

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **حسابان (۱)** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

(۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

(ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمون‌های شما خواهد گرفت، ببینید. **(۲) آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

(الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

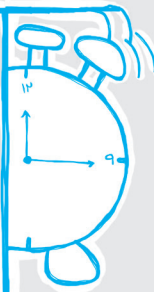
(ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.

(۳) پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) درس‌نامه کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آن‌چه را که

شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان حسابان (۱) نیاز دارید، تنها در ۲۳ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ تا ۳ آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



بازم‌بندی درس حسابان (۱)

فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۰	۴
دوم	۸	۳
سوم	۲ (درس ۱)	۳
چهارم	-	۴
پنجم	-	۶
جمع	۲۰	۲۰

فهرست

نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
اول	۳	۱۹
اول	۴	۲۰
اول	۵	۲۲
اول	۶	۲۴
دوم	۷	۲۵
دوم	۹	۲۷
دوم	۱۱	۲۸
دوم	۱۳	۳۰
دوم	۱۴	۳۲
دوم	۱۵	۳۴
دوم	۱۶	۳۵
دوم	۱۸	۳۷

ردیف	آزمون شماره ۱	نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم	شماره
	حسابان (۱)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
	kheilisabz.com		
۱	فصل اول	حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.	۰/۷۵
۲		$A = 200^2 - 199^2 + 198^2 - 197^2 + \dots + 2^2 - 1$	۱/۲۵
۳		طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد از سطح کل مربع رنگ شده است؟ (دری ۹۴)	۱/۲۵
۴		معادله درجه‌دومی بنویسید که جواب‌های آن مکعب جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد.	۱/۲۵
۵		معادله $\sqrt{x+1} = x-1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.	۱/۵
۶		(شورپور ۹۲) باید اصول رسم نمودار رو برای حل این جور سوالات، خوب یاد بگیرین مخصوصاً نمودار توابع $y = \sqrt{x}$ ، $y = x^2$ ، $y = \frac{1}{x}$ و $y = x $ و انتقال اون‌ها رو باید بلد باشین.	۱/۲۵
۷		معادله $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ را حل کنید.	۱/۲۵
۸		تابع $y = x-1 + x-4 = 5$ چند جواب دارد؟	۱/۵
۹		اگر نقاط $A(-1, 4)$ و $B(3, 2)$ دو سر قطر دلخواهی از یک دایره باشند مطلوب است: الف) شعاع و مرکز این دایره ب) مساحت و محیط این دایره	۱/۲۵
۱۰		نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید، به طوری که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.	۱/۲۵
۱۱	فصل دوم	آیا دو تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 5 \\ 4 & x = 5 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \neq 5 \\ 4 & x = 5 \end{cases}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟	۱/۲۵
۱۲		دامنه و برد تابع مقابل را نوشته و ضابطه آن را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۳		برای نوشتن ضابطه مربوط به یک نمودار، به نقاط توپُر و توفاکی توجه کنید. همچنین در هر گره از نمودار، به مصوره x دقت کنید.	۱/۲۵
۱۴		تابع بودن یا نبودن رابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3} & x \geq 0 \\ x-7 & x \leq 0 \end{cases}$ را بررسی کنید.	۱/۵
۱۵		وارون‌پذیری تابع $f(x) = - x-1 + 1$ را با شرط $x \geq 1$ بررسی کرده و در صورت وارون‌پذیر بودن، دامنه و ضابطه وارون آن را به دست آورید.	۲
۱۶		دو تابع $f(x) = x-1$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ را در نظر بگیرید: الف) دامنه تابع $g \circ f$ را بدون تشکیل $(g \circ f)(x)$ به دست آورید. ب) ضابطه $g \circ f$ را به دست آورید. پ) مقدار $(\frac{f}{g})(2)$ را محاسبه کنید.	۲
۱۷	فصل سوم	تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰ میلی‌گرم باکتری وجود داشته باشد: الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید. ب) جرم توده را پس از ۸ ساعت برآورد کنید.	۱/۲۵
۱۸		نامعادله توانی $4^{3x+1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.	۰/۷۵
۱۹	جمع نمرات	موفق باشید	۲۰

حسابان (۱)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	شماره										
ردیف	آزمون شماره ۹			نوبت دوم پایه یازدهم دوره متوسطه دوم										
۱	در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 + 5n$ است. مجموع ده جمله اول و جمله عمومی این دنباله را بیابید.			۱										
۲	اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر و مقدار m را به دست آورید.			۱										
۳	معادله $\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ را حل کنید.			۱										
۴	سه نقطه $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) طول اضلاع مثلث را به دست آورید. ب) نشان دهید مثلث ABC قائم الزویه است.			۱										
۵	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید.			۱										
۶	نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در شرایط زیر صدق کند: الف) f وارون پذیر نباشد. ب) برای هر عدد حقیقی x نامساوی $x < f(x)$ برقرار باشد.			۱										
۷	اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه ای مشخص کنید که $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.			۱										
۸	اگر $\log_5 3 = a$ مطلوب است حاصل $\log_{\frac{25}{9}} 625$.			۱										
۹	نیمه عمر یک نوع ماده هسته ای M حدود ۱۰ سال است. اگر نمونه ای از M که دارای جرم ۲۰ میلی گرم است داشته باشیم آن گاه: الف) جدول روبه رو را تکمیل کنید. ب) جرمی که بعد از ۵۰ سال باقی می ماند چه قدر است؟			۱										
			<table border="1"> <thead> <tr> <th>t</th> <th>۰</th> <th>۱۰</th> <th>۲۰</th> <th>۳۰</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>جرم باقی مانده</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	t	۰	۱۰	۲۰	۳۰	جرم باقی مانده					
t	۰	۱۰	۲۰	۳۰										
جرم باقی مانده														
۱۰	معادله لگاریتمی $\log(3-x) - \log(1+x) = \frac{1}{\log_2 \sqrt{10}}$ را حل کنید.			۱										
۱۱	چند دقیقه طول می کشد که عقربه دقیقه شمار به اندازه $2/5\pi$ رادیان دوران کند؟			۰/۷۵										
۱۲	سینوس و کسینوس زاویه 105° درجه را به دست آورید.			۱/۲۵										
۱۳	اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم باشد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ باشد. حاصل عبارات $\sin(\alpha + \beta)$ و $\tan 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha$ را به دست آورید.			۲										
۱۴	با رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{ x }$ ، وجود حد چپ و حد راست را در $x = 0$ و $x = 2$ بررسی کنید.			۱										
۱۵	با رسم نمودار $y = \sqrt{x-2} + 1$ مقدار حد را در اطراف نقطه $x = 2$ بررسی کنید.			۱/۵										
۱۶	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x - \sqrt{2-x}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 5x \cdot \sin 3x}$ پ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{ 1 - \cos x }$			۲										
۱۷	نمودار $y = [x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کرده و بگویید آیا در بازه های $[-1, 0]$ و $[1, 2]$ پیوسته است؟			۱/۵										
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید										

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- با استفاده از اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$200^2 - 199^2 = (200 - 199)(200 + 199) = 200 + 199$$

$$198^2 - 197^2 = (198 - 197)(198 + 197) = 198 + 197$$

:

$$2^2 - 1^2 = (2 - 1)(2 + 1) = 2 + 1$$

$$A = 200 + 199 + 198 + 197 + \dots + 2 + 1$$

در نتیجه داریم:

می‌دانیم مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱ از فرمول $\frac{n(n+1)}{2}$ محاسبه می‌شود، بنابراین:

$$A = \frac{200(201)}{2} = 100(201) = 20100$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

۲- دنباله قسمت‌های رنگی شده:

یک دنباله هندسی با $a_1 = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ حاصل می‌شود. طبق فرمول مجموع جملات

دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2^n} \geq -\frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100$$

$$\xrightarrow{\min(n)} n = 7$$

یعنی بعد از ۷ مرحله، حداقل ۹۹ درصد سطح مربع، رنگ شده است.

۳- فرض می‌کنیم α و β جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند. می‌خواهیم معادله درجه‌دومی بنویسیم که جواب‌های آن α^3 و β^3 باشد. با توجه به معادله اولیه داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-(-3)}{1} = 3, \quad P = \alpha\beta = \frac{1}{1} = 1$$

به کمک اتحادها خواهیم داشت:

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}} = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 3^3 - 3(1)(3) = 27 - 9 = 18$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 1$$

در نتیجه معادله جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2 - S_{\text{جدید}}x + P_{\text{جدید}} = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 1 = 0$$

۴- حل جبری: اول طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2$$

طرف دوم تساوی اتحاد است.

$$\Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

اما $x = 0$ قابل قبول نیست زیرا در تساوی اولیه صدق نمی‌کند.

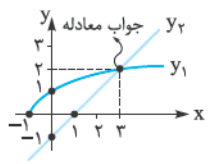
$$\sqrt{0+1} \neq 0-1 \Rightarrow 1 \neq -1$$

حل هندسی: دو نمودار $y_1 = \sqrt{x+1}$ و $y_2 = x-1$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد دو نمودار جواب معادله است.

برای رسم هر کدام، با مقدار دادن به x ، y را محاسبه می‌کنیم:

$$y_1 = \sqrt{x+1} : \begin{array}{c|c|c|c} x & -1 & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad y_2 = x-1 : \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 3 \\ \hline y & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



۵- ابتدا در سمت چپ تساوی مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\Delta(x-2) - 4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{\Delta x - 14}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

$$\Rightarrow \Delta x - 14 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

اما $x = 2$ قابل قبول نیست زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۶- ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق را حساب کرده و پس از آن جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

x		۱		۴	
$x-1$	-	+	-	+	-
$x-4$	-	-	+	-	+

در فاصله $x < 1$ هر دو عبارت منفی هستند، پس:

$$y = -(x-1) - (x-4) = -2x + 5$$

در فاصله $1 \leq x < 4$ ، $x-1$ مثبت و $x-4$ منفی است، پس:

$$y = (x-1) - (x-4) = x-1-x+4 = 3 \Rightarrow y = 3$$

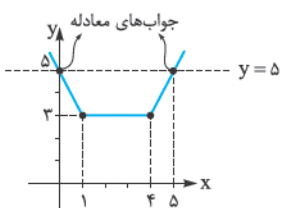
و برای $x \geq 4$ هر دو عبارت مثبت هستند، پس لذا:

$$y = x-1+x-4 = 2x-5$$

در نتیجه:

$$y = \begin{cases} -2x+5 & x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < 4 \\ 2x-5 & x \geq 4 \end{cases}$$

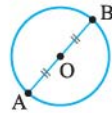
اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



در ادامه برای حل معادله $|x-1| + |x-4| = 5$

باید نمودار روبه‌رو را با خط $y = 5$ قطع دهیم که در آن صورت این خط نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس معادله دو جواب دارد.

۷- الف) اگر نقاط A و B را دو سر قطر دلخواهی از دایره فرض کنیم آن گاه نقطه O که در وسط قطر AB است همان مرکز دایره خواهد بود:



$$O_{\text{مرکز}} = \frac{A+B}{2} = (1, 2)$$

فاصله نقطه O تا نقطه A نیز برابر شعاع دایره خواهد بود:

$$OA = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi \times \text{شعاع} = 2\sqrt{5}\pi \quad (\text{ب})$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi \times (\text{شعاع})^2 = 5\pi$$

۸- می‌دانیم هر نقطه روی خط $y = 2x$ به صورت $M(\alpha, 2\alpha)$ می‌باشد.

فاصله نقطه M از $O(0,0)$ برابر است با:

$$OM = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (2\alpha-0)^2} = \sqrt{5\alpha^2} = \alpha\sqrt{5}$$

و فاصله نقطه M از نقطه $A(2,4)$ برابر است با:

$$AM = \sqrt{(\alpha-2)^2 + (2\alpha-4)^2} = \sqrt{(\alpha-2)^2 + 4(\alpha-2)^2}$$

$$= \sqrt{5(\alpha-2)^2} = (\alpha-2)\sqrt{5}$$

اکنون مجموع فاصله‌ها را برابر ۵ قرار می‌دهیم:

$$\alpha\sqrt{5} + (\alpha-2)\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\alpha\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 5$$

$$\Rightarrow 2\alpha\sqrt{5} = 5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} + 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1, \sqrt{5} + 2\right)$$

۹- می‌دانیم دو تابع زمانی با هم مساوی‌اند که دامنه‌هایشان با هم برابر بوده و مقدار ضابطه آن‌ها برای هر عضو دامنه یکسان باشد. پس ابتدا دامنه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$D_{f(x)} = \mathbb{R}, \quad D_{g(x)} = \mathbb{R}$$

حال مقدار ضابطه‌های این دو تابع را حساب می‌کنیم:

$$f(5) = g(5) = 4$$

برای $x = 5$:

$$f(x) = x$$

برای $x \neq 5$:

$$g(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5} = \frac{x(x-5)}{x-5} = x \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۱۰- دامنه را با استفاده از محور xها و برد را با استفاده از محور yها پیدا می‌کنیم:

$$D_{f(x)} = [-8, +\infty), \quad R_{f(x)} = (-\infty, -2] \cup [3, 5]$$

$$\text{قطعه سمت چپ: } \begin{cases} A(-8, 3) \\ B(-6, 5) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{-6+8} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 1(x + 8) \Rightarrow y = x + 11$$

$$\text{قطعه وسط: } -6 < x < 6, y = 3$$

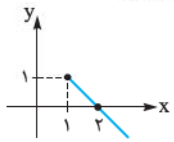
$$\text{قطعه سمت راست: } \begin{cases} C(6, -2) \\ D(10, -4) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-4 - (-2)}{10 - 6} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 6) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 11 & -8 \leq x \leq -6 \\ 3 & -6 < x < 6 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

۱۱- برای تابع بودن توابع ۲ یا چند ضابطه‌ای دو شرط لازم است: ۱- همه ضابطه‌ها در دامنه خود تابع باشند. ۲- اشتراک دوبه‌دو دامنه‌ها تهی باشد و یا این که اگر دامنه‌ها اشتراکی داشتند به ازای xهای مشترک یک مقدار برای ضابطه‌ها به دست آید.

۱۲- چون $x \geq 1$ است، پس حاصل $(x-1)$ نامنفی بوده و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود:



$$y = -x + 2 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - x$$

ضمناً از روی نمودار متوجه می‌شویم که برد آن $(-\infty, 1]$ است.

پس دامنه f^{-1} هم برابر همین بازه است.

۱۳- الف) ابتدا دامنه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x - 1 \xrightarrow{\text{فجند جمله‌ای است}} D_{f(x)} = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{زیر رادیکال نباید منفی شود.}} x + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_{g(x)} = [-2, +\infty)$$

اکنون دامنه تابع $(g \circ f)(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$D_{(g \circ f)(x)} = \{x \in D_{f(x)} \mid f(x) \in D_{g(x)}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \in [-2, +\infty)\}$$

قسمت انتهایی را حل می‌کنیم و بازه‌هایی که x در آن قرار دارد را به دست می‌آوریم:

$$x-1 \in [-2, +\infty) \Rightarrow x-1 \geq -2 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1, +\infty)$$

$$\Rightarrow D_{(g \circ f)(x)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, +\infty)\} = [-1, +\infty)$$

ب) برای پیدا کردن ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ کافی است در تابع $g(x)$ به جای متغیر x تابع $f(x)$ را قرار دهیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+2} = \sqrt{x-1+2} = \sqrt{x+1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2-1}{\sqrt{2+2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \quad (\text{پ})$$

۱۴- الف)	۰	۱	۲	۳
زمان (ساعت) t	۰	۱	۲	۳
جرم (میلی‌گرم) y	۱۰	۱۰ × ۲	(۱۰ × ۲) × ۲	(۱۰ × ۲) × ۲ × ۲
		× ۲	× ۲	× ۲

$$\Rightarrow y = 10 \times 2^t$$

$$y = 10 \times 2^t \xrightarrow{t=8} y = 10 \times 2^8 = 2560 \text{ (میلی‌گرم)} \quad (\text{ب})$$

۱۵- ابتدا دو طرف نامعادله را به صورت تابع نمایشی با پایه ۲ می‌نویسیم:

$$4^{3x+1} = (2^2)^{3x+1} = 2^{6x+2}$$

$$\frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}} = 2^{-10}$$

اکنون داریم:

$$2^{6x+2} > 2^{-10} \Rightarrow 6x+2 > -10 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x \in (-2, +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{6\sqrt{x}-8}{x-4} = 2 \Rightarrow 6\sqrt{x}-8 = 2x-8 \Rightarrow 3\sqrt{x} = x$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$9x = x^2 \Rightarrow x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 9 \end{cases}$$

هر دو ریشه در معادله اولیه صدق می‌کنند پس قابل قبول هستند.
۴- الف) ابتدا طول سه ضلع را محاسبه می‌کنیم.

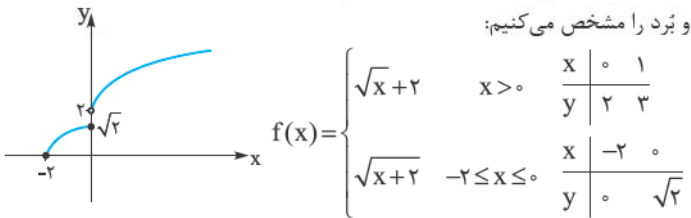
$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(1-5)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{(-1-5)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

ب) مثلث ABC قائم‌الزاویه است. $BC^2 = AB^2 + AC^2$

۵- برای پیدا کردن دامنه و بُرد بعد از رسم به کمک محور Xها و Yها به ترتیب دامنه و بُرد را مشخص می‌کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = [-2, +\infty) \\ \text{بُرد} = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

۶- برای آن که f وارون‌پذیر نباشد باید آن را طوری رسم کنیم که خط افقی پیدا شود که نمودارش را در بیش از یک نقطه قطع کند. ضمناً در شکل رسم‌شده، طول نقاط منفی و عرض آن‌ها مثبت است، پس رابطه $x < f(x)$ هم برقرار است. (f همان y است).

۷- می‌دانیم $f(x) = x^2 + 2x + 2$ پس $f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2$

از طرفی سؤال گفته $f(g(x)) = x^2 - 4x + 5$ پس:

$$g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow g^2(x) + 2g(x) + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} g(x) + 1 = \pm(x - 2)$$

$$\Rightarrow g(x) = \pm(x - 2) - 1$$

$$\log_{\sqrt{3}} 625 = \log_{\sqrt{3}} 5^4 = \frac{4}{\frac{1}{2}} \log_3 5 = \frac{8}{\frac{1}{2}} \log_3 5 = 16 \log_3 5 \quad -8$$

$$= 6 \times \frac{1}{\log_3 3} = 6 \times \frac{1}{1} = 6$$

۹- الف)

t	۰	۱۰	۲۰	۳۰
جرم باقی‌مانده	۲۰	$\frac{1}{2} \times 20$	$\frac{1}{4} \times 20$	$\frac{1}{8} \times 20$

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t \times 20 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times 20 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 20 = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} \text{ میلی‌گرم} \quad \text{ب)}$$

$$\log(3-x) - \log(1+x) = \frac{1}{\log_3 \sqrt{10}} \quad -10$$

$$\log \frac{3-x}{1+x} = \frac{1}{\log_3 \sqrt{10}} \quad (*)$$

$$\frac{1}{\log_3 \sqrt{10}} = \log_{\sqrt{10}} 3$$

$$\text{می‌دانیم } \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \text{ پس:}$$

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- S_n یعنی مجموع n جمله اول دنباله، پس در رابطه داده‌شده به جای n مقدار ۱۰ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$S_{10} = 2(10)^2 + 5(10) = 250$$

برای نوشتن جمله عمومی a_1 و d را نیاز داریم:

$$a_1 = S_1 = 2 + 5 = 7, \quad d = a_2 - a_1$$

پس باید a_2 را پیدا کنیم: $a_2 = S_2 - S_1 = 2(2)^2 + 5(2) - 7 = 18 - 7 = 11$

$$\Rightarrow d = 11 - 7 = 4$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1)(4) \Rightarrow a_n = 4n + 3$$

۲- $x = -1$ ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ است پس در معادله صدق می‌کند

$$4(-1)^2 - m(-1) - 7 = 0 \Rightarrow 4 + m - 7 = 0 \Rightarrow m = +3 \quad \text{یعنی:}$$

پس این معادله به صورت $4x^2 - 3x - 7 = 0$ است. اکنون ریشه دیگر معادله را می‌یابیم:

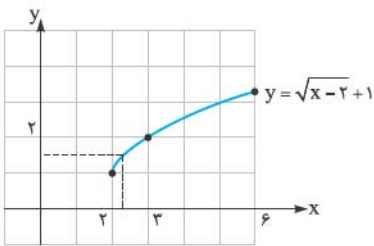
$$\Delta = 9 - 4(4)(-7) = 121$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{3 \pm 11}{8} \begin{cases} \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \\ -\frac{8}{8} = -1 \end{cases}$$

پس ریشه دیگر معادله $x = \frac{7}{4}$ است.

۳- ابتدا رادیکال‌ها را به یک طرف تساوی بُرده و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{5}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} = 2 \Rightarrow \frac{5(\sqrt{x}-2) + 1(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = 2$$



۱۵- نمودار تابع را به کمک

نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	۲	۳	۶
y	۱	۲	۴

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پس تابع $f(x)$ در $x=2$ حد ندارد.

$$16- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} \times \frac{x+\sqrt{2-x}}{x+\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2-2+x} = \frac{2}{3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{3}$$

$$17- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin \Delta x \cdot \sin 3x} = \frac{0}{0}$$

طبق اتحاد مثلثاتی $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{\sin \Delta x \cdot \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}}{\Delta x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \frac{2}{15}$$

$$18- \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|1-\cos x|} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \quad (1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2(\frac{x}{2})^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}} = \frac{2}{1}$$

تذکره: وقتی $x \rightarrow 0^-$ نتیجه می‌گیریم که در ربع چهارم است. در ربع چهارم مقدار

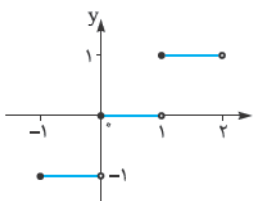
کسینوس بین صفر و یک است لذا حاصل $(1-\cos x)$ مثبت می‌شود و خودش از قدر مطلق خارج می‌شود.

۱۷- بازه $[-1, 2)$ را یک‌واحد یک‌واحد تقسیم‌بندی می‌کنیم و در هر قسمت مقدار $[x]$ را مشخص می‌کنیم:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 1$$



اکنون نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

این تابع در بازه $[-1, 0]$ پیوسته نیست زیرا

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= -1 \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \neq -1$$

اما در بازه $[1, 2)$ پیوسته است زیرا در $x=1$ پیوسته از راست.

$$\text{هم‌چنین: } \log_{\sqrt{10}} 2 = \log_{\frac{1}{10^{\frac{1}{2}}}} 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{10} 2 = 2 \log_{10} 2 = \log_{10} 4$$

$$\text{در نتیجه: } \log_{10} \frac{3-x}{1+x} = \log_{10} 4 \Rightarrow \frac{3-x}{1+x} = 4$$

$$\Rightarrow 4x+4=3-x \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$$

۱۱- عقربه دقیقه‌شمار در یک دور کامل یعنی در 60° دقیقه، 2π رادیان دوران می‌کند.

$$\text{با یک تناسب ساده خواهیم داشت: } \frac{2\pi}{2/\Delta\pi} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{60 \times 2/\Delta\pi}{2\pi} = 75$$

یعنی ۷۵ دقیقه طول می‌کشد تا $2/\Delta\pi$ دوران کند.

۱۲- از فرمول‌های بسط مجموع دو زاویه استفاده می‌کنیم:

$$\sin(105^\circ) = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(105^\circ) = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

۱۳- می‌دانیم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ پس $\frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1$ و از آن‌جا:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

اما α در ربع اول است و علامت کسینوس در این ربع مثبت است. پس $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

هم‌چنین درباره β :

$$\sin^2 \beta + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

اما β در ربع سوم است و علامت سینوس در این ربع منفی است پس $\sin \beta = -\frac{12}{13}$.

اکنون مقادیر محاسبه‌شده را در فرمول‌های هر عبارت خواسته‌شده جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

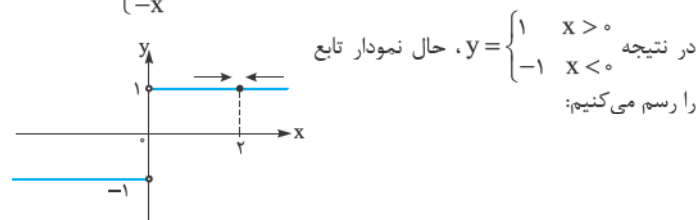
$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{63}{65}$$

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x \geq 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$14- \text{اولاً } |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ پس:}$$



در نتیجه $y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

اما طبق اتحاد مزدوج: $1 - q^{10} = (1 - q^5)(1 + q^5)$

در نتیجه: $1 - q^{10} = \frac{(1 - q^5)(1 + q^5)}{1 - q^5} = 65$

$\Rightarrow 1 + q^5 = 65 \Rightarrow q^5 = 64 \Rightarrow q^5 = 2^6 \Rightarrow q = 2\sqrt[5]{2}$

مثال: در یک دنباله هندسی $a_4 = 36$ و $a_8 = 4$ است. مجموع 4 جمله اول دنباله را به دست آورید.

پاسخ: فرمول جمله عمومی را برای $n = 5$ و $n = 7$ نوشته تا q و a_1 پیدا شوند:

$a_8 = a_1 q^7 = 4 \Rightarrow \frac{a_7}{a_8} = \frac{a_1 q^6}{a_1 q^7} = q = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow q = \pm 3$
 $a_4 = a_1 q^3 = 36$

با جای گذاری q در جمله a_8 داریم: $4 = a_1 (\pm 3)^7 \Rightarrow 81 a_1 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{4}{81}$

بنابراین مجموع 4 جمله اول این دنباله برابر است با:

$$S_4 = \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = \begin{cases} q=3 \rightarrow S_4 = \frac{\frac{4}{81}(1 - 81)}{1 - 3} = \frac{4}{81} \times 40 = \frac{160}{81} \\ q=-3 \rightarrow S_4 = \frac{\frac{4}{81}(1 - 81)}{1 + 3} = \frac{4}{81} \times -20 = \frac{-80}{81} \end{cases}$$

معادلات درجه دوم

معادله درجه دوم: در سال های قبل با مفهوم معادله و حل معادله درجه دوم آشنا شدید. یادآوری: هر معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است که با فرمول

Δ ، جواب های آن در صورت وجود از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ به دست می آیند.

روابط بین ضرایب و ریشه ها در معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه های معادله باشند، خواهیم داشت:

- 1) مجموع ریشه ها: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
- 2) حاصل ضرب ریشه ها: $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$
- 3) تفاضل ریشه ها: $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
- 4) مجموع مربعات ریشه ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$
- 5) مجموع مکعبات ریشه ها: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$
- 6) $|\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}| = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$ (α و β مثبت)

مثال: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، بدون به دست

آوردن ریشه ها حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) $\alpha^3\beta + \beta^3\alpha$ ب) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^3 + \beta^3}$ پ) $|\alpha - \beta|$

پاسخ: در معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ داریم: $a = 1, b = -2, c = -4$

$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{+2}{1} = 2$

$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$

فصل 1: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله حسابی و هندسی آشنا شدید. مجموع اعداد طبیعی از 1 تا n ، به صورت زیر محاسبه می شود:

$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$S = n + n - 1 + \dots + 1$

$\Rightarrow 2S = \underbrace{(1+n) + (1+n) + \dots + (n+1)}_{n} \Rightarrow 2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$

مثال: بر محیط یک دایره 10 نقطه متمایز قرار می دهیم و هر نقطه را به نقاط دیگر وصل می کنیم. تعداد تمام پاره خط های حاصل (این پاره خط ها وتر نامیده می شوند) را به دست آورید.

پاسخ: نقطه اول را به 9 نقطه دیگر وصل می کنیم. 9 وتر به وجود می آید. نقطه دوم را به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) وصل کنید 8 وتر دیگر به وجود می آید. با ادامه همین روند، تعداد تمام وترها برابر است با:

$9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1 = \frac{9(9+1)}{2} = 45$

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی را با نماد S_n (مجموع n جمله اول) نمایش می دهند. که از فرمول های زیر محاسبه می شوند:

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$	اگر جمله اول و قدرنسبت را داشته باشیم.	دنباله حسابی
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	اگر جمله اول و جمله آخر را داشته باشیم.	
$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, (q \neq 1)$	دنباله هندسی	

مثال: مجموع چند جمله اول دنباله حسابی $17, 15, \dots$ برابر صفر است؟

پاسخ: جمله اول دنباله 17 و قدرنسبت $-2 = 17 - 15$ است پس دنباله نزولی است و حتماً جملات منفی نیز در دنباله به وجود می آیند که در جمع با جملات مثبت به

مجموع صفر برسیم: $S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(17) + (n-1)(-2)) = 0$

$\Rightarrow 34 - 2n + 2 = 0 \Rightarrow 36 = 2n \Rightarrow n = 18$

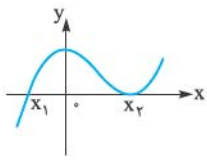
یعنی مجموع 18 جمله اول این دنباله برابر صفر خواهد بود.

مثال: در یک دنباله هندسی، مجموع 10 جمله اول 65 برابر مجموع 5 جمله اول است. قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

پاسخ: مجموع 10 جمله اول یعنی S_{10} و مجموع 5 جمله اول یعنی S_5 . اکنون

طبق فرض: $S_{10} = 33S_5 \Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = 65$

$$\frac{\frac{a_1(1 - q^{10})}{1 - q}}{\frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q}} = \frac{1 - q^{10}}{1 - q^5}$$



مثلاً اگر نمودار f به صورت روبه‌رو باشد نتیجه می‌گیریم که معادله $f(x) = 0$ یک ریشه ساده (x_1) و یک ریشه مضاعف (x_2) دارد دقت کنید که در ریشه مضاعف نمودار بر محور x مماس است.

مثال: صفرهای تابع زیر را به دست آورید.

$$g(x) = (x - \frac{1}{x})^2 - 3(x - \frac{1}{x}) + 2$$

پاسخ: عبارت $(x - \frac{1}{x})$ دو بار تکرار شده پس آن را t نامیده تا یک معادله درجه دوم ایجاد شود (به این روش، روش تغییر متغیر می‌گوییم).

ایجاد شود (به این روش، روش تغییر متغیر می‌گوییم).

$$x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{\times x} x^2 - 1 = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 & \text{معادله (1)} \\ x - \frac{1}{x} = 2 \xrightarrow{\times x} x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 & \text{معادله (2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} & \text{جوابهای معادله (1)} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} & \text{جوابهای معادله (2)} \end{cases}$$

مثال: معادله $0 = (\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6$ چند جواب دارد؟

پاسخ: قرار می‌دهیم $t = \frac{x^2}{3} - 2$ (روش تغییر متغیر) پس:

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=6 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \quad \text{(دوتا جواب)}$$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm \sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \quad \text{(دوتا جواب)}$$

پس این معادله در کل دارای چهارتا جواب است.

مثال: اگر $x = \frac{1}{y}$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - kx - 8$ باشد ابتدا k را بیابید سپس سایر صفرها را در صورت وجود بیابید.

پاسخ: چون $x = \frac{1}{y}$ صفر تابع f است پس $f(\frac{1}{y}) = 0$.

$$f(\frac{1}{y}) = 8(\frac{1}{y})^3 + 4(\frac{1}{y})^2 - k(\frac{1}{y}) - 8 = 0 \Rightarrow 1 + 1 - \frac{k}{y} - 8 = 0 \Rightarrow k = -12$$

اکنون از تقسیم $f(x)$ بر $2x - 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 4x^2 + 12x - 8 \quad | \quad 2x - 1 \\ - (8x^3 + 4x^2) \quad \quad \quad 4x^2 + 4x + 8 \\ \hline \quad \quad \quad 8x^2 + 12x - 8 \\ \quad \quad \quad - (8x^2 + 4x) \quad \quad \quad 4x - 8 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 16x - 8 \\ \quad \quad \quad \quad \quad - (16x + 8) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 16 \end{array}$$

$$f(x) = (2x - 1)(4x^2 + 4x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{+4} x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد.}$$

یعنی تابع f صفر دیگری ندارد.

الف) در عبارت $\alpha^3 + \beta^3$ از $\alpha\beta$ فاکتور می‌گیریم:

برای محاسبه $\alpha^3 + \beta^3$ از روابط بیان شده استفاده می‌کنیم: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$

$$\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = P(S^2 - 2P) = -4(4 + 8) = -64 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^3 + \beta^3} = \frac{S}{S^3 - 3PS} = \frac{1}{S^2 - 3P} = \frac{1}{4 + 12} = \frac{1}{16} \quad \text{بنابراین:}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \text{(پ) طبق روابط بالا:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(-4) = 20 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{2\sqrt{5}}{1} = 2\sqrt{5}$$

نکته: اگر ریشه‌های معادله درجه دوم را داشته باشیم خود معادله برابر است با:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثلاً اگر ریشه‌های یک معادله درجه دوم $(1 \pm \sqrt{3})$ باشند، خود معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = \alpha + \beta = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$$

$$P = \alpha\beta = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، مقدار m را

چنان بیابید که داشته باشیم: $\alpha\beta^2 + 4 = 0$

پاسخ: معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ را در نظر می‌گیریم: $a = 1, b = -3m, c = 4$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 \quad \text{بنابراین:}$$

می‌خواهیم $\alpha\beta^2 + 4 = 0$ باشد، پس:

$$0 = \alpha\beta^2 + 4 = \frac{\alpha\beta}{\alpha} \times \beta + 4 \Rightarrow 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$\beta = -1$ ریشه معادله است پس باید در معادله صدق کند:

$$(-1)^2 - 3m(-1) + 4 = 0 \Rightarrow 1 + 3m + 4 = 0 \Rightarrow 3m = -5 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

تذکره: اگر به جای P از S استفاده می‌کردیم به رابطه $S = \frac{-b}{a} = 3m$ می‌رسیدیم

که دارای مجهول m بود و نمی‌توانستیم مسئله را حل کنیم.

چندجمله‌ای وارونه یک چندجمله‌ای

اگر چندجمله‌ای $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d$ جایه‌جا می‌کنیم $Q(x) = dx^n + cx^{n-1} + \dots + bx + a$ جایه‌جا می‌کنیم باشد (با $a \neq 0$)، به چندجمله‌ای $Q(x)$ وارونه چندجمله‌ای $P(x)$ می‌گوییم. ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ معکوس ریشه‌های $Q(x) = 0$ هستند.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 5x - 6 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید

که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

پاسخ: کافی است چندجمله‌ای وارونه $P(x) = 4x^2 - 5x - 6$ را مساوی صفر قرار

$$-6x^2 - 5x + 4 = 0$$

دهیم یعنی:

صفرهای تابع

نقاط برخورد نمودار f با محور x ها را «صفرهای تابع f » می‌نامیم. طول این نقاط، در

واقع جواب‌های معادله $f(x) = 0$ می‌باشند.

بحث در مورد علامت ریشه‌های معادله درجه ۲ بدون حل آن

اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه باشد (یعنی $\Delta > 0$ باشد) آن گاه بدون حل کامل آن می‌توان گفت:



مثال: بدون حل معادله و با استفاده از Δ و P و S در وجود و علامت ریشه‌های

معادله $x^2 - 7x - 18 = 0$ بحث کنید.

پاسخ: معادله دو ریشه متمایز دارد. $\Rightarrow \Delta = 49 - 4(1)(-18) = 121 > 0$

ریشه‌ها مختلف‌العلامت هستند. $P = \frac{c}{a} = -18 < 0 \Rightarrow$

ریشه مثبت از قدرمطلق ریشه منفی، بزرگ‌تر است. $S = \frac{-b}{a} = 7 > 0 \Rightarrow$

ماکسیمم و مینیمم تابع درجه دوم

می‌دانید که هر تابع درجه دوم به شکل $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ یک سهمی قائم می‌باشد که طول رأس آن $x_S = \frac{-b}{2a}$ و عرض رأس $y_S = \frac{-\Delta}{4a}$ می‌باشد. ضمناً اگر $a > 0$ باشد، سهمی به شکل \cup می‌باشد یعنی دارای \min است و اگر $a < 0$ باشد، سهمی به شکل \cap است یعنی \max دارد؛ ضمناً خط به معادله $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

مثال: اگر نمودار تابع $y = (4-m)x^2 + (m^2-16)x + 1$ در نقطه‌ای به طول (-1) دارای مینیمم باشد، مقدار m را به دست آورید.

پاسخ: طول مینیمم یا ماکسیمم، هر دو از فرمول $x_S = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید، لذا:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m^2-16)}{2(4-m)} = -1 \Rightarrow m^2 - 16 = 8 - 2m$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Rightarrow (m+6)(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 & (\text{قق}) \\ m = 4 & (\text{غقق}) \end{cases}$$

جواب $m = 4$ رد می‌شود چون با جای‌گذاری آن در معادله سهمی، ضریب x^2 صفر می‌شود و سهمی از بین می‌رود.

مثال: در تابع درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ در هر یک از حالت‌های زیر اولاً ضرایب a ، b و c ، ثانیاً علامت $P(x)$ را تعیین کنید.



پاسخ: الف) طبق نمودار، نقطه $(0,0)$ یعنی مبدأ مختصات روی نمودار است پس:

$$0 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 0$$

هم‌چنین نمودار تابع محور x را در $x = 4$ قطع کرده است پس نقطه $(4,0)$ نیز باید

$$0 = a(4)^2 + b(4) \Rightarrow 16a + 4b = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$$

در معادله صدق کند. از طرفی نقطه $(-2, -2)$ نیز روی نمودار تابع قرار دارد، پس:

$$-2 = a(-2)^2 + b(-2) \Rightarrow 4a - 2b = -2 \Rightarrow 2a - b = -1$$

اکنون دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow 6a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

اکنون a ، b و c را در $P(x)$ اولیه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow P(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + 0$$

اکنون جدول تعیین علامت را برای معادله بالا تشکیل می‌دهیم. ریشه‌های این معادله هستند (محل برخورد سهمی با محور x ها را ریشه می‌نامند):

x	0	4	
P	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

$$\Rightarrow \frac{x}{P} \begin{array}{c} 0 \quad 4 \\ - \quad + \quad - \end{array} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) : P(x) < 0 \\ [0, 4] : P(x) \geq 0 \end{cases}$$

ب) نقطه $(0,0)$ رأس این سهمی است پس در معادله باید صدق کند یعنی

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

است. پس $\frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$ و از آنجا $a = 2$.

طبق شکل نقطه $(1,2)$ روی نمودار است پس:

$$2 = a(1)^2 + b(1) + c \xrightarrow{c=0} a = 2$$

در نتیجه $P(x) = 2x^2$ می‌باشد که همواره دارای علامت مثبت است.

روش هندسی حل معادلات:

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند با رسم نمودارهای این دو تابع، نقاط برخورد دو تابع، جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس هر جواب این معادله، طول نقطه برخوردی از نمودارهای دو تابع است.

این روش حل معادله را روش هندسی حل معادلات می‌نامیم که در آن معمولاً تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (گاهی دقیق) جواب‌ها مشخص می‌شود.

مثال: به روش هندسی معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را حل کنید.

پاسخ: ابتدا با کمک جدول مقادیر نمودارهای دو تابع $y_1 = x^2 - x - 1$ و $y_2 = |x-1|$ را (که به ترتیب نمودار قدرمطلق و سهمی هستند) رسم می‌کنیم:

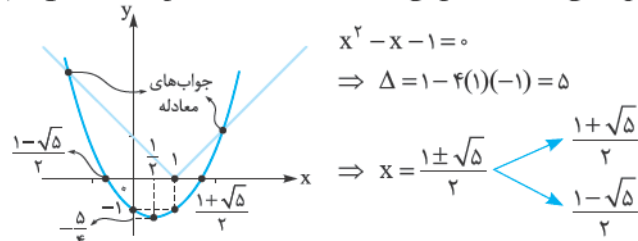
$$y_1 = |x-1| \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y_1 & 1 & 0 \end{array}$$

ابتدا رأس سهمی $y_2 = x^2 - x - 1$ را مشخص می‌کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y_2 & -1 & -\frac{5}{4} & -1 \end{array}$$

هم‌چنین سهمی محور x ها را قطع می‌کند. طول نقاط برخورد را به روش Δ محاسبه می‌کنیم:



با توجه به شکل، نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادله دو جواب دارد که با حل به روش جبری مقدار دقیق جواب‌ها پیدا می‌شود.

$$|x-1| = x^2 - x - 1 \begin{cases} x > 1 \rightarrow x-1 = x^2 - x - 1 \\ \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \\ \Rightarrow x = 0, x = 2 \\ x < 1 \rightarrow x+1 = x^2 - x - 1 \end{cases}$$