

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار ۱ (دهم) از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

- (۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
- الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم، بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه، تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. برای این آزمون‌ها در کنار سؤالات نکات مشاوره‌ای نوشتیم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کنند.
- ب) آزمون طبقه‌بندی نشده:** آزمون شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا یک آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
- (۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
- الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.
- ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.
- (۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.
- (۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار (۱) نیاز دارید، تنها در ۱۰ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

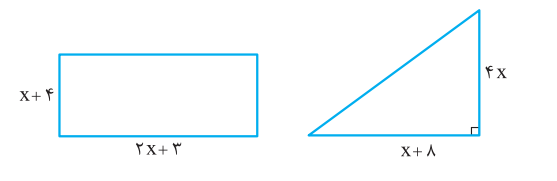
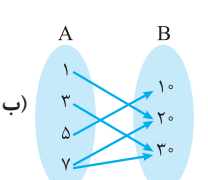
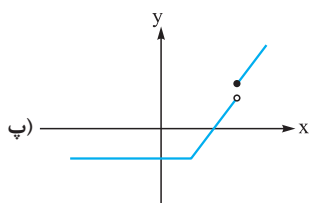


بازم‌بندی درس ریاضی و آمار (۱)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم
اول	۱۰ نمره	۳/۵ نمره
دوم: تا صفحه ۶۲	۱۰ نمره	۵/۵ نمره
دوم: درس ۴	—	
سوم	—	۶/۵ نمره
چهارم	—	۴/۵ نمره
جمع	۲۰ نمره	۲۰ نمره

فهرست

صفحه	صفحه	آزمون	پاسخ‌نامه
۱۸	۳	نوبت اول	آزمون شماره ۱ (طبقه‌بندی شده)
۱۹	۵	نوبت اول	آزمون شماره ۲ (طبقه‌بندی شده)
۲۰	۶	نوبت اول	آزمون شماره ۳ (طبقه‌بندی نشده)
۲۰	۷	نوبت اول	آزمون شماره ۴ (طبقه‌بندی نشده)
۲۱	۸	نوبت دوم	آزمون شماره ۵ (طبقه‌بندی شده)
۲۲	۹	نوبت دوم	آزمون شماره ۶ (طبقه‌بندی شده)
۲۳	۱۰	نوبت دوم	آزمون شماره ۷ (طبقه‌بندی شده)
۲۴	۱۲	نوبت دوم	آزمون شماره ۸ (طبقه‌بندی شده)
۲۵	۱۳	نوبت دوم	آزمون شماره ۹ (طبقه‌بندی نشده)
۲۶	۱۴	نوبت دوم	آزمون شماره ۱۰ (طبقه‌بندی نشده)
۲۷	۱۵	نوبت دوم	آزمون شماره ۱۱ (طبقه‌بندی نشده)
۲۸	۱۷	نوبت دوم	آزمون شماره ۱۲ (طبقه‌بندی نشده)

نمره	kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۱)	
آزمون شماره ۱				ردیف	
فصل اول					
۱		<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پُر کنید:</p> <p>الف) معادلهٔ مربوط به شکل مقابل برابر با می‌باشد.</p> <p>ب) می‌خواهیم معادلهٔ $x^2 - 10x + 25 = 0$ را به کمک تجزیه حل کنیم. برای این منظور عبارت $x^2 - 10x + 25$ را به شکل تجزیه می‌کنیم.</p> <p>پ) معادلهٔ $3x^2 + x + 7 = 0$ دارای ریشهٔ حقیقی است.</p> <p>ت) در نقطه یا نقاط سربه‌سر، درآمد شرکت با برابر است.</p>			۱
۱	حاصل جمع عددی با مربعش ۳۰ است. با تشکیل یک معادله، این عدد را به دست آورید. (مسئله چند جواب دارد؟)				۲
۲/۲۵	<p>در این‌گونه مسائل که روش حل هر معادله گفته شده، آنگاه نتوانستیم به روشی که فواسته شده، معادله رو حل کنید از هر روشی که بلدین، استفاده کنید تا حداقل نصف نمره رو بهتون بدن.</p>	<p>معادلات زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید.</p> <p>الف) $5x^2 = 6x$ (تجزیه)</p> <p>ب) $x^2 - 4x - 10 = 0$ (مربع کامل)</p> <p>پ) $x^2 - x + 12 = 0$ (روش کلی یا دلتا)</p>			۳
۱	<p>پس از حل معادلات گویا (کسری) یادتون نره جواب یا جواب‌ها رو در مخرج‌ها بنذارید. هیچ مخرجی نباید صفر بشه.</p>	<p>معادلهٔ گویای مقابل را حل کنید. آیا جواب یا جواب‌های آن قابل قبول است؟ $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} = 3$</p>			۴
۱	در یک کارخانهٔ تولید فولاد، از روز یک‌شنبه، تولید هر روز نسبت به روز قبل ۳ برابر می‌شود. در پایان روز چهارشنبه، تولید فولاد به سقف ۱۶۲ هزار تن رسیده است. مجموع تولید در این پنج روز چه قدر بوده است؟ (اولین روز کاری، شنبه است)				۵
۱	مساحت مستطیل و مثلث زیر با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.				۶
					
۱	معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۱۰ و -۶ باشند.				۷
۱/۲۵	<p>معادلات درآمد و هزینه در یک شرکت به صورت $R(x) = -x^2 + 6x$ و $C(x) = x + 4$ می‌باشد. (R درآمد و C هزینه است).</p> <p>الف) معادلهٔ سود شرکت را به دست آورید.</p> <p>ب) بیشترین سود شرکت چه قدر است؟</p> <p>پ) نقطه یا نقاط سربه‌سر را به دست آورید.</p> <p>ت) به ازای تولید چه مقدار کالا، سوددهی خواهیم داشت؟</p>				۸
فصل دوم					
۱	<p>تقریباً نیمی همهٔ امتحانات، به سوال در مورد بررسی تابع بودن یا نبودن رابطه‌ها مطرح می‌شود، پس تشفی‌بخش تابع رو جدی بگیرید لطفاً.</p>	<p>تابع بودن یا نبودن هر یک از رابطه‌های زیر را بررسی کنید.</p>			۹
	<p>الف) $f = \{(1, 3), (4, 8), (5, 10)\}$</p> <p>ب) </p>	<p>پ) </p>	<p>ت) $y^2 = x^2 + 5$</p>		
۱/۵	<p>با فرض آن که $f: A \rightarrow B$ و $A = \{-2, 0, 2\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید؛ سپس نمودار بیکنی و نمودار مختصاتی و جدول آن را رسم کنید.</p> <p>$f(x) = x^2 - 3x + 1$</p>				۱۰

شماره	kheilisabz.com	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۱)
نمره	نوبت اول پایه دهم دوره متوسطه دوم			ردیف
۲	<p>دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.</p> <p>یادتون باشه که دامنه یعنی مسوده تغییرات x و برد یعنی مسوده تغییرات y.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="113 376 375 584"> <p>الف)</p> </div> <div data-bbox="496 376 703 555"> <p>ب)</p> </div> <div data-bbox="847 454 1043 633"> <p>پ)</p> </div> <div data-bbox="1166 376 1406 555"> <p>ت)</p> </div> </div>			۱۱
۱/۲۵	اگر مجموعه $f = \{(1, a - 4b), (3, 4), (1, 5), (3, b - a)\}$ یک تابع باشد، a و b را به دست آورید.			۱۲
۱/۲۵	اگر $f(x) = x - 1 $ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ باشند، حاصل $f(0) + 5g(1)$ را به دست آورید.			۱۳
۱/۵	نمودار تابع $y = 2x - 4$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را مشخص کنید.			۱۴
۱/۵	نمودار تابع $y = -x^2 - 2x + 4$ را رسم کرده و بگویید سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟			۱۵
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید

نمره	ریاضی و آمار (۱)	رشته: ادبیات و علوم انسانی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com										
ردیف	آزمون شماره ۹													
نوبت دوم پایه دهم دوره متوسطه دوم														
۱	معادله $(1+x)^2 = 6 - (1+x)^2$ را به روش دلخواه حل کنید.													
۱/۵	در یک کارخانه موادسازی، هزینه اولیه برابر ۸۰ دلار و هزینه تولید هر مداد برابر ۱۸ دلار است. اگر x تعداد مدها و p قیمت فروش هر مداد باشد و رابطه $x = 120 - 4p$ برقرار باشد: الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید. ب) بیشترین سود کارخانه، به ازای تولید چند مداد حاصل می شود؟ پ) ماکزیمم (حداکثر) سود کارخانه چه قدر است؟													
۱	وقتی دو شیر آب با هم باز باشند، یک استخر در $\frac{6}{5}$ ساعت پر آب می شود. اگر شیر A به تنهایی باز باشد، یک ساعت زمان بیشتری برای پر کردن استخر نسبت به شیر B لازم دارد. هر یک از شیرها به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می کنند؟													
۱	در رابطه مقابل، در جاهای خالی، طوری عدد بگذارید که f تابع شود. $f = \left\{ (3, 6), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 5 \right), (\sqrt{9}, \dots), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots \right) \right\}$													
۱	در تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx - 2$ با شرط $f(1) = -3$ و $f(3) = 7$ مقادیر a و b را به دست آورید.													
۲	طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه ای آویزان نشده، ۱۰ سانتی متر است و به ازای هر کیلوگرم، وزنه ای که به آن آویزان می شود، $\frac{1}{5}$ سانتی متر به طول آن افزوده می شود. ضابطه تابع خطی f (طول فنر) را بر حسب وزن جسم (x) به دست آورید؛ سپس مقادیر $f(4)$ و $f(h-1)$ را محاسبه کرده و نمودار تابع f را رسم کنید.													
۱/۵	نقطه یا نقاط تلاقی دو سهمی $y = x^2 - 3x$ و $y = 2x^2 - 8x$ را به دست آورید.													
۱	در هر مورد، از چه روشی برای جمع آوری داده ها استفاده می کنیم؟ الف) رضایت مشتریان یک بانک از نحوه برخورد کارکنان ب) بررسی تعداد افراد صاحب خانه در ایران													
۲	نوع هر متغیر را زیر آن بنویسید.													
	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>متغیر تصادفی</th> <th>وضع تأهل افراد</th> <th>مقدار سرعت ماشین ها</th> <th>سابقه کار دبیران</th> <th>مراحل کشت محصولات کشاورزی</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>نوع متغیر</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	متغیر تصادفی	وضع تأهل افراد	مقدار سرعت ماشین ها	سابقه کار دبیران	مراحل کشت محصولات کشاورزی	نوع متغیر							
متغیر تصادفی	وضع تأهل افراد	مقدار سرعت ماشین ها	سابقه کار دبیران	مراحل کشت محصولات کشاورزی										
نوع متغیر														
۱	میانگین اعداد $3-2x$ ، $1+7x$ و $1-x$ برابر ۱۶ است. مقدار x را به دست آورید.													
۱	در داده های (۱، ۵، ۷، ۸، x ، ۱۲، ۱۴، ۱۵) که از کوچک به بزرگ مرتب شده اند، میانه برابر ۱۰ است. x را به دست آورید.													
۱/۵	نمرات درس فیزیک دانش آموزی در طول سال برابر است با ۱۷، ۱۳، ۸، ۲۰، ۱۹، ۱۷، ۱۸، ۱۹: الف) میانگین، میانه و مد را به دست آورید. ب) کدام یک از شاخص های مرکزی بالا، وضعیت وی در درس فیزیک را بهتر نشان می دهد؟ پ) اگر معلم فیزیک، برای جبران نمره ۸ به او امکان امتحان مجدد بدهد، برای آن که میانگین نمرات او در این درس ۱۷ شود، چه نمره ای باید کسب کند؟													
۲	برای جدول زیر، ۲ نمودار دایره ای بر حسب درصد و درجه رسم کنید.													
	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>گروه خونی</th> <th>A</th> <th>B</th> <th>AB</th> <th>O</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>فراوانی</td> <td>۲۴</td> <td>۴</td> <td>۱۰</td> <td>۱۲</td> </tr> </tbody> </table>	گروه خونی	A	B	AB	O	فراوانی	۲۴	۴	۱۰	۱۲			
گروه خونی	A	B	AB	O										
فراوانی	۲۴	۴	۱۰	۱۲										
۲/۵	با توجه به نمودار جعبه ای مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) دامنه تغییرات و دامنه میان چارکی کدام اند؟ ب) چند درصد داده ها بزرگ تر از ۷ هستند؟ پ) چند درصد داده ها کوچک تر از ۱۳ هستند؟ ت) ۷۵ درصد داده ها بزرگ تر از چه عددی هستند؟													
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید												

پاسخنامه تشریحی

پ) برای یافتن نقطه یا نقاط سربه سر باید تابع سود را مساوی صفر قرار دهیم:

$$P(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

ت) به ازای تولید $1 < x < 4$ از کالای مورد نظر سوددهی خواهیم داشت.

۹- الف) تابع است؛ چون عضوهای اول زوج مرتبها، همگی مختلف هستند.

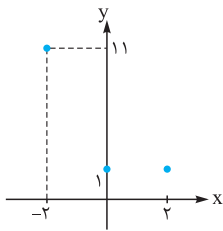
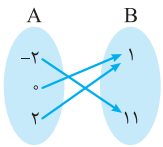
ب) تابع نیست؛ چون از عدد ۷ دو فلش خارج شده است.

پ) تابع است؛ چون هر خط عمودی دلخواه که رسم کنیم نمودار را در یک نقطه قطع می کند.

ت) تابع نیست؛ چون توان y زوج است و مثلاً اگر به x عدد صفر را نسبت دهیم برای y دو مقدار مختلف بدست می آید: $y = \pm\sqrt{5}$ **جذر** $y^2 = 5 \xrightarrow{(x=0)} y^2 = 5$

$$10- \begin{cases} x=-2 \rightarrow f(-2) = |(-2)^2 - 3(-2) + 1| = 11 \\ x=0 \rightarrow f(0) = |0^2 - 3(0) + 1| = 1 \\ x=2 \rightarrow f(2) = |2^2 - 3(2) + 1| = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{برد } R_f = \{1, 11\}$$



الف) $\begin{cases} D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ R_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} D_f = \{x | x \geq 2\} \\ R_f = \{y | y \geq 3\} \end{cases}$

پ) $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \{y | y \leq -2\} \end{cases}$

ت) $\begin{cases} D_f = \{x | 1 \leq x \leq 5\} \\ R_f = \{y | 1 \leq y \leq 4\} \end{cases}$

$$12- \begin{aligned} (1, a-fb) = (1, 5) &\Rightarrow \begin{cases} a'-fb=5 \\ b-a=4 \end{cases} \\ (3, 4) = (3, b-a) &\Rightarrow \begin{cases} b-a=4 \\ -3b=9 \end{cases} \end{aligned}$$

حالا ۳- را در یکی از رابطه ها به جای b قرار می دهیم تا a هم پیدا شود:

$$b-a=4 \Rightarrow -3-a=4 \Rightarrow a=-7$$

$$f(x) = |x-1| \xrightarrow{x=0} f(0) = |0-1| = |-1| = 1$$

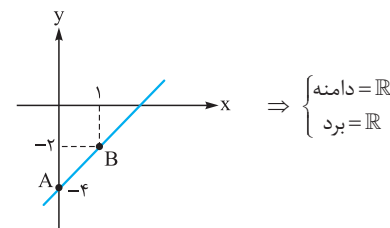
$$g(x) = \sqrt{x^2 + 3x} \xrightarrow{x=1} g(1) = \sqrt{1^2 + 3(1)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow f(0) + 5g(1) = 1 + 5(2) = 11$$

۱۴- کافی است x دو عدد دلخواه نسبت دهیم و y مربوط به آن ها را به دست آوریم:

$$y = 2x - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow y = 2(0) - 4 = -4 \Rightarrow A(0, -4) \\ x=1 \rightarrow y = 2(1) - 4 = -2 \Rightarrow B(1, -2) \end{cases}$$



آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) معادله خواسته شده برابر است با: $3x + 1 = 7$

ب) $x^2 - 10x + 25 = (x-5)(x-5) = (x-5)^2$

پ) $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$

پس معادله، دارای صفر ریشه است. (هیچ ریشه ای ندارد.)

ت) هزینه های شرکت

۲- عدد مطلوب را x در نظر می گیریم و خواهیم داشت:

$$x + x^2 = 30 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+6=0 \Rightarrow x=-6 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

اتحاد جمله مشترک

پس مسئله دو جواب دارد.

۳- الف) $\Delta x^2 = 6x \Rightarrow \Delta x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(\Delta x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \Delta x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{\Delta} \end{cases}$

ب) $x^2 - 4x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 10 \xrightarrow{\text{عدد } \frac{b^2}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4 \text{ اضافه کنیم}} x^2 - 4x + 4 = 10 + 4 = 14$

اتحاد مربع

ب

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 14 \xrightarrow{\text{جذر}} x-2 = \pm\sqrt{14} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{14} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{14} \\ x-2 = -\sqrt{14} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{14} \end{cases}$$

پ) $x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(12) = 16 - 48 = -32$

معادله جواب ندارد. چون دلتا عددی منفی شده است.

۴- $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} = 3 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک می گیریم}} \frac{2(x-2)+1}{(x-2)^2} = 3$

طرفین وسطین $\rightarrow 3(x-2)^2 = 2(x-2)+1 \Rightarrow 3(x^2 - 4x + 4) = 2x - 4 + 1$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 12 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 196 - 180 = 16 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14+4}{6} = 3 \\ x = \frac{14-4}{6} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول اند؛ چون در معادله اصلی، هیچ مخرجی را به صفر تبدیل نمی کنند.

۵- اگر تولید روز شنبه را x فرض کنیم خواهیم داشت:

$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{\times 2} 4x \xrightarrow{\times 2} 8x \xrightarrow{\times 2} 16x \xrightarrow{\times 2} 32x \xrightarrow{\times 2} 64x \Rightarrow 64x = 128 \Rightarrow x = 2$$

شنبه یکشنبه دوشنبه سهشنبه چهارشنبه

هزار تن $242 = 2(121) = 2(2 \times 60.5) = 2(121)$

۶- $\text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول} = (2x+3)(x+4) = 2x^2 + 11x + 12$

مساحت مثلث = $\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{(x+8)(4x)}{2} = 2x(x+8) = 2x^2 + 16x$

مساحت مثلث = مساحت مستطیل

$$\Rightarrow 2x^2 + 11x + 12 = 2x^2 + 16x \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

طول مستطیل $= 2x + 3 = 2(\frac{12}{5}) + 3 = \frac{39}{5}$

عرض مستطیل $= x + 4 = \frac{12}{5} + 4 = \frac{32}{5}$

۷- $\begin{cases} x=10 \Rightarrow \begin{cases} x-10=0 \\ x+6=0 \end{cases} \Rightarrow (x-10)(x+6) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + 6x - 10x - 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 60 = 0$

۸- الف) سود $P(x) = R(x) - C(x) = -x^2 + 6x - x - 4 = -x^2 + 5x - 4$

ب) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(-1)} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{در تابع سود}} P_{\max} = -(\frac{5}{2})^2 + 5(\frac{5}{2}) - 4 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 4 = \frac{-25 + 50 - 16}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$

بیشترین سود $\frac{9}{4} = 2.25$

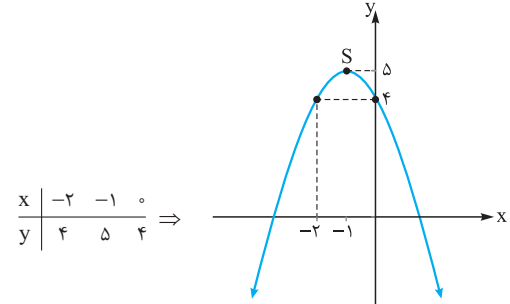
۱۵- این سهمی ماکزیمم دارد چون ضریب x^2 منفی است. ابتدا مختصات رأس سهمی را پیدا می‌کنیم:

$$y = -x^2 - 2x + 4$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع قرار می‌دهیم}} y_S = -(-1)^2 - 2(-1) + 4 = -1 + 2 + 4 = 5 \Rightarrow S \begin{matrix} -1 \\ 5 \end{matrix}$$

حالا از دو نقطه کمکی هم استفاده می‌کنیم، یکی قبل از رأس و یکی بعد از رأس:



۲- $x = 120 - 4p$, $C(x) = 80 + 18x$ = هزینه تولید + هزینه اولیه تابع هزینه (الف)
 $\Rightarrow 4p = -x + 120 \xrightarrow{\div 4} p = -\frac{1}{4}x + 30$, $R(x) = x.p = x(-\frac{1}{4}x + 30)$
 $= -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ تابع درآمد سود , تابع سود $P(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x - 80 - 18x$
 $= -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 80$

ب) $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$ تعداد مدادها

پ) بیشترین سود $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 80 \xrightarrow{(x=24)} P_{max} = -\frac{1}{4}(24)^2 + 12(24) - 80 = 64$

۳- اگر زمان مربوط به شیر A را x بنامیم، زمان مربوط به شیر B برابر (x-1) خواهد بود؛ لذا:

$t = \frac{a.b}{a+b} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{x(x-1)}{x+(x-1)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \Delta x(x-1) = 6(2x-1)$
 $\Rightarrow \Delta x^2 - \Delta x - 12x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta x^2 - 17x + 6 = 0$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 289 - 120 = 169 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{10} = \frac{17 \pm 13}{10}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17+13}{10} = 3 \text{ (ق ق)} \\ x = \frac{17-13}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$

پس شیر A در 3 ساعت و شیر B در $3-1=2$ ساعت، استخر را پر آب می کنند.

۴- $f = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

دقت کنید که $\sqrt{9} = 3$ و $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ را گویا کرده ایم.

۵- $y = ax^2 + bx - 2$
 $\begin{cases} x=1, y=-3 \rightarrow a(1)^2 + b(1) - 2 = -3 \Rightarrow a + b = -1 \\ x=3, y=9 \rightarrow a(3)^2 + b(3) - 2 = 9 \Rightarrow 9a + 3b = 9 \end{cases}$
 $\xrightarrow{\div 3} 3a + b = 3$

$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری در یکی از معادلات}} \begin{cases} -a - b = 1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow b = -3$
 $2a = 4 \Rightarrow a = 2$

۶- در این گونه مسائل باید مختصات 2 نقطه را به کمک اطلاعات داده شده بنویسیم و به کمک آن ها شیب و معادله خط را به دست آوریم. در این جا x را وزن و y را طول فنر در نظر می گیریم؛ لذا:

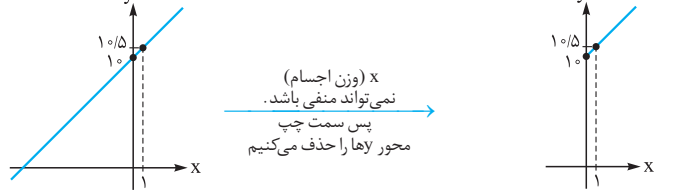
$A(0, 1), B(1, 1.5) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.5 - 1}{1 - 0} = 0.5$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 0.5(x - 0)$

$\Rightarrow y = 0.5x + 1$ (همان f(x) است.)

$f(4) = 0.5(4) + 1 = 3, f(h-1) = 0.5(h-1) + 1$

$= 0.5h - 0.5 + 1 = 0.5h + 0.5$



۷- کافی است دو معادله داده شده را با هم مساوی قرار دهیم. (y ها را در نظر نگیرید.)

$\begin{cases} y = 2x^2 - 8x \\ y = x^2 - 3x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 8x = x^2 - 3x \Rightarrow 2x^2 - 8x - x^2 + 3x = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$

حال صفر و 5 را در یکی از 2 معادله اولیه قرار می دهیم (به دلفواه یکی رو انتخاب می کنیم)

$y = x^2 - 3x \xrightarrow{x=0} y = 0^2 - 3(0) = 0$ تا y آن ها هم پیدا شود.

$\Rightarrow A(0, 0), y = x^2 - 3x \xrightarrow{x=5} y = 5^2 - 3(5) = 10 \Rightarrow B(5, 10)$

آزمون شماره 9 (نوبت دوم)

۱- $(1+x)^2 = 6 - (1+x)^2 \xrightarrow{\text{اتحادها را با هم می کنیم}} 1+2x+x^2 = 6-1-2x-x^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 8 = 12$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2(1)} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2} \\ x'' = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2} \end{cases}$

۸- الف) مصاحبه یا پرسش‌نامه (ب) دادگان (داده‌های از قبل تهیه شده)

۹- وضع تأهل افراد ← کیفی اسمی

مقدار سرعت ماشین‌ها ← کتی نسبتی

سابقه کار دبیران ← کتی نسبتی

مراحل کشت محصولات کشاورزی ← کیفی ترتیبی

$$\bar{x} = 16 \Rightarrow \frac{2x - 3 + 7x + 1 + 1 - x}{3} = 16 \Rightarrow 8x - 1 = 48 \Rightarrow 8x = 49 \Rightarrow x = \frac{49}{8} \quad -10$$

$$1, 5, 7, 8, x, 12, 14, 15 \xrightarrow{\text{داده‌ها}} 1, 5, 7, 8, 12, 12, 14, 15 \Rightarrow \text{مد} = 12 \quad -11$$

$$\downarrow \text{میانگین} = \frac{8+x}{2} \Rightarrow 10 = \frac{8+x}{2} \Rightarrow 8+x=20 \Rightarrow x=12$$

۱۲- الف) مُد برابر ۱۷ و ۱۹ است؛ چون هر کدام ۲ بار تکرار شده‌اند.

$$\xrightarrow{\text{یافتن میانگین}} 8, 13, 17, 17, 18, 19, 19, 20$$

$$\text{میانگین} = \frac{17+18}{2} = 17.5$$

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{131}{8} = 16.375$$

ب) چون داده پرت وجود ندارد؛ لذا بهتر است از میانگین استفاده کنیم نه میانگین (نمی‌توانیم بگوییم نمره ۸ داده پرته چون ۸ به ۱۳ نزدیکه و اختلاف زیادی ندارند)؛ ضمناً از مُد هم نمی‌توان استفاده کرد؛ چون ۲ تا مُد وجود داشت.

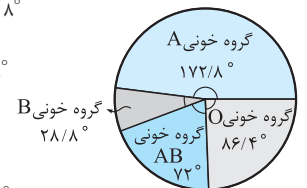
پ) اگر نمره جدید او را x بنامیم، داریم:

$$\bar{x} = \frac{x + 13 + 17 + 17 + 18 + 19 + 19 + 20}{8} = 17$$

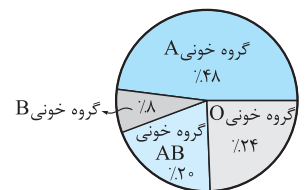
$$\Rightarrow x + 123 = 136 \Rightarrow x = 136 - 123 = 13$$

$$N = 24 + 4 + 10 + 12 = 50 \quad -13$$

$$\alpha = \frac{f}{N} \times 360^\circ \Rightarrow \begin{cases} f=24 \rightarrow \alpha = \frac{24}{50} \times 360^\circ = 172.8^\circ \\ f=4 \rightarrow \alpha = \frac{4}{50} \times 360^\circ = 28.8^\circ \\ f=10 \rightarrow \alpha = \frac{10}{50} \times 360^\circ = 72^\circ \\ f=12 \rightarrow \alpha = \frac{12}{50} \times 360^\circ = 86.4^\circ \end{cases}$$



$$S = \frac{f}{N} \times 100 \Rightarrow \begin{cases} f=24 \rightarrow S = \frac{24}{50} \times 100 = 48\% \\ f=4 \rightarrow S = \frac{4}{50} \times 100 = 8\% \\ f=10 \rightarrow S = \frac{10}{50} \times 100 = 20\% \\ f=12 \rightarrow S = \frac{12}{50} \times 100 = 24\% \end{cases}$$



۱۴- الف) دامنه تغییرات $R = \max - \min = 20 - 2 = 18$

دامنه میان چارکی $IQR = Q_3 - Q_1 = 13 - 5 = 8$

ب) ۵۰ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از ۷ هستند.

پ) ۷۵ درصد داده‌ها کوچک‌تر از ۱۳ هستند.

ت) ۷۵ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از ۵ هستند.

درس نامه توپ برای شب امتحان

روش‌های حل معادله درجه دوم

روش تجزیه: در فصل ۱ با تجزیه عبارت‌های جبری آشنا شدید. بسیاری از معادلات درجه دوم را به کمک فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها حل می‌کنیم:

$$14x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 2x(7x - 6) = 0$$

فاکتوراز $2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7} \end{cases}$$

البته می‌توانیم از x هم فاکتور بگیریم

$$64x^2 - 100 = 0 \Rightarrow (8x - 10)(8x + 10) = 0$$

اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \\ 8x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

$$x^2 - x - 56 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 7) = 0$$

اتحاد جمله مشترک

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

روش جذرگیری (ریشه‌گیری): از این روش فقط زمانی می‌توانیم استفاده کنیم که معادله شامل x^2 هست ولی x^1 ندارد. در این صورت عدد ثابت را به سمت راست تساوی برده و از دو طرف جذر می‌گیریم.

$$x^2 - 49 = 0 \Rightarrow x^2 = 49 \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذراز}} x = \pm \sqrt{49} = \pm 7$$

$$9x^2 - 64 = 0 \Rightarrow 9x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{9} \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذراز}} x = \pm \sqrt{\frac{64}{9}} = \pm \frac{8}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{64}{9}} = \pm \frac{8}{3}$$

$$(x - 3)^2 = 25 \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذراز}} x - 3 = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8 \\ x - 3 = -5 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

روش مربع کامل: در این روش ابتدا اگر ضریب x^2 عددی به جز ۱ بود تمام جملات معادله را بر آن ضریب تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 یک شود سپس ضریب x را نصف کرده به توان ۲ می‌رسانیم، عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم (به طور خلاصه $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف معادله، اضافه می‌کنیم که b ضریب x است). سمت چپ معادله، حتماً اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهد شد. در نهایت مانند روش جذرگیری عمل می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = -3$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}]{\text{عدد } \frac{b^2}{4} = \frac{(-4)^2}{4} = 4 \text{ را به دو طرف می‌افزاییم}} x^2 - 4x + 4 = -3 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

$$\xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{جذراز}} x - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$2x^2 + 10x = 1 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 5x = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}]{\text{عدد } \frac{b^2}{4} = \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4} \text{ را به دو طرف اضافه می‌کنیم}} x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{1}{2} + \frac{25}{4} \Rightarrow (x + \frac{5}{2})^2 = \frac{27}{4}$$

$$\Rightarrow x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{27}{4}} = \pm \frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{27}}{2} - \frac{5}{2} \\ x + \frac{5}{2} = \frac{-\sqrt{27}}{2} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{27}}{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$$

فصل: معادله درجه دوم

معادله درجه اول و کاربردهای آن

هر معادله که پس از ساده‌شدن به صورت $ax + b = 0$ تبدیل شود، معادله درجه اول نام دارد (a و b دو عدد حقیقی دلخواهاند ولی a نمی‌تواند صفر باشد). مثلاً معادلات $\frac{x-1}{8} = 2x$ و $5x = -1$ ، $3x - 2 = 0$ همگی درجه اول هستند. برای حل آن‌ها ابتدا اعداد را از متغیرها جدا کرده سپس عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم:

$$(x + 1)(x - 6) = x^2 + 3x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + x - 6 = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow -6x + x - 3x = -1 + 6$$

$$\Rightarrow -8x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{x+3}{2} - \frac{x}{5} = 1 \xrightarrow[\text{مخرج مشترک}]{\text{مخرج مشترک}} \frac{5(x+3) - 2x}{10} = 1$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین وسطین}]{\text{طرفین وسطین}} 5x + 15 - 2x = 10$$

$$\Rightarrow 3x = 10 - 15 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

کاربرد معادله درجه اول در حل مسائل توصیفی گاهی به جای آن که یک معادله به صورت حاضر و آماده به ما داده شود، خودمان باید با توجه به یک توصیف (متن فارسی) معادله‌ای مناسب تشکیل داده و آن را حل کنیم تا مجهول موردنظر به دست آید.

مثال: عددی را به دست آورید که ۳ برابر آن به علاوه ۱ مساوی با نصف همان عدد، منهای ۲ شود.

حل: آن عدد را x فرض کرده و این‌طور می‌نویسیم:

$$3x + 1 = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow 3x - \frac{x}{2} = -2 - 1 \Rightarrow \frac{5x}{2} = -3 \Rightarrow 5x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{5}$$

مثال: مساحت مستطیل و مثلث زیر با هم برابر است. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.



$$\text{مساحت مستطیل} = \text{عرض} \times \text{طول} = (2x + 3)(x + 4)$$

$$= 2x^2 + 8x + 3x + 12 = 2x^2 + 11x + 12$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{(x + 8) \times 4x}{2} = 2x(x + 8) = 2x^2 + 16x$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت مثلث} \Rightarrow 2x^2 + 11x + 12 = 2x^2 + 16x$$

$$\Rightarrow 16x - 11x = 12 \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$\text{عرض مستطیل} = x + 4 = \frac{12}{5} + 4 = \frac{32}{5}$$

$$\text{طول مستطیل} = 2x + 3 = 2\left(\frac{12}{5}\right) + 3 = \frac{24}{5} + 3 = \frac{39}{5}$$

معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

هر معادله که پس از ساده‌شدن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل شود، با شرط $a \neq 0$ یک معادله درجه دوم نام دارد. به a ضریب x^2 ، به b ضریب x و به c عدد ثابت می‌گوییم. مثلاً در معادله $-x^2 + 6x - 7 = 0$ ضرایب معادله عبارت‌اند از: $c = -7$ ، $b = +6$ و $a = -1$ و یا در معادله $\frac{x^2}{5} + 3 = 0$ ضرایب معادله برابرند با: $c = 3$ ، $b = 0$ و $a = \frac{1}{5}$.



روش کلی (روش استفاده از دلتا): در این روش ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه کرده، سپس حالات زیر را خواهیم داشت:

معادله ۲ ریشه متمایز دارد. $\Rightarrow \Delta > 0$ اگر (الف)

که این ریشه‌ها عبارت‌اند از: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

معادله ریشه مضاعف دارد. $\Rightarrow \Delta = 0$ اگر (ب)

که این ریشه عبارت است از: $x = \frac{-b}{2a}$

معادله جواب ندارد. $\Rightarrow \Delta < 0$ اگر (پ)

ضمناً به دلتا (Δ) مبتین معادله هم می‌گوییم. حال معادلات زیر را به روش کلی حل می‌کنیم:

مثال ۱: $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6)$

$= 25 + 24 = 49$
 $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(1)} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{5+7}{2} = 6 \\ x'' = \frac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$

مثال ۲: $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(25)$

$= 100 - 100 = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2(1)} = 5$

مثال ۳: $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(3) = -8$

معادله جواب ندارد چون دلتای آن منفی شده است.

نکته: گاهی اوقات یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم داده می‌شود و پارامتری مثل m, k و n ... خواسته می‌شود که باید به جای تمام متغیرهای معادله، ریشه داده شده را قرار دهیم.

مثال: به ازای چه مقدار از k معادله $10x^2 - 4x + 3k = 0$ دارای جواب $x = 1$ است؟

حل: $10x^2 - 4x + 3k = 0 \xrightarrow{(x=1)} 10(1)^2 - 4(1) + 3k = 0$

$\Rightarrow 3k = -6 \Rightarrow k = -2$

مجموعه و ضرایب ریشه‌های معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بدون آن که معادله را حل کنیم می‌توانیم به سرعت بگوییم که:

البته توجه دارید که Δ حتماً باید مثبت باشد تا معادله دارای ۲ ریشه متمایز باشد.

مثال: بدون حل معادله $x^2 + 3x + 4 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

حل: $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $-1x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{-1} = 3 \\ x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{4}{-1} = -4 \end{cases}$

نوشتن معادلات درجه دومی که جواب‌های همگی آن‌ها یکسان است فرض کنید

معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای جواب‌های x' و x'' باشد. حال اگر تمام جملات معادله را در عدد $k \neq 0$ ضرب کنیم، معادله حاصل هم دارای جواب‌های x' و x'' خواهد بود.

مثلاً جواب‌های معادله $x^2 - 5x - 6 = 0$ عبارت‌اند از ۱ و ۶. حال مثلاً اگر تمام جملات معادله را در ۲ ضرب کنیم، به معادله $2x^2 - 10x - 12 = 0$ می‌رسیم. با حل این معادله می‌بینیم که جواب‌ها باز هم ۱ و ۶ خواهند بود.

نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش به ما داده شده است اگر ریشه‌های یک

معادله درجه دوم را m و n بنامیم، خود معادله درجه دوم مربوط به این ریشه‌ها برابر است با $(x-m)(x-n) = 0$. اگر معادله‌ای ریشه مضاعف m داشته باشد، معادله مربوط به آن برابر با $(x-m)^2 = 0$ خواهد بود.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۳ و -10 باشند. آیا این معادله

منحصر به فرد است؟

حل: $(x-3)(x-(-10)) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+10) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 10x - 3x - 30 = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 30 = 0$

این معادله، منحصر به فرد نیست و اگر جملات آن را در عدد $k \neq 0$ ضرب کنیم، معادله حاصل هم دارای ریشه‌های ۳ و -10 خواهد بود.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه مضاعف $x = \sqrt{3}$ داشته باشد.

حل: $(x-\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل

گاهی باید برای یک توصیف داده شده، معادله‌ای مناسب تشکیل دهیم و با حل آن، به مجهول مورد نظر برسیم. فقط باید حواسمان باشد معادله‌ای که تشکیل می‌دهیم باید دارای یک متغیر مثل x باشد؛ یعنی اگر ۲ متغیر مثل x و y داشته باشیم باید آن‌ها را به یک متغیر تبدیل کنیم.

مثال: عددی صحیح پیدا کنید که مربعش با سه برابرش مساوی باشد. مسئله

چند جواب دارد؟

حل: اگر عدد صحیح مورد نظر را x فرض کنیم می‌توانیم این‌طور بنویسیم که:

$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

صفر و ۳ هر دو عدد صحیح مورد نظر پس مسئله دو جواب دارد.

مثال: رضا از خواهرش ۲ سال کوچک‌تر است. اگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۸۰

باشد، سن هر دو را پیدا کنید.

حل: اگر سن رضا را x فرض کنیم، سن خواهرش $(x+2)$ خواهد بود لذا:

$x(x+2) = 80 \Rightarrow x^2 + 2x - 80 = 0 \Rightarrow (x+10)(x-8) = 0$
اتحاد جمله مشترک

$\Rightarrow \begin{cases} x+10=0 \Rightarrow x=-10 \text{ (سن نمی‌تواند منفی باشد)} \\ x-8=0 \Rightarrow x=8 \end{cases}$
سن رضا $x = 8$ سن خواهرش $x+2 = 8+2 = 10$

کاربرد معادله درجه دوم در حل مسائل سود

در ابتدا خوب است با یک سری نمادها آشنا شوید:

تعداد کالاها: x

قیمت هر کالا: p یا v

تابع سود: $P(x)$

تابع درآمد: $R(x)$

تابع هزینه: $C(x)$

تابع درآمد هر شرکت یا کارخانه از رابطه $R(x) = x \cdot p$ به دست می‌آید. ضمناً تابع

هزینه متغیر + هزینه ثابت = $C(x)$
(تولید) (اولیه)

هزینه برابر است با:

مثلاً اگر گفته شود هزینه ثابت ۲۰۰۰ تومان و هزینه تولید هر کالا ۱۰ تومان است،

آن‌گاه: (همیشه x را باید در هزینه تولید هر کالا ضرب کنید). $C(x) = 2000 + 10x$

تابع سود هم برابر است با: $P(x) = R(x) - C(x)$

سود شرکت وقتی ماکزیمم است که تعداد کالاها تولیدی‌اش برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ باشد.

(معادله سود همیشه به شکل $P(x) = ax^2 + bx + c$ تبدیل می‌شود). ضمناً اگر معادله $P(x) = 0$ را حل کنیم نقاط سربه‌سر به دست می‌آیند.

نقاط سربه‌سر

نقاط سربه‌سر تعداد کالاهایی است که به ازای تولید آن‌ها شرکت نه سود می‌کند و نه ضرر. پس از حل معادله $P(x) = 0$ معمولاً ۲ جواب به دست می‌آید (آن‌ها را m و n فرض می‌کنیم). حال اگر شرکت به اندازه x کالا تولید کند و $m < x < n$ باشد سوددهی خواهد داشت. (با فرض $m < n$)

مثال: معادلات (توابع) درآمد و هزینه در شرکتی به صورت $R(x) = \frac{-1}{4}x^2 + 30x$

و $C(x) = 18x + 80$ می‌باشند:

الف) تابع سود را تشکیل داده و مشخص کنید به ازای تولید چه تعداد کالا، سود

شرکت ماکزیمم می‌شود؟

کاربرد معادلات گویا در حل مسائل توصیفی

یک راه حل کلی برای حل مسائل گویا وجود ندارد، پس با توجه به شرایط مسئله، یک معادله مناسب تشکیل می‌دهیم. فقط این نکته را بدانید که اگر فردی کاری را در مدت زمان a ، فرد دیگری همان کار را در مدت زمان b انجام دهد، این دو نفر همان کار را با هم در مدت زمان t انجام خواهند داد که t برابر است با:

$$t = \frac{a \times b}{a + b}$$

مثال: دو نقاش A و B اگر کاری را با هم انجام دهند، کار در ۱۲ ساعت تمام می‌شود. نقاش A به تنهایی می‌تواند همان کار را ۱۰ ساعت زودتر از نقاش B تمام کند. مشخص کنید هر کدام به تنهایی در چند ساعت می‌توانند کار را تمام کنند؟

حل: اگر زمان نقاش A را x فرض کنیم، زمان نقاش B برابر $(x+10)$ خواهد بود؛ لذا:

$$t = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow 12 = \frac{x(x+10)}{x+x+10} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 + 10x = 12(2x+10)$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x - 24x - 120 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x - 120 = 0 \Rightarrow (x-20)(x+6) = 0$$

اتحاد جمله مشترک

$$\begin{cases} x = 20 \Rightarrow \text{زمان نقاش A ساعت } 20 \\ x = -6 \Rightarrow \text{غیق} \end{cases}$$

مثال: مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی $\frac{3}{4}$ است. هر دو عدد را به دست آورید. (با تشکیل معادله)

حل: این دو عدد را می‌توانیم x و $x+2$ فرض کنیم. (اختلاف دو عدد زوج متوالی ۲ است.)

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4(2x+2) = 3x(x+2) \Rightarrow 8x+8 = 3x^2+6x \Rightarrow 3x^2-2x-8=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4+96=100 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2(3)} = \frac{2 \pm 10}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow \text{عدد زوج بعدی } = 4 \\ x = -\frac{8}{3} \Rightarrow \text{غیق} \end{cases}$$

فصل: تابع

مفهوم زوج مرتب و رابطه

مفهوم زوج مرتب: به هر دو شیء یا دو عدد که با ترتیب خاصی کنار هم قرار گیرند زوج مرتب می‌گوئیم. در زوج مرتب (a, b) به a عضو اول و به b عضو دوم می‌گوئیم. دقت کنید که در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$. دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) در صورتی با هم مساوی‌اند که $a=c$ و $b=d$ باشد.

مثال: اگر زوج مرتب‌های $(2, 3x+1)$ و $(1, y-x)$ مساوی باشند x و y را به دست آورید.

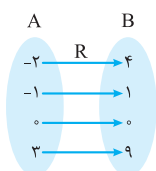
$$\begin{cases} x+3y=1 \\ y-x=3 \end{cases}$$

$$4y=4 \Rightarrow y=1, y-x=3 \xrightarrow{(y=1)} 1-x=3 \Rightarrow x=-2$$

مفهوم رابطه: یک رابطه مثل R عضوهای یک مجموعه مثل A را به عضوهای یک مجموعه دیگر مثل B مربوط می‌کند. اگر عضوهای رابطه را به شکل زوج مرتب‌های (a, b) نمایش دهیم، $a \in A$ و $b \in B$ خواهد بود. رابطه را به حالت‌های مختلف نمایش می‌دهیم. مثال‌های زیر همگی، یک رابطه را مشخص می‌کنند:

$$R: \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 3 \\ \hline y & 4 & 1 & 9 \end{array}$$

$$R = \{(-2, 4), (-1, 1), (3, 9)\}$$



۱) نمایش جدولی

۲) نمایش زوج مرتبی

۳) نمودار ون (بیکانی)

بیشترین مقدار سود شرکت چه قدر است؟

نقاط سر به سر را محاسبه کنید. (نقاطی که در آن‌ها شرکت نه سود می‌کند نه ضرر)

این شرکت چه تعداد کالا تولید کند تا سوددهی داشته باشد؟

الف) و ب) $P(x) = R(x) - C(x) = \left(-\frac{1}{4}x^2 + 30x\right) - (18x + 80) =$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 30x - 18x - 80 = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 80$$

تعداد کالاهایی که سود را ماکزیمم می‌کند.

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-\frac{1}{4})} = 24$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 80 \xrightarrow{x=24}$$

$$\text{سود ماکزیمم} = \left(-\frac{1}{4} \times 24^2 + 12 \times 24\right) - 80 = 64$$

ب) $P(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 12x - 80 = 0 \xrightarrow{\text{حل به روش } \Delta} x = 8, x = 40$

یعنی اگر شرکت ۸ کالا یا ۴۰ کالا تولید کند، نه سود کرده و نه ضرر.

ت) اگر شرکت به اندازه $8 < x < 40$ کالا تولید کند سوددهی خواهد داشت.

نکته: گاهی اوقات رابطه‌ای به ما داده می‌شود که شامل x و p است. به این رابطه، معادله تقاضا می‌گوئیم. (البته کتاب درسی، اسمی برای این رابطه ذکر نکرده ولی بدویند که اسمش معادله تقاضا است.) همیشه از این رابطه p را برحسب x پیدا کرده و آن را در معادله $R(x) = x.p$ قرار می‌دهیم تا تابع درآمد به دست آید.

مثال: در یک شرکت، تابع تقاضا برای نوعی کالا به صورت $x = 200 - 2p$ می‌باشد. تابع (معادله) درآمد شرکت را به دست آورید.

حل: $x = 200 - 2p \Rightarrow 2p = -x + 200 \xrightarrow{:\div 2} p = -\frac{1}{2}x + 100$

تابع درآمد $R(x) = x.p = x\left(-\frac{1}{2}x + 100\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 100x$

معادلات گویا

برای حل معادلاتی که شامل عبارت‌های گویا هستند دو حالت کلی وجود دارد. اگر معادله به شکل $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ بود کافی است طرفین وسطین کرده، معادله حاصل را حل کنیم ولی اگر معادله به شکل $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ نبود، ابتدا تمام مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه کرده سپس در کسرهایی که با هم جمع و تفریق شده‌اند، مخرج مشترک گرفته و سپس طرفین وسطین می‌کنیم. فقط دقت کنید که جواب یا جواب‌های به دست آمده نباید هیچ مخرجی را در معادله اصلی، به صفر تبدیل کنند وگرنه قابل قبول نیستند. به عنوان مثال می‌خواهیم معادلات گویای زیر را حل کنیم:

مثال ۱: $\frac{x-1}{2x} = \frac{x+1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x(x+1) = 3(x-1)$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x = 3x - 3 \Rightarrow 2x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23$$

چون Δ منفی شده معادله جواب ندارد.

مثال ۲: $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x(x-2)} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$

$$x^2 + x - 2 = 3x(x-2) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 16 = 33$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{7 + \sqrt{33}}{4} & (\text{قق}) \\ x'' = \frac{7 - \sqrt{33}}{4} & (\text{قق}) \end{cases}$$