ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضیات گسسته** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲، امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۹۸، ۹۹ و ۱۴۰۰ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸، امتحان‌های نهایی خرداد، شهریور، دی ۹۸ و دی ۹۹ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، خرداد و شهریور ۹۹ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضیات گسسته نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.

فهرست

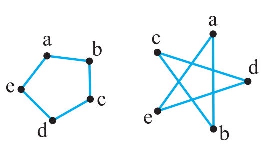
بارم‌بندی درس ریاضیات گسسته

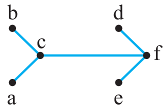
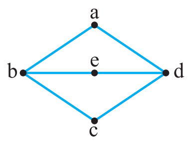
<table>
<tr><th colspan="2">شماره فصل</th><th>نوبت اول</th><th>نوبت دوم</th><th>شهریور و دی</th></tr>
<tr><td colspan="2">فصل اوّل</td><td>۱۵</td><td>۵</td><td>۷</td></tr>
<tr><td rowspan="2">فصل دوم</td><td>تا صفحهٔ ۴۲</td><td>۵</td><td>۲</td><td rowspan="2">۶</td></tr>
<tr><td>بعد از صفحهٔ ۴۲</td><td>–</td><td>۵</td></tr>
<tr><td colspan="2">فصل سوم</td><td>–</td><td>۸</td><td>۷</td></tr>
<tr><td colspan="2">جمع</td><td>۲۰</td><td>۲۰</td><td>۲۰</td></tr>
</table>

فصل اول

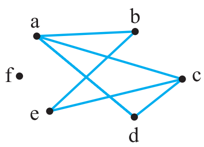
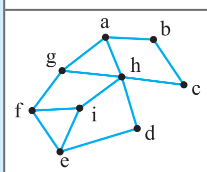
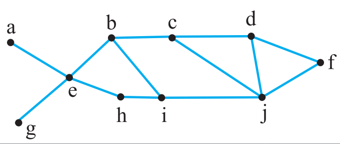
ردیف	سؤال		نمره
۱	الف) آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که: $x^{۲}+y^{۲}=(x+y)^{۲}$ ب) آیا مقادیر حقیقی و غیرصفر x و y وجود دارند که: $x+y\neq ۰$ $\quad \frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$		۱/۵
۲	جاهای خالی را پر کنید. الف) .... = $[-۴,۱۶]$ ب) اگر $a \mid b$، آن‌گاه .... = (a,b). پ) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a \mid p$ در این صورت .... = a یا .... = a.		۱
۳	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ n\in\mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a^{n} \overset{m}{\equiv} b^{n}$ ب) $ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$ پ) شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلۀ سیالۀ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $[a,b] \mid c$. ت) در مسائل تقویم‌نگاری از هم‌نهشتی به پیمانۀ ۷ استفاده می‌شود.		۱
۴	اگر x و y گنگ ولی $x+y$ گویا باشد، ثابت کنید: $x-y$ و $x+۲y$ گنگ هستند. (به روش برهان خلف)	یادت باشه در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد.	۱
۵	به روش بازگشتی برای هر x و y حقیقی که $x+y>۰$ باشد، ثابت کنید: $\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x+y}\geq xy$	در روش بازگشتی هر وقت به یک عبارت همواره درست رسیدی کار تمام است.	۱/۵
۶	خاصیت تعدی در رابطۀ عادکردن را بیان و اثبات نمایید.	گفته: بیان و اثبات.	۱/۲۵
۷	اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندۀ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.	بخش‌پذیربودن یعنی باقی‌ماندۀ صفر داشتن.	۱/۲۵
۸	اگر باقی‌ماندۀ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقی‌ماندۀ تقسیم a بر ۴۲ را بیابید.		۱/۲۵
۹	اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $c\in\mathbb{Z}$، آن‌گاه ثابت کنید: $a\pm c \overset{m}{\equiv} b\pm c$		۱/۲۵
۱۰	باقی‌ماندۀ تقسیم عدد $A=(۲۳)^{۶}+۱۶$ را بر ۱۱ بیابید.		۱/۲۵
۱۱	تمام اعداد صحیحی که ۷ برابر آن‌ها منهای ۳ بر ۹ بخش‌پذیر باشند را بیابید.	اول سعی کن صورت سؤال را به زبان ریاضی بنویسی.	۱/۲۵
۱۲	نشان دهید معادلۀ سیالۀ $۶x+۱۴y=۱۰$ در مجموعۀ اعداد صحیح جواب دارد. سپس آن را حل کنید.		۱/۵

فصل دوم

ردیف	سؤال		نمره
۱۳	برای دو نمودار مقابل با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر کدام، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.	$(G_۱)$ $\quad (G_۲)$	۱

	ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
ردیف	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره
۱۴	نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) درجات رئوس گراف G را بنویسید. ب) چه یال‌هایی به گراف G اضافه کنیم تا گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۶ شود؟	 یادت که هست در گراف ۳ ـ منتظم، درجهٔ همهٔ رئوس ۳ است.	۱/۵
۱۵	گراف G، ۳ ـ منتظم است و با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کامل به دست می‌آید؛ الف) مرتبه و اندازهٔ گراف را به دست آورید. ب) نموداری از این گراف رسم کنید.	حواست باشه گفته یال اضافه می‌کنیم تا کامل شود. در قسمت (الف) هم مرتبه و اندازهٔ گراف اولیه را خواسته.	۱/۵
۱۶	نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) طولانی‌ترین مسیر از a به c را بنویسید. ب) تمام دورهای به طول ۴ را در این گراف بنویسید.	 به کلمهٔ طولانی در قسمت (الف) دقت کن.	۱
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com
ردیف	آزمون شمارهٔ ۹	نوبت دوم پایهٔ دوازدهم- نهایی خرداد ۱۴۰۰	نمره

ردیف		نمره
۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطهٔ $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$ برقرار باشد.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید. الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a\|b$ آن‌گاه عدد .... شمارندهٔ عدد .... است. ب) m عددی صحیح است. حاصل $(۲m,۶m^۳)$ برابر با .... است.	۰/۷۵
۳	به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.	۱/۲۵
۴	ثابت کنید اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۳$ نوشته می‌شود.	۰/۷۵
۵	باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱$ را بر ۷ بیابید.	۰/۷۵
۶	معادلهٔ $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.	۱
۷	گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگ‌ترین درجه در گراف $\bar{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟ پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟  	۲
۸	تفاوت بین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.	۱
۹	در گراف شکل مقابل یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.  	۱
۱۰	عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائهٔ راه‌حل، تعیین کنید.  	۱/۵
۱۱	الف) یک گراف ۶رأسی که $\gamma-$ مجموعهٔ آن با اندازهٔ یک باشد، رسم کنید. ب) یک گراف ۶رأسی که $\gamma-$ مجموعهٔ آن با اندازهٔ دو باشد، رسم کنید.	۱/۵
۱۲	کوتاه پاسخ دهید. می‌خواهیم با حروف (ب) و (ج) و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.	۱
۱۳	به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.	۲
۱۴	مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامدبودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید. $A=\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline\end{array}$	۱/۵
۱۵	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟	۱/۷۵
۱۶	الف) به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر تقسیم کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟	۱
۱۷	۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟	۰/۷۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف) از حل طرفین تساوی داریم:

$$x^۲+y^۲=x^۲+y^۲+۲xy \Rightarrow ۲xy=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } y=۰$$

یعنی اگر $x=۰$ باشد، برای هر y صحیح تساوی برقرار است.

اگر $y=۰$ باشد، برای هر x صحیح تساوی برقرار است.

اگر هر دو متغیر x و y صفر باشند، تساوی نیز برقرار است.

ب)
$$\frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} \Leftrightarrow \frac{۱}{x+y}=\frac{x+y}{xy}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^۲=xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲+۲xy-xy=۰$$
$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲+xy=۰$$

با توجه به تساوی $(x+y)^۲=xy$، xy همواره مثبت است. مجموع سه عبارت همواره مثبت صفر شده است. چون x و y غیرصفرند، پس مسئله جواب ندارد.

۲- الف) ک.م.م دو عدد ۴- و ۱۶ برابر ۱۶ است.

ب) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

پ) $a=p$ یا $a=۱$

۳- الف) درست؛ طرفین یک همنهشتی را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند.

ب) نادرست؛ وقتی عدد ناصفر c از طرفین یک همنهشتی حذف شود پیمانهٔ m همواره ثابت نمی‌ماند.

$$\begin{cases} ac\overset{m}{\equiv}bc \Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b \\ (c,m)=d\end{cases}$$

پ) نادرست؛ شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)|c$.

ت) درست؛ در مسائل تقویم‌نگاری با تعداد روزهای هفته مواجه هستیم پس باید از همنهشتی در پیمانهٔ ۷ استفاده کنیم.

۴- فرض می‌کنیم $x-y$ گنگ نباشد، پس گویاست.

$$\begin{cases}x-y=\text{گویا}\\ x+y=\text{گویا(فرض مسئله)}\end{cases}\Rightarrow x=\text{گویا}$$

که این با فرض گنگ‌بودن x در تناقض است.

فرض می‌کنیم $x+۲y$ گنگ نباشد، پس گویا است.

$$\begin{cases}x+۲y=\text{گویا}\\ x+y=\text{گویا}\end{cases}\Rightarrow y=\text{گویا}$$

که این با فرض گنگ‌بودن y در تناقض است.

در نتیجه در هر دو قسمت، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵- با توجه به این‌که $x+y>۰$ مثبت است، ابتدا کل نامساوی را در $x+y$ ضرب می‌کنیم. (جهت نامساوی عوض نمی‌شود.)

$$\Leftrightarrow x^۳+y^۳\ge (x+y)xy$$

با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^۲-xy+y^۲)\ge(x+y)(xy)$$

با حذف $x+y$ از طرفین نامساوی داریم: $(x+y>۰)$

$$\Leftrightarrow (x^۲-xy+y^۲)\ge xy$$
$$\Leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲\ge۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲\ge۰$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی قسمت‌ها برگشت‌پذیرند. پس اثبات تمام است.

۶- خاصیت تعدی: اگر $a|b$ و $b|c$ آن‌گاه $a|c$.

اثبات خاصیت تعدی در عاد کردن:

$$a|b \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z}\ ,\ b=aq$$
$$b|c \Rightarrow \exists q'\in\mathbb{Z}\ ,\ c=bq'$$

اکنون b را از تساوی بالا در تساوی پایین جای‌گذاری می‌کنیم:

$$c=(aq)q'=a(\underbrace{qq'}_{q''\in\mathbb{Z}})=aq''\Rightarrow a|c$$

۷- تقسیم کلی $a=bq+r$ را در نظر می‌گیریم:

طبق فرض $n|a$ و $n|b$ در نتیجه، n هر مضرب صحیح از b را نیز عاد می‌کند؛ یعنی: برای هر $q\in\mathbb{Z}$ ، $n|bq$.

$$\Rightarrow \begin{cases}n|a\\n|bq\end{cases}\xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} n|a-bq$$

که $a-bq=r$ است. پس $n|r$. یعنی r بر n بخش‌پذیر است.

۸- طبق قضیهٔ تقسیم:

$$\begin{matrix}a=۶q+۳\\a=۷q'+۴\end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix}۷a=۴۲q+۲۱\\۶a=۴۲q'+۲۴\end{matrix}$$
$$\xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} ۷a-۶a=(۴۲q+۲۱)-(۴۲q'+۲۴)$$
$$\Rightarrow a=۴۲(\underbrace{q-q'}_{q''})+(۲۱-۲۴)\Rightarrow a=۴۲q''-۳$$

اما (-۳) به عنوان باقی‌مانده قابل قبول نیست. می‌دانیم: $-۳=۳۹-۴۲$

در نتیجه: $a=۴۲q''-۴۲+۳۹=۴۲(\underbrace{q''-۱}_{k})+۳۹ \Rightarrow a=۴۲k+۳۹$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ برابر ۳۹ است.

۹- طبق تعریف همنهشتی، اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آن‌گاه $m|a-b$. مقدار صحیح c را به طرف راست اضافه و کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow m|a+c-b-c \Rightarrow m|(a+c)-(b+c)$$

در نتیجه، طبق تعریف همنهشتی: $a+c\overset{m}{\equiv}b+c$

به طریق مشابه برای اثبات $a-c\overset{m}{\equiv}b-c$ داریم:

$$m|a+c-b-c\Rightarrow m|(a-c)-(b-c)\Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-c$$

۱۰- ابتدا ۲۳ را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم: $۲۳=۱۱(۲)+۱\Rightarrow ۲۳\overset{۱۱}{\equiv}۱$

حال طرفین را به توان ۶ می‌رسانیم: $(۲۳)^۶\overset{۱۱}{\equiv}۱^۶\Rightarrow(۲۳)^۶\overset{۱۱}{\equiv}۱$

با اضافه‌کردن ۱۶ به طرفین همنهشتی داریم: $(۲۳)^۶+۱۶\overset{۱۱}{\equiv}۱+۱۶\Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۱۷$

اما ۱۷ از پیمانهٔ ۱۱ بزرگ‌تر است، در نتیجه:

$$۱۷=۱(۱۱)+۶\Rightarrow ۱۷\overset{۱۱}{\equiv}۶\Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۶$$

۱۱- بیان ریاضی مسئله به صورت زیر است:

$$۷x-۳\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۳$$

دو بار پیمانهٔ ۹تایی را به عدد ۳ اضافه می‌کنیم تا طرف راست بر ۷ بخش‌پذیر شود:

$$۷x\overset{۹}{\equiv}۳+۲(۹)\Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۲۱$$

اکنون طرفین را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \\ (۷,۹)=۱ \end{cases} \xrightarrow{\div ۷} x \overset{۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۹q+۳$$

یعنی هر عدد صحیح به فرم $x = ۹q+۳$ دارای خاصیت گفته‌شده می‌باشد.

۱۲- اولاً $(۶,۱۴)=۲$ و $۲|۱۰$، پس معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد. برای حل، کل معادله را بر دو تقسیم می‌کنیم:

$$۳x+۷y=۵ \Rightarrow ۷y \overset{۳}{\equiv} ۵$$

اما $۷ \overset{۳}{\equiv} ۱ , ۵ \overset{۳}{\equiv} -۱$ در نتیجه:

$$y \overset{۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow y = ۳k-۱$$

با جای‌گذاری y، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$۳x+۷(۳k-۱)=۵ \Rightarrow ۳x = -۲۱k+۱۲$$

$$\Rightarrow x = -۷k+۴ \Rightarrow \begin{cases} x=-۷k+۴ \\ y=۳k-۱ \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۳- مجموعهٔ رئوس را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌ها را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف $G_۱$ عبارت‌اند از: $V(G_۱)=\{a,b,c,d,e\}$

$$E(G_۱)=\{ab,ae,bc,cd,de\}$$

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف $G_۲$ عبارت‌اند از: $V(G_۲)=\{a,b,c,d,e\}$

$$E(G_۲)=\{ab,ae,bc,cd,de\}$$

چون $V(G_۱)=V(G_۲)$ و $E(G_۱)=E(G_۲)$ پس دو نمودار داده‌شده مربوط به یک گراف هستند.

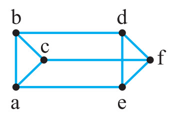
۱۴- الف)

$$deg(a)=۱ ، deg(b)=۱ ، deg(c)=۳$$

$$deg(d)=۱ ، deg(e)=۱ ، deg(f)=۳$$

ب) گراف ۳ـ منتظم یعنی درجهٔ همهٔ رئوس ۳ باشد. f و c که درجه‌شان ۳ است.

حال اگر d به e و b وصل شود و a هم به b و e، آن‌گاه با توجه به شکل درجهٔ تمام رئوس برابر ۳ است، پس یک گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶ داریم.



۱۵- الف) در گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ p، درجهٔ همهٔ رئوس برابر ۳ است پس تعداد یال‌ها $q=\frac{۳\times p}{۲}$ خواهد بود. طبق فرض اگر به این تعداد یال، ۶ یال دیگر اضافه کنیم گراف کامل حاصل می‌شود. در نتیجه:

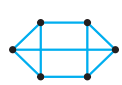
$$\frac{۳p}{۲}+۶=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

که $\frac{p(p-۱)}{۲}$ تعداد یال‌های گراف کامل k_p است.

$$\Rightarrow ۳p+۱۲=p^۲-p \Rightarrow p^۲-۴p-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (p-۶)(p+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۶ \Rightarrow q=\frac{۳\times ۶}{۲}=۹ \\ p=-۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

ب) باید یک گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶ (که دارای ۹ یال خواهد بود) رسم کنیم.



۱۶- الف) مسیر از a به c یعنی از a شروع کنیم.

abedc ⇒ طول مسیر = ۴ یا adebc ⇒ طول مسیر = ۴

ب) ۳تا دور به طول ۴ دارد که عبارت‌اند از:

abeda   abcda   cbedc

۸- مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، مجموعهٔ احاطه‌گری است که کم‌ترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مجموعهٔ احاطه‌گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد. در واقع هر احاطه‌گر مینیمم، حتماً مینیمال هم هست ولی برعکس آن لزوماً برقرار است.

۹- $D=\{a,c,i,d\}$

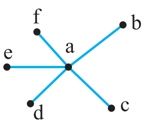
یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است که با حذف هر یک از عضوهایش دیگر احاطه‌گر نیست.

۱۰- $\begin{matrix} n=۱۰ \\ \Delta=۴ \end{matrix} \Rightarrow \gamma(G) \ge \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۵} \right\rceil = ۲ \Rightarrow \gamma \ge ۲$

از طرفی مجموعهٔ $D=\{e,j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \le ۲$. در نتیجه:

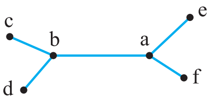
$\gamma(G)=۲$

۱۱- الف)



رأس a به همهٔ رئوس دیگر وصل است پس مجموعه $D=\{a\}$ احاطه‌گر مینیمم است پس $\gamma(G)=۱$.

ب)



$D=\{a,b\} \Rightarrow \gamma(G)=۲$

۱۲- الف) $\underset{۲}{\underline{\ \ }}\ \overbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}^{۶!}\ \underset{۱}{\underline{\ \ }} \Rightarrow ۲\times۶!\times۱=۲!\times۶!$

ب) (ب,ج)$,۱,۲,۴,۵,۶,۸ \Rightarrow ۷!\times۲!$

۱۳- اگر تعداد گل انتخابی از نوع iام را با x_i نشان دهیم آن‌گاه:

$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲$

با شرایط مسئله: $x_۱ \ge ۱\ ,\ x_۴ > ۳\ ,\ x_۶=۱$

پس:

$x_۱ \ge ۱ \qquad x_۴ \ge ۴$

$x_۲ \ge ۰ \qquad x_۵ \ge ۰$

$x_۳ \ge ۰ \qquad x_۶ = ۱$

$\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+۱=۱۲ \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱$

مجموع شرطها: $۱+۰+۰+۴+۰=۵ \Rightarrow ۱۱-۵=۶$

$\Rightarrow \binom{۶+۴}{۴}=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰\times\overset{۳}{\cancel{۹}}\times\cancel{۸}\times۷}{\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}}=۲۱۰$

۱۴-

$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲&۳&۱\\\hline ۱&۲&۳\\\hline ۳&۱&۲\\\hline\end{array} \xrightarrow{\text{جابه‌جایی سطر ۱ و ۲}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۲&۳\\\hline ۲&۳&۱\\\hline ۳&۱&۲\\\hline\end{array}$

$\xrightarrow{\text{جابه‌جایی ستون ۲ و ۳}} B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۳&۲\\\hline ۲&۱&۳\\\hline ۳&۲&۱\\\hline\end{array}$

بررسی متعامدبودن:

$AB=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲۱&۳۳&۱۲\\\hline ۱۲&۲۱&۳۳\\\hline ۳۳&۱۲&۲۱\\\hline\end{array}$

متعامد نیستند زیرا در مربع لاتین آخر عدد دورقمی تکراری داریم.

۱۵- **روش اول**

کل کلاس = ۳۴ نفر

فوتبال $=|F|=۱۵$

والیبال $=|V|=۱۱$

بسکتبال $=|B|=۹$

والیبال و فوتبال $=|F\cap V|=۵$

والیبال و بسکتبال $=|B\cap V|=۶$

فوتبال و بسکتبال $=|F\cap B|=۳$

فوتبال، والیبال و بسکتبال $=|F\cap V\cap B|=۳$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) درست؛ در هر سه عدد متوالی حداقل یکی زوج است پس ضرب سه عدد متوالی زوج خواهد بود.

در هر سه عدد متوالی دقیقاً یکی بر سه بخش‌پذیر است پس حاصل‌ضرب آن‌ها بر سه بخش‌پذیر است.

در نتیجه عدد زوجی که بر سه بخش‌پذیر باشد بر ۶ نیز بخش‌پذیر است.

ب) نادرست؛ مثال نقض:

$\begin{matrix} x=۰ \\ y=۱ \end{matrix} \Rightarrow x^۲+y^۲=۰^۲+۱^۲=(x+y)^۲=(۰+۱)^۲ \Rightarrow ۱=۱ \checkmark$

۲- الف) عدد a شمارندهٔ عدد b است.

ب) $۲\mid m$ زیرا:

$(۲m,۶m^۳)=(۲m,۲\times۳\times m^۲)=$ عوامل مشترک با توان کم‌تر $=۲m$

چون m صحیح است می‌تواند منفی باشد و ب.م.م باید مثبت باشد پس برای m باید قدرمطلق بگذاریم.

۳- دو عدد حقیقی x و y در نظر می‌گیریم: حکم: $xy \le \frac{x^۲+y^۲}{۲}$

به روش بازگشتی داریم: $\Leftrightarrow ۲xy \le x^۲+y^۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy \ge ۰$

$\Leftrightarrow (x-y)^۲ \ge ۰$

گزارهٔ اخیر همواره درست است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند.

۴- از تقسیم هر عدد صحیح بر ۴، باقی‌مانده صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ خواهد بود. عدد اول $p \ge ۵$ را در نظر می‌گیریم. در تقسیم بر ۴ داریم:

$p=۴k$ یا $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۲$ یا $p=۴k+۳$

اگر $p=۴k$، آن‌گاه عدد اول p بر ۴ بخش‌پذیر است که با اول‌بودن p در تناقض است.

اگر $p=۴k+۲$ آن‌گاه: $p=۲(۲k+۱)=۲k'$

یعنی p زوج است اما اعداد اول به غیر از ۲ همگی فردند پس باز هم تناقض است.

در نتیجه $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۳$.

۵- $۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{به توان ۲۵}} (۱۰۰۰)^{۲۵} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵} \overset{۷}{\equiv} -۱$

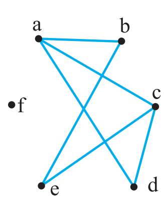
$A=(۱۰۰۰)^{۲۵}\times۹+۱۱ \overset{۷}{\equiv} (-۱)\times۹+۱۱ \overset{۷}{\equiv} -۹+۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow$ باقی‌مانده $=۲$

۶- $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$

اولاً $۷ \overset{۴}{\equiv} ۳$

$\Rightarrow ۳x \overset{۴}{\equiv} ۱ \equiv -۳ \xrightarrow[(۳,۴)=۱]{\div ۳} x \overset{۴}{\equiv} -۱ \Rightarrow x=۴k-۱, k\in\mathbb{Z}$

۷- الف) $N_G(c)=\{a,d,e\}$



ب) رأس f در گراف G از درجهٔ صفر است. این رأس در گراف $\bar{G}$ از درجهٔ ۵ خواهد بود.

پ) abcda

ت) خیر، زیرا رأس f از درجهٔ صفر (تنها) است.

فقط فوتبال $=|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|$

$=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$

فقط والیبال $=|V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|$

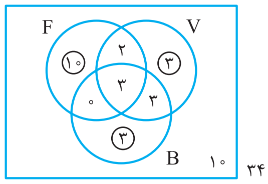
$=۱۱-۵-۶+۳=۳$

فقط بسکتبال $=|B|-|F\cap B|-|V\cap B|-|F\cap B\cap V|$

$=۹-۳-۶+۳=۳ \Rightarrow$ جواب نهایی $=۱۰+۳+۳=۱۶$

روش دوم استفاده از نمودار ون:

فقط یک رشته $=۱۰+۳+۳=۱۶$



۱۶- الف) تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۴عضوی به ۳عضوی:

$۳^۴-(۲^۴+۲^۴+۲^۴-۱^۴-۱^۴-۱^۴+۰^۴)$

$=۸۱-(۱۶+۱۶+۱۶-۱-۱-۱)=۸۱-۴۵=۳۶$

ب) تعداد توابع ۱- ۱ از یک مجموعهٔ ۴عضوی به یک مجموعهٔ ۸عضوی:

$$\frac{۸!}{(۸-۴)!}=\frac{۸!}{۴!}$$

۱۷- $k+۱=۵ \Rightarrow k=۴$

$k\times(\text{تعداد لانه})+۱ \le$ حداقل تعداد کبوتر $\Rightarrow ۴n+۱\le ۵۴$

$\Rightarrow ۴n\le ۵۳ \Rightarrow n\le[\frac{۵۳}{۴}]=۱۳$

یعنی حداکثر ۱۳تا گلدان می‌توان داشت.

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

فصل ۱: آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گوییم.

مثال **برای نتیجه‌گیری‌های کلی زیر مثال نقض بیاورید.**

الف) برای هر عدد حقیقی x و y؛ $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

ب) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

پ) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.

ت) عدد $۲^{۲^n}+۱$ **به ازای همهٔ عددهای طبیعی n، عددی اول است.**

ث) برای هر عدد طبیعی n، عدد $۳^n+۴$ **اول است.**

ج) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

پاسخ الف) قرار می‌دهیم $x=۱۶$ و $y=۹$ آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=\sqrt{۹+۱۶}=۵\\ \sqrt{x}=\sqrt{۱۶}=۴\\ \sqrt{y}=\sqrt{۹}=۳\end{array}\right\}۵\neq ۴+۳$$

ب) اگر دو عدد گنگ را $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه: $\sqrt{۳}+(-\sqrt{۳})=۰$

و صفر عددی گویاست.

پ) برای دو عدد اول ۲ و ۳، مجموع آن‌ها ۵ می‌شود که عددی مرکب نیست.

ت) برای $n=۱,۲,۳,۴$ حاصل $۲^{۲^n}+۱$ اول است، اما برای $n=۵$ داریم:

$$۲^{۲^۵}+۱=۲^{۳۲}+۱=۶۴۱\times ۶۷۰۰۴۱۷$$

که عددی اول نیست.

ث) برای $n=۱,۲,۳$، حاصل $۳^n+۴$ اول است، اما برای $n=۴$ داریم:

$$۳^۴+۴=۸۱+۴=۸۵$$

و ۸۵ عددی اول نیست.

ج) برای $n=۲$ گزاره برقرار نیست. زیرا عدد ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عدد طبیعی متوالی نوشت. (هر عدد به فرم $n=۲^k$، $k\in\mathbb{N}$ مثال نقض است.)

تذکر دیدیم که مثال نقض، روشی برای نشان‌دادن نادرستی یک گزاره است. برای اثبات درستی یک گزاره، روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارت‌اند از: اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، اثبات مستقیم، اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف و اثبات به روش بازگشتی.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال **ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n،** $n^۲+n$ **عددی زوج است.**

پاسخ با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن برای n، مسئله را اثبات می‌کنیم.

حالت اول n زوج باشد، در این صورت: $n=۲k\ ;k\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow n^۲+n=(۲k)^۲+۲k=۴k^۲+۲k=۲(\underbrace{۲k^۲+k}_{k'})=۲k'$$

پس $n^۲+n$ زوج است.

حالت دوم n فرد باشد، در این صورت: $n=۲k+۱\ ;\ k\in W$

$$\Rightarrow n^۲+n=(۲k+۱)^۲+(۲k+۱)$$

$$=۴k^۲+۴k+۱+۲k+۱=۴k^۲+۶k+۲=۲(\underbrace{۲k^۲+۳k+۱}_{k'})=۲k'$$

پس همواره $n^۲+n$ زوج است.

مثال **فرض کنید** $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ **و** $B=\{۳,۴\}$. **اگر** $x\in A$ **و** $\frac{x^۲(x+۱)^۲}{۴}$ **زوج باشد، ثابت کنید** $x\in B$.

پاسخ با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های $x\in A$، مسئله را ثابت می‌کنیم.

$$x=۱\Rightarrow \frac{x^۲(x+۱)^۲}{۴}=\frac{۱\times ۴}{۴}=۱$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x=۲\Rightarrow \frac{x^۲(x+۱)^۲}{۴}=\frac{۴\times ۹}{۴}=۹$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x=۳\Rightarrow \frac{x^۲(x+۱)^۲}{۴}=\frac{۹\times ۱۶}{۴}=۳۶$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x=۳$ عضو B است.

$$x=۴\Rightarrow \frac{x^۲(x+۱)^۲}{۴}=\frac{۱۶\times ۲۵}{۴}=۱۰۰$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x=۴$ عضو B است.

$$x=۵\Rightarrow \frac{x^۲(x+۱)^۲}{۴}=\frac{۲۵\times ۳۶}{۴}=۲۲۵$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

مثال **با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن، ثابت کنید حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.**

پاسخ در مثال اول این بخش ثابت کردیم برای هر عدد طبیعی n، $n^۲+n$ زوج است. $n^۲+n=n(n+۱)=$ ضرب دو عدد متوالی

یعنی ضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است و در نتیجه ضرب سه عدد متوالی نیز همواره زوج خواهد بود؛ پس بر ۲ بخش‌پذیر است. در ادامه نشان می‌دهیم ضرب سه عدد متوالی بر ۳ هم بخش‌پذیر است که از این دو نتیجه می‌گیریم که ضرب سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

با در نظر گرفتن حالت‌های $n=۳k$، $n=۳k+۱$ و $n=۳k+۲$ داریم:

$$n=۳k\Rightarrow n(n+۱)(n+۲)=(۳k)(۳k+۱)(۳k+۲)$$

$$=۳(\underbrace{k(۳k+۱)(۳k+۲)}_{k'})=۳k'$$

$$n=۳k+۱\Rightarrow n(n+۱)(n+۲)=(۳k+۱)(۳k+۲)(۳k+۳)$$

$$=(۳k+۱)(۳k+۲)(۳)(k+۱)=۳(\underbrace{(۳k+۱)(۳k+۲)(k+۱)}_{k'})=۳k'$$

$$n=۳k+۲\Rightarrow n(n+۱)(n+۲)=(۳k+۲)(۳k+۳)(۳k+۴)$$

$$=(۳k+۲)(۳)(k+۱)(۳k+۴)=۳(\underbrace{(۳k+۲)(k+۱)(۳k+۴)}_{k'})=۳k'$$

پس در هر سه حالت ممکن، $n(n+۱)(n+۲)$ مضرب ۳ است. در نتیجه $n(n+۱)(n+۲)$ مضرب ۶ است.

اثبات به روش مستقیم

در روش مستقیم به کمک فرض و با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه می‌گیریم.

مثال **نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n عددی فرد باشد، آن‌گاه:

$$n=2k+1, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4\underbrace{k(k+1)}+1$$

اما k و $k+1$ دو عدد متوالی‌اند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها همواره زوج است. در نتیجه $k(k+1)=2q$؛ بنابراین: $n^2=4(2q)+1=8q+1$

مثال **اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید: a^2+b^2 زوج است.**

پاسخ می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد صحیح a و b زمانی فرد است که هر دوی آن‌ها فرد باشند، پس: $ab=$ فرد $\Rightarrow a=$ فرد، $b=$ فرد

در مثال قبل ثابت کردیم مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} a^2=8q+1 \\ b^2=8q'+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a^2+b^2 &= 8q+1+8q'+1 \\ &= 8q+8q'+2=8(q+q')+2 \\ &= 2(\underbrace{4(q+q')+1}_{k})=2k=\text{زوج} \end{aligned}$$

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از این فرض (که فرض خلف نامیده می‌شود) و فرض اولیه و حقایقی که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا متضاد با فرض اولیه می‌رسیم.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ اگر n^2 عددی گنگ باشد، آن‌گاه n نیز عددی گنگ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n گنگ نباشد (فرض خلف)، در نتیجه n گویاست. می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، گویاست. پس $n\times n=n^2$ نیز گویاست. این نتیجه با فرض اولیهٔ مسئله که « n^2 گنگ است» متضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و n گنگ خواهد بود.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.**

پاسخ ابتدا مسئله را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم: می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر x گنگ باشد، آن‌گاه $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است. برای اثبات فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس $\frac{1}{x}$ گویا است. بنابراین برابر عدد گویای ناصفری مانند $\frac{a}{b}$ است که $a,b\in\mathbb{Z}$ و $a\neq 0$ و $b\neq 0$

$$\frac{1}{x}=\frac{a}{b} \Rightarrow x=\frac{b}{a}=\text{گویا}$$

یعنی x هم گویا است و این با فرض اولیهٔ مسئله در تضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n مضرب ۵ نباشد (فرض خلف) در نتیجه از تقسیم n بر ۵، باقی‌ماندهٔ غیرصفر خواهیم داشت: $n=5q+r$ ، $r=1$ یا 2 یا 3 یا 4

$$\Rightarrow n^2=25q^2+10qr+r^2$$

$$=5(\underbrace{5q^2+2qr}_{k})+r^2=5k+r^2$$

اگر $r=1$، آن‌گاه: $n^2=5k+1$

اگر $r=2$، آن‌گاه: $n^2=5k+4$

اگر $r=3$، آن‌گاه: $n^2=5k+9=\underbrace{5k+5}_{5(k+1)}+4=5k'+4$

اگر $r=4$، آن‌گاه: $n^2=5k+16=\underbrace{5k+15}_{5(k+3)}+1=5k'+1$

پس n^2 در تقسیم بر ۵، دارای باقی‌ماندهٔ غیرصفر است؛ یعنی n^2 نمی‌تواند مضرب ۵ باشد و این نتیجه با فرض اولیه متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات بازگشتی

دو حکم را معادل یا هم‌ارز می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که با حکم اولیه هم‌ارز باشد و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است.

به این ترتیب بازگشت از حکم آخر، درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

مثال **به روش بازگشتی ثابت کنید؛ اگر $x,y>0$ آن‌گاه $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$**

پاسخ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2$$

کل نامساوی را در xy ضرب می‌کنیم. چون x و y هر دو مثبت هستند، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند. بنابراین حکم ثابت شده است.

مثال **به روش بازگشتی نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:**
$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

پاسخ کل نامساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(x^2+z^2-2zx)+(y^2+z^2-2yz)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند پس حکم ثابت شده است.

مثال **اگر n یک عدد طبیعی باشد آیا زوج‌بودن n و زوج‌بودن n^2 هم‌ارزند؟ چرا؟**

پاسخ بله هم‌ارزند. برای اثبات باید نشان دهیم: n زوج است. $\Leftrightarrow$ n^2 زوج است.

مرحلهٔ ۱ فرض می‌کنیم n زوج باشد، آن‌گاه:

$$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(\underbrace{2k^2}_{k'})=2k'$$

پس n^2 هم زوج است.

مرحلهٔ ۲ فرض می‌کنیم n^2 زوج باشد آن‌گاه نشان می‌دهیم n نیز زوج است. به روش برهان خلف؛ فرض می‌کنیم n زوج نباشد. (فرض خلف) پس n فرد است.

$$n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$$

$$=2(\underbrace{2k^2+2k}_{k'})+1=2k'+1$$

یعنی n^2 نیز فرد می‌شود که با فرض زوج‌بودن n^2 متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

تعریف عادکردن: گوییم عدد صحیح a $(a\neq ۰)$، عدد b را می‌شمارد و می‌نویسیم «$a\mid b$»، هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد، به طوری که $b=aq$.

$$\begin{cases} a\mid b \\ a\neq ۰ \end{cases} \Leftrightarrow \exists q\in\mathbb{Z}; b=aq$$

در این صورت می‌گوییم b بر a بخش‌پذیر است.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد، می‌نویسیم $a\nmid b$. مثلاً $۴\mid ۱۲$ زیرا عدد صحیح $q=۳$ وجود دارد که $۱۲=۴\times۳$، ولی $۴\nmid ۱۰$ زیرا عدد صحیحی مانند q وجود ندارد که $۱۰=۴q$ در واقع $\frac{۱۰}{۴}\notin\mathbb{Z}$.

مثال: با توجه به تعریف عادکردن، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۹\mid ۷۲ \Leftrightarrow ۷۲=\cdots\cdots\times\cdots\cdots$

ب) $-۷\mid ۴۲ \Leftrightarrow \cdots\cdots=\cdots\cdots\times(-۷)$

پ) $۳۹=۳\times۱۳ \Rightarrow ۳\mid\cdots\cdots$ و $\cdots\cdots\mid ۳۹$

پاسخ:

الف) $۹\mid ۷۲ \Leftrightarrow ۷۲=۹\times۸$

ب) $-۷\mid ۴۲ \Leftrightarrow ۴۲=-۶\times(-۷)$

پ) $۳۹=۳\times۱۳ \Rightarrow ۳\mid ۳۹$ و $۱۳\mid ۳۹$

مثال: ابتدا نشان دهید که $۲^{۷}\mid ۲^{۱۱}$ و سپس ثابت کنید برای هر $m,n\in\mathbb{N}$ که $m\leq n$، آن‌گاه: $a^m\mid a^n$

پاسخ: $۲^{۷}\mid ۲^{۱۱}$ زیرا عدد صحیح $q=۲^{۴}$ وجود دارد به طوری که: $۲^{۱۱}=۲^{۷}\times۲^{۴}$

برای هر $m,n\in\mathbb{N}$ که $m\leq n$ باشد، $n-m$ برابر با صفر یا عددی طبیعی و $q=a^{n-m}$ عددی صحیح است، به طوری که: $a^n=a^m\times a^{n-m}$

پس $a^m\mid a^n$.

ویژگی‌های عادکردن

ویژگی ۱: اگر a، عدد b را عاد کند، آن‌گاه هر مضرب صحیحی از b را نیز عاد می‌کند.

$$\begin{cases} a\mid b \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a\mid mb$$

مثلاً

$$\begin{cases} ۴\mid ۸ \\ -۳\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow ۴\mid -۳\times۸$$

نتیجهٔ مهم:

$$\begin{cases} a\mid b \\ n\in\mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a\mid b^n$$

(اگر a، عدد b را عاد کند، آن‌گاه هر توان طبیعی از b را نیز عاد می‌کند.)

مثلاً: $۴\mid ۸$ در نتیجه $۴\mid ۸^{۳}$.

تذکر مهم: اگر $a\mid bc$ آن‌گاه لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a\mid b$ یا $a\mid c$. به مثال‌های زیر دقت کنید.

$۴\mid ۴\times۸$ و $۴\mid ۴$ و $۴\mid ۸$

$۴\mid ۴\times۳$ و $۴\mid ۴$ و $۴\nmid ۳$

$۴\mid ۲\times(-۲)$ و $۴\nmid ۲$ و $۴\nmid -۲$

نکته: طرفین یک رابطهٔ عادکردن را می‌توان در عدد صحیح k ضرب کرد و برعکس می‌توان عدد ناصفر و صحیح k را از طرفین ساده نمود؛ یعنی:

$$\begin{cases} a\mid b \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow ka\mid kb$$

اثبات: $a\mid b \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z}; b=aq$

طرفین را در $k\in\mathbb{Z}$ ضرب می‌کنیم: $kb=kaq \Rightarrow ka\mid kb$

برعکس، فرض می‌کنیم $ka\mid kb$، در نتیجه: $\exists q\in\mathbb{Z}; kb=kaq$

k را از طرفین ساده می‌کنیم: $\Rightarrow b=aq \Rightarrow a\mid b$

ویژگی ۲: خاصیت تعدی در رابطهٔ عادکردن برقرار است. $a\mid b \wedge b\mid c \Rightarrow a\mid c$

اثبات:

$a\mid b \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z}; b=aq$

$b\mid c \Rightarrow \exists q'\in\mathbb{Z}; c=bq'$

در نتیجه: $c=(aq)q'=a(qq')=aq'' \Rightarrow c=aq'' \Rightarrow a\mid c$

تذکر: گفتیم که اگر $a\mid b$، آن‌گاه a هر توان طبیعی از b را نیز عاد می‌کند؛ یعنی $a\mid b^n \quad (n\in\mathbb{N})$.

اثبات این ویژگی به کمک خاصیت تعدی نیز انجام می‌پذیرد:

$$a\mid b \wedge b\mid b^n \xrightarrow{\text{تعدی}} a\mid b^n$$

ویژگی ۳: اگر a دو عدد صحیح متفاوت را عاد کند، آن‌گاه a جمع و تفریق آن دو عدد را نیز عاد می‌کند. $a\mid b \wedge a\mid c \Rightarrow a\mid b\pm c$

اثبات:

$a\mid b \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z}; b=aq$

$a\mid c \Rightarrow \exists q'\in\mathbb{Z}; c=aq'$

در نتیجه با جمع و تفریق طرفین تساوی‌ها داریم:

$$b\pm c=aq\pm aq'=a(q\pm q')=aq''$$

$$\Rightarrow b\pm c=aq'' \Rightarrow a\mid b\pm c$$

تذکر: اگر $a\mid b+c$ آن‌گاه همواره **نمی‌توان** نتیجه گرفت: $a\mid b$ یا $a\mid c$. به مثال زیر توجه کنید. $۲\mid ۳+۵$ و $۲\nmid ۳$ و $۲\nmid ۵$

ویژگی ۴: اگر $a\mid b$ و $b\neq ۰$ و a، آن‌گاه $|a|\leq|b|$

اثبات: $a\mid b \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Z}; b=aq$

چون $b\neq ۰$، پس $q\neq ۰$.

چون $q\in\mathbb{Z}$ و $q\neq ۰$ پس $|q|$ عددی طبیعی است؛ بنابراین $|q|\geq ۱$.

$$۱\leq|q| \xrightarrow{\times|a|} |a|\leq|a||q| \Rightarrow |a|\leq|b|$$

نتیجه: اگر $a\mid b$ و $b\mid a$ آن‌گاه $|a|=|b|$

اثبات: طبق ویژگی ۴ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a\mid b \Rightarrow |a|\leq|b| \\ b\mid a \Rightarrow |b|\leq|a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a|=|b|$$

نکته: سه خاصیت مهم دیگر از رابطهٔ عادکردن عبارت‌اند از:

۱) طرفین دو رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هم ضرب کرد.

$$\begin{cases} a\mid b \\ c\mid d \end{cases} \Rightarrow ac\mid bd$$

۲) طرفین رابطهٔ عادکردن را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند.

$$\begin{cases} a\mid b \\ n\in\mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a^n\mid b^n$$

۳) اگر $a\mid b$ و $a\mid c$ آن‌گاه برای هر $m,n\in\mathbb{Z}$: $a\mid mb\pm nc$

مثال: اگر $a\neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $۸m+۳$ و $۱۱m+۴$ بر a بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید: $a=\pm ۱$.

پاسخ: $۸m+۳$ و $۱۱m+۴$ بر a بخش‌پذیرند، پس: $a\mid ۸m+۳, a\mid ۱۱m+۴$

برای این‌که ضریب m در سمت راست هر دو رابطهٔ عادکردن بالا، برابر شوند، طرف راست رابطهٔ اول را در ۱۱ و طرف راست رابطهٔ دوم را در ۸ ضرب می‌کنیم: (ویژگی ۱)

$$a\mid ۸m+۳ \xrightarrow{\times۱۱} a\mid ۸۸m+۳۳$$

$$a\mid ۱۱m+۴ \xrightarrow{\times۸} a\mid ۸۸m+۳۲$$