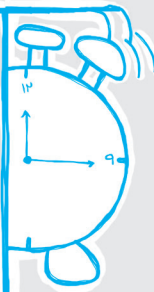


ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **هندسه (۲) یازدهم** از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

- (۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.
 - (ب) **آزمون طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۳ تا ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.
 - (۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
 - (الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.
 - (ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.
 - (۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.
 - (۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان هندسه (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۲ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!
- یک راهکار:** موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

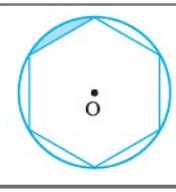
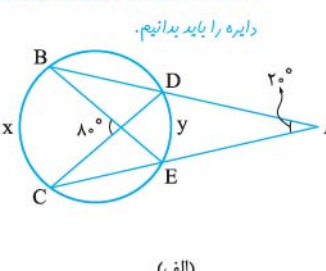
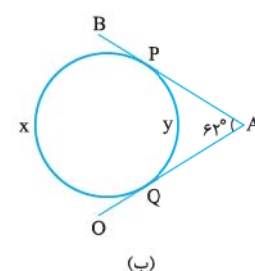
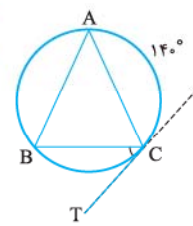
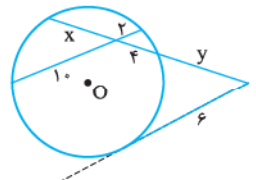


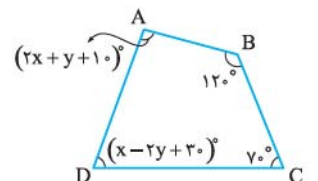
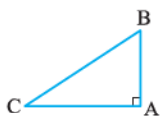
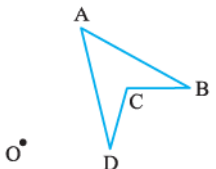
بازمبندی درس هندسه (۲)

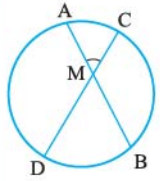
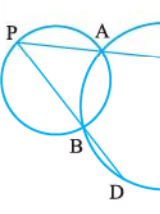
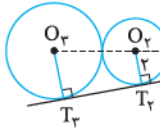
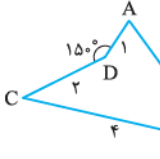
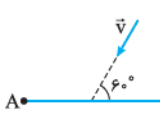
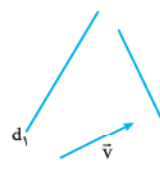
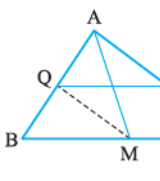
فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۱۴	۵
دوم تا صفحه ۴۵	۶	۲
دوم از صفحه ۴۵ تا آخر	-	۵
سوم	-	۸
جمع	۲۰	۲۰

فهرست

نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
اول	۳	۲۶
اول	۵	۲۸
اول	۷	۲۹
اول	۹	۳۱
دوم	۱۱	۳۳
دوم	۱۳	۳۴
دوم	۱۵	۳۶
دوم	۱۷	۳۸
دوم	۱۹	۳۹
دوم	۲۱	۴۰
دوم	۲۳	۴۲
دوم	۲۵	۴۴

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	هندسه (۲)	
نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم		آزمون شماره ۱			
فصل اول					
درس اول					
۱	ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.			۱	
۱/۵		در شکل زیر، مساحت قسمت رنگی را به دست آورید. (شعاع دایره ۴ است و شش ضلعی منتظم است).			۲
۱/۵	<p>اندازه‌های زاویه‌های درونی و بیرونی در دایره را باید بدانیم.</p>  <p>(الف)</p>	<p>مقادیر مجهول را بیابید. (در قسمت ب) AP و AQ بر دایره مماس هستند.)</p>  <p>(ب)</p>	۳		
۰/۷۵	<p>ویژگی‌های زاویه‌های مماسی و ظلی در دایره رو هیچ وقت یادتون نره.</p> 	در شکل روبه‌رو $AB = AC$ ، CT مماس بر دایره در نقطه C و $\widehat{AC} = 140^\circ$ است. اندازه زاویه \widehat{BCT} چه قدر است؟			۴
درس دوم					
۱	اولین قضیه رابطه طولی بسیار مهم است. قضیه: هر گاه دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M داخل دایره، همدیگر را قطع کنند، آن گاه ثابت کنید: $MA \times MB = MC \times MD$			۵	
۱/۷۵	برای رسم مماس مشترک خارجی باید دایره‌ای اضافی به مرکز دایره بزرگ تر رسم شود. طریقه رسم مماس مشترک خارجی دو دایره متخارج را با رسم شکل به طور دقیق بیان و طول آن را پیدا کنید.			۶	
۱	رابطه‌های طولی مماس مشترک خارجی و داخلی را می‌دانید؟ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ مماس خارج هستند. مطلوب است طول مماس مشترک خارجی این دو دایره.			۷	
۱	رابطه طولی در حالتی که یکی از قاطع‌ها به صورت مماس درآید را می‌دانید؟	 <p>$x, y = ?$</p>	۸		
درس سوم					
۱	چندضلعی محاطی و محیطی را همراه با رسم شکل مناسب تعریف کنید.			۹	
۱/۵	قضیه: یک چهارضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند. یادآوری می‌شود که طول مماس‌های وارد بر یک دایره از یک نقطه با هم برابرند.			۱۰	
۱	مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد. ویژگی نقطه همبسی میانه‌ها در مثلث متساوی‌الاضلاع			۱۱	

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	هندسه (۲)									
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف									
۱	<p>در شکل مقابل، چهار ضلعی ABCD محاطی است. مقادیر مجهول را بیابید.</p> <p>در چهار ضلعی محاطی بین زاویه‌های مقابل چه رابطه‌ای وجود دارد؟</p> 			۱۲									
فصل دوم													
درس اول													
۱/۵	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت داخل جدول را مشخص کنید.</p> <table border="1" data-bbox="367 604 1173 750"> <thead> <tr> <th>طولیا</th> <th>جهت شکل را حفظ می‌کند</th> <th>مساحت را حفظ می‌کند</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>انتقال</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>تجانس</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			طولیا	جهت شکل را حفظ می‌کند	مساحت را حفظ می‌کند	انتقال			تجانس			۱۳
طولیا	جهت شکل را حفظ می‌کند	مساحت را حفظ می‌کند											
انتقال													
تجانس													
۱	بازتاب را تعریف و سه مورد از ویژگی‌های آن را بیان کنید.			۱۴									
۱/۵	ثابت کنید دوران، یک تبدیل طولیاست. (در دو حالت مختلف)			۱۵									
۱	<p>دوران یافته هر شکل را در حالات زیر رسم کنید.</p> <p>الف) دوران به مرکز A و زاویه ۹۰° در جهت عقربه‌های ساعت.</p>  <p>ب) دوران به مرکز O و زاویه ۱۲۰° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت.</p> 			۱۶									
۱	<p>نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط d است. اگر فاصله A تا A' برابر ۸ و نقطه M روی خط d را طوری انتخاب کنیم که AM = ۵ باشد. مطلوب است اندازه ارتفاع وارد بر ساق مثلث AMA'.</p>			۱۷									
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید									

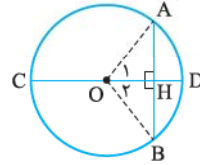
نمره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	هندسه (۲)
آزمون شماره ۹				ردیف
۱/۲۵		<p>ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره، درون دایره متقاطع باشند، زاویه بین دو وتر، برابر است با نصف مجموع دو کمان نظیر آن؛ یعنی در شکل مقابل داریم:</p> $\hat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{۲}$		۱
۱/۲۵		<p>دو دایره یکدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. اگر نقطه‌ای دلخواه روی یکی از دو دایره و بیرون دایره دیگر باشد و امتدادهای PA و PB دایره دیگر را در نقاط C و D قطع کنند، ثابت کنید با تغییر نقطه P روی دایره مفروض، اندازه کمان CD ثابت می‌ماند.</p>		۲
۱/۲۵		<p>ثابت کنید اگر در دایره‌ای، دو وتر نابرابر باشند، وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز نزدیک‌تر است.</p>		۳
۱/۲۵		<p>سه دایره به شعاع $r_1 = ۱$، $r_2 = ۲$ و r_3 بر هم مماس خارج هستند. اگر AT_3 بر هر سه دایره مماس و A در امتداد مرکزهای سه دایره باشد، شعاع دایره سوم را به دست آورید.</p>		۴
۱/۲۵		<p>خط d و نقطه A بیرون آن مفروض‌اند. بازتاب نقطه A نسبت به خط d را A' می‌نامیم. مجانس نقطه A' در تجانس به مرکز A و با نسبت ۲- را A'' می‌نامیم. اگر فاصله A از خط d برابر ۱ باشد، طول A'A'' چه قدر است؟</p>		۵
۱/۲۵		<p>دو نقطه A و O به فاصله ۱ از یکدیگر قرار دارند. اگر A1 مجانس A به مرکز نقطه O و با نسبت ۲- و A2 دوران یافته A1 حول نقطه O به اندازه $+۹۰^\circ$ باشد، طول پاره خط AA2 چه قدر است؟</p>		۶
۱/۲۵		<p>اگر بخواهیم بدون تغییر محیط چهارضلعی و تعداد اضلاع آن در شکل مقابل و با استفاده از بازتاب، مساحت شکل را افزایش دهیم، مساحت آن چه مقدار افزایش می‌یابد؟</p>		۷
۱/۲۵		<p>اگر طول اضلاع مثلثی ۴، ۵ و ۷ باشند و مجانس این مثلث را در تجانس به مرکز O و با نسبت $k = -۴$ رسم کنیم، مساحت شکل تبدیل یافته چه قدر است؟</p>		۸
۰/۷۵		<p>در شکل مقابل بردار v به طول ۱ با پاره خط AB به طول $۲\sqrt{۳}$ زاویه ۶۰° می‌سازد. اگر A'B' انتقال یافته پاره خط AB تحت بردار v باشد، مساحت چهارضلعی ABB'A' چه قدر است؟</p>		۹
۱/۲۵		<p>دو خط d_1 و d_2 به بردار v داده شده‌اند. پاره خط AB را چنان رسم کنید که A روی d_1 و B روی d_2 موازی و مساوی با بردار v باشد.</p>		۱۰
۱/۵		<p>اگر در مثلث ABC مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی بر هم منطبق و $AB = ۵\sqrt{۳}$ باشد، طول نیمساز زاویه درونی نظیر رأس A را پیدا کنید.</p>		۱۱
۱/۵		<p>در مثلث ABC داریم $\frac{p-a}{۴} = \frac{p-b}{۳} = \frac{p-c}{۲}$ و مساحت دایره محاطی داخلی آن $\frac{\Delta\pi}{۳}$ است. مساحت مثلث را پیدا کنید. (p نصف محیط است).</p>		۱۲
۱/۵		<p>در شکل مقابل، نقطه M، وسط BC و MQ نیمساز زاویه \hat{AMB} است. از خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید PM نیمساز زاویه \hat{AMC} است.</p>		۱۳

	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	هندسه (۲)	
نمره	آزمون شماره ۹			ردیف	
۱/۵		در شکل مقابل با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی را پیدا کنید.			۱۴
۱	$S = 2R^2 \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}$	ثابت کنید اگر شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر R باشد، آن‌گاه مساحت آن از رابطه مقابل به دست می‌آید:			۱۵
۱	در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه را بیابید.				۱۶
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید	

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- حکم: $\begin{cases} AH = BH \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$

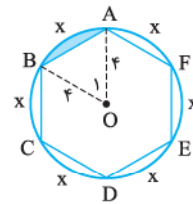


فرض کنیم O مرکز دایره باشد، از O بر وتر AB عمودی رسم می‌کنیم تا آن را در H و کمان نظیرش را در D قطع کند. از O به A و B وصل کرده ثابت می‌کنیم دو مثلث OAH و OBH هم‌نهشت‌اند.

شعاع $OA = OB$
مشترک $OH = OH$
 $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$

\Rightarrow دو مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت‌اند.

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زوایای مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD}$
 $AH = BH$



۲- اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر آن‌ها برابرند. شش ضلعی منتظم است، پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش ضلعی برابرند. در نتیجه:
 $6x = 36^\circ \Rightarrow x = 6^\circ$

از طرفی \hat{O}_1 زاویه مرکزی است، پس $\hat{O}_1 = x = 6^\circ$.

OA و OB شعاع‌های دایره‌اند که با هم برابرند، پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است.

$S_{\Delta OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 = 4\sqrt{3}$

از طرفی مساحت قطاع AOB برابر است با:

$S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi(4)^2(6^\circ)}{360^\circ} = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta OAB} = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

۳- الف) 8° اندازه زاویه درونی دایره است، پس: $\frac{x+y}{2} = 8^\circ \Rightarrow x+y = 16^\circ$
ب) اندازه زاویه بیرونی است، پس:

$\frac{x-y}{2} = 2^\circ \Rightarrow x-y = 4^\circ \Rightarrow \begin{cases} x+y = 16^\circ \\ x-y = 4^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 10^\circ, y = 6^\circ$

ب) $\hat{A} = 62^\circ$ زاویه بیرونی و بین دو مماس است، پس:

$\frac{x-y}{2} = 62^\circ \Rightarrow x-y = 124^\circ$

$x+y = 36^\circ$ (کل دایره)

$\begin{cases} x+y = 36^\circ \\ x-y = 124^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 242^\circ, y = 118^\circ$

۴- می‌دانیم اگر وترها برابر باشند، کمان‌های نظیر نیز با هم برابرند؛ در نتیجه:

$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = 14^\circ$

$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 8^\circ$

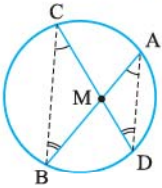
اندازه هر زاویه ظلّی نصف کمان روبه‌رو است، پس:

$\widehat{BCT}_{\text{ظلّی}} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$

۵- حکم: $MA \times MB = MC \times MD$

از C به B و از A به D وصل کرده و ثابت می‌کنیم دو مثلث

MBC و MDA متشابه‌اند.



دو مثلث MDA و BMC به حالت (ز) متشابه‌اند \Rightarrow

$\left. \begin{aligned} \hat{C}_{\text{محاطی}} = \frac{\widehat{BD}}{2} &\Rightarrow \hat{C} = \hat{A} \\ \hat{A}_{\text{محاطی}} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{B}_{\text{محاطی}} = \frac{\widehat{AC}}{2} &\Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{D}_{\text{محاطی}} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{aligned} \right\}$

نسبت تشابه را برای این دو مثلث می‌نویسیم:

$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$

۶- دو دایره متخارج $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در نظر می‌گیریم.

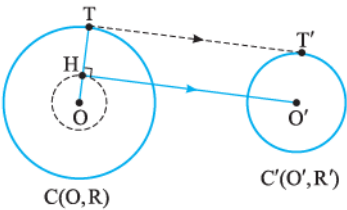
به مرکز O و شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم و از O' بر این دایره مماس $O'H$ را رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره $C(O, R)$ را در نقطه‌ای

مانند T قطع کند ($OH \perp O'H$). از

T به موازات $O'H$ خط TT' را رسم

می‌کنیم. TT' مماس مشترک خارجی

دو دایره است. $OH = R - R'$.



اکنون در مثلث $OO'H$ رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$d^2 = (R - R')^2 + (O'H)^2 \Rightarrow O'H = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

چهارضلعی $HTT'O'$ ، زاویه قائمه دارد، پس مستطیل است، در نتیجه:

$\Rightarrow TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

۷- دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 4)$ را که بر

یکدیگر مماس خارج هستند در نظر می‌گیریم.

واضح است که طول خط‌المركزین این دو دایره ۱۳

است؛ یعنی: $d = OO' = 9 + 4 = 13$

$\Rightarrow TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

۸- ابتدا رابطه طولی داخل دایره را می‌نویسیم:

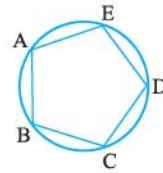
$4 \times x = 2 \times 10$

$\Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$

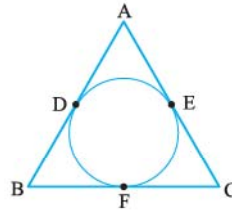
اکنون رابطه طولی خارج دایره با توجه به مماس بودن یکی از قاطع‌ها را می‌نویسیم:

$6^2 = y(y + 4 + x) \Rightarrow 36 = y(y + 4 + 5)$

$\Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y + 12)(y - 3) = 0 \Rightarrow y = 3$



دایره محیطی
پنج ضلعی محیطی

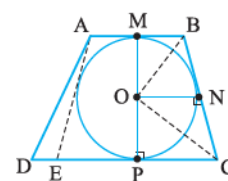
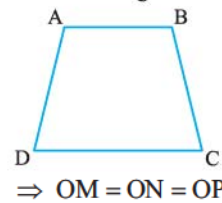
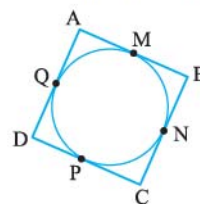


دایره محیطی
مثلث محیطی

۹- چندضلعی را محاطی گویند، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد. در این صورت دایره را محیطی و چندضلعی را محاط در دایره یا به طور خلاصه محاطی نامند.

چندضلعی را محیطی نامند، اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد. در این صورت دایره را محاطی و چندضلعی را محیطی نامند.

۱۰- می‌دانیم اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، طول دو مماس با هم برابر است.



فرض کنید چهارضلعی ABCD محیطی باشد:

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AM + BM) + (CP + DP) \\ &= AQ + BN + CN + DQ \\ &= (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC \end{aligned}$$

برعکس: فرض کنید $AB + CD = BC + AD$. نیمسازهای دو زاویه B و C یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند. طبق خاصیت نیمساز، هر نقطه روی نیمساز از اضلاع زاویه به یک فاصله است.

به مرکز O و شعاع OM دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره بر اضلاع AB ، BC و CD مماس می‌باشد. اگر بر ضلع AD نیز مماس باشد که کار تمام است. در غیر این صورت از A مماس AE را بر دایره رسم می‌کنیم. چون $ABCE$ محیطی است، پس بنا بر قسمت قبل:

$$AB + EC = BC + AE \Rightarrow AB - BC = AE - EC \quad (1)$$

از طرفی بنا به فرض $AB + CD = BC + AD$ ، در نتیجه:

$$AB - BC = AD - CD \quad (2)$$

$$AD - CD = AE - EC$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\Rightarrow AD = AE + \frac{CD - EC}{ED} \Rightarrow AD = AE + ED$$

اما در مثلث ADE چنین رابطه‌ای امکان ندارد، پس فرض مماس نبودن AD بر دایره باطل است و AD بر دایره رسم شده مماس است.

۱۱- بنا بر رابطه $C_n = 2R \sin \frac{18^\circ}{n}$ داریم: $a = 2R \sin \frac{18^\circ}{3} = 2R \sin 6^\circ = R\sqrt{3}$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (R\sqrt{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

۱۲- می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، زوایای روبه‌رو مکمل‌اند، پس:

$$x - 2y + 3^\circ + 12^\circ = 180^\circ \Rightarrow x - 2y = 164^\circ$$

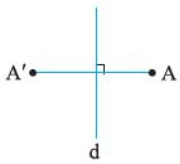
$$2x + y + 1^\circ + 7^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 172^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 172^\circ \\ x - 2y = 164^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 23^\circ \Rightarrow x = 46^\circ, y = 8^\circ$$

۱۳- انتقال: طولی‌است، جهت شکل را حفظ می‌کند و مساحت را نیز حفظ می‌کند.

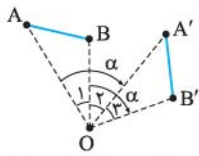
تجانس: لزوماً طولی‌ای نیست (در حالت $|k| = 1$ طولی‌است) و جهت شکل را حفظ می‌کند و اگر $|k| \neq 1$ باشد، مساحت را نیز حفظ نمی‌کند.

۱۴- تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d ، نقطه A' است به طوری که خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد و اگر A بر d منطبق باشد، تصویرش بر خودش منطبق است. d را محور بازتاب می‌نامند. بازتاب، یک تبدیل طولی‌است. شیب را لزوماً حفظ نمی‌کند - مقدار زاویه را حفظ می‌کند.



۱۵- حالت اول: مرکز دوران O بر پاره‌خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه \widehat{AOB} بیشتر باشد.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 &= \alpha \\ \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 &= \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_3$$



$$\begin{cases} OA = OA' & (\text{طبق تعریف دوران}) \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_3 \\ OB = OB' & (\text{طبق تعریف دوران}) \end{cases}$$

پس دو مثلث OAB و $OA'B'$ به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند.

$$\Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow \text{طولی‌است}$$

حالت دوم: اگر نقطه O روی پاره‌خط AB باشد:

$$AB = AO + OB$$

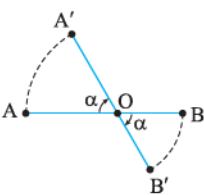
$$A'B' = A'O + OB'$$

$$AO = A'O$$

$$BO = B'O \Rightarrow AB = A'B'$$

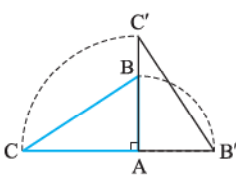
$$BO = B'O$$

پس دوران یک تبدیل طولی‌است.



۱۶- الف) نقاط B و C را به مرکز A و به اندازه 90° در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقاط B' و C' به دست آیند. دقت کنید که دوران یافته نقطه A با این دوران، خود نقطه A می‌شود.

توجه کنید که $AB = AB'$ و $AC = AC'$.



ب) نقاط A ، B ، C و D را به O وصل کرد، دوران 12° خلاف جهت عقربه‌های ساعت انجام می‌دهیم. نقاط A' ، B' ، C' و D' حاصل می‌شوند.

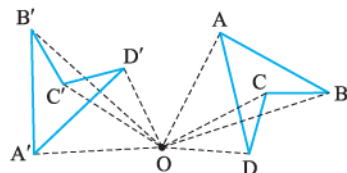
توجه کنید که

$$OA = OA'$$

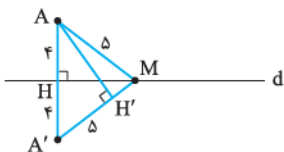
$$OB = OB'$$

$$OC = OC'$$

$$OD = OD'$$



۱۷- ابتدا شکل مناسبی رسم می‌کنیم:



A' بازتاب A نسبت به خط d است، پس $AH = A'H = 4$ ، طبق رابطه فیثاغورس: $HM = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

چون d عمودمنصف AA' است، پس $AM = A'M$ ، چون $AM = 5$ پس $A'M = 5$. ارتفاع وارد بر ساق مثلث AMA' یعنی AH :

$$\text{مساحت مثلث } AA'M = \frac{AH \times AA'}{2}$$

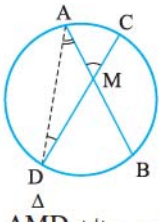
$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث } AA'M = \frac{MH \times AA'}{2}$$

$$AH \times AA' = MH \times AA' \Rightarrow AH \times 5 = 3 \times 8$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{24}{5} = \frac{48}{10} = 4.8$$

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- از A به D وصل می‌کنیم:

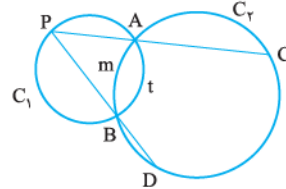


$$\left. \begin{aligned} \widehat{D} \text{ محاطی} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \widehat{A} \text{ محاطی} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \quad (1)$$

ΔAMD زاویه خارجی مثلث $\widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{D} \quad (2)$

(1) و $(2) \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$

۲- در دایره C_1 زاویه‌های محاطی است،



پس: ثابت $\widehat{P} = \frac{\widehat{AtB}}{2}$ در دایره C_2 .

زاویه‌های خارجی است، پس:

$$\widehat{P} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AmB}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 2\widehat{P} + \widehat{AmB}$$

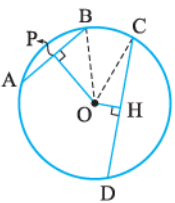
چون \widehat{AmB} و \widehat{P} ثابت هستند، پس اندازه کمان \widehat{CD} ثابت است و به جای نقطه P بستگی ندارد.

۳- فرض کنیم در دایره $C(O, R)$ وتر CD از وتر AB بزرگ‌تر باشد. اگر OP و OH

به ترتیب بر AB و CD عمود باشند، آن‌گاه $PB = \frac{1}{4}AB$ و $CH = \frac{1}{4}CD$.

$\Delta OBP: OP^2 = OB^2 - PB^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} \quad (1)$

$\Delta OCH: OH^2 = OC^2 - CH^2 = R^2 - \frac{CD^2}{4} \quad (2)$



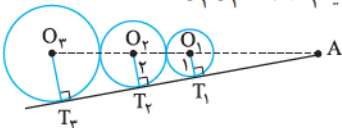
چون $AB < CD$ ، پس $-\frac{AB^2}{4} > -\frac{CD^2}{4}$ یا

$$R^2 - \frac{AB^2}{4} > R^2 - \frac{CD^2}{4} \quad (1)$$

و (2) نتیجه می‌شود $OP^2 > OH^2$ یا $OP > OH$.

۴- اولاً $O_1O_2 = r_1 + r_2 = 1 + 2 = 3$ ، ثانیاً $O_2O_3 = 2 + r_3 = 2 + 1 = 3$

فرض کنیم $O_1A = x$ باشد.



پاره‌خط‌های O_1T_1 و O_2T_2 با هم موازی‌اند، در نتیجه می‌توان در مثلث AO_2T_2

تالس جزء به کل نوشت:

$$\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2} \Rightarrow \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3$$

هم‌چنین O_1T_1 و O_3T_3 با هم موازی‌اند، در نتیجه می‌توان در مثلث AO_3T_3 تالس

جزء به کل نوشت:

$$\frac{O_1A}{O_3A} = \frac{O_1T_1}{O_3T_3} \Rightarrow \frac{x}{x+3+2+r_3} = \frac{1}{r_3} \Rightarrow \frac{3}{8+r_3} = \frac{1}{r_3} \Rightarrow r_3 = 4$$

۵- واضح است که $AA' = 2$ و چون A''

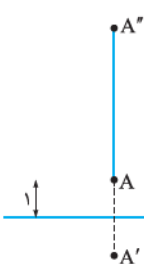
مجانس A' در تجانس به مرکز A و با نسبت

۲- است، پس باید A بین A'' و A' و

$AA'' = 2AA' = 4$ باشد، پس با توجه به

شکل داریم:

$A'A'' = A'A + AA'' = 2 + 4 = 6$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9k \times 4k \times 2k \times 2k} = 6k^2 \sqrt{6}$$

پس:

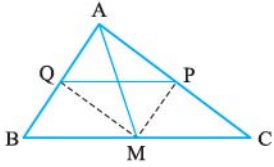
$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{6k^2 \sqrt{6}}{9k} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{k\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6k^2}{9} \Rightarrow k^2 = 1 \xrightarrow{k>} k = 1$$

به توان ۲ می‌رسانیم:

$$S = 6\sqrt{6}$$

۱۳- چون MQ نیمساز زاویه \hat{A} است، پس بنا بر ویژگی نیمساز در مثل $\triangle AMB$ داریم:



$$\left. \begin{aligned} \frac{AQ}{BQ} &= \frac{AM}{MB} \\ \frac{AP}{PC} &= \frac{AM}{MC} \\ \frac{AQ}{BQ} &= \frac{AP}{PC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{CM}$$

تالس $PQ \parallel BC$

$$BM = CM$$

بنا بر ویژگی عکس نیمساز زاویه در مثل $\triangle AMC$ ، نتیجه می‌شود PM نیمساز زاویه \hat{C} است.

۱۴- با استفاده از رابطه هرون مساحت هر یک از مثلث‌ها را پیدا می‌کنیم.

در مثل $\triangle ABD$ داریم $p = \frac{7+9+12}{2} = 14$ ، پس:

$$S_{\triangle ABD} = \sqrt{14 \times (14-7) \times (14-9) \times (14-12)} = 14\sqrt{5}$$

در مثل $\triangle BCD$ داریم $p = \frac{6+8+12}{2} = 13$ ، پس:

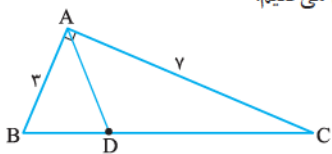
$$S_{\triangle BCD} = \sqrt{13 \times (13-6) \times (13-8) \times (13-12)} = \sqrt{455}$$

$$S_{ABCD} = 14\sqrt{5} + \sqrt{455}$$

۱۵- می‌دانیم $a = 2R \sin \hat{A}$ و $b = 2R \sin \hat{B}$ از طرفی $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ ، پس:

$$S = \frac{1}{2} \times (2R \sin \hat{A}) \times (2R \sin \hat{B}) \sin \hat{C} = 2R^2 \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}$$

۱۶- مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳ و ۷ رسم می‌کنیم:



نیمساز زاویه \hat{A} را رسم کرده، محل برخورد آن با ضلع BC را D می‌نامیم.

$$AD = \frac{2AB \times AC \times \cos \frac{\hat{A}}{2}}{AB + AC}$$

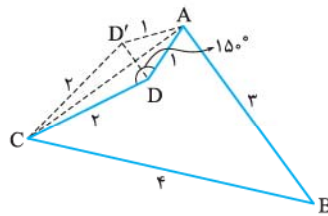
طول نیمساز AD برابر است با:

$$= \frac{2 \times 3 \times 7 \times \cos 45^\circ}{3+7} = \frac{21\sqrt{2}}{10} = 2.1\sqrt{2}$$

۶- چون A_1 مجانس A به مرکز O و با نسبت ۲- است، پس O بین A_1 و A است و $OA_1 = 2OA = 2$ می‌باشد. با توجه به شکل، OA_2 بر AA_1 عمود است و $OA_2 = 2$ و چون $OA = 1$ ، پس در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OAA_2$ داریم:

$$AA_2^2 = OA^2 + OA_2^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow AA_2 = \sqrt{5}$$

۷- کافی است بازتاب D نسبت به AC را پیدا کنیم. اگر این نقطه را D' بنامیم، آن‌گاه دو مثلث $\triangle ACD'$ و $\triangle ACD$ هم‌نهشت هستند، پس مقدار افزایش مساحت شکل، دو برابر مساحت مثلث $\triangle ADC$ است.



$$\text{مساحت افزایش} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \left(\frac{1}{2} AD \times CD \times \sin 15^\circ \right)$$

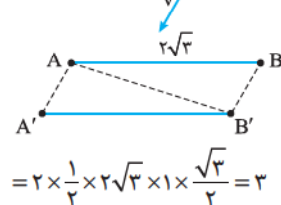
$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

۸- مساحت مثلث اولیه را پیدا می‌کنیم. با استفاده از رابطه هرون داریم:

$$S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = \sqrt{8 \times 4 \times 3 \times 1} = 4\sqrt{6}$$

می‌دانیم تجانس، زاویه را حفظ می‌کند، پس تصویر با خود شکل، متشابه است و چون نسبت تجانس ۴- است، پس مساحت شکل مجانس $16 = (4)^2$ برابر مساحت شکل اولیه است، در نتیجه:

۹- اگر A' و B' به ترتیب انتقال یافته‌های A و B تحت بردار \vec{v} باشند، آن‌گاه $BB' = 1$ و $\hat{B} = 60^\circ$ ، پس:



$$S_{ABB'A'} = 2S_{\triangle ABB'}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} AB \times BB' \times \sin \hat{B} \right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

۱۰- اگر فرض کنیم مسئله حل شده و پاره‌خط AB جواب مسئله باشد، آن‌گاه چون $|\vec{AB}| = |\vec{v}|$ ، پس نقطه B انتقال یافته نقطه A تحت بردار \vec{v} است. برای رسم به صورت زیر عمل می‌کنیم: انتقال یافته d_1 را تحت بردار \vec{v} خط d_1' می‌نامیم. نقطه برخورد d_1' و d_2 را A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسئله است.

۱۱- اگر در مثلثی مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی برهم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است. نیمساز زاویه‌های درونی مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع آن نیز می‌باشد، پس:

$$d_a = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5\sqrt{3} = \frac{15}{2}$$

۱۲- اگر شعاع دایره محاطی داخلی را r بگیریم، آن‌گاه:

$$S = \pi r^2 = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

از طرفی با استفاده از ویژگی مهم تناسب، خواهیم داشت:

$$\frac{p-a}{4} = \frac{p-b}{3} = \frac{p-c}{2} = \frac{2p-a-b-c}{4+3+2} = \frac{p}{9} = k$$

در نتیجه: $p = 9k$ و هم‌چنین:

$$\frac{p-a}{4} = k \Rightarrow p-a = 4k \Rightarrow a = 5k$$

$$\frac{p-b}{3} = k \Rightarrow p-b = 3k \Rightarrow b = 6k$$

$$\frac{p-c}{2} = k \Rightarrow p-c = 2k \Rightarrow c = 7k$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

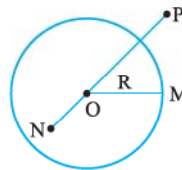
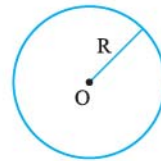
فصل: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه هادر دایره

دایره

دایره، مجموعه نقاطی از یک صفحه است که فاصله آن‌ها از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطه ثابت، مرکز دایره و مقدار ثابت، اندازه شعاع دایره نامیده می‌شوند. دایره به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O, R)$ نشان می‌دهند. هر دایره، صفحه را به ۳ قسمت جدا از هم تقسیم می‌کند:

- داخل دایره: مجموعه نقاطی مانند N که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره است، پس $ON < R$.
- روی دایره: مجموعه نقاطی مانند M که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است، پس $OM = R$.
- خارج دایره: مجموعه نقاطی مانند P که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است، پس $OP > R$.



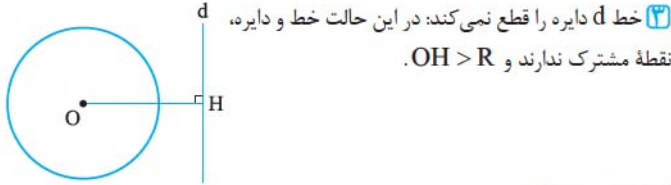
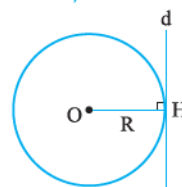
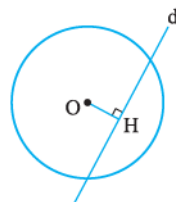
خط‌های قاطع و مماس نسبت به دایره

خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، قاطع نسبت به دایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می‌شود.

در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است. در این حالت شعاع گذرنده از نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.

وضعیت خط و دایره: اگر OH فاصله O از خط d باشد، خط d و دایره $C(O, R)$ نسبت به هم دارای ۳ وضعیت هستند:

- خط و دایره متقاطع هستند: در این حالت خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و $OH < R$.
- خط بر دایره مماس است: در این حالت خط و دایره فقط یک نقطه مشترک دارند و $OH = R$.



چند تعریف

تعریف وتر: پاره‌خطی که دو نقطه متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتر نامیده می‌شود.

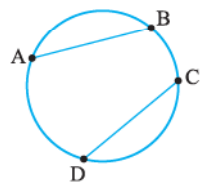
تعریف قطر: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر نامیده می‌شود. قطر، بزرگ‌ترین وتر در دایره است.

تعریف کمان: قسمتی از دایره که بین دو نقطه روی دایره محدود باشد، کمان دایره می‌گویند.

تعریف شعاع: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و انتهای دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع نام دارد.

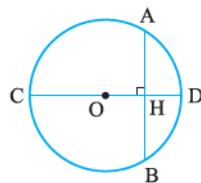
زاویای مرکزی، محاطی، ظلی، داخلی و خارجی

زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن روی مرکز دایره و دو ضلع زاویه شعاع‌های دایره باشند، زاویه مرکزی نام دارد. اندازه هر زاویه مرکزی برابر است با اندازه کمان روبه‌رو به آن زاویه. دو کمان \widehat{AB} و \widehat{CD} از دایره $C(O, R)$ با هم برابرند، اگر و تنها اگر دو وتر AB و CD از این دایره با هم برابر باشند.



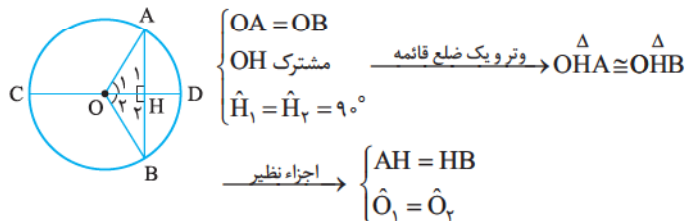
$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$$

ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



$$\text{فرض: } \begin{cases} \widehat{CD} : \text{ قطر} \\ \hat{H} = 90^\circ \end{cases} \quad \text{حکم: } \begin{cases} AH = BH \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{cases}$$

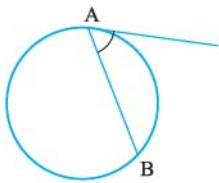
از O به A و B وصل کرده، ثابت می‌کنیم دو مثلث حاصل هم‌نهشت‌اند.



اما زاویای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 مرکزی‌اند، پس مساوی کمان‌های روبه‌رویشان هستند.

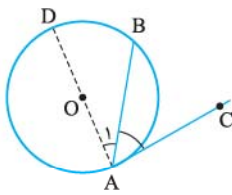
$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \widehat{AD} \\ \hat{O}_2 = \widehat{BD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD}$$

در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز نگذشته باشد، وصل کند، بر آن وتر عمود است.



زاویه ظلی زاویه‌ای را که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر وتر از دایره باشد زاویه ظلی می‌نامند.

ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی، نصف کمان نظیرش می‌باشد.
 قطر AD را رسم می‌کنیم. چون شعاع وارد بر نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس داریم:



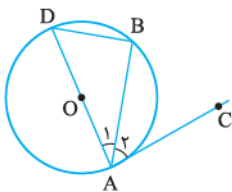
$$DA \perp AC \Rightarrow \widehat{DAC} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}_1 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{A}_1$$

چون \hat{A}_1 محاطی است، پس $\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}$ و داریم:

$$\hat{A} = 90^\circ - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

اثبات دیگری برای اندازه زاویه ظلی



قطر AD را رسم و از D به B وصل می‌کنیم.

$$\hat{B} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

پس در مثلث ADB داریم:

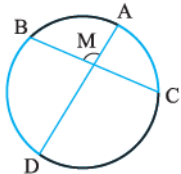
$$\hat{D} + \hat{A}_1 = 90^\circ$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

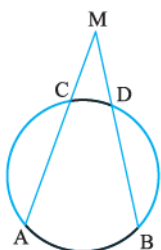
اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی باشند، آن‌گاه کمان‌های محدود بین آن‌ها با هم برابرند و برعکس.

دو قضیه مهم:



الف هرگاه دو وتر، داخل دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه زاویه بین آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

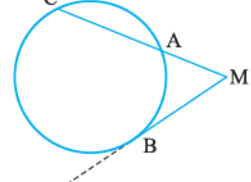
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$



ب هرگاه دو وتر خارج دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه زاویه بین آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

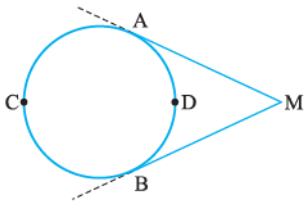
$$\hat{M} = \frac{|\widehat{AB} - \widehat{CD}|}{2}$$

دو حالت خاص از قضیه که بسیار مهم هستند در زیر ارائه شده‌اند:



الف زاویه بین قاطع و مماس:

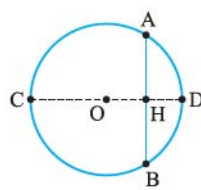
$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$



ب زاویه بین دو مماس:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.
 اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

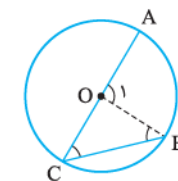


حل طبق قضیه و دو نکته قبل، کافی است وسط وتر و کمان را به هم وصل کرده و امتداد دهید تا از مرکز دایره بگذرد و دایره را در نقطه دیگر قطع کند. پاره‌خط حاصل قطر موردنظر است و چون از مرکز به وسط وتر و کمان AB وصل شده پس حتماً بر آن وتر عمود است

زاویه محاطی زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و هر دو ضلع آن، دو وتر از دایره باشند زاویه محاطی می‌نامند.

ثابت کنید اگر یک ضلع زاویه محاطی، قطر و ضلع دیگر وتری دلخواه از دایره باشد، آن‌گاه اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف کمان نظیر آن.

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



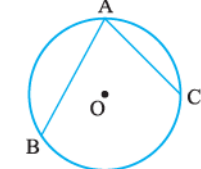
اگر از O به B وصل کنیم، آن‌گاه «شعاع» $OB = OC$ ، پس مثلث OBC در رأس O متساوی‌الساقین است و $\hat{C} = \hat{B}$.

اما \hat{O}_1 زاویه‌ای خارجی برای مثلث OBC است، پس $\hat{O}_1 = \hat{B} + \hat{C}$ و در نتیجه $\hat{O}_1 = \hat{C} + \hat{C} = 2\hat{C}$

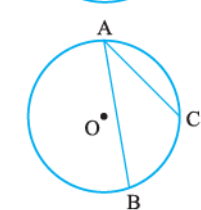
\hat{O}_1 زاویه‌ای مرکزی است، پس $\hat{O}_1 = \widehat{AB}$ ؛ در نتیجه:

$$2\hat{C} = \widehat{AB} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

با فرض این‌که بدانیم اگر یک ضلع زاویه محاطی، قطری از دایره باشد، اندازه آن نصف کمان نظیرش می‌باشد، آن‌گاه در حالت‌های زیر ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی، نصف کمان نظیر آن است: (O مرکز دایره است)



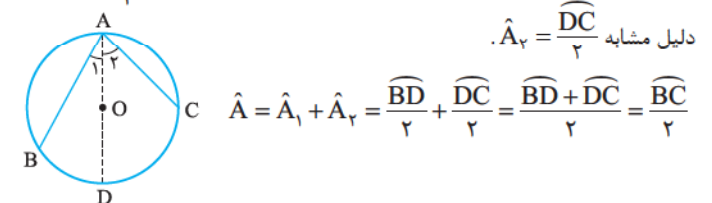
الف O درون زاویه است.



ب O بیرون زاویه است.

حل الف) از A به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.

چون \hat{A}_1 محاطی است و یک ضلع آن، قطری از دایره می‌باشد، پس $\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}$ و به دلیل مشابه $\hat{A}_2 = \frac{\widehat{DC}}{2}$

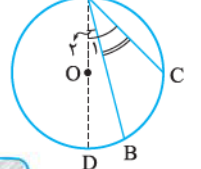


$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

ب) از A به O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. چون \hat{A}_1 محاطی و یک ضلع آن، قطری از دایره است، پس:

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

و به دلیل مشابه $\hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2}$



$$\hat{A} = \hat{A}_1 - \hat{A}_2 = \frac{\widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(پ) 7° زاویه درونی و 5° زاویه بیرونی است پس:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 7^\circ \\ \frac{x-y}{2} = 5^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 14^\circ \\ x-y = 10^\circ \end{cases}$$

$$2x = 24^\circ \Rightarrow x = 12^\circ \Rightarrow y = 2^\circ$$

(ت)

$$\hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \frac{2x + 3x + 1^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 5x = 180^\circ - 1^\circ = 179^\circ \Rightarrow x = \frac{179^\circ}{5} = 35.8^\circ$$

(ث)

$$\widehat{CD} = 180^\circ \Rightarrow 3x + 1^\circ + y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3(35.8^\circ) + 1^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 68^\circ$$

(ج)

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = t \Rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = 4t \\ c = 7t \end{cases}$$

(چ)

$$a + b + c = 36^\circ \Rightarrow 12t = 36^\circ \Rightarrow t = 3^\circ$$

(ح)

$$x = \hat{M} = \frac{\widehat{TD} - \widehat{TB}}{2} = \frac{c - a}{2}$$

$$= \frac{7t - t}{2} = \frac{6t}{2} = 3t = 3(3^\circ) = 9^\circ$$

(ط)

$$\frac{x-y}{2} = 62^\circ \Rightarrow \begin{cases} x-y = 124^\circ \\ x+y = 36^\circ \end{cases}$$

(ظ)

$$\Rightarrow 2x = 484^\circ \Rightarrow x = 242^\circ \Rightarrow y = 118^\circ$$

(ق)

$$6x + 28^\circ = \frac{(9x + 17^\circ) + (10x - 1^\circ)}{2}$$

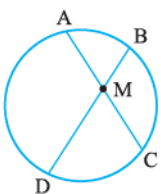
(ک)

$$\Rightarrow 12x + 56^\circ = 19x + 7^\circ \Rightarrow 7x = 49^\circ \Rightarrow x = 7^\circ$$

(گ)

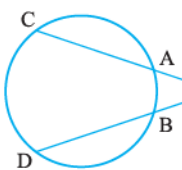
$$\widehat{BNT} = 6x + 28^\circ = 6(7^\circ) + 28^\circ = 42^\circ + 28^\circ = 70^\circ$$

درس دوم: روابط طولی در دایره



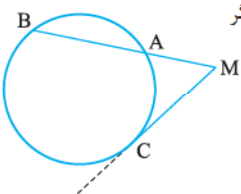
الف هرگاه دو وتر، داخل دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$$MA \times MC = MB \times MD \text{ (جزء در جزء)}$$



ب هرگاه امتداد دو وتر، خارج دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

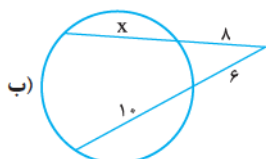
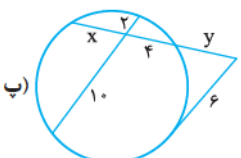
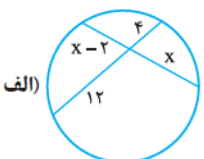
$$MA \times MC = MB \times MD \text{ (جزء در کل)}$$



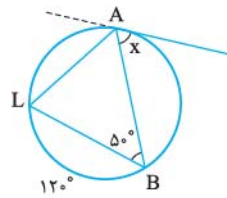
ج هرگاه یک مماس و یک قاطع در بیرون دایره همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$$MC^2 = MA \times MB$$

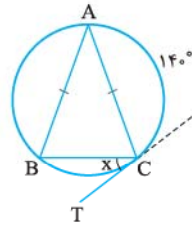
مقدار مجهول را در هر شکل بیابید.



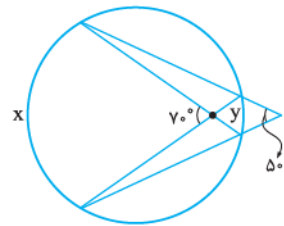
در هر حالت مقادیر مجهول را بیابید.
الف) $x = ?$



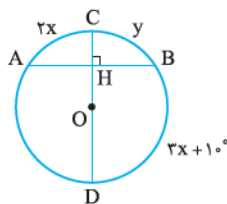
ب) $x = ?$



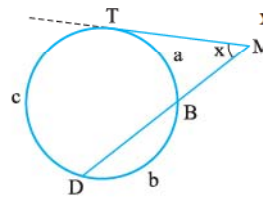
پ) $x, y = ?$



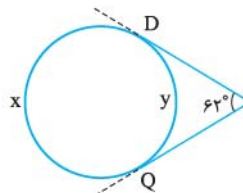
ت) $x, y = ?$



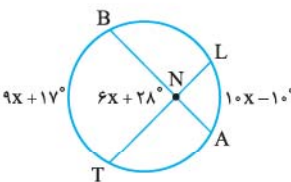
ث) اگر در شکل مقابل $\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ باشد، $x, y = ?$



ج) $x, y = ?$



چ) $\widehat{BNT} = ?$ و $x = ?$



ح) الف)

محاطی $\hat{B} = 5^\circ \rightarrow \hat{B} = \frac{\widehat{AL}}{2} \Rightarrow \widehat{AL} = 10^\circ$

$$10^\circ + 12^\circ + \widehat{AB} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 36^\circ - 22^\circ = 14^\circ$$

ظلی $\hat{A} = x = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{14^\circ}{2} = 7^\circ$

$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} = 14^\circ$

$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 36^\circ \Rightarrow 14^\circ + 14^\circ + \widehat{BC} = 36^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 36^\circ - 28^\circ = 8^\circ$$

ظلی $\widehat{BCT} \rightarrow x = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$

ب)