

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان هندسه (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد، شهریور، دی ۹۸ و دی ۹۹ است، طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، خرداد و شهریور ۹۹ است.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آنچه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت تمام آنچه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان هندسه (۳) نیاز دارید، تنها در ۱۴ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید! یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



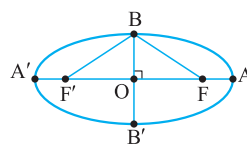
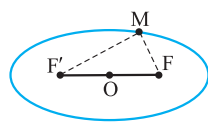
فهرست

بازم‌بندی درس هندسه (۳)

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول	۱۰	۴	۶
فصل دوم	۱۰	۳	۸
	-	۵	
فصل سوم	-	۸	۶
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

صفحه	صفحه	نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
۲۳	۳	اول	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۱
۲۴	۴	اول	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۲
۲۶	۵	اول	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۳
۲۷	۶	اول	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۴
۲۹	۷	دوم	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۹۸
۳۰	۹	دوم	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۶ نهایی شهریور ۹۸
۳۱	۱۱	دوم	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۷ نهایی دی ۹۸
۳۳	۱۳	دوم	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۸ نهایی دی ۹۹
۳۴	۱۵	دوم	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۰
۳۵	۱۷	دوم	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۰ نهایی شهریور ۱۴۰۰
۳۶	۱۹	دوم	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۱ نهایی خرداد ۹۹
۳۸	۲۱	دوم	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۹۹
۴۰				درس‌نامه توپ برای شب امتحان

هندسه (۳)	رشته: ریاضی و فیزیک	مدت آزمون: ۱۳۵ دقیقه	kheilisabz.com	نمره	ردیف
آزمون شماره ۱					
فصل اول					
۰/۲۵	۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد، آن گاه $(A^{-1})^{-1} = \dots\dots\dots$.			
۱	۲	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اگر A, B, C سه ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند آن گاه $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$. ب) اتحادهای جبری درباره ماتریسها برقرار هستند. پ) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ وارون پذیر است. ت) اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند، آن گاه $ BA = AB = A B $.			
۱	۳	ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = 2i + 3j$ را به صورت آرایه مستطیلی بنویسید. سپس مجموع درایه های روی قطر اصلی را بیابید. با توجه به سطر و ستون باید اعداد داخل ماتریس را مشخص کنی.			
۱/۵	۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: $A^2 - 4A - 5I_3 = \bar{O}$. هواست باشه I_3 یعنی $I_{3 \times 3}$.			
۱/۵	۵	دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$. دقت کن که باید تمام درایه های ماتریس AB صفر شوند.			
۱	۶	اگر A یک ماتریس وارون پذیر از مرتبه 2×2 باشد و $ A = -2$ ، آن گاه حاصل عبارت زیر را بیابید. $ A^2 - 4 A^{-1} + 3$ دقت کن ضریب ۳ بیرون از درمیان است ولی توان ۴ داخل درمیان.			
۱/۲۵	۷	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، حاصل عبارت $\delta A^{-1} + B^{-1}$ را به دست آورید. ضریب ۵ فقط برای A^{-1} است.			
۱/۵	۸	درمیان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ را یک بار به روش ساروس و یک بار بر حسب ستون اول محاسبه کنید. هواست باشه حاصل درمیان از هر دو روش باید یکسان شود.			
۱	۹	مقدار a را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ ax - y = 2a \end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد. بی شمار جواب برای دستگاه، یعنی منطبق بودن دو خط.			
فصل دوم					
۰/۷۵	۱۰	جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید. الف) یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر $\dots\dots\dots$. ب) رابطه ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر $\dots\dots\dots$. پ) اگر در معادله تقاطع خط و دایره داشته باشیم $\Delta > 0$ ، آن گاه خط و دایره $\dots\dots\dots$.			
۰/۷۵	۱۱	یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه P عمود بر محور رویه مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید. دقت کن که صفحه P از رأس مخروط نگذشته.			
۰/۷۵	۱۲	مکان هندسی موردنظر را با رسم شکل مناسب مشخص کنید. «مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصله ثابت ۱ واحد باشند.» خط L از طرفین نامحدود است.			
۱/۵	۱۳	خط d و نقطه A غیرواقع بر آن داده شده اند. نقطه ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه A به فاصله L واحد باشد. (در مورد تعداد جوابها بحث کنید).			
۱/۵	۱۴	الف) دایره به معادله $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ را رسم کنید. ب) مساحت این دایره چه قدر است؟ برای مناسبه مسامت دایره فقط به شعاع نیاز داری.			
۱/۵	۱۵	به روش مربع کامل کردن، شعاع و مرکز دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ را بیابید. راه حل تشریحی لازمه نه استفاده از فرمول.			
۱/۵	۱۶	مقدار a را چنان بیابید که خط $y + 3x = a$ بر دایره $2x^2 + 2y^2 - 3x + y = 0$ مماس باشد. به ضریب ۲ برای x^2 و y^2 دقت کن.			
۱/۷۵	۱۷	وضعیت دو دایره روبه رو را نسبت به هم بررسی کنید. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$			
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید			

شماره	kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۳۵ دقیقه	رشته: ریاضی و فیزیک	هندسه (۳)
نمره	آزمون شماره ۹			ردیف
۱	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر است.</p> <p>(ب) اگر صفحه P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک است.</p> <p>(پ) در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a} = ۰$ بیضی به تبدیل می‌شود.</p> <p>(ت) در فضای \mathbb{R}^3، نقطه $(-۳, ۲, -۵)$ در ناحیه (کنج) دستگاه مختصات قرار دارد.</p>			۱
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) اگر A و B دو ماتریس هم‌رتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA = rB$ آن‌گاه داریم: $A = B$.</p> <p>(ب) مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه A است.</p> <p>(پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.</p> <p>(ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.</p>			۲
۱	<p>دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.</p>			۳
۱/۵	<p>اگر $۲A = \begin{bmatrix} A & -۴ \\ ۱ & A \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل A^{-1} را بیابید.</p>			۴
۱	<p>جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید.</p> $\begin{cases} ۳x - ۴y = ۷ \\ ۲x + y = ۱ \end{cases}$			۵
۱	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲, ۱)$ بوده و بر خط $۳x + ۴y = -۵$ مماس باشد.</p>			۶
۱/۵	<p>وضعیت دایره $x^2 + y^2 - ۶x - ۲y + ۹ = ۰$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.</p>			۷
۱		<p>در شکل مقابل اگر $OA = a, OB = b, OF = c$ باشد، ثابت کنید:</p> $a^2 = b^2 + c^2$	۸	
۱/۵		<p>نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.</p> <p>(الف) نشان دهید مثلث $MF F'$ قائم‌الزاویه است.</p> <p>(ب) طول MF را به دست آورید.</p> <p>(ج) کانون‌های بیضی هستند و $(MF < MF')$</p>	۹	
۱/۲۵	<p>اگر نقطه $A(۲, ۳)$ رأس سهمی و $y = ۷$ معادله خط هادی سهمی باشد:</p> <p>(الف) معادله سهمی را به دست آورید.</p> <p>(ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.</p>			۱۰
۰/۷۵	<p>در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است. فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.</p>			۱۱
۱/۵	<p>به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>(الف) اگر $y = b$ معادله صفحه‌ای در فضای \mathbb{R}^3 باشد که از نقطه $A = (۲, -۳, ۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چه قدر است؟</p>			۱۲

شماره	kheilisabz.com	زمان آزمون: ۱۳۵ دقیقه	رشته: ریاضی و فیزیک	هندسه (۳)
نمره	آزمون شماره ۹			ردیف
	نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۰			
۱/۵	<p>(ب) معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات \mathbb{R}^3 است؟ (پ) در فضای \mathbb{R}^3، نقطه A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه yoz و نقطه B = (-۴, ۶, -۳) مفروض اند. مختصات وسط AB را بیابید.</p>			۱۳
۱/۲۵	<p>اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ باشند آن گاه تصویر قائم بردار \vec{a} بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.</p>			۱۴
۱/۲۵	<p>اگر \vec{a}، \vec{b} و \vec{c} بردارهایی باشند به ترتیب با طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این ویژگی که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$، مقدار عددی عبارت $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را به دست آورید.</p>			۱۵
۲	<p>ثابت کنید: دو بردار غیرصفر \vec{a} و \vec{b} با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.</p> <p>سه بردار $\vec{a} = (2, 3, 1)$، $\vec{b} = (-1, 1, 0)$ و $\vec{c} = (2, 1, -2)$ مفروض اند. الف) برداری عمود بر دو بردار $-2\vec{b}$ و \vec{c} را به دست آورید. ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار \vec{a}، \vec{b} و \vec{c} تولید می‌شود را به دست آورید.</p>			۱۶
۲۰	موفق باشید			جمع نمرات

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۵- برای دو ماتریس غیرصفر $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

حاصل ضرب AB را تشکیل می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

یعنی ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس غیرصفر، ماتریس صفر بشود.

۶- می‌دانیم توان از دترمینان خارج می‌شود، یعنی $|A^k| = |A|^k$. هم‌چنین $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

در نتیجه: $|A^4| - 4|A^{-1}| + 3 = |A|^4 - 4 \times \frac{1}{|A|} + 3$

$$= (-2)^4 - 4 \times \frac{1}{-2} + 3 = 16 + 2 + 3 = 21$$

۷- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - (-2) = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 4 - 3 = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\Delta A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جمع نظریه نظیر درایه‌ها}} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

۸- ساروس:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (+2 + 60 + 70) - (-28 + 15 - 20) = 132 - (-33) = 132 + 33 = 165$$

بسط ستون اول:

$$|A| = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - 15) - 2(-10 - 35) + 4(15 + 7) = -13 + 90 + 88 = 165$$

۹- برای این که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، باید نسبت ضرایب با هم برابر باشند

یعنی: $\frac{2}{a} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2a}$

از حل تناسب اول داریم: $3a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

با جای گذاری $a = -\frac{2}{3}$ ، هر سه کسر با هم برابرند.

$$\frac{2}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{-1} = \frac{4}{2(-\frac{2}{3})} \Rightarrow -3 = -3 = -3$$

بنابراین به ازای $a = -\frac{2}{3}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (توجه کنید اگر تساوی بین

کسرها برقرار نمی‌شد، آن‌گاه دستگاه به ازای هیچ مقدار a ، دارای بی‌شمار جواب نبود.)

۱۰- الف) از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.

ب) $a^2 + b^2 > 4c$

پ) در دو نقطه متقاطع‌اند.

A-۱

۲- الف) درست. خاصیت توزیع پذیری در ماتریس‌ها برقرار است.

ب) نادرست. زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. در نتیجه اتحادهای جبری برقرار نیستند.

پ) نادرست. زیرا $|A| = 12 - 12 = 0$. می‌دانیم شرط وارون پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq 0$ باشد.

ت) درست. دترمینان روی ضرب ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باز می‌شود.

۳- i شماره سطر و j شماره ستون است. $1 \leq i, j \leq 3$

$a_{11} = 2(1) + 3(1) = 5$

$a_{12} = 2(1) + 3(2) = 8$

$a_{13} = 2(1) + 3(3) = 11$

$a_{21} = 2(2) + 3(1) = 7$

$a_{22} = 2(2) + 3(2) = 10$

$a_{23} = 2(2) + 3(3) = 13$

$a_{31} = 2(3) + 3(1) = 9$

$a_{32} = 2(3) + 3(2) = 12$

$a_{33} = 2(3) + 3(3) = 15$

در نتیجه ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$ خواهد بود. مجموع درایه‌های

روی قطر اصلی یعنی: $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + 10 + 15 = 30$

۴- A^2 یعنی A را دو بار در خودش ضرب کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$4A$ یعنی عدد ۴ را در تمام درایه‌های ماتریس A ضرب کنیم:

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

I_3 ماتریس همانی مرتبه 3×3 ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است و $5I_3$ برابر است با $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

در نتیجه: $A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$

اگر عملیات تفریق را روی درایه‌های نظیر به نظیر انجام دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a = \frac{5}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ 2-a = -\frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{4} \end{cases}$$

۱۷- ابتدا باید مرکز و شعاع دو دایره را مشخص کنیم. در دایره اول:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

قرینه نصف ضریب X و ضریب Y مرکز را تشکیل می‌دهند:

$$O = \left(-\frac{(-2)}{1}, -\frac{4}{1}\right) = (1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{6} \quad \text{هم‌چنین شعاع دایره اول برابر است با:}$$

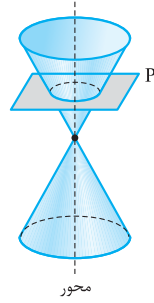
$$O' \left(-\frac{4}{1}, -\frac{2}{1}\right) = (-2, -1) \quad \text{برای دایره دوم نیز داریم:}$$

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 - 4} = 2$$

اکنون طول پاره‌خط OO' را محاسبه می‌کنیم:

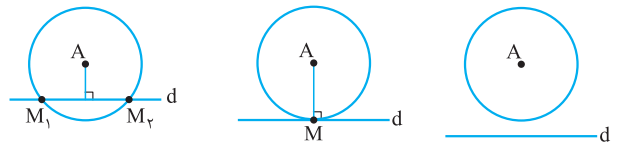
$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$$

چون $\sqrt{6} - 2 < \sqrt{10} < \sqrt{6} + 2$ است پس دو دایره متقاطع‌اند.



۱۲- دو خط موازی با خط L و به فاصله ۱ واحد از آن، که در دو طرف خط L هستند.

۱۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله معلوم L باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع L است. اگر این دایره خط d را در دو نقطه قطع کند، آن دو نقطه، نقطه‌های مطلوب هستند و مسئله دارای دو جواب است. اگر این دایره بر خط d مماس باشد، نقطه تماس، نقطه مطلوب است و مسئله دارای یک جواب است. اگر این دایره، خط d را قطع نکند، مسئله دارای جواب نیست.



(مسئله جواب ندارد.) (M تنها جواب مسئله است.) (M_1 و M_2 دو جواب مسئله هستند.)

۱۴- الف) ابتدا معادله دایره را استاندارد می‌کنیم، در پرانتز دوم از ضریب y فاکتور می‌گیریم:

$$4(x-1)^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad \div 4 \rightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ریشه داخلی پرانتزها، مرکز دایره را تشکیل می‌دهند و جذر مقدار ثابت، همان شعاع دایره خواهد بود.

$$O\left(1, -\frac{1}{2}\right), \quad R = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{(ب)}$$

۱۵- xها را کنار هم و yها را کنار هم قرار می‌دهیم. سپس هر پرانتز را مربع کامل می‌کنیم:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) = 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2 + 2x + 1) - 1}_{\text{اتحاد}} + \underbrace{(y^2 - 4y + 4) - 4}_{\text{اتحاد}} = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

ریشه داخلی پرانتزها مرکز و جذر مقدار ثابت، شعاع دایره است.

$$\left. \begin{aligned} x+1=0 &\Rightarrow x=-1 \\ y-2=0 &\Rightarrow y=2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow O(-1, 2), \quad R = \sqrt{5}$$

۱۶- برای این که خط بر دایره مماس شود، باید فاصله خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره باشد، یعنی $OH = R$.

$$2x^2 + 2y^2 - 3x + y = 0 \quad \div 2 \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$$

$$O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{-\frac{3}{2}}{1}, -\frac{\frac{1}{2}}{1}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} - 0} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$OH = \text{فاصله مرکز دایره تا خط} = \frac{\left|3\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4} - a\right|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|2-a|}{\sqrt{10}}$$

باید $\frac{|2-a|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ، پس: $|2-a| = \frac{10}{4}$ ؛ در نتیجه $|2-a| = \frac{5}{2}$.

۳- چون A قطری است پس درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \quad n + 1 = 0 \Rightarrow n = -1$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |2A| = |A|^2 + 4 \quad -4$$

$$\xrightarrow{A \times A} 2^2 |A| = |A|^2 + 4 \Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad -5$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 8 = 11 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{پس دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 11 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

۶- فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$3x + 4y + 5 = 0 \quad (\text{خط مماس})$$

$$R = \frac{|6 + 4 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

۷- مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ برابر است با:

$$O\left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) = (3, 1)$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 36} = 1$$

مرکز و شعاع دایره دوم: $O'(0, 0)$

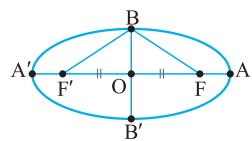
$$R' = 1$$

$$OO' = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$R + R' = 2$$

$$R - R' = 0$$

$OO' > R + R'$ ($\sqrt{10} > 2$) پس دو دایره متخارج‌اند.



۸- نقطه B روی عمود منصف پاره خط FF' است

پس فاصله B از دو سر پاره خط $F'F$ یکسان است.

$$\Rightarrow BF = BF'$$

$$BF + BF' = 2a$$

از طرفی B روی بیضی است پس طبق تعریف بیضی:

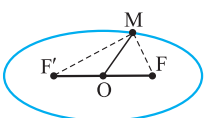
$$BF = BF' = a$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle BOF$ داریم:

$$OB = b$$

$$OF = c \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} BF^2 = OB^2 + OF^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$BF = a$$



$$9 - \text{الف} \quad 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \quad (\text{قطر بزرگ})$$

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3 \quad (\text{قطر کوچک})$$

در بیضی $a^2 = b^2 + c^2$ پس:

$$c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

یعنی $OF = OF' = 4$

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

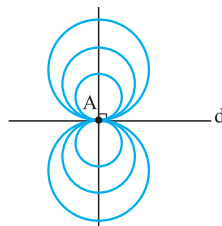
۱- الف) ۸، چون ماتریس اسکالر است پس $f = e = c = 0$ و $a = b = 2$:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

خط (ب) دایره (ت) ششم

۲- الف) درست

ب) نادرست



یک خط عمود به جز خود A

پ) درست

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos \theta < 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta < 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$$

ت) نادرست

$$\vec{b} \times \vec{c} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(-2\vec{b}) \times \vec{c} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(4, 4, 6) = (-\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{6}{\sqrt{3}})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -4 - 6 - 3 = -13 \Rightarrow V = |-13| = 13$$

اولاً:
ثانياً:

از طرفی طبق فرض $OM = 4$ در نتیجه:
پس OM نقش میانه وارد بر FF' را دارد و نصف آن طول دارد. پس مثلث در رأس M قائمه است.

$$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' = 10 - MF \quad (ب)$$

$$\xrightarrow[\text{مثلث}]{\text{فیتاغورس در}} FF'^2 = MF^2 + MF'^2 \Rightarrow 16 = MF^2 + (10 - MF)^2$$

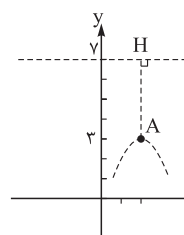
قرار می‌دهیم: $MF = x$

$$\Rightarrow 64 = x^2 + (10 - x)^2 \Rightarrow 64 = x^2 + 100 - 20x + x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 18 = 0$$

$$\Delta = 100 - 72 = 28 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$x = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 5 \pm \sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} MF = 5 - \sqrt{7} \\ MF' = 5 + \sqrt{7} \end{cases}$$



۱۰- الف) رأس سهمی $A(2, 3)$ و خط هادی $y = 7$ را رسم می‌کنیم.

طبق شکل سهمی قائم و دهانه سهمی رو به پایین است. فاصله رأس تا خط هادی ۴ واحد است پس $a = -4$.

$$(x - 2)^2 = 4(-4)(y - 3)$$

$$F(2, 3 - 4) = (2, -1) \quad (ب)$$

۱۱- اگر قطر دهانه دیش را با $2b$ و گودی را با h نمایش دهیم فاصله کانونی برابر $a = \frac{4b^2}{16h}$ است.

$$h = 9 \Rightarrow a = \frac{(60)^2}{16(9)} = 25$$

$$2b = 60$$

(ب) محور Z ها

$$b = -3 \quad (الف) ۱۲$$

(پ) در صفحه YOZ ، $x = 0$ است پس:

$$A(0, 2, 3)$$

$$B(-4, 6, -3)$$

$$AB \text{ مختصات وسط} = \left(\frac{0-4}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = (-2, 4, 0)$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|} (\vec{b} + \vec{c}) \quad -۱۳$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) = (2, -3, 6)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -3, 4) \cdot (2, -3, 6) = 2 + 9 + 24 = 35$$

$$|\vec{b} + \vec{c}|^2 = (\sqrt{4+9+36})^2 = 49$$

$$\vec{a}' = \frac{35}{49} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{5}{7} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{5}{7} (2, -3, 6) = \left(\frac{10}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{30}{7}\right)$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = 0 \quad -۱۴$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{14}{2} = -7$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \quad -۱۵$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \quad (|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۱۶- الف) بردار عمود بر دو بردار \vec{b} و $-\vec{2b}$ برابر است با ضرب خارجی آن‌ها:

$$(-2\vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4, 4, 6)$$

(ب) حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ و \vec{c} برابر است با:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

۴) ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرهای آن با تعداد ستون‌های آن برابر باشد را ماتریس

مربعی مرتبه n ($n \times n$) می‌نامیم. مانند: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ یا $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

نکته: در ماتریس‌های مربعی، درایه‌هایی که شماره سطر و ستون برابر دارند (درایه‌های قطر اصلی $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$) را درایه‌های قطر اصلی ماتریس می‌نامیم. مثلاً در ماتریس‌های

مربعی بالا، به ترتیب قطرهای اصلی ۱ و ۵ هستند.

۴) ماتریس قطری: ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های روی قطر اصلی دلخواه هستند) را ماتریس قطری می‌نامیم. مانند:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

۵) ماتریس اسکالر: ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند را ماتریس اسکالر می‌نامیم. مانند:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

نکته: در حالت خاص اگر درایه‌های روی قطر اصلی همه برابر ۱ باشند، آن ماتریس را همانی نامیده و با I نشان می‌دهند.

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

۶) ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با \bar{O} نشان می‌دهیم. مانند:

$\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیره نظیر با هم برابر باشند، یعنی برای هر j و i ، $a_{ij} = b_{ij}$ باشد.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & 2+b \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1-b & 1 \\ a+b & -1 \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبه 2×2 هستند (پس هم‌مرتبه‌اند). اکنون باید درایه‌های نظیره نظیر را برابر هم قرار دهیم: $\begin{cases} 1-b=a \Rightarrow a+b=1 \\ 1=2+b \Rightarrow b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=2$

جمع و تفریق ماتریس‌ها

برای جمع و تفریق دو ماتریس اولاً باید دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، ثانیاً: درایه‌ها را نظیره نظیر با هم جمع یا تفریق می‌کنیم. مانند:

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

فصل: ماتریس و کاربرد

درس: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و ... نشان می‌دهیم. مثلاً:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \sqrt{2} & 0/5 \end{bmatrix}$
 $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

تعریف مرتبه ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m \times n}$

و می‌خوانیم « A ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است». مثلاً ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

یک ماتریس 3 سطری و 2 ستونی است، بنابراین مرتبه‌اش 3×2 است.

نکته: نمایش کلی ماتریس A به صورت $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ است، که a_{ij} درایه واقع در سطر i و ستون j هستند. m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها می‌باشد.

مثلاً: $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

مثال: ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت $a_{ij} = 2i - j$ تعریف شده است. ماتریس A را با درایه‌هایش بنویسید.

پاسخ: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

برای درایه a_{11} داریم: $i=1, j=1$ پس: $a_{11} = 2(1) - 1 = 1$
 برای درایه a_{12} داریم: $i=1, j=2$ پس: $a_{12} = 2(1) - 2 = 0$
 و به همین ترتیب: $a_{13} = 2(1) - 3 = -1$ $a_{21} = 2(2) - 1 = 3$
 $a_{22} = 2(2) - 2 = 2$ $a_{23} = 2(2) - 3 = 1$

در نتیجه ماتریس A به صورت مقابل است: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد. مانند $A = [3 \ 2 \ -1]_{1 \times 3}$

۲) ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد. مانند $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$



ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

عدد حقیقی r و ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب عدد r در ماتریس A را با نماد rA نمایش می‌دهیم که r در همه درایه‌های ماتریس A ضرب می‌شود.

$$rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $2A + 3B$ را به دست آورید.

نکته: عدد 2 در تمام درایه‌های ماتریس A و عدد 3 در تمام درایه‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$2A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 3B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس: اگر $A_{m \times n}$ ، آن‌گاه قرینه ماتریس A ، از ضرب عدد -1 در ماتریس A به وجود می‌آید و آن را با $-A$ نمایش می‌دهیم.

توجه شود که $A + (-A) = \bar{O}$.

نکته: به کمک قرینه یک ماتریس می‌توان تفاضل دو ماتریس را به صورت زیر تعریف کرد:

$$A - B = A + (-B)$$

خواص جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A و B و C سه ماتریس هم‌مرتبه $m \times n$ بوده، r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه:

① $A + B = B + A$ (خاصیت جابه‌جایی)

② $A + (B + C) = (A + B) + C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

③ $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$ (عضو خنثی جمع)

④ $A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$ (عضو قرینه)

⑤ $r(A \pm B) = rA \pm rB$ ⑥ $(r \pm s)A = rA \pm sA$

⑦ $A = B \Rightarrow rA = rB$ ⑧ $\begin{cases} rA = rB \\ r \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A = B$

اثبات خاصیت‌های (۵) و (۶):

اثبات (۵): فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$.

$$r(A \pm B) = r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r([a_{ij} \pm b_{ij}]) = [r(a_{ij} \pm b_{ij})]$$

$$= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] = r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] = rA \pm rB$$

اثبات (۶): فرض می‌کنیم $A = [a_{ij}]$.

$$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}] = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}]$$

$$= r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$$

ضرب ماتریس‌ها

دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب A در B ، یعنی زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد (n). آن‌گاه ماتریس AB از مرتبه $m \times p$ است. نکته مهم این‌که، برای پیدا کردن درایه سطر i و ستون j حاصل ضرب AB ، باید درایه‌های سطر i ام ماتریس A را نظریه‌نظیر در درایه‌های نظیرش در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم، سپس حاصل آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس BA را محاسبه کنید.

نکته: تعداد ستون‌های B (تا ۳) با تعداد سطرهای A (تا ۳) برابر است، پس ضرب BA تعریف شده است. برای محاسبه ماتریس BA ، باید درایه‌های هر سطر B را در درایه‌های متناظرش در هر ستون A ضرب کنیم:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

مثلاً درایه سطر اول و ستون اول BA به صورت زیر محاسبه شده است:

$$1 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 = 7$$

نکته: توجه شود که در مثال بالا ماتریس AB تعریف نمی‌شود. زیرا تعداد ستون‌های A (تا ۳) با تعداد سطرهای B (تا ۲) برابر نیست.

سه خاصیت مهم ضرب ماتریس‌ها

① ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی: $A \times B \neq B \times A$ اما در حالت خاص ضرب ماتریس I (همانی) در هر ماتریس مربعی دلخواه (با شرط هم‌مرتبه بودن با I) خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:

$$A \times I = I \times A = A$$

در واقع ماتریس همانی I ، در عملیات ضرب ماتریس‌ها عضو خنثی است.

② ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد. یعنی: $A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$

③ ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

نکته: دقت کنید که همیشه باید حواسمان باشد که ضرب دو ماتریس تعریف شده باشد.

دو نکته مهم درباره ضرب ماتریس‌ها

① اگر A و B دو ماتریس ضرب‌پذیر باشند و $AB = \bar{O}$ ، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$. به بیان دیگر می‌توان دو ماتریس ناصفر A و B یافت، به طوری که ضرب آن‌ها برابر ماتریس صفر شود.

مثال: دو ماتریس ناصفر 2×2 مثال بزنید که ضرب آن‌ها ماتریس صفر شود.

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه AB برابر است با:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

② قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B = C$.

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ؛

آن‌گاه $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ اما $B \neq C$.

نکته: توان در ماتریس: منظور از ماتریس A^n این است که ماتریس A را n بار در خودش ضرب کنیم. طبیعی است ماتریسی قابل ضرب کردن در خودش است که مربعی باشد. پس توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

⋮

نکته: اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای محاسبه توان آن، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

فرم ماتریسی دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب ماتریس مجهولات ماتریس جواب

نماد ماتریس ضرایب $A =$

نماد ماتریس مجهولات $X =$

نماد ماتریس جواب $B =$

$$\Rightarrow AX = B$$

برای حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول به روش ماتریس وارون، ابتدا فرم ماتریسی

$$AX = B$$

دستگاه را می‌نویسیم:

سیس اگر A وارون‌پذیر باشد، وارون A را از سمت چپ در B ضرب می‌کنیم:

$$X = A^{-1}B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{ماتریس ضرایب}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \text{ماتریس مجهولات} \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{ماتریس جواب}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

فرم ماتریسی دستگاه:

$$|A| = 6 - 1 = 5$$

بنابراین باید وارون A را محاسبه کنیم:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{5} \\ \frac{5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -2, y = 1$$

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول

یک دستگاه دو معادله دو مجهول، از دو معادله تشکیل می‌شود، هر معادله یک خط است. منظور از حل دستگاه، بررسی وضعیت نسبی این دو خط است که سه حالت خواهد داشت: موازی، منطبق و متقاطع.

دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

جواب دستگاه

$$a'x + b'y = c' \quad ax + by = c$$

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، آن‌گاه دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب دارد که مختصات همان نقطه تقاطع دو خط است.

$$ax + by = c \\ a'x + b'y = c'$$

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط با هم موازی‌اند و دستگاه فاقد جواب است.

$$ax + by = c \\ a'x + b'y = c'$$

ج) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

تذکره: اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله دو مجهول را تشکیل دهیم:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

اگر $|A| \neq 0$ باشد، آن‌گاه دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع‌اند).

اگر $|A| = 0$ باشد، آن‌گاه دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی) یا دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط منطبق‌اند).

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^2 - 2A$ را بیابید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

درس ۲: وارون ماتریس و دترمینان

تعریف: برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی مانند B است، به طوری که $AB = BA = I$. در این صورت B را وارون A

می‌نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

تذکره: وارون ماتریس A در صورت وجود منحصر به فرد است.

نحوه محاسبه وارون ماتریس 2×2

وارون ماتریس 2×2 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

مقدار $ad - bc$ را دترمینان ماتریس A نامیده و با $|A|$ نشان می‌دهیم.

$$|A| = ad - bc$$

توجه شود که محاسبات بالا، فقط برای ماتریس‌های 2×2 است.

تذکره: مقدار $|A|$ در محاسبه A^{-1} در مخرج کسر ظاهر می‌شود، پس شرط وارون‌پذیری ماتریس A ، آن است که $|A| \neq 0$.

مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود محاسبه کرده، سیس

پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

پاسخ: ابتدا دترمینان A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = 3 - (-2) = 5 \neq 0$$

پس ماتریس A وارون‌پذیر است.

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: باید از A دو بار وارون بگیریم. حدس ما این است که ماتریس اولیه حاصل شود.

$$|A| = 4 - 3 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

حال وارون A^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A$$

در نتیجه: $(A^{-1})^{-1} = A$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس وارون

یک دستگاه دو معادله دو مجهول به صورت $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.