دارد، به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این جعبه خارج کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۶۳. به چند طریق می‌توان شاگردان یک کلاس ۱۲ نفره را به دسته‌های ۴ تایی برای عضویت در سه گروه ریاضی، فیزیک و شیمی تقسیم کرد؟

۱) ۴۹۵ ۲) $2!\times\binom{12}{4}\times\binom{8}{4}$ ۳) ۱۱۸۸۰ ۴) $\binom{12}{4}\times\binom{8}{4}\times\binom{4}{4}$

۶۴. مقدار کدام عبارت زیر، با $n!$ برابر است؟

۱) $C(n,0)$ ۲) $C(n,1)$ ۳) $P(n,n-1)$ ۴) $P(n,0)$

☆**۶۵.** در رابطهٔ $\binom{6}{3}+\binom{6}{2}=\binom{x}{3}$ مقدار x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

★**۶۶.** اگر $P(n,2)-C(n,2)=36$ باشد، حاصل $C(n,6)$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۶۷. مقدار $\dfrac{P(n,r)}{P(n+1,r+1)}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{n+1}$ ۲) $\dfrac{r}{n}$ ۳) $\dfrac{1}{(n+1)!}$ ۴) $\dfrac{r+1}{n+1}$

۶۸. به چند طریق می‌توان از بین ۸ سؤال یک امتحان، به ۵ سؤال پاسخ داد، به شرط آن‌که پاسخ به ۲ سؤال اول، اجباری باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۴۲ ۴) ۸۰

☆**۶۹.** از بین ۵ کارمند حسابدار و ۳ کارمند تحویل‌دار، به چند طریق می‌توان یک گروه ۳ نفره انتخاب کرد، به طوری‌که رئیس گروه حسابدار باشد؟

۱) ۸۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

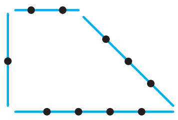
★**۷۰.** به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که حداکثر ۳ زن انتخاب شوند؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۷۴

★**۷۱.** در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این کیسه، ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری‌که لااقل ۲ مهره آبی باشد؟

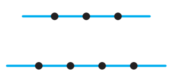
۱) ۱۰۵ ۲) ۴۲ ۳) ۳۰ ۴) ۲۲

۷۲. با ۱۰ نقطهٔ شکل مقابل، چند چهارضلعی می‌توان ساخت، به طوری‌که از هر خط شکل، فقط یک نقطه انتخاب شود؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

★**۷۳.** با ۷ نقطهٔ داده‌شده در شکل مقابل، چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

☆**۷۴.** به چند طریق می‌توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد، به طوری‌که مجموع آن‌ها فرد باشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) $\binom{۲۰}{۲}$ ۴) $\binom{۱۰}{۲}$

★**۷۵.** به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که حداقل ۳ زن انتخاب شود؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۸۵

★**۷۶.** از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دو بـه دو غیر هم مدرسه‌ای باشند را انتخاب کرد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۴۸۰

مسائل مربوط به تعداد زیرمجموعه‌ها

☆**۷۷.** مجموعهٔ $A = \{۱,۳,۴,۷,۸,۹\}$ مفروض است. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی A می‌باشد؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲

۷۸. مجموعهٔ $A = \{۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ مفروض است. مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی و شامل عدد ۹ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

☆**۷۹.** چند تا از زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ فاقد عضوهای b و e هستند؟

۱) ۲۰ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

☆**۸۰.** چندتا از زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ حتماً شامل اعضای ۷ و ۶ هستند؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

☆**۸۱.** یک مجموعهٔ n عضوی، ۵۵ زیرمجموعهٔ $(n-۲)$ عضوی دارد. n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

قسمت سوم: احتمال (۱)

پیشامدهای قطعی و تصادفی ـ فضای نمونه

۸۲. دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد عضوهای فضای نمونه کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ـ ۹۷)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

☆**۸۳.** تاسی را پرتاب می‌کنیم. در کدام پیشامد زیر، تعداد اعضا از بقیه کم‌تر است؟

۱) عدد رو شده زوج و اول باشد.
۲) عدد رو شده زوج یا اول باشد.
۳) عدد رو شده زوج باشد، ولی اول نباشد.
۴) عدد رو شده اول باشد، ولی زوج نباشد.

☆**۸۴.** هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. پیشامد A که در آن، عدد روی کارت مضرب ۶ باشد، چند عضو دارد؟ (تکرار ارقام غیرمجاز است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ فصل ۱ آمار و احتمال

۱
۱ ۲ ۳ **۴**

این دانشجو هم می‌تواند درس عمومی بردارد و هم اختصاصی (به طور هم‌زمان)، پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

تعداد کل انتخاب‌ها = ۳ × ۴ = ۱۲

۲
۱ **۲** ۳ ۴

در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و تأکید شده که فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس می‌تواند انتخاب شود. لذا از اصل جمع استفاده می‌کنیم: تعداد انتخاب‌ها = ۵ + ۸ + ۳ = ۱۶

۳
۱ ۲ ۳ **۴**

نفر بعدی از هر خوراکی یکی کم‌تر می‌تواند انتخاب کند، چون نفر قبلی از هر کدام یکی را برداشته است:

سوپ، ساندویچ، دسر، نوشیدنی

تعداد انتخاب‌های نفر بعدی = ۳ × ۲ × ۴ × ۳ = ۷۲

۴
۱ ۲ **۳** ۴

برای هر سکه ۲ حالت وجود دارد، «رو» یا «پشت» پس برای ۳ سکه تعداد حالت‌ها برابر $۸ = ۲^۳$ می‌باشد. از طرفی در تاس، اعداد اول عبارتند از ۲، ۳ و ۵ که تعداد آن‌ها ۳ تا است. لذا طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با: ۳ × ۸ = ۲۴

۵
۱ **۲** ۳ ۴

تعداد اعداد زوج در دایرهٔ سمت چپ = ۳

تعداد اعداد مربع کامل در دایرهٔ سمت راست = ۲

$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}}$ تعداد کل حالت‌ها = ۳ × ۲ = ۶

۶
۱ ۲ **۳** ۴

برای هر سؤال ۵ انتخاب وجود دارد. انتخاب یکی از ۴ گزینه و یا حل نکردن سؤال، لذا چون ۲۸۰ سؤال داریم، تعداد حالت‌ها برابر است با $۵^{۲۸۰}$

۷
۱ ۲ **۳** ۴

هر قسمت ۴ الگو دارد، پس تعداد الگوهای ۶ قسمت برابر $۴^۶$ است. در واقع این تست مثل سؤالات چندگزینه‌ای حل می‌شود. مثل این است که گفته شود به یک آزمون ۴ گزینه‌ای با ۶ سؤال به چند حالت می‌توان پاسخ داد. (با فرض آن‌که به همهٔ سؤالات پاسخ می‌دهیم.)

۸
۱ ۲ **۳** ۴

۳ سؤال داریم که هر سؤال ۲ گزینه دارد، پس تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به آن‌ها برابر است با $۸ = ۲^۳$. از طرفی به ۳ سؤال با ۴ گزینه به $۶۴ = ۴^۳$ حالت می‌توان جواب داد. لذا نسبت خواسته‌شده برابر است با: $\frac{۸}{۶۴} = \frac{۱}{۸}$

۹
۱ **۲** ۳ ۴

مدیرعامل فقط می‌تواند یک فرد را اخراج کند که این فرد یا از گروه فعال‌ها است یا از گروه ضعیف‌ها، یعنی او نمی‌تواند یک نفر از هر دو گروه را به طور هم‌زمان انتخاب کند. لذا باید از اصل جمع استفاده کنیم:

تعداد حالت‌ها = ۸ + ۱۲ = ۲۰

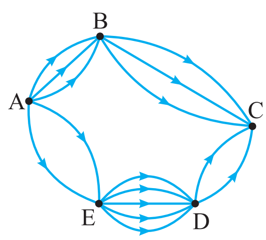
۱۰
۱ ۲ ۳ ۴

مدیر می‌تواند هم‌زمان هر دو کار را با هم انجام دهد یعنی هم می‌خواهد یک نفر را از گروه فعال‌ها اخراج کند و هم یک نفر را از گروه ضعیف‌ها. پس با اصل ضرب مواجهایم:

تعداد حالت‌ها = ۸ × ۱۲ = ۹۶

۱۱
۱ ۲ ۳ ۴

بهترین کار در این سؤال، این است که گزینه‌ها را امتحان کنیم.



مثلاً با توجه به گزینهٔ (۱) شکل را رسم می‌کنیم و تعداد حالت‌های مطلوب را به‌دست می‌آوریم:

مسیر $A \to B \to C$

تعداد حالت‌ها = ۳ × ۳ = ۹

مسیر $A \to E \to D \to C$

تعداد حالت‌ها = ۲ × ۵ × ۲ = ۲۰

$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}}$ تعداد کل حالت‌های مسیر رفت از A به C = ۹ + ۲۰ = ۲۹

پس گزینهٔ (۱) درست است چون ما را به جواب صحیح ۲۹ رساند که در متن سؤال به آن اشاره شده است.

۱۲
۱ **۲** ۳ ۴

یک مشتری به طور هم‌زمان می‌تواند از بین هر نوع ویژگی خودرو (رنگ، حجم موتور، گیربکس و داشبورد)، یکی را انتخاب کند. پس باید از اصل ضرب استفاده کنیم: تعداد انتخاب‌های مشتری = ۷ × ۳ × ۲ × ۲ = ۸۴

۱۳
۱ **۲** ۳ ۴

ابتدا تعداد حالت‌های مسیر رفت را حساب می‌کنیم:

تعداد حالت‌های مسیر $A \to B \to C$ = ۳ × ۳ = ۹

تعداد حالت‌های مسیر $A \to D \to C$ = ۲ × ۴ = ۸

تعداد حالت‌های مسیر $A \to E \to C$ = ۲ × ۲ = ۴

$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}}$ تعداد کل حالت‌های مسیر رفت = ۹ + ۸ + ۴ = ۲۱

حال به سراغ مسیرهای برگشت از C به A می‌رویم. از هر مسیری که در رفت استفاده کرده‌ایم در برگشت نمی‌توانیم استفاده کنیم. لذا در هر قسمت (بین هر دو شهر) یکی از تعداد مسیرهای رفت کم می‌شود:

تعداد حالت‌های مسیر $C \to B \to A$ = ۲ × ۲ = ۴

تعداد حالت‌های مسیر $C \to D \to A$ = ۳ × ۱ = ۳

تعداد حالت‌های مسیر $C \to E \to A$ = ۱ × ۱ = ۱

$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}}$ تعداد کل حالت‌های مسیر برگشت = ۴ + ۳ + ۱ = ۸

حال طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های رفت را در تعداد حالت‌های برگشت ضرب می‌کنیم: ۲۱ × ۸ = ۱۶۸

۱۴
۱ ۲ **۳** ۴

می‌خواهیم از B عبور نکنیم پس فقط دو مسیر کلی به‌صورت زیر وجود دارد:

$D \to C \to E$ تعداد حالت‌های مسیر $= ۴ \times ۲ = ۸$

$D \to A \to E$ تعداد حالت‌های مسیر $= ۲ \times ۲ = ۴$

$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}}$ تعداد کل حالت‌ها $= ۸ + ۴ = ۱۲$

۱۵
۱ ۲ ۳ **۴**

گزینهٔ (۱): $(۰! + ۱! + ۲!)! = (۱ + ۱ + ۲)! = ۴! = ۲۴ \neq ۵$

گزینهٔ (۲): $(n+r)! = (n+r)(n+r-۱)(n+r-۲) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱ \neq n! + r!$

گزینهٔ (۳): $\sqrt{۳! - ۲!} \times \sqrt{۴! - ۳!} = \sqrt{۶ - ۲} \times \sqrt{۲۴ - ۶} = \sqrt{۴} \times \sqrt{۱۸}$

$= ۲ \times \sqrt{۹ \times ۲} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲} \neq ۲\sqrt{۳}$

گزینهٔ (۴): $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)n\,\cancel{(n-۱)!}^{\,۱}}{\cancel{(n-۱)!}_{\,۱}} = (n+۱)n = n^۲ + n$

۱۶
۱ **۲** ۳ ۴

فقط رابطهٔ $۵! = ۴ \times ۵!$ نادرست است، زیرا: $۵! = ۵ \times ۴!$

یعنی بعد از این‌که عدد ۵ را یک مرحله باز می‌کنیم و به ۴ می‌رسیم باید جلوی ۴، فاکتوریل بگذاریم.

۱۷
۱ **۲** ۳ ۴

$(x+۲)$ بزرگ‌تر از $(x+۱)$ است. پس صورت کسر را باز می‌کنیم تا به مخرج برسیم:

$$\frac{(x+۲)!}{(x+۱)!} = ۴ \Rightarrow \frac{(x+۲)\,\cancel{(x+۱)!}^{\,۱}}{\cancel{(x+۱)!}_{\,۱}} = ۴ \Rightarrow x + ۲ = ۴$$

$\Rightarrow x = ۴ - ۲ = ۲$

پس حاصل $۲x$ برابر است با: $۲ \times ۲ = ۴$

۱۸
۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ پس، از معادلهٔ $(x^۲ - ۴)! = ۱$ نتیجه می‌گیریم که:

$x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm ۲$

$x^۲ - ۴ = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۵ \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{۵}$

پس معادلهٔ مورد نظر، دارای ۴ جواب است.

۱۹
۱ **۲** ۳ ۴

روش اول: $(n!)^۲$ را می‌توان به شکل $n! \times n!$ نوشت. لذا داریم:

یک مرحله باز می‌کنیم.

$$\frac{n! \times n!}{(n+۱)! \times (n-۱)!} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{\cancel{n!} \times n\,\cancel{(n-۱)!}}{(n+۱)\,\cancel{n!}\,\cancel{(n-۱)!}} = \frac{۲}{۳}$$

یک مرحله باز می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{n}{n+۱} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۳n = ۲n + ۲ \Rightarrow ۳n - ۲n = ۲ \Rightarrow n = ۲$$

> **نکته:** در معادلاتی که فاکتوریل وجود دارد بهتر است از اعداد موجود در گزینه‌ها استفاده کنیم. عددی جواب است که معادله را به یک تساوی درست تبدیل کند.

روش دوم: اعداد گزینه‌ها را به جای nها قرار می‌دهیم تا دو طرف معادله، با هم مساوی شوند. مثلاً گزینهٔ (۱) نادرست است، چون با فرض $n = ۱$ خواهیم داشت:

نادرست است $\frac{(۱!)^۲}{(۱+۱)!(۱-۱)!} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲ \times ۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳}$

ولی اگر $n = ۲$ را در معادله قرار دهیم، خواهیم داشت:

درست است $\frac{(۲!)^۲}{(۲+۱)!(۲-۱)!} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۴}{۳! \times ۱!} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$

۲۰
۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا فرض می‌کنیم S در اولین خانهٔ سمت چپ قرار گیرد:

S	D،A،N،E،H	D،A،N،E،~~H~~	D،A،N،~~E~~
۱	۵	۴	۳

$\Rightarrow$ تعداد کلمات $= ۱ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$

ولی S می‌تواند در خانه‌های دیگر هم قرار گیرد، یعنی S می‌تواند در هر یک از ۴ خانه قرار گیرد لذا: تعداد کل کلمات مطلوب $= ۶۰ \times ۴ = ۲۴۰$

۲۱
۱ ۲ **۳** ۴

روش اول: ترتیب انتخاب افراد مهم است. پس از فرمول $n!$ استفاده می‌کنیم:

تعداد حالت‌ها $= n! = ۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

روش دوم: می‌توانیم از روش پُر کردن خانه‌ها استفاده کنیم:

A،B،C،D	~~A~~،B،C،D	~~B~~،C،D	~~C~~،D
۴	۳	۲	۱

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

۲۲
۱ ۲ ۳ ۴

در نیمی از کل حالت‌های سخنرانی، فرد x قبل از فرد y سخنرانی می‌کند، پس خواهیم نوشت:

تعداد حالت‌های مطلوب $= \frac{۵!}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰$

۲۳
۱ ۲ **۳** ۴

> **نکته:** در مسائلی که می‌خواهیم یک سری اشیاء همواره کنار هم باشند، آن اشیاء را داخل یک کادر قرار می‌دهیم. سپس تعداد اشیاء بیرون کادر را به علاوهٔ یک کرده و با علامت فاکتوریل می‌نویسیم. بعد از آن، اشیاء داخل کادر را با فاکتوریل می‌نویسیم. حال، دو عدد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم.

اگر این ۳ نفر را a، b و c بنامیم خواهیم داشت:

$\boxed{a،b،c}$، d،e،f،g،h،i،j $\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۸! \times ۳!$

۱ شیء

۲۴
۱ ۲ **۳** ۴

کتاب‌های ریاضی را با $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ و کتاب‌های عربی را با $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های عربی هم کنار هم باشند، لذا به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$\boxed{A_۱، A_۲، A_۳}$، $\boxed{R_۱، R_۲، R_۳، R_۴}$ $\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۲! \times ۳! \times ۴!$

۱ شیء　　۱ شیء

$= ۲ \times ۶ \times ۲۴ = ۲۸۸$

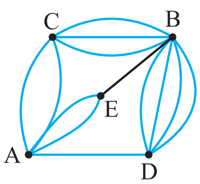
فصل ۱ آمار و احتمال

قسمت اول: اصول شمارش

۱. اگر برای مسافرت به یکی از شهرهای مشهد، شیراز یا اهواز بتوان از وسیلهٔ نقلیهٔ سواری، اتوبوس یا هواپیما استفاده کرد، آن‌گاه:
آ) تعداد راه‌های ممکن را برای انتخاب شهر و وسیلهٔ نقلیه پیدا کنید.
ب) نمودار درختی مربوط به انتخاب‌ها را رسم کنید.

۲. آ) اگر از تهران به کرج ۳ راه، از کرج به زنجان ۴ راه و از زنجان به تبریز ۲ راه وجود داشته باشد، به چند طریق می‌توان از تهران و با عبور از کرج و زنجان، به تبریز رفت و برگشت؟
ب) به چند طریق می‌توان از تهران به تبریز رفت و برگشت به شرط آن‌که در هیچ‌کدام از مسیرها، راه‌های رفت و برگشت یکی نباشند؟

۳. آ) با توجه به نمودار مقابل، به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر B برویم؟
ب) به چند طریق می‌توانیم با گذشتن از شهر C از A به B برویم؟
پ) به چند طریق می‌توانیم بدون گذشتن از شهر C از A به B برویم؟



۴. فردی می‌خواهد بداند به چند طریق با دو پیراهن به رنگ‌های «آبی ـ قرمز» و با سه شلوار به رنگ‌های «قهوه‌ای ـ مشکی ـ سرمه‌ای» می‌تواند لباس بپوشد. نمودار درختی حالت‌های مختلف انتخاب او را رسم کنید.

۵. شخصی ۴ پیراهن، ۳ شلوار و ۲ جفت کفش دارد. به چند شکل متفاوت می‌تواند هر سهٔ آن‌ها را با هم بپوشد؟ (خرداد ۸۹)

۶. به چند طریق می‌توان به ۲ سؤال ۳ گزینه‌ای پاسخ داد به طوری‌که هیچ سؤالی بی‌پاسخ نماند؟ (خرداد ۹۳)

۷. به چند طریق می‌توان به یک آزمون دو گزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است پاسخ داد به طوری‌که:
آ) پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد. ب) پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی نباشد.

۸. روی یک میز غذا ۲ نوع سوپ، ۴ نوع پلو و ۳ نوع سالاد وجود دارد. به چند روش می‌توان یک وعدهٔ غذایی که شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع سالاد باشد، انتخاب کنیم؟ (خرداد ۹۲)

۹. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $۵! - ۴!$ ب) $\frac{۱۲!}{۱۰!}$ پ) $\frac{۷!}{۳! \times ۵!}$

ت) $\frac{۳! + ۵!}{۶!}$ ث) $\frac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!}$ (خرداد ۹۰ و مشابه خرداد ۸۹)

ج) $۰! + ۱! + ۲! + ۳!$ چ) $۴! + ۲!$ ح) $\frac{۱۰!}{۶! \times ۷!}$

۱۰. درستی یا نادرستی تساوی $۸! = ۴! + ۳! + ۱!$ را بررسی کنید. (خرداد ۹۲)

۱۱. اگر $\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!} = \frac{۱}{۶}$ باشد، مقدار n را به‌دست آورید.

۱۲. با اعداد ۱، ۴، ۹ و ۲ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت، به طوری‌که: (خرداد ۸۹)
آ) تکرار ارقام مجاز باشد. ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

۱۳. به چند راه مختلف ۸ نفر می‌توانند برای تهیهٔ بلیط سینما در یک صف بایستند؟

۱۴. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «کتاب» را بنویسید. (خرداد ۸۹)

۱۵. **به چند طریق می‌توان کتاب‌های ریاضی، عربی، جغرافیا و تاریخ را کنار هم قرار داد؟** (خرداد ۹۰)

۱۶. **با حروف الفبای فارسی چند کلمهٔ سه‌حرفی بدون توجه به معنا می‌توان نوشت به طوری‌که:**
آ) تکرار حروف مجاز باشد. ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.

۱۷. **با حروف کلمهٔ «سعادت» به چند راه مختلف می‌توان کلمات سه حرفی نوشت به طوری‌که:**
آ) تکرار حروف مجاز باشد. ب) تکرار حروف غیرمجاز باشد.

۱۸. **با حروف کلمهٔ «تهران» چند کلمهٔ سه‌حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟**

۱۹. **با حروف کلمهٔ «مهستان» و بدون تکرار حروف:**
آ) چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت؟
ب) چند کلمهٔ سه‌حرفی می‌توان نوشت که با حرف «س» شروع و به «ن» ختم شود؟

۲۰. **با حروف کلمهٔ «TRIANGLE» و بدون تکرار حروف:**
آ) چند کلمهٔ پنج‌حرفی می‌توان نوشت؟
ب) چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع شود؟
پ) چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت که با «T» شروع و به «E» ختم شود؟

۲۱. **با ارقام ۰، ۱، ۵، ۹ و ۴ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:**
آ) تکرار مجاز باشد. ب) تکرار غیرمجاز باشد.

۲۲. **با ارقام ۲، ۳، ۴، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام:**
آ) چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟
پ) چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که با ۲ شروع شود؟ ت) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که با ۳ شروع و به ۸ ختم شود؟

۲۳. **دو رقم اول سمت چپ یک عدد پنج‌رقمی، مشخص است. چند راه ممکن برای ساختن آن عدد پنج‌رقمی وجود دارد؟ (ارقام می‌توانند تکراری باشند.)**

۲۴. **با ارقام ۳، ۷، ۵، ۶ و ۸ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی بدون تکرار ساخت، به طوری‌که:** (شهریور ۹۰)
آ) آن عدد زوج باشد. ب) رقم یکان آن عدد اول باشد.

۲۵. **با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷: (با تکرار ارقام)**
آ) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت؟
پ) چند عدد دورقمی فرد می‌توان نوشت؟

۲۶. **با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟**

۲۷. **با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴ و ۷ چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر یا مساوی ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز است.)**

۲۸. **با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:**
آ) عدد مضرب ۵ بوده و تکرار مجاز باشد. ب) عدد زوج باشد و تکرار مجاز باشد.

۲۹. **با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که:**
آ) عدد مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ب) عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

۳۰. **با ارقام ۵، ۹، ۶، ۸ و ۷ چند عدد:** (خرداد ۹۰)
آ) سه‌رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟ ب) چهاررقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟

۳۱. **با ارقام ۵، ۳، ۸، ۲ و ۷ به چند طریق می‌توان یک عدد سه‌رقمی ساخت به طوری‌که:** (شهریور ۸۹)
آ) آن عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. ب) رقم یکان آن ۷ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

۳۲. **چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم دهگان آن‌ها، عددی اول باشد؟**

۳۳. **پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به‌صورت** تهران / *** ب ** **می‌باشد که هر ستاره نمایشگر یک عدد غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟**

۳۴. یک اداره برای شمارهٔ کارت پرسنلی کارمندان خود از یک کد سه‌رقمی و ۲ حرف فارسی به شکل مقابل استفاده می‌کند، با این شرط که اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد. تعداد راه‌های ممکن برای شمارهٔ کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید به شرطی که:
(مشابه تمرین صفحهٔ ۱۰۸ کتاب درسی)

عدد	حرف	حرف	عدد	عدد

آ) تکرار حروف و ارقام مجاز باشد.
ب) تکرار حروف و ارقام مجاز نباشد.

۳۵. مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۲۰ نفر از سهامداران را در دو گروه **A** و **B** دسته‌بندی می‌کند. ۱۲ نفر آن‌ها در گروه **A** و بقیه در گروه **B** قرار می‌گیرند:
آ) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۰ نفر مشورت بگیرد؟
ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشاوره بگیرد به شرط آن‌که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۳۶. کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ (خرداد ۹۶)
آ) $(۳!)^۲ = ۹!$ ب) $۳! \times ۴ = ۴!$

۳۷. کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ (خرداد ۹۵)
آ) $\frac{۸!}{۴!} = ۲!$ ب) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

۳۸. با ارقام ۱ ، ۲ ، ۵ ، ۶ و ۸ و بدون تکرار ارقام، چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که رقم صدگان آن ۶ باشد. (خرداد ۹۵)

۳۹. با ارقام ۹ ، ۲ ، ۷ ، ۵ ، ۳ و ۸: (خرداد ۹۴)
آ) چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می‌توان ساخت؟
ب) چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که یکان آن ۲ باشد؟

۴۰. با حروف کلمهٔ «روستا» و بدون تکرار، چند کلمهٔ سه‌حرفی می‌توان نوشت؟ (بامعنی یا بی‌معنی) (خرداد ۹۱)

۴۱. به چند راه مختلف، ۶ نفر دوست می‌توانند در یک ردیف کنار هم عکس بگیرند؟ (خرداد ۹۱)

قسمت دوم: تبدیل ـ ترکیب

۴۲. به چند طریق، از بین ۸ دوندهٔ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند، به طوری‌که هیچ دو نفری هم‌زمان به خط پایان نرسند؟

۴۳. با حروف کلمهٔ «ولایت» چند ترتیب چهار حرفی مختلف می‌توان ساخت؟ (بی‌معنی و با معنی) (شهریور ۹۰)

۴۴. به چند طریق می‌توان از بین ۹ فیلم مطرح در جشنواره، ۳ فیلم را به عنوان فیلم اول، دوم و سوم انتخاب نمود؟ (شهریور ۸۹)

۴۵. حسین ۶ کتاب مختلف دارد. به چند طریق می‌تواند ۴ کتاب از آن‌ها را در یک قفسه کنار هم بچینند؟ (دی ۸۹)

۴۶. به چند طریق می‌توان از بین ۶ بازیکن ذخیرهٔ یک تیم فوتبال، ۳ نفر را به ترتیب برای پست‌های حمله، هافبک و دفاع وارد زمین کرد؟

۴۷. ۴ نفر به چند طریق می‌توانند روی ۶ صندلی قرار گیرند، اگر روی هر صندلی حداکثر یک نفر بتواند بنشینند؟

۴۸. تعداد جایگشت‌های (تبدیل‌های) ۲ حرفی از حروف کلمهٔ «گلستان» را به‌دست آورید.

۴۹. از یک گروه ۱۳ نفری دانش‌آموزی، به چند طریق می‌توان ۴ نفر را برای فعالیت‌های فوق برنامهٔ مدرسه انتخاب کرد، به طوری‌که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه‌ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود؟

۵۰. آ) در تساوی روبه‌رو مقدار n را به‌دست آورید. $P(n,۴) = ۳P(n,۳)$
ب) حاصل $P(n+۱,۳)$ را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

۵۱. درستی روابط زیر را بررسی کنید.
آ) $P(n,(n-۱)) = n!$ ب) $\frac{P(n,n)}{n!} = P(n,۰)$
پ) $P(n+۲,۴) = P(n,۳)$ ت) $P(n,۵) = ۱۸P(n-۲,۴)$

۵۲. **در یک پرواز داخلی، ۴ صندلی خالی در هواپیما موجود است و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که:**

آ) ترتیب انتخاب این افراد مهم باشد؟ ب) ترتیب انتخاب افراد از روی فهرست مهم نباشد؟

۵۳. **بستنی فروشی ۱۰ طعم بستنی دارد. اگر یک بستنی قیفی با ۳ طعم مختلف بخواهیم و ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف مهم نباشد، چند انتخاب می‌توانیم داشته باشیم؟ اگر ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف مهم باشد، چند انتخاب خواهیم داشت؟** (مشابه خرداد ۸۹)

۵۴. **به چند طریق می‌توان از بین ۸ کتاب مختلف، ۵ کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟** (شهریور ۸۹ و مشابه دی ۸۹)

۵۵. **چگونه می‌توان از بین ۸ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ آبی، ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری‌که:**

آ) هر سه مهره سفید باشند. ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند. پ) دو مهره سفید و یک مهره آبی باشد.

۵۶. **۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می‌توان سه توپ با رنگ‌های متفاوت انتخاب کرد؟**

۵۷. **۵ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۳ توپ سفید متمایز داریم. به چند طریق می‌توان سه توپ هم‌رنگ انتخاب کرد؟**

۵۸. **به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ لامپ که ۴ تای آن‌ها معیوب است، ۳ لامپ را انتخاب کرد، به طوری‌که:**

آ) هر سه لامپ معیوب باشند. ب) دو تا سالم و یکی معیوب باشند. پ) فرقی بین سالم و معیوب نباشد.

۵۹. **از ۱۲ نفر اعضای یک تیم والیبال، ۷ نفر جوان و ۵ نفر نوجوان هستند. به چند طریق می‌توان ۶ نفر از بین آن‌ها انتخاب کرد، به طوری‌که:**

آ) ۴ نفر جوان و ۲ نفر نوجوان باشند. ب) محدودیتی در جوان و نوجوان بودن نداشته باشیم.

۶۰. **از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر را طوری انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر ، بین آن سه نفر باشد؟**

۶۱. **دانش‌آموزی باید از بین ۱۰ سؤال امتحانی به ۸ سؤال پاسخ دهد. اگر پاسخ دادن به ۳ سؤال اول اجباری باشد، به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد؟**

۶۲. **شش نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. مشخص کنید با این نقاط چند مثلث متفاوت می‌توان ساخت؟**

۶۳. **با ۶ نقطه روی محیط یک دایره چند وتر می‌توان رسم کرد؟**

۶۴. **یک مجموعهٔ ۵ عضوی چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟**

۶۵. **مقدار x را از تساوی‌های زیر به‌دست آورید.**

آ) $۲x + C(۵،۲) = P(۵،۳)$ ب) $x \times P(۵،۲) = C(n،n)$

۶۶. **مجموعهٔ $A = \{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی دارد که همگی شامل اعداد ۶ و ۵ باشند؟**

۶۷. **مقدار n را از تساوی $P(n،۱) = ۶$ به‌دست آورید.** (خرداد ۹۶)

۶۸. **از میان ۵ ریاضیدان، ۳ فیزیکدان و ۴ شیمیدان به چند طریق می‌توانیم یک کمیتهٔ ۳ نفرهٔ علمی تشکیل دهیم؟** (خرداد ۹۶)

۶۹. **درستی تساوی روبه‌رو را نشان دهید؛ $P(n،n-۱) = P(n،n)$** (خرداد ۹۴)

۷۰. **درستی تساوی روبه‌رو را نشان دهید؛ $P(۶،۲) = ۶C(۵،۱)$** (خرداد ۹۳)

۷۱. **درستی تساوی روبه‌رو را نشان دهید؛ $C(n،n) = C(n،۰)$** (خرداد ۹۲)

۷۲. **از فهرست نام ۱۲ دانش‌آموز ۴ نام را برای بازدید از موزه به قید قرعه انتخاب می‌کنیم. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر را به‌دست آورید.** (خرداد ۹۵)

قسمت سوم: احتمال (۱)

۷۳. **پدیده‌های قطعی و پدیده‌های تصادفی را تعریف کرده، برای هر کدام یک مثال بیاورید.**

۷۴. **فضای نمونه را تعریف کرده، برای آن ۲ مثال ذکر کنید.**

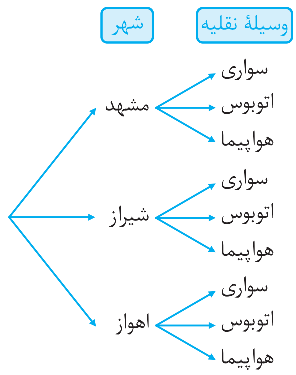
پاسخ فصل ۱ آمار و احتمال

۱

آ) طبق اطلاعات مسئله برای انتخاب شهر ۳ گزینه وجود دارد (مشهد، شیراز یا اهواز) و برای انتخاب وسیلهٔ نقلیه نیز ۳ گزینه موجود است (سواری، اتوبوس یا هواپیما) بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد انتخاب‌های این دو عمل در هم ضرب می‌شوند:

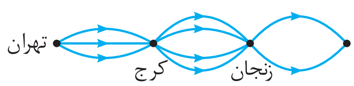
۹ = ۳ × ۳ = تعداد راه‌های ممکن برای سفر

ب) می‌توانیم، با یک تقسیم‌بندی مناسب (نمودار درختی) حالت‌های مختلف انتخاب را نمایش دهیم:



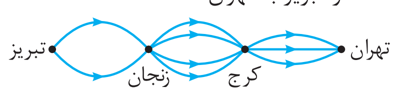
۲

آ) تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز:



$\Rightarrow$ ۲۴ = ۲ × ۴ × ۳

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



$\Rightarrow$ ۲۴ = ۳ × ۴ × ۲

طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

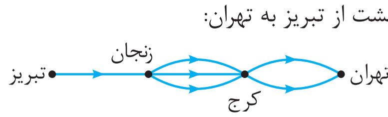
۵۷۶ = ۲۴ × ۲۴

ب) مسیرهای رفتن از تهران به تبریز دقیقاً مانند قسمت «آ» می‌باشد:

۲۴ = ۲ × ۴ × ۳ = تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به تبریز

چون گفته شده مسیرهای رفت و برگشت نباید تکراری باشند، پس مسیرهایی که در رفت از آن‌ها استفاده کردیم، در برگشت حذف می‌شوند:

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از تبریز به تهران:



$\Rightarrow$ ۶ = ۲ × ۳ × ۱

حال، طبق اصل ضرب تعداد کل راه‌های رفت و برگشت عبارت است از:

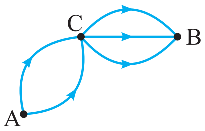
(تعداد حالات مسیر رفت) = تعداد کل راه‌های انتخابی ×
(تعداد حالات مسیر برگشت) ۱۴۴ = ۶ × ۲۴ =

۳

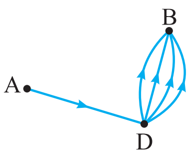
آ) برای رفتن از A به B سه مسیر کلی وجود دارد:

۱) مسیر $A \to C \to B$
یا
۲) مسیر $A \to D \to B$
یا
۳) مسیر $A \to E \to B$

مسیر (۱)، مطابق شکل مقابل می‌توانیم ابتدا از شهر A به C و سپس از C به B برویم. ملاحظه می‌شود که از A به C دو مسیر مختلف و از C به B سه مسیر متمایز وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به ۶ = ۳ × ۲ طریق انجام می‌گیرد.

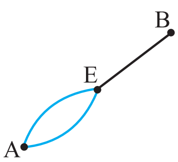


مسیر (۲)، ممکن است ابتدا از A به D و سپس از D به B برویم. ملاحظه می‌شود که از A به D فقط یک مسیر و از D به B چهار مسیر وجود دارد، لذا طبق اصل ضرب این دو عمل با یکدیگر به ۴ = ۴ × ۱ طریق انجام می‌گیرد.



در مسیر (۳) نیز خواهیم داشت:

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها ۲ = ۱ × ۲ =



چون برای رفتن از شهر A به شهر B فقط می‌توانیم یکی از ۳ حالت (۱)، (۲) یا (۳) را در نظر بگیریم (به کلمهٔ «یا» در ابتدای پاسخ توجه کنید که نشان‌دهندهٔ اصل جمع است.) لذا طبق اصل جمع خواهیم داشت:

۱۲ = ۲ + ۴ + ۶ = تعداد کل حالت‌ها برای رفتن از A به B

ب) می‌خواهیم حتماً از شهر C عبور کنیم پس فقط مسیر $A \to C \to B$ را خواهیم داشت: ۶ = ۳ × ۲ = تعداد حالت‌ها

پ) می‌خواهیم از شهر C عبور نکنیم پس دو مسیر $A \to E \to B$ و $A \to D \to B$ را خواهیم داشت:

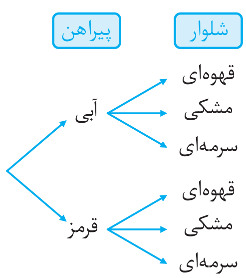
$A \to E \to B$: تعداد حالت‌ها ۲ = ۱ × ۲ =

$A \to D \to B$: تعداد حالت‌ها ۴ = ۴ × ۱ =

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها ۶ = ۴ + ۲ =

۴

این فرد برای انتخاب پیراهن به ۲ طریق و برای انتخاب شلوار به ۳ طریق می‌تواند عمل کند، لذا طبق اصل ضرب کلاً به ۶ = ۳ × ۲ طریق می‌تواند لباس بپوشد.



۵

طبق اصل شمارش تعداد انتخاب‌های حالت‌های مختلف را در هم ضرب می‌کنیم: ۲۴ = ۲ × ۳ × ۴ = تعداد انتخاب‌ها

۶

۲ سؤال وجود دارد که برای هر کدام از آن‌ها ۳ گزینه (۳ حالت) وجود دارد. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات $= ۳ \times ۳ = ۹$

۷

در این‌گونه مسائل که یک کار مشابه را به دفعات زیاد تکرار می‌کنیم راه کوتاه‌تری برای پیدا کردن تعداد حالت‌ها وجود داره؟

پاسخ: بله که وجود داره ... به تذکر زیر خوب دقت کن:

تذکر اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(۱، ۲، ۳، ...، k)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله با هم برابر و مساوی n باشد آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌های ممکن برابر با n^k است.

آ) پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال، شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. یعنی جواب دادن به سؤال ۱ دو حالت دارد، جواب دادن به سؤال ۲ نیز دو حالت دارد، و ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \underbrace{۲ \times ۲ \times ... \times ۲}_{\text{۲۰ بار}} = ۲^{۲۰}$$

ب) چون پاسخگویی به سؤالات الزامی نیست. پس برای هر سؤال ۳ انتخاب داریم، یعنی به عنوان مثال برای جواب دادن به سؤال اول می‌توانیم گزینهٔ «الف» و یا «ب» را انتخاب کنیم و یا می‌توانیم اصلاً به سؤال پاسخ ندهیم. پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن عبارت است از:

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \underbrace{۳ \times ۳ \times ... \times ۳}_{\text{۲۰ بار}} = ۳^{۲۰}$$

۸

یک فرد می‌تواند هر سه کار را با هم انجام دهد. یعنی هم می‌تواند سوپ، هم پلو و هم سالاد را انتخاب کند. پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

تعداد حالت‌ها $= ۲ \times ۴ \times ۳ = ۲۴$

۹

آ) $۵! - ۴! = (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) - (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۱۲۰ - ۲۴ = ۹۶$

تذکر از حل قسمت «آ» این مسئله نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی:

$$\begin{cases} a! + b! \neq (a+b)! \\ a! - b! \neq (a-b)! \end{cases}$$

به عنوان مثال نمی‌توان گفت که حاصل $۴! + ۳!$ برابر $(۴+۳)!$ یعنی $۷!$ است، زیرا اگر حاصل این دو عبارت را جداگانه محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} ۳! + ۴! = (۳ \times ۲ \times ۱) + (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۶ + ۲۴ = ۳۰ \\ ۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۵۰۴۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳! + ۴! \neq ۷!$$

ب) $\dfrac{۱۲!}{۱۰!} = \dfrac{۱۲ \times ۱۱ \times \cancel{۱۰!}}{\cancel{۱۰!}} = ۱۲ \times ۱۱ = ۱۳۲$

پ) $\dfrac{۷!}{۳! \times ۵!} = \dfrac{۷ \times ۶ \times \cancel{۵!}}{(۳ \times ۲ \times ۱) \times \cancel{۵!}} = \dfrac{۷ \times ۶}{۶} = ۷$

ت) $\dfrac{۳! + ۵!}{۶!} = \dfrac{(۳ \times ۲ \times ۱) + (۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱)}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \dfrac{۶ + ۱۲۰}{۷۲۰} = \dfrac{۱۲۶}{۷۲۰} = \dfrac{۷}{۴۰}$

ث) $\dfrac{۸ \times ۷ \times ۶!}{۲! \times ۷!} = \dfrac{۸ \times \overset{۱}{\cancel{۷}} \times \overset{۱}{\cancel{۶!}}}{(۲ \times ۱) \times \underset{۱}{\cancel{۷}} \times \underset{۱}{\cancel{۶!}}} = \dfrac{۸}{۲} = ۴$

ج) $۰! + ۱! + ۲! + ۳! = ۱ + ۱ + \underbrace{(۲ \times ۱)}_{۲} + \underbrace{(۳ \times ۲ \times ۱)}_{۶} = ۱۰$

چ) $۴! + ۲! = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) + (۲ \times ۱) = ۲۴ + ۲ = ۲۶$

ح) $\dfrac{۱۰!}{۶! \times ۷!} = \dfrac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۶! \times ۷!} = \dfrac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶!} = \dfrac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$

$= \dfrac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۱۰ \times ۹ \times ۸} = ۱$

۱۰

$$\begin{cases} ۱! + ۳! + ۴! = ۱ + ۶ + ۲۴ = ۳۱ \\ ۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴۰۳۲۰ \end{cases}$$

پس رابطهٔ داده‌شده، نادرست است.

۱۱

روش اول:

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{\cancel{(n-۱)!}}{(n+۱) \times n \times \cancel{(n-۱)!}} = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{(n+۱)(n)} = \frac{۱}{۶} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} (n+۱)(n) = ۶$$

$$\Rightarrow n^۲ + n = ۶ \Rightarrow n^۲ + n - ۶ = ۰ \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{اتحاد جملهٔ}} (n+۳)(n-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + ۳ = ۰ \\ n - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = -۳ < ۰ \quad (\text{غ‌ق‌ق}) \\ n = ۲ \end{cases}$$

چون n باید عددی طبیعی باشد، پس جواب $n = -۳$ غیرقابل قبول است.

روش دوم: در معادلهٔ $(n+۱)(n) = ۶$ به جای حل این معادله درجه دوم به روش دلتا می‌توان گفت که چون $(n+۱)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) هستند، پس عدد ۶ را نیز به‌صورت دو عدد متوالی می‌نویسیم:

$$(n+۱) \times n = ۳ \times ۲ \Rightarrow n = ۲$$

۱۲

آ) چون عدد مورد نظر سه‌رقمی است سه جای خالی می‌کشیم. طبق صورت مسئله چهار عدد به ما داده شده و تکرار ارقام نیز مجاز است، پس هر جای خالی (خانه) به چهار طریق می‌تواند پر شود که بنابه اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب در یکدیگر ضرب می‌شوند.

$\underset{\text{حالت}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{حالت}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{حالت}}{\boxed{۴}} \Rightarrow ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$:تعداد اعداد مطلوب

تذکر فلش‌های روی مربع‌ها، ترتیب پر شدن خانه‌ها را نشان می‌دهند.

ب) ابتدا سه خانه می‌کشیم. رقم سمت چپ (صدگان) بـه چهـار طریـق مختلف می‌تواند پر شود. چون تکرار ارقام مجاز نیست رقم دهگان (خانهٔ وسط) می‌تواند به سه طریق پر شود، زیرا از رقمی که در خانهٔ اول استفاده کردیم دیگر نمی‌توانیم در خانهٔ وسطی استفاده نماییم. در نهایت در خانهٔ سمت راست (رقم یکان) فقط می‌توانیم از دو رقم استفاده کنیم پس خواهیم داشت:

$\underset{\text{حالت}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{حالت}}{\boxed{۳}}\ \underset{\text{حالت}}{\boxed{۲}} \Rightarrow ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$:تعداد اعداد مطلوب