

# فصل ۲

## قسمت سوم

### معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی، مهم‌ترین مبحث مثلثات مصوب می‌شود. چرا که واسه حل اوتا می‌بایست به تمام روابط و اتادهای مثلثاتی مسلط باشیم. یعنی بسیاری از مطالبی که تا این‌جا تو مثلثات فوندریم ابزارهایی هستن که تو حل معادلات مثلثاتی به کار می‌رن. تقریباً هر سال یه تست کنکور تو رشته‌های ریاضی و تهری از معادلات مثلثاتی مطرح می‌شه.

#### معادله مثلثاتی

معادلاتی که پس از ساده شدن بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند، معادلات مثلثاتی نام دارند. به طور مثال معادلات  $3 \sin^2 x + \sin x - 4 = 0$  و  $2 \tan x + \cos 2x = 1$ ، معادلات مثلثاتی هستند.

#### صورت‌های مقدماتی معادلات مثلثاتی

اغلب معادلات مثلثاتی، پس از ساده کردن به یکی از چهار صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\cos u = \cos \alpha \quad (۲)$$

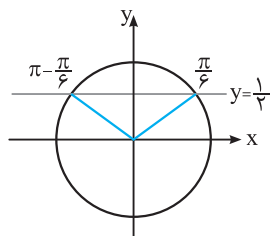
$$\sin u = \sin \alpha \quad (۱)$$

$$\cot u = \cot \alpha \quad (۴)$$

$$\tan u = \tan \alpha \quad (۳)$$

به معادلات فوق، صورت‌های مقدماتی معادلات مثلثاتی گفته می‌شود. در واقع در حل بسیاری از معادلات مثلثاتی، سعی می‌کنیم به کمک اتحادها و روابط مثلثاتی و گاهی اوقات جبری، معادله داده‌شده را به یکی از صورت‌های فوق تبدیل و سپس آن را حل کنیم. منظور از حل معادلات مثلثاتی، یافتن مقدارهایی از زاویه مجهول است که به ازای آن‌ها معادله برقرار باشد. در ادامه به حل هر یک از صورت‌های مقدماتی و برخی از معادلاتی که به آن‌ها تبدیل می‌شوند خواهیم پرداخت.

#### حل معادلات به شکل $\sin u = \sin \alpha$

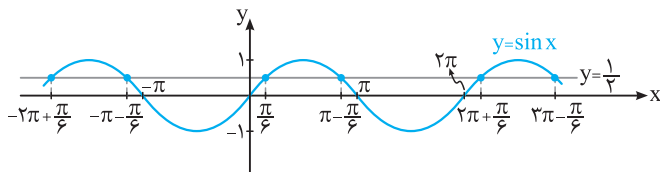


معادله  $\sin x = \frac{1}{2}$  یا به طور معادل معادله  $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$  را در نظر بگیرید.

برای حل این معادله، در دایره مثلثاتی مقابل، خط  $y = \frac{1}{2}$  و زوایای  $\frac{\pi}{6}$  و  $\pi - \frac{\pi}{6}$  که سینوس آن‌ها برابر  $\frac{1}{2}$  است را رسم می‌کنیم.

با توجه به دایره مثلثاتی، می‌توان گفت هر یک از زوایای  $x_1 = \frac{\pi}{6}$  و  $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$  جواب‌هایی از معادله  $\sin x = \frac{1}{2}$  هستند. اما همان‌طور که می‌دانیم، زوایای  $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ ،  $\frac{\pi}{6} + 4\pi$  و ... و به طور کلی  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )، با زاویه  $\frac{\pi}{6}$ ، و زوایای  $\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi$ ،  $\pi - \frac{\pi}{6} + 4\pi$  و ... و به طور کلی  $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) با زاویه  $\pi - \frac{\pi}{6}$  هم‌انتهای هستند. پس می‌توان گفت به ازای هر  $k \in \mathbb{Z}$ ، هر یک از زوایای  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  و  $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  جواب‌های کلی معادله  $\sin x = \frac{1}{2}$  هستند.

تعبیر هندسی این مطلب در شکل مقابل نیز قابل مشاهده است:



با توجه به نمودار، طول نقاط برخورد خط  $y = \frac{1}{2}$  با نمودار  $y = \sin x$ ، ریشه‌های معادله  $\sin x = \frac{1}{2}$  هستند. در واقع داریم:

$$\sin x = \frac{1}{2} \begin{cases} x = \dots, -\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \dots \Rightarrow x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = \dots, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

در حالت کلی برای حل معادله  $\sin u = a$  که در آن  $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری پیدا می‌کنیم که  $\sin \alpha = a$  شود. در این صورت معادله به شکل  $\sin u = \sin \alpha$  درمی‌آید. جواب‌های کلی این معادله با توجه به دوران‌های مختلف به صورت  $u = 2k\pi + \alpha$  و  $u = 2k\pi + \pi - \alpha$  می‌باشد که در آن  $k \in \mathbb{Z}$ . بنابراین به طور خلاصه نکته زیر را داریم:

$$\sin u = \sin \alpha \Rightarrow u = 2k\pi + \alpha, u = 2k\pi + \pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

نکته

مثال

جواب‌های کلی هر یک از معادلات زیر را به دست آورید:

$$\sin 4x - \sin x = 0 \quad (\text{ب}) \quad \sqrt{8} \sin x = 2 \quad (\text{آ})$$

پاسخ: با توجه به نکته فوق، جواب‌های کلی هر یک از معادلات را به دست می‌آوریم:

(آ)

$$\sqrt{8} \sin x = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

(ب)

$$\sin 4x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin 4x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \\ 4x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$$

نکته برای یافتن جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه، به جای  $k$  اعداد صحیح  $0, \pm 1, \pm 2$  و ... را قرار داده و جواب‌هایی که در آن بازه قرار دارند را می‌پذیریم.

تست

مجموع جواب‌های معادله  $1 - \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$4\pi$  (۴)

$\frac{7\pi}{2}$  (۳)

$\frac{11\pi}{3}$  (۲)

$\frac{22\pi}{5}$  (۱)

پاسخ:

$$2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0 \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

اکنون با جای‌گذاری مقادیر صحیح به جای  $k$ ، جواب‌های معادله را در بازه  $[0, 2\pi]$  به دست می‌آوریم:

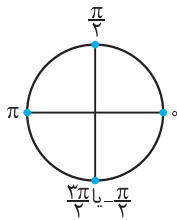
$k$	$0$	$1$
$x$	$\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}$	$\pi + \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{7\pi}{12}$

توجه کنید که به ازای  $k < 0$ ، جواب‌های معادله منفی می‌شوند و لذا در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار ندارند. همچنین به ازای  $k \geq 2$  نیز جواب‌های معادله در خارج این بازه قرار می‌گیرند. بنابراین این معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای چهار جواب به صورت فوق بوده و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi + 7\pi + 12\pi + 3\pi + 12\pi + 7\pi}{12} = \frac{44\pi}{12} = \frac{11\pi}{3} \Rightarrow \text{گزینه (۲) صحیح است.}$$

حالت‌های خاص

بین عزیزم، آکه از ما بفوان معادله  $3x^2 + 5x - 8 = 0$  رو حل کنیم، اگر چه می‌تونیم این معادله رو به روش  $\Delta$  یا تمیزه حل کنیم، اما ساده‌تر اینه که بگیم چون مجموع ضرایب معادله درجه ۲ صفر شده، پس یکی از جواب‌هاش ۱ هس و دیگری  $-\frac{8}{3} = -\frac{c}{a}$ . در واقع این‌جا از حالت خاص حل معادله درجه ۲ استفاده کردیم. تو حل معادله‌های مثلثاتی هم به همین حالتی داریم که آکه این حالت‌ها رو بلد باشیم فیلی سریع می‌تونیم به جواب برسیم.



در حل معادله  $\sin u = a$ ، اگر  $a$  یکی از اعداد صفر،  $-1$  یا  $1$  باشد، با توجه به دایره مثلثاتی می‌توان از نکته زیر برای حل معادله استفاده نمود:

**نکته** اگر  $k \in \mathbb{Z}$  باشد، در این صورت:

۱)  $\sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi$     ۲)  $\sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$     ۳)  $\sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$

همون‌طور که گفتیم این فرمول‌ها خیلی مهمن اما می‌فوام به راه کار بهت بگم که بدون این که حفظ کنی، این فرمولا و حالتای خاص معادلات کسینوسی را خوب یاد بگیری. اولاً مواست باشه که حالتای خاص واسه  $0$  و  $1$  و  $-1$  هس. ثانیاً راهکار اینه:

اولین زاویه  $2k\pi +$   
اولین زاویه  $k\pi +$

اگه تو به دور مثلثاتی یعنی تو بازه  $[0, 2\pi)$ ، معادله مثلثاتی فقط به جواب داشته باشه، جواب کلیش می‌شه؛ و اگه تو به دور مثلثاتی معادله مثلثاتی دو جواب داشته باشه جواب کلیش می‌شه:

مثلاً ببین،  $\sin u = 1$ ، تو به دور فقط به جواب داره. اونم  $\frac{\pi}{2}$  هس. پس جواب کلی می‌شه  $u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

اما معادله  $\sin u = 0$  تو به دور دو جواب داره و اولین جوابش صفره. پس جواب کلی می‌شه  $u = k\pi$

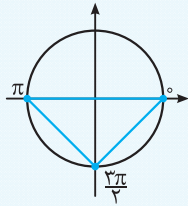
**تذکر** در حالتی که  $\sin u = 1$  یا  $\sin u = -1$  باشد، آن‌گاه این معادلات جواب مضاعف دارند. در واقع در این حالت هر دو دسته جواب کلی معادله مثلثاتی بر هم منطبق می‌شوند. از نظر هندسی نیز خطوط  $y = 1$  و  $y = -1$  بر نمودار  $y = \sin u$  مماس هستند.

در معادله  $\sin^2 x + \sin x = 0$ ، از به هم پیوستن نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، شکل حاصل می‌شود. مساحت این شکل چند واحد سطح است؟

۱)  $\frac{1}{2}$     ۲)  $\frac{2}{3}$     ۳)  $1$     ۴)  $\frac{3}{2}$

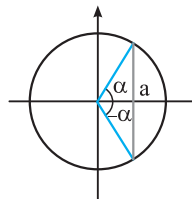
**پاسخ:**

$$\sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$



به ازای مقادیر مختلف  $k \in \mathbb{Z}$ ، نقاط پایانی جواب کلی  $x = k\pi$  بر دو نقطه  $x = 0$  و  $x = \pi$  و نقاط پایانی جواب کلی  $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$  بر  $x = \frac{3\pi}{2}$  منطبق است. با توجه به شکل، از به هم پیوستن این نقاط یک مثلث حاصل می‌شود که مساحت آن برابر  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$  واحد سطح بوده و بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

**حل معادلات به شکل  $\cos u = \cos \alpha$**



برای حل معادله  $\cos u = a$  که  $-1 \leq a \leq 1$ ، ابتدا  $\alpha$  را طوری می‌یابیم که  $\cos \alpha = a$ . در این صورت معادله به شکل  $\cos u = \cos \alpha$  درمی‌آید که با توجه به دایره مثلثاتی مقابل و این‌که دوره تناوب تابع  $y = \cos x$  برابر  $2\pi$  است، جواب‌های کلی این معادله از نکته زیر به دست می‌آید:

$\cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$

**نکته**

جواب‌های کلی معادلات مثلثاتی زیر را به دست آورید.

۱)  $\sqrt{2} \cos 3x - 1 = 0$     ۲)  $\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**پاسخ:**

$\sqrt{2} \cos 3x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cos 3x = 1 \Rightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{4}$

نکته قبل  $\rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$

ب) با استفاده از رابطه  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ، داریم:

$\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x = \cos(4x - 2x) = \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{6}$

نکته قبل  $\rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

تست

معادله  $\cos^2 x = \sin^2 x + \frac{1}{4}$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

۴ (۳)      ۳ (۲)      ۲ (۱)      ۵ (۴)

پاسخ: می‌دانیم  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$  بنابراین داریم:

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

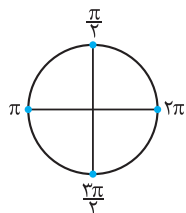
k	-1	0	1
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$\pm \frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$

بنابراین معادله در بازه  $[-\pi, \pi]$  دارای چهار جواب بوده و گزینه (۳) صحیح است.

حالت‌های خاص

در معادله  $\cos u = a$ ، اگر  $a$  یکی از اعداد  $1, 0, -1$  و صفر باشد، حالت‌های خاص رخ می‌دهد که با توجه به دایره مثلثاتی، داریم: ( $k \in \mathbb{Z}$ )

۱)  $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$       ۲)  $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$       ۳)  $\cos u = -1 \Rightarrow u = (2k+1)\pi$



این‌ها هم موازی باشند که حالت‌های خاص واصله اعداد  $0, 1, -1$  و  $0$  و  $1$  و  $-1$  هس و ضمناً می‌تونی از همون راه کاری که قبلاً واسه سینوس گفتیم، این‌جا هم استفاده کنی. ریشه‌های معادلات  $\cos u = \pm 1$ ، ریشه مضاعف می‌باشند.

تست

مجموع جواب‌های معادله  $2\cos^2 x + 1 = 3\cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$\frac{14\pi}{3}$  (۴)       $\frac{11\pi}{3}$  (۳)       $5\pi$  (۲)       $4\pi$  (۱)

پاسخ:

$$2\cos^2 x + 1 = 3\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow (\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$$

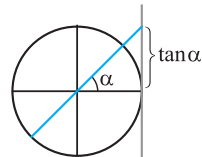
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

k	0	1
x	$0, \frac{\pi}{3}$	$2\pi, 2\pi - \frac{\pi}{3}$

اکنون جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  را یافته و مجموع آن‌ها را حساب می‌کنیم:

گزینه (۱) صحیح است.  $\Rightarrow 4\pi = 0 + \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{3}$  مجموع جواب‌ها

حل معادلات به شکل  $\tan u = \tan \alpha$



برای حل معادله  $\tan u = a$  و  $a \in \mathbb{R}$  ابتدا  $\alpha$  را طوری می‌یابیم که  $\tan \alpha = a$ . در این صورت معادله به شکل  $\tan u = \tan \alpha$  درمی‌آید که با توجه به دایره مثلثاتی مقابل و این‌که دوره تناوب تابع  $y = \tan x$  برابر  $\pi$  است، جواب‌های کلی این معادله از نکته زیر به دست می‌آید:

$\tan u = \tan \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

نکته

مثال

جواب کلی معادلات زیر را به دست آورید.

آ)  $\sqrt{3} \tan 3x - 1 = 0$       ب)  $\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2$

پاسخ: آ)  $\sqrt{3} \tan 3x - 1 = 0 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{نکته قبل}} 3x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$

ب) با استفاده از اتحادهای  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$  و نیز  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ ، معادله داده شده را ساده و سپس آن را حل می‌کنیم:

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2 \Rightarrow \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} - \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} - \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{(1 + \tan x)^2 - (1 - \tan x)^2}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 1$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{نکته قبل}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

معادله  $\tan x + \cot x = 2$  در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$  چند جواب دارد؟

- ۵ (۱)      ۴ (۲)      ۳ (۳)      ۲ (۴)

$$\tan x + \cot x = 2 \Rightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 2 \xrightarrow{\times \tan x} \tan^2 x + 1 = 2 \tan x$$

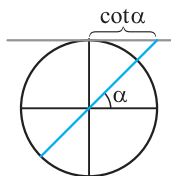
پاسخ:

$$\Rightarrow \tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$

بنابراین معادله در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$  دارای سه جواب بوده و گزینه (۳) صحیح است.

حل معادلات به شکل  $\cot u = \cot \alpha$



برای حل معادله  $\cot u = a$  و  $a \in \mathbb{R}$  ابتدا  $\alpha$  را طوری می‌یابیم که  $\cot \alpha = a$ . در این صورت معادله به شکل  $\cot u = \cot \alpha$  درمی‌آید که با توجه به دایره مثلثاتی و این که دوره تناوب تابع  $y = \cot x$  برابر  $\pi$  است، جواب‌های کلی این معادله از نکته زیر به دست می‌آید:

نکته

$$\cot u = \cot \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

جواب کلی معادله  $\cot x - \tan x = 2\sqrt{3}$  کدام است؟

- $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۱)       $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)       $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۳)       $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$  (۴)

پاسخ: می‌دانیم  $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ . بنابراین داریم:

$$\cot x - \tan x = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2 \cot 2x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cot 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 2x = \cot \frac{\pi}{6}$$

گزینه (۴) صحیح است.  $\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{نکته قبل}}$

نکته فرض کنید  $k \in \mathbb{Z}$  باشد، در این صورت:

$$\begin{cases} \sin^2 u = \sin^2 \alpha \\ \cos^2 u = \cos^2 \alpha \\ \tan^2 u = \tan^2 \alpha \\ \cot^2 u = \cot^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow u = k\pi \pm \alpha$$

جواب کلی معادله  $\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{6} = 0$  کدام است؟

- $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۱)       $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)       $2k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۳)       $2k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۴)

$$\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{6} = 0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - \frac{1}{4} \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = 0$$

پاسخ:

$$\Rightarrow \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2(\frac{\pi}{6})$$

گزینه (۲) صحیح است.  $\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{نکته قبل}}$

نکته همواره برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و نیز تانژانت به کتانژانت و بالعکس، می‌توان از زاویه متمم  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  استفاده نمود.

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

(ب)  $\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \cot x$       (آ)  $\sin 2x - \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0$

پاسخ: (آ)

$\sin 2x - \cos(\frac{\pi}{3} - x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$

قبلاً روش حل معادله  $\sin u = \sin \alpha$  رو یاد گرفتیم. حالا باید کاری کنیم که طرف راست معادله هم سینوسی بشه. واسه همین از زاویه متمم استفاده می‌کنیم.

نکته قبل  $\rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} - x)) \Rightarrow \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{6} + x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{6} + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$

(ب) می‌دانیم  $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ ، پس داریم:

$\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \cot x \Rightarrow \tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$

$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{3\pi}{16}$

**نکته** اگر طرفین معادله مثلثاتی هم‌جنس باشند ولی یک طرف آن منفی باشد، در مورد سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان می‌بریم ولی در مورد کسینوس، علامت منفی را حذف کرده و زاویه  $\alpha$  را به  $\pi - \alpha$  تبدیل می‌کنیم.

مثال

معادلات زیر را حل کنید.

(ب)  $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$       (آ)  $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

پاسخ: (آ)

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$   $\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}}$   $\begin{cases} \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$

بنابر نکته قبل، در معادله دوم، علامت منفی را به داخل کمان برده و آن را حل می‌کنیم:

$\sin x = -\sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

(ب) می‌دانیم  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ، پس داریم:

$\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0$  یا  $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos x = 0$   $\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$

بنابر نکته قبل، در این قسمت علامت منفی را حذف کرده و زاویه  $\frac{\pi}{3}$  را به  $\pi - \frac{\pi}{3}$  تبدیل می‌کنیم، داریم:

$\cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

**نکته** در معادلات کسری و رادیکالی، جواب‌هایی که در دامنه معادله قرار ندارند را باید حذف نمود.

مشال

جواب‌های معادلات زیر در بازه  $[0, 2\pi]$  به دست آورید.

(آ)  $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$  (ب)  $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x} = 1$

$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \xrightarrow{\text{به توان } 2} \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  (پاسخ: آ)

k	0	1
x	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$

جواب‌های  $\frac{\pi}{4}$  و  $\pi + \frac{\pi}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  واقع هستند، اما جواب  $\pi + \frac{\pi}{4}$  که در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، در دامنه معادله واقع نیست زیرا عبارت زیر رادیکال به ازای این جواب منفی می‌شود. پس  $x = \frac{\pi}{4}$  تنها جواب این معادله، در بازه  $[0, 2\pi]$  است.

(ب)  $\frac{\sin x + \sin 3x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x + \sin 3x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$

k	0	1	2	3	4	5	6
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi$

حالت خاص  $\rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

حال باید توجه کرد که مخرج کسر نباید صفر شود. از بین جواب‌های به دست آمده،  $x = 0$ ،  $x = \pi$ ،  $x = 2\pi$  ریشه‌های مخرج کسر هستند. پس این جواب‌ها را باید حذف نمود و لذا معادله داده شده در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای چهار جواب  $\frac{\pi}{3}$ ،  $\frac{2\pi}{3}$ ،  $\frac{4\pi}{3}$  و  $\frac{5\pi}{3}$  می‌باشد.

**نکته** (آ) اگر  $\{0\} - (-1, 1) \in k$  باشد، معادله  $\sin nx = k$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2n$  جواب و نیز در صورتی که  $k \in (-1, 1)$  باشد، معادله  $\cos nx = k$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2n$  جواب است.

(ب) اگر  $\alpha \neq 0$  باشد، جواب کلی  $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $n$  جواب و جواب کلی  $\frac{k\pi}{n} + \alpha$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2n$  جواب است.

تست

معادله  $(4 \sin x - 5)(3 \cos 3x - 2) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۳ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۸ (۴)

پاسخ: ۳

$$(4 \sin x - 5)(3 \cos 3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{5}{4} \\ \text{یا} \\ \cos 3x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

چون  $\frac{5}{4} > 1$ ، پس  $\sin x = \frac{5}{4}$  جواب ندارد. بر اساس نکته قبل معادله  $\cos 3x = \frac{2}{3}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2n = 2 \times 3 = 6$  جواب بوده و گزینه (۳) صحیح است.

تست

معادله  $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۲ (۱)      ۴ (۲)      ۶ (۳)      ۸ (۴)

پاسخ: ۴  
می‌دانیم  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  و  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ . پس:

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow (2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1 = -\tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

بنابر نکته قبل، جواب کلی  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2 \times 2 = 4$  جواب بوده و بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

## خلاصه قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی، طرفین معادله را آن قدر ساده می‌کنیم تا به یکی از چهار حالت زیر برسیم. سپس به کمک دستورهایی زیر، جواب‌های کلی معادله را تعیین می‌کنیم.

$$۱) \sin u = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}, \quad ۲) \cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha$$

$$۳) \tan u = \tan \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha, \quad ۴) \cot u = \cot \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

## حالات خاص

در صورتی که به یکی از حالات زیر برسیم به کمک دستورات زیر، جواب معادلات را تعیین می‌کنیم.

$$۱) \sin u = 0 \Rightarrow u = k\pi, \quad ۲) \sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad ۳) \sin u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$۴) \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad ۵) \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi, \quad ۶) \cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi$$

۷) جواب کلی معادلات  $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$ ،  $\cos^2 u = \cos^2 \alpha$ ،  $\tan^2 u = \tan^2 \alpha$  و  $\cot^2 u = \cot^2 \alpha$  عبارت است از:  $u = k\pi \pm \alpha$

**نکته ۱** همواره برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و نیز تانژانت به کتانژانت و بالعکس، از زاویه متمم یعنی  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  استفاده می‌کنیم.

**نکته ۲** اگر طرفین معادله مثلثاتی، هم‌جنس باشند ولی یک طرف آن منفی باشد، در مورد سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان می‌بریم ولی در مورد کسینوس، علامت منفی را حذف کرده و زاویه  $\alpha$  را به  $\pi - \alpha$  تبدیل می‌کنیم.

**نکته ۳** در معادلات کسری و رادیکالی، جواب‌هایی که در دامنه معادله نیستند را حذف می‌کنیم.

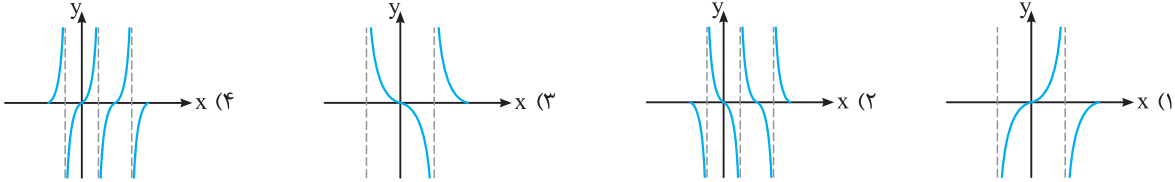
**نکته ۴** برای یافتن جواب‌های معادله در یک بازه، در معادله کلی به جای  $k$ ، مقادیر مختلف صحیح را قرار داده و مقادیری از جواب که در بازه مربوطه قرار دارند را به دست می‌آوریم.

**نکته ۵** اگر  $k \in (-1, 1) - \{0\}$  باشد، معادله  $\sin nx = k$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2n$  جواب و در صورتی که  $k \in (-1, 1)$  باشد، معادله  $\cos nx = k$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2n$  جواب است.

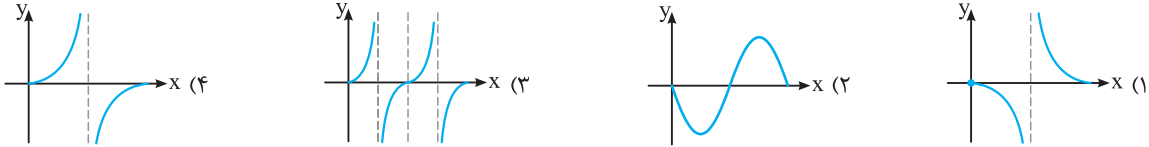
**نکته ۶** اگر  $\alpha \neq 0$  باشد، جواب کلی  $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $n$  جواب و جواب کلی  $\frac{k\pi}{n} + \alpha$  در این بازه دارای  $2n$  جواب می‌باشد.



۱۷۴☆ نمودار تابع  $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tan 2x$  در بازه  $[-\frac{\pi}{4}, \pi]$  به کدام صورت است؟



۱۷۵☆ نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به کدام صورت است؟



قسمت سوم: معادلات مثلثاتی

یافتن جواب کلی در معادلات مثلثاتی

۱۷۶☆ یک جواب کلی معادله  $\sin 3x = \sin 2x$  کدام است؟

(۱)  $k\pi$  (۲)  $\frac{(2k+1)\pi}{3}$

۱۷۷☆ جواب کلی معادله  $\sqrt{8} \cos 2x = 4$  کدام است؟

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۱۷۸☆ جواب کلی معادله  $\tan x = \tan \delta x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{5}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4}$

۱۷۹☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 2x + \sin x = 0$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $k\pi$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۸۰☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۱۸۱☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

۱۸۲☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{5}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{5}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{5}$

۱۸۳☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$

۱۸۴☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$  به کدام صورت است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$  (۳)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$

۱۸۵☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{3}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

(۴)  $\frac{k\pi}{3}$

(۳)  $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

(۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

(۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{8}$

(برگرفته از کتاب درسی)

(۴)  $k\pi$

(۳)  $\frac{k\pi}{3}$

(۲)  $\frac{k\pi}{4}$

(۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(۲)  $k\pi$

(سراسری تجربی فارغ از کشور - ۹۴)

۱۸۰☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

(۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$

(۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی - ۹۳)

۱۸۱☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

(۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۳)  $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

(۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی فارغ از کشور - ۹۷)

۱۸۲☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$  کدام است؟

(۴)  $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

(۳)  $k\pi + \frac{\pi}{5}$

(۲)  $\frac{2k\pi}{5}$

(۱)  $\frac{k\pi}{5}$

(سراسری تجربی فارغ از کشور - ۹۱)

۱۸۳☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

(۴)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$

(۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

(۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۴)

۱۸۴☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$  به کدام صورت است؟

(۴)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(۳)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$

(۲)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

(۱)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$

(سراسری تجربی - ۹۱)

۱۸۵☆ جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟

(۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

(۲)  $\frac{2k\pi}{3}$

(۱)  $\frac{k\pi}{3}$

☆ ۱۸۶. یکی از جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2\pi}{3}$  (۲)  $\frac{5\pi}{6}$  (۳)  $\frac{7\pi}{6}$  (۴)  $\frac{4\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۹۵)

☆ ۱۸۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ، کدام است؟

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۸۶)

☆ ۱۸۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

☆ ۱۸۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

☆ ۱۹۰. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin^2 x - \sin 2x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری ریاضی- ۸۶)

☆ ۱۹۱. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

☆ ۱۹۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام است؟

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی- ۹۴)

☆ ۱۹۳. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی- ۸۷)

☆ ۱۹۴. جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \sin(\pi - x) \cdot \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + x\right) + 3 \cot x \cdot \sin(\pi + x) = 0$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(سراسری تجربی- ۹۲)

☆ ۱۹۵. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ ، به کدام صورت است؟

- (۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

☆ ۱۹۶. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

☆ ۱۹۷. جواب کلی معادله مثلثاتی  $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی- ۹۷)

☆ ۱۹۸. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$  (۴)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(سراسری تجربی- ۸۹)

☆ ۱۹۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۰۰. یکی از جواب‌های کلی معادله  $\sin x + \cos x = 1$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $k\pi$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری ریاضی- ۹۲)

۲۰۱ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۲۰۲ ☆ در معادلهٔ مثلثاتی  $1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ ، یکی از صورت‌های کلی جواب کدام است؟

(۱)  $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

(سراسری تجربی- ۹۶)

۲۰۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $\cos^2 x + 2 \cos^2 x = 0$  کدام است؟

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲۰۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $\sin^2 \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{4} + x) \cos(-x)$  (که  $k \in \mathbb{Z}$ ) کدام است؟

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۰۵ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$  به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۹)

۲۰۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}$  (که  $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۰۷ ☆ جواب‌های کلی معادلهٔ  $0 = 1 - \cos(\frac{3\pi}{4} - x) + 3 \cos(\frac{3\pi}{4} - x) + 5 \sin x + 2k\pi = x$  است. مجموعهٔ مقادیر  $i$  کدام‌اند؟

(۱)  $\{1, 5\}$  (۲)  $\{1, 7\}$  (۳)  $\{5\}$  (۴)  $\{1, 5, 7\}$

حالت‌های خاص در معادلات مثلثاتی

۲۰۸ ☆ جواب کلی معادلهٔ  $\sin^3 x - \sin x = 0$  به کدام صورت است؟

(۱)  $k\pi$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۲۰۹ ☆ نمودار تابع  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ ، روی بازهٔ  $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ ، در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۱۰ اگر دورهٔ تناوب تابع  $f(x) = a \sin b\pi x$  برابر  $\frac{1}{4}$  باشد، نمودار تابع در بازهٔ  $[0, 1]$  در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۲۱۱ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$  به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی- ۸۵)

۲۱۲ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $1 + \sin(\frac{5\pi}{4} + x) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x)$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۲)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۲۱۳ ☆ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos^2 x \sin(\pi - x) - \sin^2 x \cos(\pi + x)$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(سراسری تجربی- ۹۰)

۲۱۴ جواب کلی معادلهٔ  $0 = 1 + \sin(\pi - x) - 2 \sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟ (که  $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $2k\pi - \frac{\pi}{2}$  (۲)  $2k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$

(سراسری ریاضی- ۸۷)

۲۱۵ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی  $0 = \sin(\frac{5\pi}{6} + x) \sin(\pi + x) + \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\pi + x)$  کدام است؟

(۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

☆ ۲۱۶. یکی از جواب‌های معادله  $\sin 3x \cos x = 1 - \cos 3x \sin x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{8}$  (۴)  $\frac{5\pi}{8}$

☆ ۲۱۷. جواب کلی معادله  $\sin \Delta x (\cos 3x - \sin \Delta x) + \cos \Delta x (\sin 3x - \cos \Delta x) = 0$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$  (۳)  $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$  (۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۹۳)

☆ ۲۱۸. جواب کلی معادله  $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$

(سراسری ریاضی- ۹۶)

☆ ۲۱۹. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x \sin 3x = \cos 2x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{k\pi}{3}$

☆ ۲۲۰. تمام جواب‌های معادله  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$  (۳)  $\frac{(2k+1)\pi}{2}$  (۴)  $2k\pi$

☆ ۲۲۱. جواب‌های کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است. مجموعه مقادیر  $i$  کدام است؟

- (۱)  $\{7, 9\}$  (۲)  $\{1, 3, 5\}$  (۳)  $\{1, 4, 7\}$  (۴)  $\{1, 5, 9\}$

(سراسری ریاضی- ۹۶)

☆ ۲۲۲. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  با شرط  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)  $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(سراسری ریاضی- ۹۷)

☆ ۲۲۳. جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$  (۲)  $(2k+1)\frac{\pi}{6}$  (۳)  $k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۴)  $\frac{k\pi}{6}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

☆ ۲۲۴. جواب کلی معادله  $\sin 3x - \sin x + 4 \sin^2 x = 2$  با شرط  $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $(2k+1)\frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$

☆ ۲۲۵. جواب کلی معادله  $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)  $2k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)  $k\pi - \frac{5\pi}{4}$  (۴)  $2k\pi - \frac{3\pi}{4}$

جواب‌های معادله مثلثاتی در یک بازه

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۲)

☆ ۲۲۶. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin \Delta x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $8\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $10\pi$  (۴)  $11\pi$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۲۷. چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن‌ها ۳ و ۴ سانتی‌متر و مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌متر مربع باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

☆ ۲۲۸. یک فوتبالیست، توپ را با سرعت  $60 \text{ km/h}$  به سمت دروازه حریف که در ۳۶ متری او قرار گرفته، می‌فرستد. اگر رابطه بین سرعت توپ  $v$

(بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی  $d$  (بر حسب متر) و زاویه حرکت توپ  $\theta$ ، به صورت  $d = \frac{v^2}{50} \sin 2\theta$  باشد، زاویه حرکت

(برگرفته از کتاب درسی)

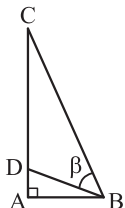
توپ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $15^\circ$  (۲)  $15^\circ$  (۳)  $22/5^\circ$  (۴)  $30^\circ$

(برگرفته از کتاب درسی)

☆ ۲۲۹. در شکل مقابل، اگر  $AD = 0/5$ ،  $CD = 2/5$  و  $AB = 1$  باشد، زاویه  $\beta$  چند درجه است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۶۰ (۳) ۴۵ (۴) ۳۰



☆ ۲۳۰. معادله  $\sin(\pi \cos x) = -1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

☆ ۲۳۱. معادله  $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$  در بازه  $[-\pi, \pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

☆ ۲۳۲. معادله  $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

(سراسری تمبری فارغ از کشور- ۹۶)

☆ ۲۳۳. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{14\pi}{3}$  (۲)  $4\pi$  (۳)  $\frac{9\pi}{2}$  (۴)  $5\pi$

☆ ۲۳۴. معادله  $\tan 2x - \cot(x - \frac{\pi}{4}) = 0$  در بازه  $[0, \pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

☆ ۲۳۵. مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$  در بازه  $[\pi, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{8\pi}{3}$  (۲)  $\frac{10\pi}{3}$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

☆ ۲۳۶. معادله  $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر

☆ ۲۳۷. معادله  $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

☆ ۲۳۸. معادله  $1 + \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند ریشه دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

(سراسری ریاضی- ۹۵)

☆ ۲۳۹. مجموع تمام جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$  در بازه  $[0, \pi]$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{7\pi}{4}$  (۲)  $\frac{9\pi}{4}$  (۳)  $\frac{5\pi}{2}$  (۴)  $\frac{11\pi}{3}$

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۵)

☆ ۲۴۰. مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{5\pi}{4}$  (۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{7\pi}{4}$

☆ ۲۴۱. در معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + \cos x = 1$ ، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه (۳) دوزنقه (۴) مستطیل

☆ ۲۴۲. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله  $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$  بر روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

(سراسری ریاضی فارغ از کشور- ۹۱)

- (۱) مربع (۲) مستطیل (۳) مثلث قائم‌الزاویه (۴) مثلث متساوی‌الساقین

☆ ۲۴۳. مجموع جواب‌های معادله  $2 \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3 \cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{4}$  (۲)  $\frac{3\pi}{8}$  (۳)  $\frac{5\pi}{4}$  (۴)  $\frac{5\pi}{8}$

☆ ۲۴۴. در معادله مثلثاتی  $8 \sin^2 x + k \sin 2x = 1$ ، مجموع جواب‌های متمایز در فاصله  $[0, \pi]$  برابر  $\frac{3\pi}{4}$  است. k کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) ۴

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin\left(-\frac{x}{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع  $\rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

۱۸۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۱)$$

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi - (\pi - x) \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (۲)$$

(۱)·(۲)  $\rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

۱۸۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x, \quad \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin 2x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

توجه کنیم که  $x = k\pi$  غیرقابل قبول است، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۱۸۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

کسری صفر می‌شود که صورت آن صفر و مخرج آن غیرصفر باشد:

$$\frac{\sin 2x + \sin x}{1 + \cos x} = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0, \quad 1 + \cos x \neq 0$$

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

جواب کلی  $x = 2k\pi + \pi$ ، ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند، پس  $x = \frac{2k\pi}{3}$  را می‌پذیریم.

۱۸۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

با توجه به اتحاد مثلثاتی  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ ، داریم:

$$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۱۸۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

عبارت  $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$  با  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  برابر است، پس داریم:

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

۱۷۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

تابع  $f(x) = -\frac{1}{3} \tan 2x$  به ازای  $x = -\frac{\pi}{3}$  (نقطه ابتدایی بازه) صفر

می‌شود. پس یکی از گزینه‌های (۲) یا (۴) صحیح هستند. همچنین تابع  $y = \tan ax$  ( $a > 0$ ) در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی است و چون در این جا ضریب  $\tan 2x$  منفی است، پس نمودار

$y = \frac{1}{3} \tan 2x$  نسبت به محور  $x$  ها قرینه شده و لذا در هر بازه که

تعریف شده است، نزولی می‌باشد و لذا گزینه (۲) صحیح است.

۱۷۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

با استفاده از روابط  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

و  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$  داریم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

بنابراین باید ببینیم نمودار  $f(x) = \tan \frac{x}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به کدام

صورت است. واضح است که تابع  $f$  فقط به ازای  $x = \pi$  از این بازه تعریف نمی‌شود، پس یکی از گزینه‌های (۱) یا (۴) صحیح هستند. از طرفی مقدار

$f(x) = \tan \frac{x}{2}$  به ازای  $x = \frac{\pi}{2}$  برابر ۱ می‌شود. یعنی به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$

مقدار  $f$  مثبت بوده و باید نمودار آن بالای محور  $x$  ها باشد. پس گزینه (۴) صحیح است.

توجه کنید که با استفاده از تبدیل نمودارها نیز می‌توان این نمودار را رسم کرد.

۱۷۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

نکته:

$$\sin u = \sin \alpha \Rightarrow u = 2k\pi + \alpha, u = 2k\pi + \pi - \alpha, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \end{cases}$$

۱۷۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

نکته:

$$4 \cos 2x = \sqrt{4} \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8}$$

۱۷۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{cases} \tan u = \tan \alpha \\ \cot u = \cot \alpha \end{cases} \Rightarrow u = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

نکته:

$$\tan \Delta x = \tan x \Rightarrow \Delta x = k\pi + x \Rightarrow \Delta x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۷۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

نکته: اگر طرفین معادله مثلثاتی، هم جنس باشند ولی یک طرف آن

منفی باشد، در مورد سینوس، تانژانت و کتانژانت، علامت منفی را به داخل کمان می‌بریم ولی در مورد کسینوس، علامت منفی را حذف

کرده و زاویه  $\alpha$  را به  $\pi - \alpha$  تبدیل می‌کنیم.

۱۹۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \xrightarrow{\sin x \neq 0} \tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۱۹۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

عبارت  $\cot x (4 \sin x + \tan x)$  را ساده می‌کنیم:

$$\cot x (4 \sin x + \tan x) = 4 \sin x \cot x + \underbrace{\cot x \cdot \tan x}_1$$

$$= 4 \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 4A^2 - 4A - 3 = 0, \Delta = 64$$

$$A = \frac{4 \pm 8}{8} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} > 1 \text{ (غیرممکن)} \\ A = -\frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۹۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۱۹۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sin x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \times \sin x + 3 \cot x \times (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \times \frac{\cos x}{\sin x} \times \sin x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow \cos x = -2, \frac{1}{2}$$

معادله  $\cos x = -2$  جواب حقیقی ندارد، لذا:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin^2 \frac{\Delta\pi}{4} = \left(\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(-\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow \cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos x \cos \frac{\pi}{4} \mp \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x \mp \sin x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۱۸۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = -\cos x$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= -\cos 2x \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi & (1) \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

۱۸۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

با انتخاب  $\sin x = A$  معادله به صورت  $2A^2 - 3A - 2 = 0$  درمی‌آید:

$$2A^2 - 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2 = \sin x \text{ (غیرممکن)} \\ A = -\frac{1}{2} = \sin x \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

۱۸۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad 2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\times (-1)} 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-2) = 25 \Rightarrow \cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ (غیرممکن)} \\ \cos x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۸۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

با اتحاد  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  معادله را بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + 3A - 2 = 0, \Delta = 25 \Rightarrow A = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, -2 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} A = \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۸۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۱۹۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

با توجه به رابطه مثلثاتی  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  داریم:

$$2 \sin^2 x - \sin 2x = 1 \Rightarrow -\sin 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow -\sin 2x = \cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} -\tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۲۰۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحادهای  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$  و  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  معادله را ساده و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{2} \times 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (x + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

توجه کنید که جواب کلی  $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ ، شامل جواب کلی  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  نیز می‌باشد. بنابراین از اجتماع این دو جواب کلی،  $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  به دست می‌آید.

۲۰۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲۰۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحاد مثلثاتی  $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ ، داریم:

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x + (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos 2x = -1$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۰۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

**نکته:** جواب کلی معادلات مثلثاتی  $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$

$\cot^2 u = \cot^2 \alpha$  و  $\tan^2 u = \tan^2 \alpha$ ،  $\cos^2 u = \cos^2 \alpha$  عبارت است از:

$$\sin^2 \frac{\Delta\pi}{6} = \sin^2(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin^2 \frac{\pi}{6} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin(\frac{\pi}{6} + x) = \cos x, \cos(-x) = \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \cos x \times \cos x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cot x \cdot \cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$(\sin x - \tan x) \tan(\frac{3\pi}{4} - x) = \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (\sin x - \tan x) \cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cot x - \underbrace{\tan x \cot x}_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\tan x \tan 3x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

۱۹۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} + \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} + \frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} = \frac{(\tan x + 1)^2 + (\tan x - 1)(1 - \tan x)}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)}$$

$$= \frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3}$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ ، داریم:

$$\tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

۲۰۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$$

نکته:

بنابر نکته فوق داریم:

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

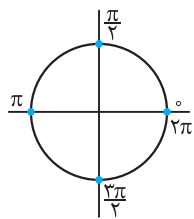
$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ممکنه این‌ها وسوسه بشی و طرفین رو به توان ۲ برسونی و بعدش هم به جواب  $\frac{k\pi}{2}$  برسی. باید بگم که این جواب درست نیست. چون به ازای  $x = \pi$  جواب  $k = 2$ ،  $x = \pi$  به دست میار که تو معادله صدق نمی‌کنه. البته بی‌شمار جواب تو این جواب کلی هستن که تو معادله صدق نمی‌کنن.





اگر انتهای کمان‌های به‌دست آمده را روی دایره مثلثاتی نمایش دهیم، معلوم می‌شود که این جواب‌ها روی هم رفته، هر ۴ زاویهٔ مرزی را تولید می‌کنند. بنابراین اجتماع این جواب‌ها به صورت  $x = \frac{k\pi}{2}$  خواهد بود.

۲۰۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 &\Rightarrow -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi &\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \\ x \in \left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right] &\Rightarrow -\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\pi \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{x - \frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{2}} &\rightarrow -8 \leq 4k + 1 \leq 12 \Rightarrow -9 \leq 4k \leq 11 \\ \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} &\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

۲۱۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{|b|} &\xrightarrow{T = \frac{1}{2}} \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{|b|} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow |b| = 4 &\Rightarrow b = \pm 4 \\ f(x) = 0 &\Rightarrow a \sin b\pi x = 0 \Rightarrow a \sin(\pm 4\pi x) = 0 \\ \Rightarrow \pm a \sin 4\pi x = 0 &\Rightarrow 4\pi x = k\pi \Rightarrow 4x = k \Rightarrow x = \frac{k}{4} \\ x \in [0, 1] &\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{k}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq k \leq 4 \\ \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} &k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

۲۱۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2 \tan x \cdot \cos^2 x &= 2 \times \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \\ \Rightarrow \sin 2x = 1 &\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (*) \\ \cos x \neq 0 &\Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(*)} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

۲۱۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\Delta\pi}{2} + x\right) &= \cos x, \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos x - \sin x \\ \Rightarrow \cos x - \sin x &= 1 + \cos x \Rightarrow \sin x = -1 \\ \text{حالت خاص} &\rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

۲۱۳ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \sin(3\pi - x) &= \sin x \cdot \cos(\pi + x) = -\cos x, \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \Rightarrow \cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x &= 0 \Rightarrow \sin(3x + x) = 0 \\ \Rightarrow \sin 4x = 0 &\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \end{aligned}$$

۲۱۴ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x, \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \sin(\pi - x) = \sin x \\ \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 &= 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \\ \Rightarrow (\sin x - 1)^2 &= 0 \Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \\ \text{حالت خاص} &\rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

۲۰۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

با استفاده از روابط  $\cos(\pi + 2x) = -\cos 2x$  و  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  بر حسب کسینوس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 x} \times (-\cos 2x) &= 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x = -\cos 2x \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 &\rightarrow 2 \cos^2 x = -2 \cos^2 x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x = 1 \\ \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} &= \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

۲۰۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی بالا داریم:

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 x \\ \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} &\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = -2 \\ \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} &= \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

۲۰۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= -\sin x \\ \Delta \sin x + 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= 1 \Rightarrow \Delta \sin x - 3 \sin x = 1 \\ \Rightarrow 2 \sin x = 1 &\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} &\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}, i \in \{1, 5\} \end{aligned}$$

۲۰۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

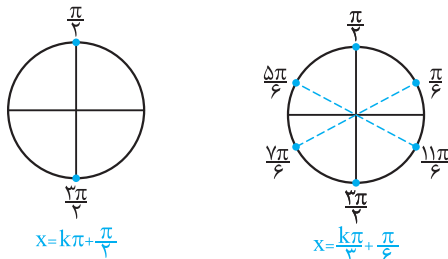
نکته: حالت‌های خاص:

$$\begin{aligned} \sin u = 0 &\Rightarrow u = k\pi, \sin u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin u = -1 &\Rightarrow u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ یا } u = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \cos u = 0 &\Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}, \cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi \\ \cos u = -1 &\Rightarrow u = (2k+1)\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin x = 0 &\Rightarrow \sin x(\sin^2 x - 1) = 0 \\ \Rightarrow \sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 &\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \sin x = 1 &\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 &\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

با نمایش هر دو جواب به دست آمده روی دایره مثلثاتی، مشخص می‌شود که جواب کلی  $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ ، شامل جواب کلی  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  نیز می‌باشد.



۲۱۵ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \Rightarrow \frac{1}{2} - \sin x \cos x &= 0 \xrightarrow{\times 2} 1 - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1 \\ \text{حالت خاص} \rightarrow 2x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

۲۷۰

۲۱۶ (۴ ۳ ۲ ۱)

با یادآوری این که  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sin 2x \cos x &= 1 - \cos 2x \sin x \\ \Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x &= 1 \\ \Rightarrow \sin(2x + x) = 1 \Rightarrow \sin 3x &= 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3k\pi + \pi}{6} &= \frac{(3k+1)\pi}{6} \end{aligned}$$

به ازای  $k = 1$ ، به دست می‌آید  $x = \frac{5\pi}{6}$  که در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۱۷ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \sin \Delta x (\cos 3x - \sin \Delta x) + \cos \Delta x (\sin 3x - \cos \Delta x) &= 0 \\ \Rightarrow \sin \Delta x \cos 3x - \sin^2 \Delta x + \cos \Delta x \sin 3x - \cos^2 \Delta x &= 0 \\ \Rightarrow \sin \Delta x \cos 3x + \cos \Delta x \sin 3x = \sin^2 \Delta x + \cos^2 \Delta x = 1 \\ \Rightarrow \sin(\Delta x + 3x) = 1 \Rightarrow \sin 4x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 4x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

۲۱۸ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{\sin x} &= 2 \cos^2 x \xrightarrow{\times \sin x \neq 0} \sin 3x = 2 \sin x \cos^2 x \\ \Rightarrow \sin(2x + x) &= (2 \sin x \cos x) \cos x \\ \Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x &= \sin 2x \cos x \\ \Rightarrow \cos 2x \sin x &= 0 \xrightarrow{\sin x \neq 0} \cos 2x = 0 \\ \text{حالت خاص} \rightarrow 2x &= k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

توجه کنید مقدار  $\sin x$  به ازای جواب‌های به دست آمده صفر نمی‌شود.

۲۱۹ (۴ ۳ ۲ ۱)

$$\begin{aligned} \sin x \sin 3x = \cos 2x &\Rightarrow \sin x \sin 3x = \cos(3x - x) \\ \Rightarrow \sin x \sin 3x = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x \\ \Rightarrow \cos 3x \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \text{ یا } \cos x = 0 \\ \cos 3x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 3x &= k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x &= k\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

۲۲۰ (۴ ۳ ۲ ۱)

با استفاده از اتحاد فرعی  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x = 1 &\Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \\ \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 &\Rightarrow -2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 0 \\ \Rightarrow \sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x &= k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

۲۲۱ (۴ ۳ ۲ ۱)

می‌دانیم  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  پس:

$$\begin{aligned} \cos 2x = \sin x &\Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = \sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ \xrightarrow{b=a+c} \sin x = -1 \text{ یا } \sin x = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x &= 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} &\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

با مقایسه جواب‌های  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ،  $x = 2k\pi + \frac{9\pi}{6}$  و  $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  با جواب  $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$  معلوم می‌شود که:

$$i \in \{1, 5, 9\}$$

۲۲۲ (۴ ۳ ۲ ۱)

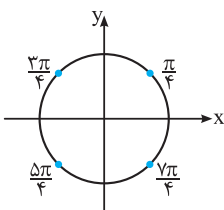
**نکته:**  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 0 \\ \Rightarrow \sin x + 2 \sin x \cos x + 3 \sin x - 4 \sin^3 x &= 0 \\ \Rightarrow 4 \sin x + 2 \sin x \cos x - 4 \sin^3 x &= 0 \\ \Rightarrow 2 \sin x (2 + \cos x - 2 \sin^2 x) &= 0 \\ \Rightarrow 2 \sin x (2(1 - \sin^2 x) + \cos x) &= 0 \\ \Rightarrow 2 \sin x (2 \cos^2 x + \cos x) &= 0 \\ 2 \sin x \cos x (2 \cos x + 1) = 0 &\Rightarrow \sin 2x (2 \cos x + 1) = 0 \\ \Rightarrow \sin 2x = 0 \text{ یا } \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x &= k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \text{ (طبق فرض (غقوق))} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) &\Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

از  $\sin x = 1$ ، با توجه به حالت خاص، نتیجه می‌شود که  
 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، که با توجه به فرض قابل قبول نیست.

می‌دانیم اگر  $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$ ، آن‌گاه  $u = k\pi \pm \alpha$ ، پس:

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$



مانند تست قبل، به ظاهر، این جواب کلی در  
گزینه‌ها دیده نمی‌شود. پس باید بین این دو  
جواب کلی اجتماع بگیریم. انتهای کمان مقابل  
به زوایای  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  به ازای مقادیر  
مختلف صحیح  $k$  به صورت مقابل است:

با توجه به گزینه‌ها، فقط انتهای جواب کلی  $(2k+1)\frac{\pi}{4}$   
روی دایره منطبق هستند.

۲۲۵

قرار می‌دهیم  $\sin x + \cos x = y$ . بنابراین:

$$(\sin x + \cos x)^2 = y^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = y^2$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2x = y^2 \Rightarrow \sin 2x = y^2 - 1$$

بنابراین:

$$3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 5 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}y + (y^2 - 1) + 5 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 3\sqrt{2}y + 4 = 0, \Delta = 18 - 16 = 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \text{ یا } y = -2\sqrt{2}$$

پس  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$  یا  $\sin x + \cos x = -2\sqrt{2}$ . واضح است  
که حاصل  $\sin x + \cos x$  نمی‌تواند برابر  $-2\sqrt{2}$  باشد (چرا؟). بنابراین:

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$$

۲۲۶

**نکته:** برای یافتن جواب‌های اختصاصی معادله در یک بازه، در معادله  
کلی به دست آمده، به جای  $k$ ، مقادیر مختلف صحیح را قرار داده و  
مقادیری از جواب که در بازه مربوطه قرار دارند را به دست می‌آوریم.

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 4x$$

$$\Rightarrow \sin 5x = \sin(-4x) \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \\ 5x = 2k\pi + (\pi - (-4x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \dots, \frac{18\pi}{9} \\ x = \pi \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌های معادله} = \left(0 + \frac{2\pi}{9} + \dots + \frac{18\pi}{9}\right) + \pi = 11\pi$$

$$\sin 2x \sin 4x + \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x (2\sin 2x \cos 2x) = 1 - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 2x \cos 2x = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 2(2\sin x \cos x)^2 \cos 2x = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 8\sin^2 x \cos^2 x \cos 2x - \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x (\lambda \sin^2 x \cos 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 0 \text{ یا } \lambda \sin^2 x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda \sin^2 x \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \lambda \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos 2x - 4\cos^2 2x - 1 = 0$$

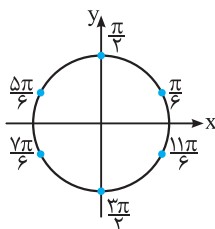
$$\Rightarrow -(2\cos 2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

چون جواب‌های کلی داده شده، به ظاهر، شبیه جواب‌های کلی به دست آمده

یعنی  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$  و  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  نیست، پس باید بین این

جواب‌ها اجتماع بگیریم. برای این منظور جواب‌های معادله را در یک دوره  
تناوب مثلاً در بازه  $[0, 2\pi]$  به دست آورده و با جواب‌های



خاص گزینه‌ها در بازه  $[0, 2\pi]$  مقایسه

می‌کنیم. اگر به جای  $k$  در جواب‌های

کلی  $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$  و  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

اعداد صحیح قرار دهیم، انتهای کمان

مقابل به این زوایا به صورت نمایش

داده شده در دایره مقابل می‌باشند:

از بین گزینه‌ها، فقط انتهای کمان مقابل به جواب کلی  $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

به ازای اعداد صحیح  $k$  بر زوایای به دست آمده منطبق هستند.

تست سفتی پور نه؟ حق با تونه. البته با اطلاعات کتاب شما سفته ولی آکه  
فرمولای تبدیل ضرب به جمع رو بلد پوری، این تست تو رو سه فط به  
راحتی حل می‌شد. این فرمولا تو کتاب بپه‌هایی که سال ۹۷ کنگور دادن،  
اومره پور.

۲۲۴

با استفاده از اتحاد  $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ، داریم:

$$\sin 3x - \sin x + 4\sin^2 x = 2$$

$$\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x + 4\sin^2 x = 2$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 4\sin^3 x) + (4\sin^2 x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) - 2(1 - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow (1 - 2\sin^2 x)(2\sin x - 2) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \text{ یا } \sin x = 1$$

با توجه به این که  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، پس معادله  $\cos x = 2k - \frac{1}{4}$  تنها به ازای عدد صحیح  $k = 0$  برقرار است. بنابراین داریم:

$$\cos x = -\frac{1}{4}$$

پس معادله  $\cos x = -\frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  دارای  $2 \times 1 = 2$  جواب است.

۲۳۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحاد مثلثاتی  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، داریم:

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه  $[-\pi, \pi]$  دارای ۴ جواب است.

۲۳۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

با استفاده از اتحاد مثلثاتی  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ، داریم:

$$\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x = 1$$

همچنین با توجه به اتحاد مثلثاتی  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ، داریم:

$$\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + (\pi + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  سه جواب دارد.

۲۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \sin x$$

$$\text{معادله: } \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$ ،  $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$  و  $2\pi$  است. داریم:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 5\pi$$

۲۲۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

**نکته:** اگر  $a$  و  $b$  طول دو ضلع و  $\theta$  زاویه بین این دو ضلع در یک مثلث باشند، آنگاه:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta, 0 < \theta < 180^\circ$$

فرض کنیم زاویه بین این دو ضلع  $\theta$  باشد. پس:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{0 < \theta < 180^\circ} \theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$$

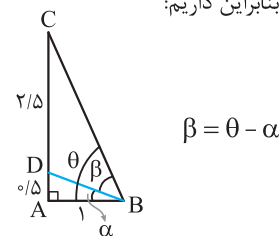
۲۲۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$d = \frac{\sqrt{2}}{5^\circ} \sin 2\theta \Rightarrow 36 = \frac{6^\circ}{5^\circ} \sin 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{36 \times 5^\circ}{6^\circ \times 60} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{0 \leq \theta \leq 180^\circ} \begin{cases} 2\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ \\ 2\theta = 150^\circ \Rightarrow \theta = 75^\circ \end{cases}$$

۲۲۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

فرض کنیم  $\hat{A}BC = \theta$  و  $\hat{A}BD = \alpha$ ، بنابراین داریم:



از طرفی، با توجه به شکل، می‌توان نوشت:

$$\tan \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{5}, \tan \theta = \frac{AC}{AB} = 3$$

$$\beta = \theta - \alpha \Rightarrow \tan \beta = \tan(\theta - \alpha)$$

پس:

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{3 - 1/5}{1 + 3 \times 1/5} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \beta = 1 \Rightarrow \beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

چون  $\beta$  حاده است، پس تنها  $\beta = \frac{\pi}{4}$  را که به ازای  $k = 0$  به دست می‌آید، می‌پذیریم.

۲۳۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

**نکته:** معادله  $\cos nx = k$  با شرط  $k \in (-1, 1)$ ، در بازه  $[0, 2\pi]$ ،  $2n$  جواب دارد.

$$\sin(\pi \cos x) = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \pi \cos x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = 2k - \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

۲۳۷ (۴) (۳) (۲) (۱)

با استفاده از اتحادهای  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$  و  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  معادله را ساده نموده و آن را حل می‌کنیم:

$$\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} -2 \sin 2x \cos 2x = 1$$

$$\Rightarrow -\sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -1$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

می‌دانیم جواب کلی  $\alpha + \frac{k\pi}{n}$  ( $\alpha \neq 0$ ) در بازه  $[0, 2\pi)$ ،  $2n$  جواب دارد.

پس در این جا جواب کلی  $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ، دارای  $2 \times 1 = 2$  جواب در بازه  $[0, 2\pi)$  می‌باشد.

۲۳۸ (۴) (۳) (۲) (۱)

**نکته:** معادله  $\sin nx = k$  با فرض  $k \in (-1, 1) - \{0\}$  در بازه  $[0, 2\pi)$  دارای  $2n$  جواب است.

$$1 + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2 \sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ یا } \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0 \text{ یا } x = \pi \text{ یا } x = 2\pi$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

معادله  $\sin x = -\frac{1}{2}$  نیز در بازه  $[0, 2\pi)$ ،  $2 \times 1 = 2$  جواب دارد. پس این معادله در کل  $5$  جواب در بازه  $[0, 2\pi)$  دارد.

۲۳۹ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$$

$$\sin 4x = -\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + (\frac{3\pi}{2} + 2x) \\ 4x = 2k\pi + \pi - (\frac{3\pi}{2} + 2x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{4k\pi - \pi}{12} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{جواب‌های واقع در } [0, \pi]: \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر  $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$  است.

۲۳۴ (۴) (۳) (۲) (۱)

**نکته:** برای تبدیل کردن سینوس به کسینوس و بالعکس و کتانژانت به

تانژانت و بالعکس، از زاویه متمم  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  استفاده می‌کنیم.

$$\tan 2x - \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \tan 2x = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{3\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$

بنابراین این معادله در بازه  $[0, \pi)$  سه جواب دارد.

۲۳۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{b=a+c} \cos x = -1 \text{ یا } \cos x = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = (2k+1)\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

حال جواب‌های واقع در  $[\pi, 2\pi)$  را می‌یابیم:

k	0	1
x	$\pi$	$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازه  $[\pi, 2\pi)$  برابر است با:

$$\pi + \frac{5\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

۲۳۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

**نکته:** اگر  $\alpha \neq 0$  باشد، جواب کلی به شکل  $\frac{k\pi}{n} + \alpha$ ، در

بازه  $[0, 2\pi)$ ،  $2n$  جواب و جواب کلی به شکل  $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$  در این بازه،  $n$  جواب دارد.

می‌دانیم  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  و  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ . پس داریم:

$$\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

بنابراین نکته فوق، جواب کلی  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  در بازه  $[0, 2\pi)$

دارای  $2 \times 2 = 4$  جواب است.

۲۴۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$2 \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3 \cos(x - \frac{\Delta\pi}{\lambda}) = \Delta$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3 \cos((x - \frac{\pi}{\lambda}) - \frac{\pi}{\gamma}) - \Delta = 0$$

می‌دانیم  $\cos(\alpha - \frac{\pi}{\gamma}) = \cos(\frac{\pi}{\gamma} - \alpha) = \sin \alpha$  بنابراین:

$$2 \sin^2(x - \frac{\pi}{\lambda}) + 3 \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) - \Delta = 0$$

مجموع ضرایب صفر است  $\rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = 1$  یا  $\sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = \frac{c}{a} = -\frac{\Delta}{\gamma}$

واضح است که  $\sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = -\frac{\Delta}{\gamma}$  غیرممکن است. پس:

$$\sin(x - \frac{\pi}{\lambda}) = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x - \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{\gamma}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{\gamma} + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\Delta\pi}{\lambda}$$

k	۰
x	$\frac{\Delta\pi}{\lambda}$

تنها جواب معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  است.  $x = \frac{\Delta\pi}{\lambda}$

۲۴۴ ۱ ۲ ۳ ۴

از رابطه  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\lambda \sin^2 x + k \sin 2x = 1$$

$$\xrightarrow{\div \cos^2 x} \lambda \tan^2 x + \frac{2k \sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \lambda \tan^2 x + 2k \tan x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \gamma \tan^2 x + 2k \tan x - 1 = 0$$

فرض کنیم  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های متمایز این معادله در بازه  $[0, \pi]$  باشد. در این صورت  $\tan x_1$  و  $\tan x_2$  جواب‌های متمایز معادلهٔ اخیر خواهد بود.

پس  $\tan x_1 \tan x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\gamma}$  و  $\tan x_1 + \tan x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2k}{\gamma}$

داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{\gamma} \Rightarrow \tan(x_1 + x_2) = \tan \frac{2\pi}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2} = -1 \Rightarrow \frac{-\frac{2k}{\gamma}}{1 - (-\frac{1}{\gamma})} = -1 \Rightarrow -\frac{2k}{\lambda} = -1$$

$$\Rightarrow 2k = \lambda \Rightarrow k = \frac{\lambda}{2}$$

۲۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\cos(x - \frac{3\pi}{\lambda}) = \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x)$$

$x - \frac{3\pi}{\lambda}$  و  $x + \frac{\pi}{\lambda}$  متمم یکدیگرند، بنابراین:

$$\cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{\lambda})$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) + \cos(\frac{3\pi}{\lambda} - x) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) + \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{6} & x \in [0, 2\pi] \rightarrow x = \frac{\pi}{24} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{\lambda} + \frac{5\pi}{6} & x \in [0, 2\pi] \rightarrow x = \frac{17\pi}{24} \end{cases}$$

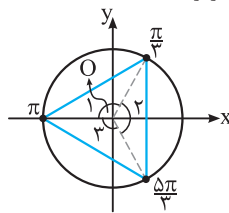
بنابراین مجموع جواب‌ها برابر  $\frac{\pi}{24} + \frac{17\pi}{24} = \frac{18\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$  می‌باشد.

۲۴۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{A = \cos x} 2A^2 + A - 1 = 0$$

$$\Rightarrow A = -1, A = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

جواب‌های معادله بر روی دایرهٔ مثلثاتی به صورت زیر است:



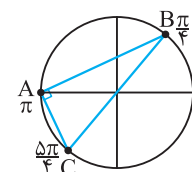
مثلث متساوی‌الاضلاع است.  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = 120^\circ$

۲۴۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \\ \begin{cases} 1 - \cos x \neq 0 \rightarrow x = \pi \\ \div \cos x \rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$



نقاط را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است، زیرا زاویهٔ محاطی و روبه‌روی قطر BC از دایره

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

است: