

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار (۲) یازدهم از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را درس به درس طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر درس از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر درس، تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت تمام آن‌چه را که

شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۱ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذت‌ش را ببرید!

یک راهکار، موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ و ۲ آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



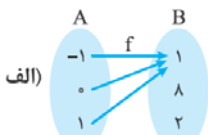
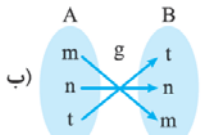
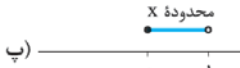
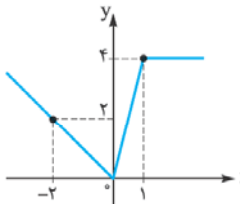
فهرست

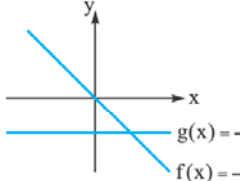
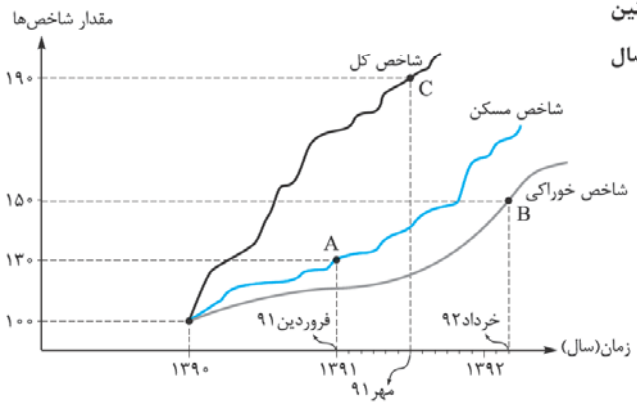
بازمبندی درس ریاضی و آمار ۲ انسانی

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
۱	۱۳	۵
۲	۷ (تا آخر صفحه ۴۴)	۸
۳	-	۷
جمع	۲۰	۲۰

نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
اول (طبقه‌بندی شده)	۳	۱۵
اول (طبقه‌بندی شده)	۴	۱۶
اول (طبقه‌بندی نشده)	۵	۱۶
اول (طبقه‌بندی نشده)	۶	۱۷
دوم (طبقه‌بندی شده)	۷	۱۸
دوم (طبقه‌بندی شده)	۸	۱۹
دوم (طبقه‌بندی شده)	۹	۲۰
دوم (طبقه‌بندی شده)	۱۰	۲۱
دوم (طبقه‌بندی نشده)	۱۱	۲۲
دوم (طبقه‌بندی نشده)	۱۲	۲۳
دوم (طبقه‌بندی نشده)	۱۳	۲۴
دوم (طبقه‌بندی نشده)	۱۴	۲۵
		۲۷

درس‌نامه توپ برای شب امتحان

ردیف	آزمون شماره ۱	نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم	نمره	
	ریاضی و آمار (۲)	رشته: ادبیات و علوم انسانی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
	kheilisabz.com			
۱	فصل اول در هر قسمت جای خالی را با «است» یا «نیست» پر کنید:	نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم	۱/۵	
	ردیف	گزاره مرکب	درست	
	۱	معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ ریشه مضاعف دارد یا ۱۳ مرکب	✓	
	۲	($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$) \wedge (..... زوج ۳۷)	✓	
	۳	(خط $y = -1$ افقی) $\Leftrightarrow (-3^2 = 9)$	✓	
۲	اگر ارزش گزاره p درست و ارزش گزاره q نادرست و گزاره r دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را بدون رسم جدول ارزش گذاری تعیین کنید:		۲	
	(الف) $(\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (p \vee q) \equiv ?$			
	ب) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim p) \equiv ?$			
۳	با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی قاعده قیاس استثنایی یعنی درستی گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ را نشان دهید.	نمونه تشکیل دادن جدول ارزش گذاری، بسیار مهمه. آگه خوب بلد نیستین به درس نامه آفر کتاب مراجعه کنید.	۲	
۴	اگر گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ارزش نادرست داشته باشد، ارزش گزاره $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \vee \sim r$ را تعیین کنید.		۱/۵	
۵	به کمک استدلال عکس نقیض، ثابت کنید که «اگر $(n^2 + 3)$ زوج باشد، آن گاه n فرد است.»		۱/۵	
۶	در کدام قسمت، دو عبارت کنار هم، نقیض هم نیستند؟ الف) a عددی فرد است - a عددی زوج است. ب) b عددی گویا نیست - b عددی گویا است. پ) c مربع کامل است - چنین نیست که c مربع کامل باشد. ت) d عددی مثبت است - d عددی منفی است.		۱	
۷	نام استدلال زیر چیست؟ آیا روش به کار رفته در آن درست است؟ نتیجه آن چه طور است؟ مقدمه ۱: اگر دو عدد فرد باشند، آن گاه مجموع آن ها زوج است. مقدمه ۲: حاصل $(x + y)$ زوج است. x و y فرد هستند.	دو استدلال استثنایی و معافه رو خوب یاد بگیرید چون هتماً هتماً در امتحان از شون سوال میاد. برعکس تصور قبلی ها نتیجه معافه همیشه هم نادرست نیست و نتیجه استثنایی هم همیشه درست نیست.	۱/۵	
۸	می خواهیم از رابطه $x = \frac{x-y}{z-y}$ مقدار y را بر حسب بقیه متغیرها به دست آوریم. در چه مرحله ای از محاسبات زیر، اشتباه رخ داده است؟ چرا؟ $x = \frac{x-y}{z-y} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} xz - xy = x - y \xrightarrow{\text{بردن y ها به یک طرف}} y - xy = x - xz \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} y(1-x) = x(1-z) \xrightarrow{\text{تقسیم دو طرف بر (1-x)}} y = \frac{x(1-z)}{1-x}$		۱/۵	
	فصل دوم			
۹	کدام تابع ثابت و کدام تابع همانی است؟	الف) 	ب) 	۱
۱۰	اگر f تابع همانی باشد، مقادیر a, b, c و d را به دست آورید. $f = \{(2a-1, 5), (b, 1), (\frac{c}{p}, 2), (1-d, 7)\}$	توابع ثابت و همانی اهمیت زیادی دارن و هتماً در امتحانات از شون سوال میاد، مطمئن باشید.	۰/۷۵	
۱۱	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < 0 \\ 4-x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کرده و حاصل عبارت های $f(0)$ ، $f(\sqrt{3})$ و $f(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.		۱/۵	
۱۲	اگر تابع $f = \{(1, 3a), (\frac{b}{p}, 12), (7, a-3b)\}$ ثابت باشد، a و b را به دست آورید.		۱	
۱۳	جاهای خالی را پر کنید. (در قسمت ت) نمودار را کامل کنید.) الف) $[x] = 4 \Rightarrow \bigcirc \leq x < \bigcirc$ ب) $-7 \leq x < -6 \Rightarrow [x] = \bigcirc$ پ)  $\Rightarrow [x] = \dots$ ت) $[x] = -9 \Rightarrow \dots$		۲	
۱۴	ضابطه تابع مقابل را بنویسید:		۱/۲۵	
۲۰	موفق باشید	جمع نمرات		

نمره	ریاضی و آمار (۲)	رشته: ادبیات و علوم انسانی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شماره ۹			نوبت دوم پایه یازدهم دوره متوسطه دوم
۱	<p>ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید:</p> <p>الف) عدد $\sqrt{3}$ گویا است و $(-1)^n$ همواره مثبت است. ($n \in \mathbb{N}$)</p> <p>ب) a^2 نامنفی است یا میانه همان چارک اول است. ($a \in \mathbb{R}$)</p> <p>پ) زوج بودن عدد x شرط لازم و کافی است برای بخش پذیری x بر ۲.</p> <p>ت) اگر ۳۱ اول باشد، آن گاه ۷ زوج است.</p>	۱		
۲	جدول ارزش گذاری مربوط به گزاره $\sim p \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$ را رسم کنید.	۲		
۳	اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشند، ارزش گزاره $(r \Leftrightarrow p) \wedge (q \Rightarrow \sim r)$ را بدون رسم جدول تعیین کنید.	۳		
۴	در کدام مرحله از حل معادله $(x-1)(x-2) = 3x(x-2)$ اشتباه رخ داده است؟ چرا؟ راه حل صحیح را خودتان بنویسید.	۴		
	$(x-1)(x-2) = 3x(x-2) \xrightarrow[\text{از دو طرف}]{\text{حذف } (x-2)} x-1 = 3x \xrightarrow[\text{جدا می‌کنیم}]{\text{معلوم و مجهول را}} x-3x = 1 \xrightarrow{\text{ساده سازی}} -2x = 1 \xrightarrow[\text{بر } -2]{\text{تقسیم دو طرف}} x = -\frac{1}{2}$			
۱/۵	نوع تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(n) = 1 \end{cases}$ با دامنه $D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 6\}$ چیست؟ نمودار آن را رسم کنید. برد این تابع را تعیین کنید.	۵		
۲	با توجه به مفهوم قدرمطلق، تابع $f(x) = - 3x-6 $ را دوضابطه‌ای کرده، سپس نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را تعیین کنید.	۶		
۲	اگر $f = \{(2, 8), (5, 6), (3, 12)\}$ و $g(x) = x^2 - 5x$ باشند، حاصل عبارت‌های $(f+g)(2)$ و $(\frac{f}{g})(3)$ را به دست آورید.	۷		
۲/۵	با توجه به نمودارهای روبه‌رو، نمودار تابع‌های $f \cdot g$ و $f - g$ را رسم کنید.	۸		
				
۱/۵	خط فقر جهانی در یک ماه ۳۱ روزه، به ازای ۱ نفر چه قدر است؟ چند روش برای محاسبه خط فقر وجود دارد؟ اگر اختلاف درآمد افراد زیاد نباشد، کدام روش مناسب‌تر است؟	۹		
۱/۵	با توجه به نمودار شاخص بها و کالای روبه‌رو، هزینه مسکن در فروردین ۹۱ و هم چنین هزینه خوراکی در خرداد ۹۲ چه قدر است؟ (هزینه مسکن و هزینه خوراکی در سال پایه به ترتیب برابر ۲۰ و ۸ میلیون تومان می‌باشد).	۱۰		
				
۱	شاخص بهای گوشت مرغ در سال ۹۶ برابر ۱۲۵ و در سال ۹۳ برابر ۱۲۰ می‌باشد. مقدار تورم در سال ۹۶ نسبت به سال ۹۳ چه قدر است؟	۱۱		
۲	در یک شهر ۱۷۰۰ نفر از افراد بالای ۱۶ سال، شاغل‌اند. ضمناً در این شهر ۳۰۰ نفر جویای کار هستند.	۱۲		
	الف) نرخ بیکاری در این شهر چه قدر است؟			
	ب) چند شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری به ۲ درصد برسد؟			
۱	در یک کتاب لاتین، درصد لغات دشوار ۶ و میانگین تعداد کلمات در هر جمله برابر ۲۰ می‌باشد. شاخص پایه آموزش چه قدر است؟	۱۳		
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید		

پاسخنامه تشریحی

۸- نمی‌توانیم دو طرف تساوی $y(1-x) = x(1-z)$ را بر $(1-x)$ تقسیم کنیم، چون حاصل $(1-x)$ ممکن است صفر باشد.
۹- الف) ثابت است. ب) همانی است.

۱۰- در تابع همانی، عضوهای اول و دوم هر زوج مرتب باید با هم برابر باشند؛ لذا:

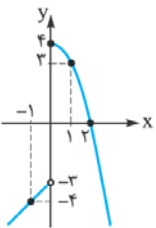
$$2a - 1 = 5 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 1$$

$$\frac{c}{4} = 2 \Rightarrow c = 2 \times 4 = 8$$

$$1 - d = 7 \Rightarrow -d = 7 - 1 \Rightarrow -d = 6 \Rightarrow d = -6$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x < 0 \\ 4 - x^2 & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ y & -3 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ y & 4 & 3 & 0 \end{array}$$



$$f(0) = 4 - 0^2 = 4$$

$$f(\sqrt{3}) = 4 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

$$f(-\frac{1}{5}) = -\frac{1}{5} - 3 = -\frac{16}{5}$$

۱۲- در تابع ثابت، فقط یک عضو در برد وجود دارد؛ یعنی الان عضوهای دوم همه زوج‌ها

$$3a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{باید ۱۲ باشد:}$$

$$a - 3b = 12 \xrightarrow{a=4} 4 - 3b = 12 \Rightarrow -3b = 12 - 4 \Rightarrow -3b = 8 \Rightarrow b = -\frac{8}{3}$$

۱۳- (k عدد صحیح است.) $[x] = k \Rightarrow k \leq x < k+1$ می‌دانیم الف)

$$[x] = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$$

ب) (k عدد صحیح است.) $[x] = k \Rightarrow k \leq x < k+1$ می‌دانیم ب)

$$-7 \leq x < -6 \Rightarrow [x] = -7$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

$$-9 \leq x < -8 \Rightarrow [x] = -9$$



خط سمت چپ:

$$(A(-2, 2), O(0, 0)) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -1(x + 2) \Rightarrow y = -x$$

$$(O(0, 0), B(1, 4)) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{1 - 0} = 4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 4(x - 0) \Rightarrow y = 4x$$

خط سمت راست: $y = 4, x \geq 1$

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- ردیف ۱: معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ ریشه مضاعف دارد یا ۱۳ مرکب نیست
T F

ردیف ۲: $(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (37 \text{ زوج است})$
T F

ردیف ۳: $(-3^2 = 9) \Leftrightarrow (\text{خط } y = -1 \text{ افقی نیست})$
F F

۲- الف) $(\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (p \vee q) \equiv (\sim F \wedge \sim r) \Rightarrow (T \vee F)$

$$\equiv (T \wedge \sim r) \Rightarrow (T \vee F) \equiv \sim r \Rightarrow T \equiv T$$

$$\text{ب) } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim p) \equiv$$

$$(T \Rightarrow F) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \sim T) \equiv F \Leftrightarrow (r \Rightarrow F) \equiv$$

پس ارزش گزاره، نامعلوم است. (هم‌ارز با r است.)
F $\Leftrightarrow \sim r \equiv r$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

۴- ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ وقتی نادرست است که $p \wedge q$ درست و r نادرست باشد؛ از درستی $p \wedge q$ نتیجه می‌گیریم که p و q هر دو درست هستند لذا:

$$(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \vee \sim r \equiv (\sim T \Leftrightarrow \sim T) \vee \sim F \equiv (F \Leftrightarrow F) \vee T \equiv T$$

۵- عکس نقیض گزاره داده شده، عبارت است از: اگر n زوج باشد، آن‌گاه $(n^2 + 3)$ فرد است.
 $n = 2k \Rightarrow n^2 + 3 = (2k)^2 + 3 = 4k^2 + 3$

به هر عدد صحیح که بدهیم، حاصل $(4k^2 + 3)$ فرد می‌باشد؛ پس حکم موردنظر را اثبات کردیم.

۶- فقط در قسمت (ت) دو عبارت کنار هم نقیض هم نیستند؛ چون اگر d مثبت نباشد لزوماً منفی نیست (شاید صفر باشد).

۷- نام استدلال، مغالطه است؛ چون به شکل زیر است:

مقدمه ۱: اگر p آن‌گاه q

مقدمه ۲: q

∴ p

روش به کار رفته در مغالطه، همیشه نادرست است؛ ولی نتیجه آن باید بررسی شود. در این سؤال، نتیجه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ چون اگر حاصل $x + y$ زوج باشد، x و y ممکن است هر دو زوج باشند یا ممکن است هر دو فرد باشند.



$$\text{ضابطه تابع } y = f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ 4x & 0 < x < 1 \\ 4 & 1 \leq x \end{cases}$$

$$\underbrace{\sim(r \leftrightarrow p)}_T \Rightarrow \underbrace{(q \Rightarrow \sim r)}_F$$

ت)

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim q$	$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	F	T

$$\sim(r \leftrightarrow p) \wedge (q \Rightarrow \sim r) \equiv \underbrace{\sim(r \leftrightarrow T)}_r \wedge \underbrace{(F \Rightarrow \sim r)}_T$$

۴- نمی‌توانیم $(x-2)$ را از دو طرف معادله اولیه خط بزنیم، چون شامل x است. راه حل صحیح به صورت زیر است:

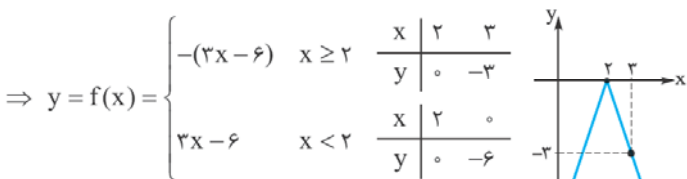
$$\frac{(x-1)(x-2) - 3x(x-2)}{x-2} = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1-3x) = 0 \Rightarrow (x-2)(-2x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ -2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

۵- ضابطه تابع f به صورت $y=1$ است؛ یعنی \mathbb{N} هر عضوی از دامنه که باشد مقدار تابع در آن نقطه برابر ۱ است؛ لذا برد تابع، مجموعه $\{1\}$ است؛ بنابراین f تابع ثابت است.

۶- ریشه عبارت داخل قدرمطلق برابر ۲ است؛ پس با کمک آن، تابع را دوضابطه‌ای می‌کنیم:

$$f(x) = -|3x-6| = \begin{cases} -(3x-6) & x \geq 2 \\ -(-(3x-6)) & x < 2 \end{cases}$$



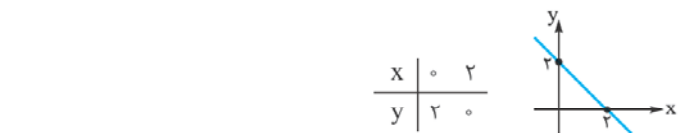
$$D_f = \mathbb{R}, R_f = \{x \leq 0\}$$

۷- در این سؤال، لازم نیست توابع $f+g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید. کافی است به صورت زیر عمل کنیم:

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + (2^2 - 5(2)) = 1 + (-6) = -2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{12}{3^2 - 5(2)} = \frac{12}{9-10} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \text{ دامنه} \\ f-g = (-x) - (-2) = -x+2 \text{ ضابطه} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \text{ دامنه} \\ f \cdot g = (-x)(-2) = 2x \text{ ضابطه} \end{cases}$$

۹- خط فقر جهانی به ازای هر نفر برابر با ۴۰۰۰ تومان (۱/۲۵ دلار) در روز است؛ پس در یک ماه ۳۱ روزه برابر می‌شود: (تومان) $31 \times 4000 = 124000$ در روش برای محاسبه خط فقر وجود دارد:

(۱) روش نصف میانه درآمدها
(۲) روش نصف میانگین درآمدها. اگر اختلاف درآمدها خیلی زیاد نباشد، بهتر است از روش نصف میانگین استفاده کنیم.

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) عدد $\sqrt{3}$ گویا است و $(-1)^n$ همواره مثبت است.

ب) a^x نامنفی است یا میانه همان چارک اول است.

پ) بهتر است این گزاره را به شکل زیر بنویسیم:

(X بر ۲ بخش‌پذیر است) \Leftrightarrow (X زوج است)

گزاره بالا را چه از راست به چپ بخوانیم و چه از چپ به راست، در هر دو حالت تالی‌ها درست‌اند؛ پس کل گزاره هم، ارزش درست دارد.

۱۰- در نمودار متن سؤال، عرض نقطه A برابر 13° است که همان شاخص مسکن در فروردین ۹۱ است؛ بنابراین داریم:

شاخص سال پایه	۱۰۰	۲۰	هزینه مسکن در سال پایه
شاخص مسکن در فروردین ۹۱	۱۳۰	X	هزینه مسکن در فروردین ۹۱

$$\Rightarrow X = \frac{13^\circ \times 20}{100} = 26 \quad (\text{میلیون تومان})$$

همچنین، در نمودار متن سؤال، عرض نقطه B برابر 15° است که همان شاخص خوراکی در خرداد ۹۲ است؛ بنابراین خواهیم نوشت:

شاخص سال پایه	۱۰۰	۸	هزینه خوراکی در سال پایه
شاخص خوراکی در خرداد ۹۲	۱۵۰	X	هزینه خوراکی در خرداد ۹۲

$$\Rightarrow X = \frac{15^\circ \times 8}{100} = 12 \quad (\text{میلیون تومان})$$

$$\begin{aligned} 11\text{-الف)} \quad & \frac{(\text{شاخص بهای سال } 93) - (\text{شاخص بهای سال } 96)}{\text{شاخص بهای سال } 93} \times 100 \\ & = \frac{125 - 120}{120} \times 100 = 4/17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12\text{-الف)} \quad & \frac{\text{تعداد بیکاران}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100 = \frac{300}{1700 + 300} \times 100 \\ & = \frac{300}{2000} \times 100 = \frac{300}{20} = 15\% \end{aligned}$$

ب) اگر تعداد شغل‌های جدید را X بنامیم، تعداد بیکاران جدید برابر $(300 - X)$

$$\text{می‌شود؛ لذا:} \quad 2 = \frac{300 - X}{1700 + 300} \times 100 \Rightarrow 2 = \frac{\text{تعداد بیکاران}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{300 - X}{20} \Rightarrow 40 = 300 - X \Rightarrow X = 300 - 40 = 260$$

$$13\text{-} \quad \left[\frac{X}{4} \right] (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد لغات دشوار}) = \text{شاخص پایه آموزش}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(6 + 20) \times 0}{4} \right] = \left[\frac{10}{4} \right] = 10$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

نکته: اگر گزاره داده شده، شامل یک نماد ریاضی باشد، از جدول زیر، برای نقیض کردن آن استفاده می‌کنیم:

نماد ریاضی	<	>	≤	≥	=	≠	∈	∉	⊆	⊄
نقیض نماد	≥	≤	>	<	≠	=	∉	∈	⊄	⊆

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) $2^5 = 2^2 + 2^3$ (پ) $3 \in \mathbb{Z}$
 (ب) $(4 \times 9) > (5 \times 6)$ (ت) $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$

پاسخ:

(الف) $2^5 \neq 2^2 + 2^3$ (پ) $3 \notin \mathbb{Z}$
 (ب) $(4 \times 9) \leq (5 \times 6)$ (ت) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

گزاره‌های هم‌ارز: اگر ارزش دو گزاره p و q یکسان باشد، به آن‌ها گزاره‌های هم‌ارز می‌گوییم و این‌طور می‌نویسیم: $p \equiv q$
 مثلاً گزاره‌های « $3 \in \mathbb{N}$ » و « 100 مربع کامل است» هم‌ارزند؛ چون ارزش هر دوی آن‌ها درست است. همچنین گزاره‌های « $\frac{1}{p}$ عددی گنگ است» و « $5 > -6$ » هم‌ارزند؛ چون هر دوی آن‌ها ارزش نادرست دارند.

ترکیب گزاره‌ها:

در علم منطق به کمک حروف رابط «و»، «یا»، «اگر p آن‌گاه q » و «اگر p آن‌گاه q و برعکس» گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کرده و گزاره‌های مرکب می‌سازیم.

ترکیب عطفی دو گزاره: اگر دو گزاره ساده p و q را با حرف «و» به هم ربط دهیم، گزاره $p \wedge q$ ایجاد می‌شود که ترکیب عطفی نام دارد. این گزاره فقط وقتی ارزش درست دارد که هم p و هم q ارزش درست داشته باشند. جدول ارزش‌گذاری $p \wedge q$ به صورت زیر است: («T» یعنی درست و «F» یعنی نادرست).

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) تهران پایتخت ایران است و 110 مربع کامل است.
 (ب) $(2^4 \geq 4^2) \wedge (\sqrt{3} \notin \mathbb{Q})$

(پ) a^2 نامنفی است و رابطه $f = \{(1,4), (5,6), (2,9)\}$ تابع نیست.

پاسخ:

(الف) تهران پایتخت ایران است و 110 مربع کامل است.
 T T F
 F
 (ب) $(2^4 \geq 4^2) \wedge (\sqrt{3} \notin \mathbb{Q})$
 T T T

(پ) a^2 نامنفی است و رابطه $f = \{(1,4), (5,6), (2,9)\}$ تابع نیست.
 T F
 F (عضوهای اول مختلفاند، پس تابع است)

فصل منطق و استدلال ریاضی



تعریف منطق ریاضی: منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی است؛ یعنی روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما یاد می‌دهد.

تعریف گزاره:

جمله یا عبارتی است خبری که می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد. هر چند که ممکن است از درستی یا نادرستی آن اطلاع نداشته باشیم. به عبارت‌های زیر دقت کنید: « 3 عددی فرد است» ← گزاره با ارزش درست است.

« $-2 > -5$ » ← یک گزاره با ارزش نادرست است.

«بیشتر ریاضی بخوان» ← گزاره نیست. (جمله امری است).

«چند صفحه مطالعه کرده‌ای؟» ← گزاره نیست. (جمله پرسشی است).

«چه ماشینی زیبایی» ← گزاره نیست. (جمله عاطفی است).

نکته: در بعضی از جملات خبری، نمی‌توانیم درباره درستی یا نادرستی آن‌ها اظهارنظر کنیم، لذا آن‌ها را گزاره محسوب نمی‌کنیم؛ مثلاً جمله «مستطیل، زیباترین شکل هندسی است» گزاره نیست چون زیبایی، موضوعی سلیقه‌ای است و قابل ارزش‌گذاری نیست.

مثال: کدام یک از جملات و عبارات زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.
 (الف) عدد $\sqrt{5}$ گویا است.

(ب) x^2 همواره نامنفی است. ($x \in \mathbb{R}$)

(پ) $0/2 \times \frac{1}{4} = 0/1$

(ت) کوچک‌ترین عدد طبیعی دورقمی مربع کامل، عدد 16 است.

(ث) بیشتر مسئله حل کن.

پاسخ:

(الف) گزاره‌ای با ارزش نادرست است؛ چون $\sqrt{5}$ گنگ است.

(ب) گزاره‌ای با ارزش درست است؛ چون توان x زوج است و لذا حاصل x^2 همواره مثبت یا صفر است، یعنی نامنفی است.

(پ) گزاره‌ای با ارزش درست است؛ زیرا: $0/2 \times \frac{1}{4} = \frac{0}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{0}{40} = \frac{0}{10}$

(ت) گزاره‌ای با ارزش درست است؛ چون اولاً 16 مربع کامل است؛ یعنی جذر کامل دارد ($\sqrt{16} = 4$) و ثانیاً 16 کوچک‌ترین عدد دورقمی است که این خاصیت را دارد.

(ث) گزاره نیست. (جمله امری است).

نقیض یک گزاره: گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اصلی باشد. نقیض یک گزاره مانند p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم. اگر جمله فارسی داشته باشیم برای ساختن نقیض آن، کافی است فعل جمله را نقض کنیم. یعنی مثلاً است را به نیست و هم‌چنین نیست را به است تبدیل کنیم.

راه دیگر این است که در ابتدای جمله، از عبارت «چنین نیست که» استفاده کنیم و دیگر کاری با فعل جمله نداشته باشیم.

مثال: نقیض گزاره « 8 عددی زوج است» را بنویسید.

پاسخ:

روش اول: 8 عددی زوج نیست. (یا می‌توان گفت 8 عددی فرد است).

روش دوم: چنین نیست که 8 عددی زوج است (باشد).

ضمناً گزاره $(p \Rightarrow q)$ فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. توجه داشته باشید که به p مقدم و q تالی می‌گوییم.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

در گزاره $p \Rightarrow q$ اگر گزاره p نادرست باشد، اصطلاحاً می‌گوییم گزاره $p \Rightarrow q$ به انتهای مقدم درست است؛ یعنی با این که مقدم نادرست است، ارزش کل $p \Rightarrow q$ درست است.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) اگر ۱۳ اول است، آن گاه ۸۱ مربع کامل است.

(ب) $(4^2 = 8) \Rightarrow (7 > 3)$

(پ) اگر چهارمین فصل سال، زمستان باشد، آن گاه اسفند ۳۱ روز دارد.

(ت) زوج بودن x شرط لازم است برای بخش پذیری x بر ۲.

پاسخ: بهتر است تمام گزاره‌ها را به شکل $p \Rightarrow q$ بنویسیم تا بررسی آن‌ها راحت‌تر شود:

(الف) $\underbrace{\text{۸۱ مربع کامل است}}_T \Rightarrow \underbrace{\text{۱۳ اول است}}_T$

(ب) $\underbrace{(4^2 = 8)}_F \Rightarrow \underbrace{(7 > 3)}_T$

(پ) $\underbrace{\text{اسفند ۳۱ روز دارد}}_F \Rightarrow \underbrace{\text{چهارمین فصل سال، زمستان باشد}}_T$

(ت) $\underbrace{\text{زوج است}}_T \Rightarrow \underbrace{\text{X بر ۲ بخش پذیر است}}_T$
 $\underbrace{\text{خودمان T فرض می‌کنیم}}_T$

تذکره: در این گزاره، مقدم و تالی به هم وابسته بودند (X در هر گزاره دیده می‌شود) در این جور گزاره‌ها مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم و با توجه به آن، ارزش تالی را مشخص می‌کنیم. می‌دانیم که هر عددی که بر ۲ بخش پذیر باشد، زوج است؛ پس تالی درست است.

مثال: اگر p گزاره‌ای نادرست و q گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r$ (ب) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$

پاسخ: (الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv (F \Rightarrow T) \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$

(ب) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r \equiv (F \wedge \sim T) \Rightarrow r \equiv (F \wedge F) \Rightarrow r \equiv T$

عکس یک گزاره شرطی: در گزاره $p \Rightarrow q$ اگر جای مقدم و تالی را عوض کنیم به گزاره $q \Rightarrow p$ می‌رسیم که عکس گزاره اولیه است.

عکس نقیض یک گزاره شرطی: به گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

مثال: به کمک جدول ارزش گذاری، نشان دهید گزاره $p \Rightarrow q$ با عکس نقیض آن، هم‌ارز است.

پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره ساده را با حرف «یا» به هم ربط دهیم، گزاره $p \vee q$ ایجاد می‌شود که ترکیب فصلی دو گزاره p و q نام دارد. این گزاره فقط وقتی ارزش نادرست دارد که هم p و هم q نادرست باشند. جدول ارزش گذاری $p \vee q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) 17 عدد اول یا مربع کامل است.

(ب) معادله $x^2 - 9 = 0$ دو ریشه دارد یا 49 مضرب 7 است.

(پ) $(1 > \sqrt{2}) \vee (1 \neq 1)$

(ت) 534 زوج است یا 1 عدد اول است.

پاسخ:

(الف) $\underbrace{\text{۱۷ عدد اول است}}_T \vee \underbrace{\text{۱۷ مربع کامل است}}_F$

(ب) $\underbrace{\text{معادله } x^2 - 9 = 0 \text{ دو ریشه دارد}}_T \vee \underbrace{\text{یا } 49 \text{ مضرب } 7 \text{ است}}_T$

(پ) $\underbrace{(1 > \sqrt{2})}_F \vee \underbrace{(1 \neq 1)}_F$

(ت) توجه دارید که هر عدد به توان صفر برسد، جواب 1 است. ضمناً $\sqrt{2} = 1/4$ ؛ پس $\sqrt{2} < 1$.

(ت) 534 زوج است یا 1 عدد اول است.
 $\underbrace{\text{زوج است}}_T \vee \underbrace{\text{۱ عدد اول است}}_F$

مثال: جدول ارزش گذاری گزاره $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را تشکیل دهید.

پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

تذکره: اگر T گزاره‌ای همواره درست و F گزاره‌ای همواره نادرست باشد و p و q دو گزاره دلخواه باشند، آن گاه:

- ۱) $p \wedge p \equiv p$ ۲) $p \vee p \equiv p$ ۳) $p \wedge T \equiv p$ ۴) $p \vee T \equiv T$
- ۵) $p \wedge F \equiv F$ ۶) $p \vee F \equiv p$ ۷) $p \wedge \sim p \equiv F$ ۸) $p \vee \sim p \equiv T$

مثال: بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را بنویسید.

(الف) $\sim p \vee \sim F = ?$ (ب) $(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) = ?$

پاسخ:

(الف) $\sim p \vee \sim F \equiv \sim p \vee T \equiv T$
 (ب) $(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv F \vee T \equiv T$

ترکیب شرطی

اگر با گزاره‌های p و q گزاره $p \Rightarrow q$ را بسازیم، در واقع یک ترکیب شرطی ساخته‌ایم و این گزاره مرکب را به شکل‌های زیر هم می‌توانیم بیان کنیم:

۱) اگر p آن گاه q ۲) شرط کافی است برای q

۳) شرط لازم است برای p ۴) نتیجه می‌دهد q را



ترکیب دو شرطی گزاره‌های p و q

از ترکیب عطفی دو گزاره $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ ساخته می‌شود. ارزش این گزاره وقتی درست است که p و q هم‌ارز باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ضمناً توجه کنید که گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به شکل‌های دیگری هم می‌توان بیان کرد که عبارت‌اند از:

- 1) نتیجه می‌دهد q را و نتیجه می‌دهد p را.
- 2) p اگر و تنها اگر q.
- 3) اگر p آن‌گاه q و اگر q آن‌گاه p.
- 4) اگر p آن‌گاه q و برعکس.
- 5) شرط لازم و کافی است برای q.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر $\sqrt{5}$ گنگ است، آن‌گاه -4 عددی صحیح است و برعکس.
ب) $(-7 > -15) \Leftrightarrow (9 = 3^2)$

پ) مساوی بودن دو عدد شرط لازم و کافی است برای مساوی بودن مربع‌های آن دو عدد
پاسخ: همه گزاره‌ها را برای راحتی حل، به شکل $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم:

الف) $(\sqrt{5} \text{ گنگ است}) \Leftrightarrow (-4 \text{ عدد صحیح است})$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_T \Leftrightarrow \underbrace{\quad\quad\quad}_T$
 ب) $(-7 > -15) \Leftrightarrow (9 = 3^2)$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_F \Leftrightarrow \underbrace{\quad\quad\quad}_F$

پ) (مربع‌های آن‌ها مساوی‌اند) \Leftrightarrow (دو عدد مساوی‌اند) دو قسمت گزاره بالا، به هم وابسته‌اند. در این‌گونه گزاره‌های دوشروطی، باید دو حالت جداگانه در نظر بگیریم (دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$) و در هر دو حالت، مقدم‌ها را درست فرض کنیم، هر دو تالی باید درست باشند تا کل گزاره درست باشد.

حالت اول: (مربع‌های آن‌ها مساوی‌اند) \Rightarrow (دو عدد مساوی‌اند)
 خودمان T فرض می‌کنیم

حالت دوم: (دو عدد مساوی‌اند) \Rightarrow (مربع‌های دو عدد مساوی‌اند)
 خودمان T فرض می‌کنیم

پس کل گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است. توجه کنید که در حالت دوم اگر مربع‌های دو عدد برابر باشند، لزوماً آن دو عدد برابر نیستند؛ مثلاً حاصل $(5)^2$ و $(-5)^2$ هر دو برابر ۲۵ است، ولی خود ۵ و -۵ با هم مساوی نیستند.

مثال: جدول ارزش‌گذاری گزاره $q \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)]$ را رسم کنید.
پاسخ:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

استدلال ریاضی

اکنون می‌خواهیم ۳ استدلال به نام‌های استثنایی، مغالطه و عکس نقیض را آموزش دهیم. از بین این سه استدلال، روش به کار رفته در استدلال‌های استثنایی و عکس نقیض، همیشه درست است ولی روش به کار رفته در مغالطه نادرست است. شکل کلی استدلال‌های استثنایی و مغالطه به صورت زیر است:

مقدمه ۱: اگر p آن‌گاه q	مقدمه ۱: اگر p آن‌گاه q
مغالطه مقدمه ۲: q	مقدمه ۲: p
∴ p	∴ q

تکریم: نتیجه استدلال استثنایی (q) وقتی ۱۰۰ درصد درست است که مقدمه ۱ درست باشد. ضمناً توجه کنید که نتیجه مغالطه (p) گاهی اوقات همیشه درست است و در مواردی گاهی درست و گاهی نادرست است. به عنوان مثال به استدلال استثنایی زیر دقت کنید:

مقدمه ۱: اگر شب چهاردهم ماه باشد، آن‌گاه ماه کامل است.
 مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.
 ∴ امشب، ماه کامل است.

در این استدلال، نتیجه، قطعاً درست است؛ چون مقدمه ۱ درست است. حال به استدلال استثنایی زیر دقت کنید:

مقدمه ۱: اگر روزی ۱۲ ساعت درس بخوانید، آن‌گاه در رشته پزشکی دانشگاه بهشتی قبول می‌شوید.
 مقدمه ۲: علی روزی ۱۲ ساعت درس می‌خواند.
 ∴ علی در رشته پزشکی دانشگاه بهشتی قبول می‌شود.

در این استدلال، مقدمه ۱ نادرست است؛ چون نمی‌توان گفت هر فردی که روزی ۱۲ ساعت درس بخواند، در پزشکی دانشگاه بهشتی قبول می‌شود؛ پس نمی‌توان گفت نتیجه این استدلال ۱۰۰ درصد درست است. حال به استدلال مغالطه زیر دقت کنید:

مقدمه ۱: اگر راننده موقع رانندگی خوابش ببرد، آن‌گاه تصادف خواهد کرد.
 مقدمه ۲: رضا موقع رانندگی تصادف کرده است.
 ∴ رضا موقع رانندگی خوابش برده است.

در استدلال ذکرشده، نتیجه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ یعنی شاید رضا خوابش برده شاید هم علت دیگری باعث تصادف شده است ولی در استدلال مغالطه زیر:

مقدمه ۱: اگر به تمام سوالات امتحان پاسخ درست داده شود، آن‌گاه نمره در آن امتحان ۲۰ می‌شود.
 مقدمه ۲: مریم در امتحان ریاضی ۲۰ گرفته است.
 ∴ مریم به تمام سوالات امتحانی ریاضی، پاسخ درست داده است.

در این‌جا نتیجه، قطعاً درست است؛ پس نتیجه بعضی از مغالطه‌ها درست است.

استدلال عکس نقیض: گاهی اوقات به جای آن که $(p \Rightarrow q)$ را اثبات کنیم، ساده‌تر است که عکس نقیض آن یعنی $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را ثابت کنیم، چون این دو گزاره، هم‌ارز هستند و فرقی ندارد کدام را ثابت کنیم.

مثال: درستی گزاره زیر را به روش عکس نقیض، ثابت کنید.

(زوج است) \Rightarrow (زوج است) n^2 زوج است

پاسخ: عکس نقیض این گزاره عبارت است از: $(n^2 \text{ زوج نیست}) \Rightarrow (n \text{ زوج نیست})$ ضمناً n زوج نیست؛ یعنی فرد است. اعداد فرد را در ریاضی با $2k+1$ یا $2m+1$ نمایش می‌دهیم (k و m اعداد صحیح‌اند) و اعداد زوج را با $2k$ یا $2m$ ؛ لذا:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{\text{فاکتوراز } 2} = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$$

پس ثابت کردیم که n^2 عددی فرد است.

پیدا کردن خطا در محاسبات و اصلاح آن‌ها

برای یافتن خطا در یک سری از محاسبات ریاضی، باید به نکات زیر توجه کرد:

1) در یک معادله، نمی‌توانیم دو طرف را در یک مجهول ضرب یا تقسیم کنیم، مگر آن‌که بدانیم آن مجهول، مخالف صفر است؛ مثلاً برای حل معادله $5x = x(x-1)$ نمی‌توانیم xها را از دو طرف معادله خط بزنیم (در واقع نمی‌شه دو طرف رو بر x تقسیم کنیم) و برای حل این معادله باید به صورت زیر عمل کنیم: $x(x-1) - 5x = 0 \Rightarrow x(x-1-5) = 0$
 فاکتوراز x
 $\Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$