ریاضی ۱

آموزش و تست

دهم

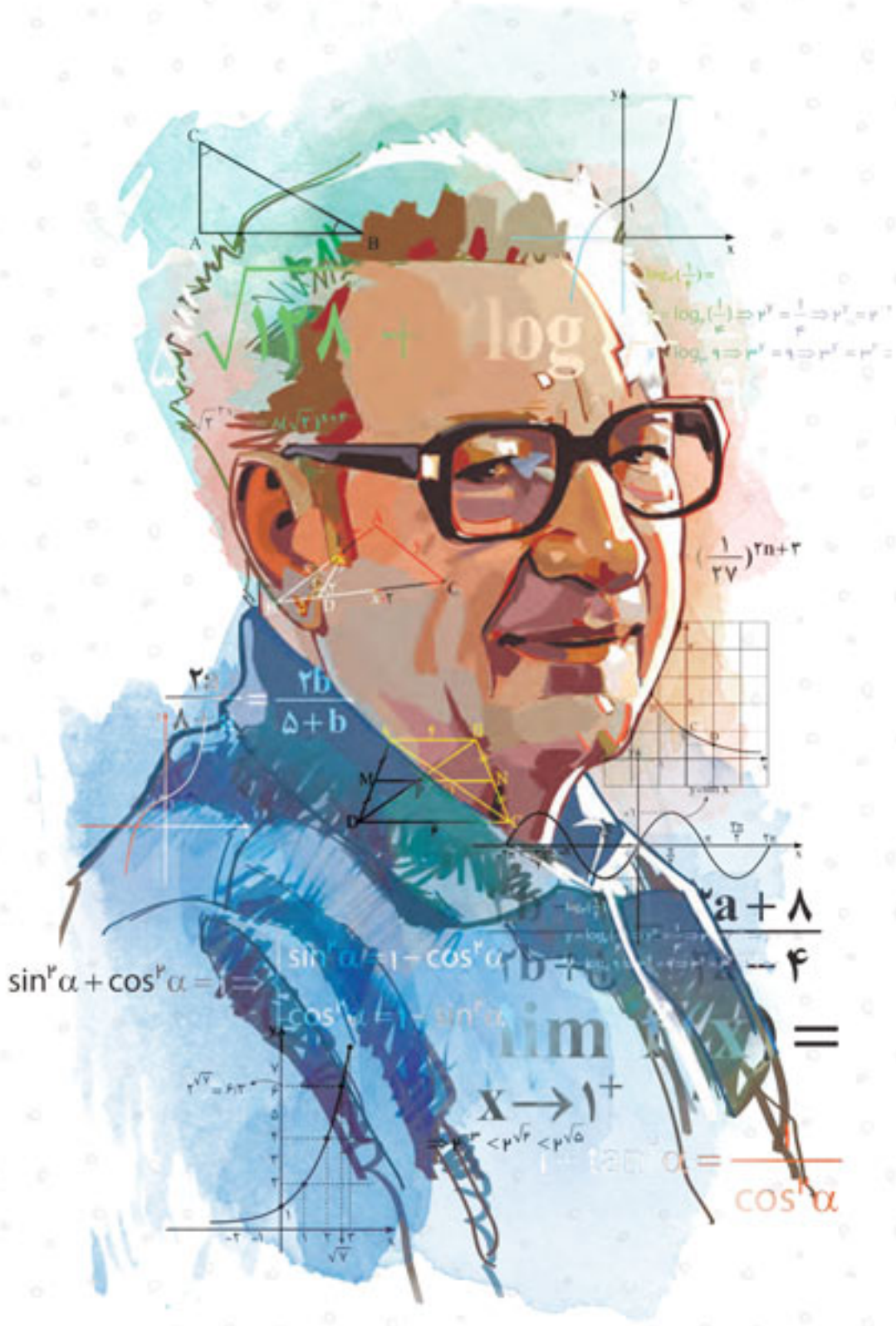
پُر از تست‌های دوست‌داشتنی

• عباس اشرفی • وهاب تقی‌زاده • مصطفی دیداری

• مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

• مشاور علمی: استاد هوشنگ نظری

مهروماه



تقدیم به استاد پرویز شهریاری

پرویـز شـهریاری (۲ آذر ۱۳۰۵، کرمان - ۲۲ اردیبهشـت ۱۳۹۱، تهـران) ریاضی‌دان و از چهره‌هـای ماندگار در زمینه‌ی دانش و آموزش ایران است.

دوران کودکی شهریاری دوران سختی از نظر معیشتی بود. او تا سال سوم دبیرستان را در دبیرستان ایرانشهر در شـهر کرمان گذراند و وارد دانشسـرای مقدماتی کرمان شـد. در خرداد ۱۳۲۳ دانش‌آموخته شد و برای ادامـه تحصیـل به تهران آمد.در تهران در سـال ۱۳۳۲ در رشـته ریاضی در دانشـکده علوم دانشـگاه تهران دانش‌آموخته شـد. پس از آن یک سال در شـیراز آموزگار بود. در ۱۳۳۳ به تهران بازگشت و به فعالیت‌های درخشـان علمی و آموزشـی خود ادامه داد. اسـتاد پرویز شهریاری سـرانجام در ۸۶ سالگی و در روز جمعه ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۱ به علت مشکل تنفسی در بیمارستان جم تهران زندگی را بدرود گفت.

فعالیت‌ها: ■ انتشـار نشـریاتی چون اندیشـه ما، وهومن و چیسـتا، آشـتی با ریاضیات (بعدها: آشـنایی با ریاضیات) و سـردبیری مجلهٔ دانشـمند ■ تأسیس دبیرسـتان‌های خوارزمی، مرجان و مدرسـه عالی اراک ■ تالیـف کتاب‌های ریاضـی و هم‌زمان با آن تالیف و ترجمه صدها کتاب در تاریخ و آموزش ریاضیات ■ انتشـار ماهنامه «اندیشـه ما» ■ تهیه یک دوره کتاب درسـی ریاضی دوره اول دبیرسـتان ■ راه‌انـدازی اولین کلاس کنکور در ایران با نام گروه فرهنگی خوارزمی ■ تاسیس و ثبت بنیاد فرهنگی پرویز شهریاری

مقدمه

«روزی یکی از دانشجویان دکتر حسابی به ایشان گفت: شما سه ترم است که مرا در این درس رد می‌کنید. من که نمی‌خواهم موشک هوا کنم! می‌خواهم در روستایمان معلم شوم.
پروفسور حسابی جواب داد: تو اگر نخواهی موشک هواکنی و فقط بخواهی معلم شوی، قبول! ولی تو نمی‌توانی به من تضمین بدهی که یکی از شاگردان تو در روستا، نخواهد موشک هوا کند!»
امیدوارم تو از اون دسته دانش‌آموزانی باشی که بخوای موشک هوا کنی!
امیدوارم سقف آرزوهات اونقدر بلند باشه که دچار روزمرگی نشی!
و امیدوارم بدونی برای موشک هواکردن، بیشتر به همت بلند نیازه تا هوش و استعداد!
هنوز سال دهم هستی، حتی اگه تا حالا هم ریاضی رو خوب نخوندی فرصت هست!

سه سال تا کنکور فاصله داری و خیلی کارها می‌تونی بکنی. توی این مدت امکانش رو داری یه حال اساسی به اوضاع ریاضیات بدی.
بذار یه مثال واقعی از شاگردهام برات بزنم. چند سال پیش علیرضا صحاف با معدل سیزده و با نمرهٔ ریاضیِ «ده» وارد دبیرستان شد. اون موقع دبیرستان ۴ ساله بود.
اول دبیرستان ریاضی رو افتاد. ☹ اما توی سه سال آخر شروع به درس خوندن کرد. نمرهٔ ریاضیاتش شروع به رشد کرد. سال بعد ۱۶، سال بعدش ۱۸ و سال آخر هم درخشید و الان دانشجوی مهندسی کامپیوتر دانشگاه شریفه!
اگر بخوای می‌تونی مثل علیرضا توی این چند سال آخر، غول ریاضی رو مهار کنی و شاخ اونو بشکنی. البته برای این کار باید زحمت بکشی و ابزار مناسب هم داشته باشی.
یکی از چیزهایی که می‌تونه کمکت کنه کتاب کمک آموزشی خوبه! یعنی همین کتاب! ☺

ما خیلی تلاش کردیم این کتاب طوری نوشته شه که مطالب از ساده به دشوار چیده بشن تا اول کار، از ریاضی زده نشی.
تست‌ها رو دستچین کردیم و دونه، دونهٔ اون‌ها رو بررسی کردیم و بعد از مطمئن شدن از کیفیت مهروماهی، اجازهٔ ورود به کتاب رو بهشون دادیم.
پاسخنامه‌ها رو تا اونجا که می‌شده تشریحی و کامل نوشتیم، حتی براشون روش دوم و سوم آوردیم.

ویژگی‌های این کتاب

۱ درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.

۲ طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درس‌نامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو یه جا بخونی!

۳ اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.

۴ توی محدودهٔ مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونده.

۵ هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همهٔ مثال‌هامون هم از فیلتر استادای عالی و باتجربه گذشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.

۶ پُر از تست‌های دوست‌داشتنیه! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن یه تست سخت، سکته نکنی ☺ و از ریاضی فراری نشی.

۷ همهٔ تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدیده.

۸ پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالیه! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤالا گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامهٔ این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!

۹ مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن و از حالت انتزاعی خارج شدن.

۱۰ تعداد تست‌هاش خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحثه؛ اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی. پُل هالموس می‌گه: تمرین قلب ریاضیات است. اگه اینطوریه پس کتاب ما متخصص قلبه!

ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم.

توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل شده براش آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم واسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردیم.

«راهبردها» برای کساییه که می‌خوان صد بزنن! بعد از درسنامهٔ هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. فصل که تموم میشه یه آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزنی. بعد از آزمون، پاسخ کلیدیِ تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌های تشریحی اون فصل.

تست‌ها رو براتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که براتون پیش میاد بپرسید.

راهنمای استفاده از کتاب

خوب بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثالاش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی تونی یه سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامهٔ تشریحی، شاید راهبردی داره که تو بلد نیستی.

اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن؛ مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزن. نکته‌هایی رو که یاد می‌گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته یه بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل یا برای جمع‌بندی می‌تونی از آزمون انتهای فصل استفاده کنی و ببینی توی زمان پیشنهادی می‌تونی چه درصدی بزنی.

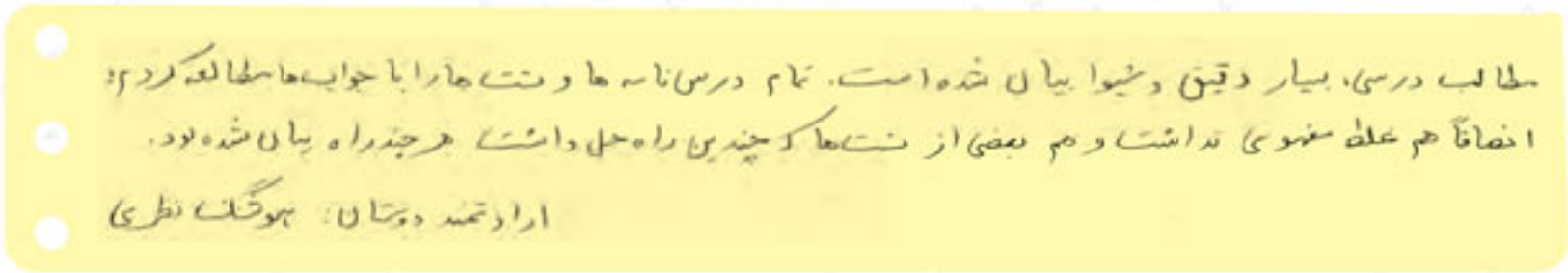
و اما قدردانی...

یه بار رفتم اطاق مدیر انتشارات، آقای احمد اختیاری، دیدم پرینت اولیهٔ همین کتاب رو به همراه کتاب درسی گذاشتن جلوشون و دارن مطابقت میدن. خیلی برام جالب بود با اینکه اصلا وقت سرخاروندن ندارن و رشتهٔ تحصیلیشون هم به ریاضی ربطی نداره، به نکاتی اشاره می‌کردن که توی کتاب تأثیرگذار بود. چقدر شکل کتاب و نحوهٔ چیدمان مطالب و رده‌بندی تست‌ها و میزان پاسخ تشریحی و ... براشون اهمیت داره!

باید اینجا خیلی ازشون تشکر کنم و بگم خیلی چیزها ازتون یاد گرفتم.

دوم باید از استاد انوشه، بزرگ‌مرد شیمی ایران تشکر کنم که در حال حاضر مدیر شورای تألیف مهر و ماه هستن. ایشون چندین جلسه با من و مولف‌ها گذاشتن و حتی به خاطر خواهش مکرر من، بخشی از کتاب رو بررسی کردن و نظراتی مهم، برای بهبود کتاب دادن.

سوم از استادان بزرگوار بهمن اصلاح‌پذیر و هوشنگ نظری متشکرم که تجربهٔ گران بهاشون در زمینهٔ آموزشی ریاضی رو در اختیار من وسایر مولفان عزیز قرار دادن. همچنین استاد نظری فرصتی گذاشتن و کتاب رو مطالعه فرمودن.


مطالب درسی، بسیار دقیق و خوانا بیان شده است. تمام درسنامه ها و تست ها را با جواب ها مطالعه کردم؛ اضافاً هم غلط معنوی نداشت و هم بعضی از تست‌ها که چندین راه حل داشت، هر چند راه بیان شده بود.

ارادتمند دوستان: هوشنگ نظری

چهارم از همهٔ عزیزانی که در زمینه تولید کتاب همراهی کردند تشکر می‌کنم؛ بخصوص از خانم الهام پیلوایه مسئول فنی و صفحه آرای عزیز و با دقت مهر و ماه که زحمات زیادی رو تحمل کردن.

خانم زهرا خوشنود، مدیراجرائی تالیف کتاب‌های اختصاصی مهر و ماه که واقعاً سر تولید این کتاب پیر شدن.

گروه هنری خلاق و دوست داشتنی آقایان حسین شیرمحمدی، تایماز کاویانی و حسام طلایی به خاطر طرح‌های زیباشون.

خانم جباری عزیز مدیر تولید انتشارات و تایپیست محترم الناز رضوانی و رسام فرشته شاه‌بیک.

خانم فرزانه قنبری مدیر روابط عمومی، آقای عباس گودرزی مدیر فروش و مهندس امیر انوشه مدیر سایت بابت همکاری‌های صمیمانه‌شون.

امیدوارم این کتاب اولین گام در مسیر موفقیت‌هاتون باشه.

مدیر گروه ریاضی مهروماه

عباس اشرفی

فهرست

فصل اول مجموعه، الگو و دنباله ۹

فصل دوم مثلثات ۵۱

فصل سوم توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۹۷

فصل چهارم معادله‌ها و نامعادله‌ها ۱۴۹

فصل پنجم تابع ۱۹۵

فصل ششم شمارش، بدون شمردن ۲۵۵

فصل هفتم آمار و احتمال ۲۸۹

فصل اوّل

مجموعه، الگو و دنباله

این فصل به دو بخش متفاوت تقسیم میشه!

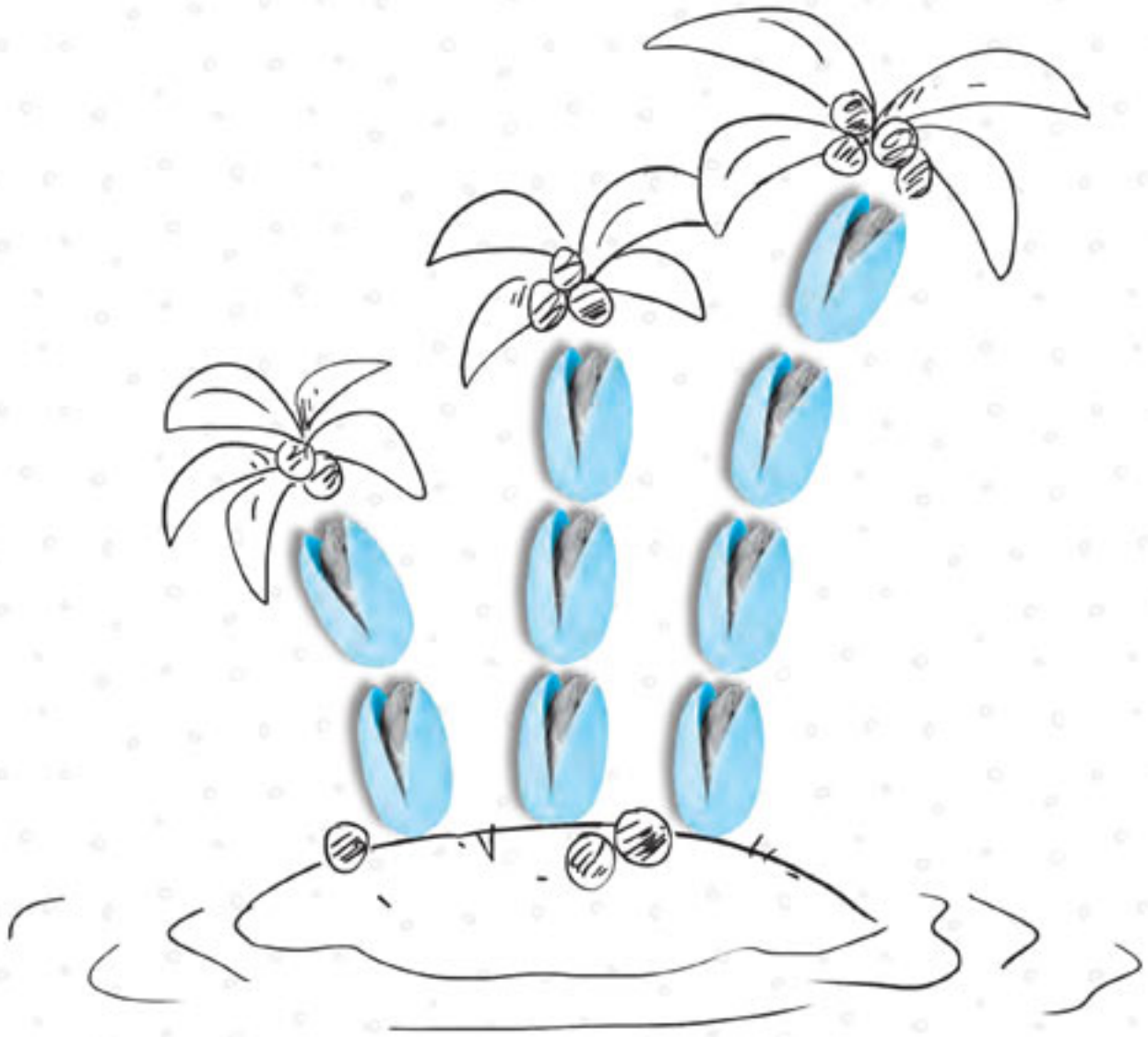
اولیش، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی و متمم یک مجموعه‌اس.

توی این درس یاد می‌گیری عضوهای چه مجموعه‌هایی رو اگه بشمری تموم میشن و کدوم‌ها تموم نمیشن. همین‌طور یاد می‌گیری مجموعهٔ مرجع چیه و اعضایی که متعلق به یه مجموعه نیستن کجا قرار می‌گیرن.

دومیش الگو و دنباله‌اس.

توی این درس یواش، یواش یاد می‌گیری چطوری پدیده‌های نظم‌پذیر رو بیاری توی قالب ریاضی و رفتارشون رو پیش‌بینی کنی.

آخرش هم با چند تا دنبالهٔ مهم آشنا میشی.



مجموعه‌ها

یادآوری: در سال‌های گذشته با مجموعه اعداد مهمی مانند اعداد طبیعی و ... آشنا شدید که به‌طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\ldots\}$

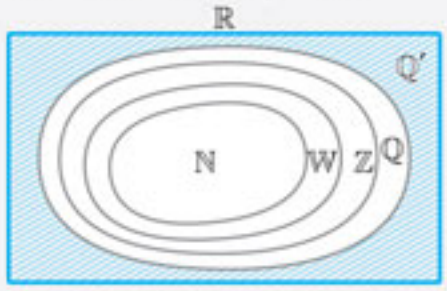
مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\neq 0\}$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

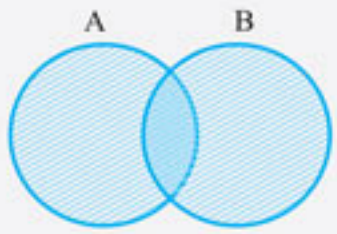
مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

- مجموعه اعداد طبیعی، زیر مجموعهٔ اعداد حسابی‌اند و مجموعه اعداد حسابی، خود زیر مجموعهٔ اعداد صحیح‌اند و مجموعه اعداد صحیح زیر مجموعهٔ اعداد گویا هستند. $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$
- مجموعه اعداد گویا و گنگ هیچ اشتراکی با هم ندارند ولی هر دو زیر مجموعه‌های اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$
- در نمودار مقابل، همهٔ مجموعه‌های فوق نشان داده‌شده و روابطهٔ آن‌ها با یکدیگر مشخص شده است:



اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعهٔ A یا مجموعهٔ B یا عضو هر دوی آن‌ها باشند. اجتماع دو مجموعه را با نماد $A\cup B$ نمایش می‌دهند.

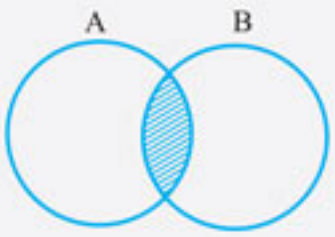


$A\cup B$

اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو هردو مجموعهٔ A و B باشند.

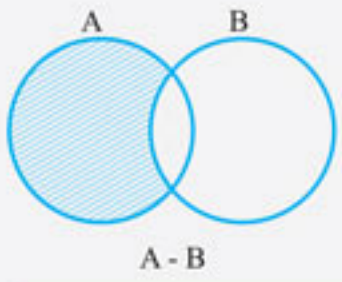
اشتراک دو مجموعه را با نماد $A\cap B$ نمایش می‌دهند.



$A\cap B$

تفاضل دو مجموعه

مجموعهٔ $A-B$، مجموعه‌ای است که اعضای آن عضو مجموعهٔ A باشند ولی عضو مجموعهٔ B **نباشند**.



$A-B$

نکته

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی 2^n است.

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با سایر مجموعه‌ها متفاوت است؟

۱) $\mathbb{Z}-\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Q}$ ۴) $\mathbb{Q}'-\mathbb{R}$

پاسخ:

گزینهٔ ۱: $\mathbb{Z}-\mathbb{R}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}-\mathbb{R}=\varnothing$

گزینهٔ ۲: $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}-\{1,2,3,\ldots\}=\{0\}$

گزینهٔ ۳: $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{Q}=\varnothing$

گزینهٔ ۴: $\mathbb{Q}'-\mathbb{R}=\varnothing$

پس گزینهٔ «۲» درست است.

مثال: اگر $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{a,\{b\},c\}$ و $C=\{a,b,\{c\}\}$ باشند، آن‌گاه $(A\cup B)-C$ کدام است؟

۱) $\{b,c\}$ ۲) $\{\{c\},b\}$ ۳) $\{\{b\},c\}$ ۴) $\{\{b\},\{c\}\}$

■ **پاسخ:** اجتماع دو مجموعهٔ A و B را می‌یابیم: $A\cup B=\{a,b,\{b\},c\}$

اکنون از اجتماع دو مجموعهٔ A و B عضوهای شامل C را حذف می‌کنیم تا به $(A\cup B)-C$ برسیم. $(A\cup B)-C=\{\{b\},c\}$

پس گزینهٔ «۳» درست است.

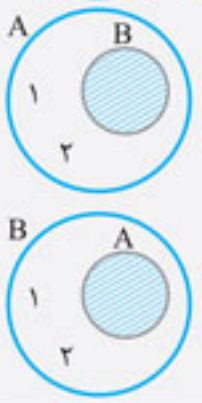
مثال: اگر $A\cap B=A\cup B-\{1,2\}$ و $A\cap B\neq\varnothing$ باشند، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند غلط باشد؟

۱) $B-A=\{1,2\}$ ۲) $A-B=\{1,2\}$

۳) $(B-A)\cup(A-B)=\{1,2\}$ ۴) $A\cap B=B-A$

■ **پاسخ:** این دو مجموعه می‌توانند به شکل‌های زیر باشند:

الف: در این حالت $(A-B)\cup(B-A)=\{1,2\}$

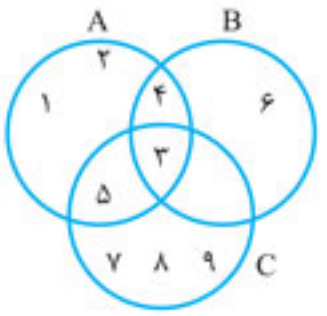


ب: در این حالت B زیر مجموعهٔ A است، مشخص است که: $A-B=\{1,2\}$

پ: در این حالت که A زیر مجموعهٔ B است، خواهیم داشت: $B-A=\{1,2\}$

پس گزینهٔ «۴» درست است.

۱. با توجه به مجموعه‌های مقابل، حاصل $(A-B)-(C\cup B)$ کدام است؟



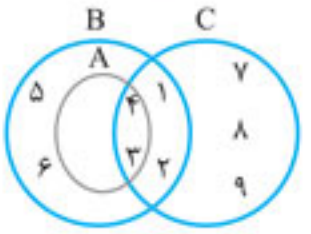
۱) $\{1,2\}$

۲) $\{1,2,5\}$

۳) $\{1,2,4\}$

۴) $\{1,2,3\}$

۲. با توجه به شکل مقابل مجموعهٔ $(A-B)\cup(C-A)$ چند عضو دارد؟



۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۳. اگر $A\cap B=\{1,2\}$ ، $A-B=\{3,5,9\}$ و $A\cup B=\{1,2,3,4,5,9\}$ باشند، مجموعهٔ B کدام است؟

۱) $\{1,2,3,9\}$ ۲) $\{1,2,4\}$ ۳) $\{1,2,3\}$ ۴) $\{1,2,4,9\}$

۴. اگر A و B دو زیر مجموعه از اعداد طبیعی و $A\cup B\neq A\cap B=(A\cap B)\cup\{1\}$ باشد، کدام مورد صحیح است؟

۱) $A=B$ ۲) $1\in A$

۳) $A\subseteq B$ ۴) $\{1\}\subseteq(B-A)\cup(A-B)$

۵. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<3\}$ باشند، حاصل $(A\cup B)-(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<2\}$ ۲) $\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x\leq 0$ یا $2\leq x<3\}$

۳) $\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x<3$ یا $-1<x<1\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x<2\}$

۶. اگر $A=\{2^x\mid x\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{2^{|x|}\mid x\in\mathbb{Z}\}$ باشند، آن‌گاه مجموعهٔ $B-A$ چند عضو دارد؟

۱) هیچ عضوی ندارد. ۲) یک عضو دارد. ۳) دو عضو دارد. ۴) بی‌شمار عضو دارد.

۷. فرض کنید $A_n=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{n}\leq x\leq 1, n\in\mathbb{N}\}$ باشد، در این‌صورت حاصل $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{10}$ کدام است؟

۱) $\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{2}\leq x\leq 1\}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $\{1\}$ ۴) $\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{1}{10}\leq x\leq 1\}$

۸. اگر $A=\{\frac{4-n}{n}\mid n\in\mathbb{N}, n<5\}$ و $B=\{\frac{4n-n^2}{n+2}\mid n\in\mathbb{N}, n\leq 4\}$ باشند، مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹. اگر $A=\{\frac{x+1}{x^2+1}|\frac{x+1}{x^2+1}\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{Z}\}$ و $B=\{\frac{x-1}{x^2+1}|\frac{x-1}{x^2+1}\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{Z}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A\cup B$ کدام است؟

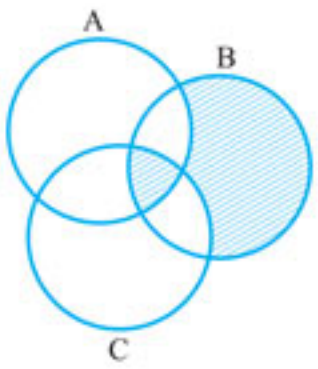
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۰. اگر به اعضای مجموعه‌ای، یک عضو اضافه شود، تعداد زیر مجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

۱) ۲ واحد اضافه می‌شود. ۲) ۲ برابر می‌شود.

۳) ۴ واحد اضافه می‌شود. ۴) ۴ برابر می‌شود.

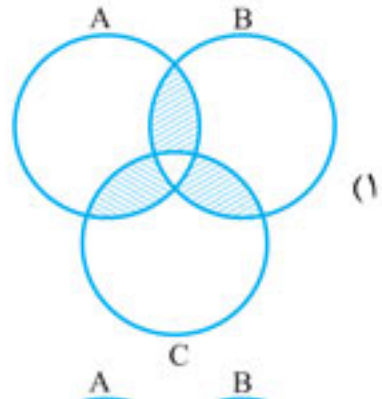
۱۱. در شکل مقابل قسمت هاشور خورده کدام است؟

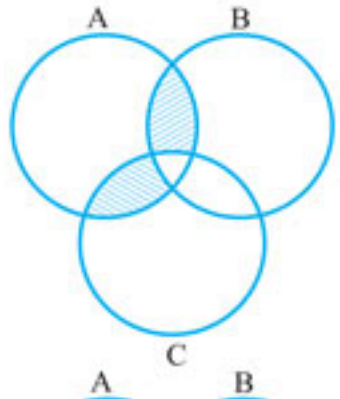


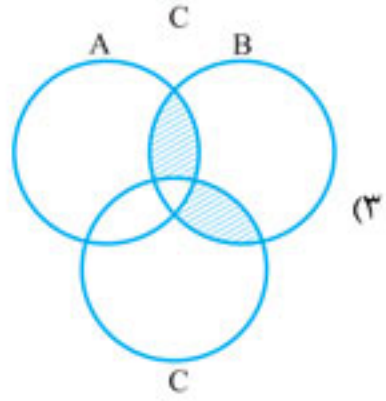
۱) $(B-(A-C))\cup(A\cap B\cap C)$ ۲) $((B-A)-C)\cup(A\cap B\cap C)$

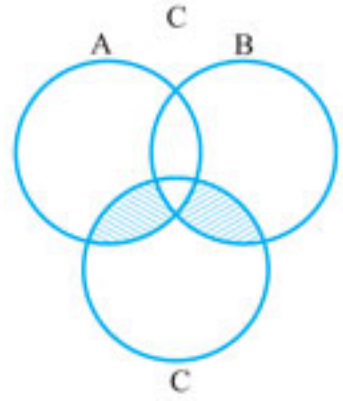
۳) $((C-B)-A)\cup(A\cap B\cap C)$ ۴) $(C-(B-A))\cup(A\cap B\cap C)$

۱۲. اگر A، B و C مستقل از هم نباشند، نمودار $A\cap(B\cup C)-(B\cap C)$ کدام است؟

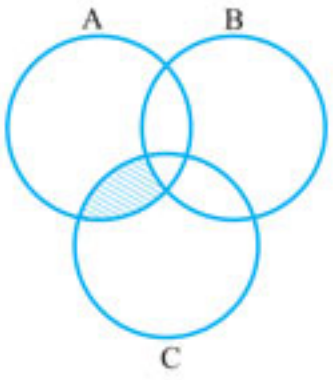
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۳. با توجه به نمودار مقابل، قسمت هاشورخورده با کدام گزینه برابر نیست؟



۱) $A\cap C-(A\cap B)$ ۲) $A\cap C-(A\cap B\cap C)$

۳) $(A\cap C)-(B\cup C)$ ۴) $(A-B)\cap C$

۱۴. اگر $A\cup B=A$ باشد، حاصل $(A\cap B)\cup(A-B)$ کدام است؟

۱) B ۲) $\varnothing$ ۳) U ۴) A

۱۵. اگر $C\subseteq A\cap B$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $C\subseteq B-A$ ۲) $C\subseteq A-B$ ۳) $C\subseteq A\cup B$ ۴) $C\subseteq(A-B)\cup(B-A)$

۱۶. اگر $A-B=\varnothing$ و $A-C=\varnothing$ باشند، آن‌گاه همواره می‌توان نتیجه گرفت (مجموعه‌ها غیرتهی‌اند.):

۱) $B=C$ ۲) $B\cap C=\varnothing$ ۳) $B\cap C=A$ ۴) $B\cap C\neq\varnothing$

۱۷. اگر $A\cap C\subseteq A\cap B$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $C\subseteq B$ ۲) $B\subseteq C$ ۳) $A-C\subseteq A-B$ ۴) $A\cap C\subseteq A\cup B$

۱۸. اگر $B-A=B-\{۲,۵\}$ باشد، آن‌گاه لزوماً می‌توان گفت(به شرط $A\cup B=U$):

۱) $A=\{۲,۵\}$ ۲) $B=\{۲,۵\}$ ۳) $\{۲,۵\}\subseteq A\cap B$ ۴) $A\cup B=\{۲,۵\}$

۱۹. چند مورد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف) اگر $A=B$ باشد، آن‌گاه لزوماً $A-B=\varnothing$ است.

ب) اگر $A-B=\varnothing$ باشد، آن‌گاه لزوماً $A=B$ است.

پ) اگر $A=B$ باشد، آن‌گاه لزوماً $A\cap C=B\cap C$ است.

ت) اگر $A\cap B=A\cap C$ باشد، آن‌گاه لزوماً $B=C$ است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰. اگر $A\subseteq B$ باشد، حاصل $[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $B-A$ ۴) $\varnothing$

۲۱. اگر A و B دو مجموعهٔ غیر تهی و $(B-A)\cup A=A$ باشد، کدام مورد صحیح است؟

۱) $B-A=\varnothing$ ۲) $B-A\neq\varnothing$ ۳) $B-A=B$ ۴) $B\subseteq B-A$

نکته

جدول بررسی اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تفاضل	اشتراک	اجتماع	انواع مجموعه‌ها
متناهی	متناهی	متناهی	دو مجموعهٔ متناهی
نامتناهی = متناهی − نامتناهی	متناهی	نامتناهی	یک مجموعهٔ متناهی و دیگری نامتناهی
نامعلوم	نامعلوم	نامتناهی	دو مجموعهٔ نامتناهی

مثال: **اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، کدام حکم زیر درست است؟**

۱) $A\cup B$ متناهی است.
۲) $A\cap B$ نامتناهی است.
۳) $A-B$ متناهی است.
۴) $B-A$ متناهی است.

■ **پاسخ:** با توجه به جدول فوق $A\cup B$ و $B-A$ نامتناهی هستند ولی $A\cap B$ و $A-B$ هر دو متناهی هستند.
پس گزینهٔ «۳» درست است.

۳۷. کدام مجموعهٔ زیر متناهی است؟

۱) $\mathbb{Z}-$
۲) $\cap\mathbb{N}$
۳) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$
۴) $-\mathbb{N}$

۳۸. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) مجموعهٔ مضرب‌های مثبت عدد ۳
۲) مجموعهٔ اعداد اول فرد
۳) مجموعه اعداد فرد و مضرب ۵
۴) مجموعهٔ همهٔ انسان‌ها از آغاز خلقت تاکنون

۳۹. مجموعهٔ B متناهی و مجموعه‌های A و C نامتناهی‌اند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر حتماً نامتناهی است؟

۱) $A-(C-B)$
۲) $B\cup(A-C)$
۳) $A-(B-C)$
۴) $(B\cap C)-A$

۴۰. اگر مجموعهٔ A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی باشند، هر یک از مجموعه‌های $A\cap(B\cup C)$ و $B-(A\cap C)$ به ترتیب از راست به چپ، از نظر متناهی بودن یا نبودن چگونه‌اند؟

۱) متناهی - متناهی
۲) نامتناهی - متناهی
۳) متناهی - نامتناهی
۴) نامتناهی - نامتناهی

۴۱. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و $B\subseteq A$ باشد، آن‌گاه کدام مجموعه یقیناً مجموعه‌ای متناهی است؟

۱) $(B-A)\cap(A\cup B)$
۲) $(A\cap B)\cup(A-B)$
۳) $(A\cup B)\cap(A-B)$
۴) $(B-A)\cup(A-B)$

۴۲. اگر A و B دو زیر مجموعه از اعداد طبیعی و A متناهی و B نامتناهی باشند، آن‌گاه کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

۱) $A'\cup B'$
۲) $A\cap B'$
۳) $A\cup B'$
۴) $A'\cap B'$

۴۳. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از اعداد صحیح باشند به طوری‌که B متناهی و A' نامتناهی باشند، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌ها ممکن است متناهی باشد؟

۱) $B\cup A'$
۲) $B'\cap A$
۳) $A'\cup B'$
۴) $A'-B$

متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعهٔ آن باشند، **مجموعهٔ مرجع** می‌نامیم و آن را با U نمایش می‌دهیم.

متمم

اگر U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را **مجموعهٔ متمم** A می‌نامیم و آن را با A' نمایش می‌دهیم.

مثال: **اگر $A'=\{1,2,4\}$ و $B'=\{2,3\}$ باشند و مجموعهٔ مرجع، اعداد طبیعی فرض شود، آن‌گاه $(A\cap B)'$ کدام است؟**

۱) $\{1,2,3\}$
۲) $\{1,2,3,4\}$
۳) $\{4,5,6,\ldots\}$
۴) $\{5,6,7,\ldots\}$

■ **پاسخ:** از آن‌جایی‌که $A' = \{1,2,4\}$ است با توجه به مرجع بودن $\mathbb{N}$ داریم: $B = \{1,4,5,\ldots\}\ ,\ A = \{3,5,6,\ldots\}$

بنابراین: $A \cap B = \{3,5,6,\ldots\} \cap \{1,4,5,6,\ldots\} = \{5,6,\ldots\}$

و همین‌طور $(A \cap B)'$ برابر می‌گردد با: $(A \cap B)' = \{1,2,3,4\}$

پس گزینهٔ «۲» درست است.

قوانین متمم و تفاضل

۱) $(A')' = A$

۲) $\begin{cases}(A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B'\end{cases}$

۳) $\begin{cases}A - B = A \cap B' \\ B - A = B \cap A'\end{cases}$

۴) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

۵) $A - (A \cap B) = A - B$

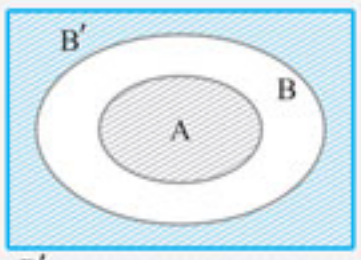
مثال: اگر $A \subseteq B$ و U مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه چه تعداد از رابطه‌های زیر درست است؟

الف) $A \cap B' = \varnothing$ ب) $A' \cap B' = B'$ پ) $B' \subseteq A'$ ت) $A \cup B' = U - (B - A)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

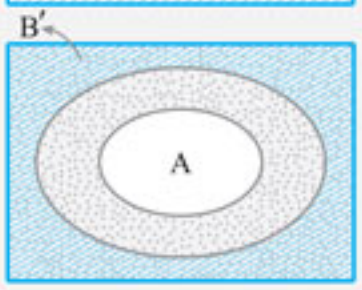
■ **پاسخ:**

روش اول: ابتدا نمودار این مجموعه‌ها را رسم می‌کنیم. برای بررسی قسمت **الف** قسمت‌های B' و A را هاشور می‌زنیم. همان‌طور که می‌بینید این دو مجموعه اشتراکی ندارند.



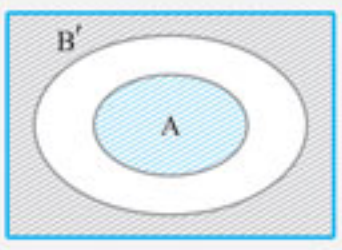
همین‌کار را برای قسمت **ب** انجام می‌دهیم.

می‌بینیم که اشتراک A' (قسمت نقطه‌چین) با B' (قسمت هاشور خورده) همان B' می‌باشد و در همین شکل می‌بینید که $B' \subseteq A'$ است.

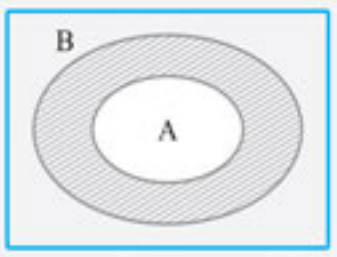


برای بررسی قسمت **ت** ابتدا $A \cup B'$ را تعیین می‌کنیم.

حال $B - A$ را می‌یابیم.



اگر دقت کنید مجموعه $U - (B - A)$ برابر قسمت هاشور خورده شکل قبلی است و $A \cup B' = U - (B - A)$ است.



روش دوم: قسمت‌های مختلف را به کمک جبر مجموعه‌ها بررسی می‌کنیم.

الف: با توجه به قوانین اشاره شده داریم:

$A \cap B' = A - B$ و از آن‌جایی‌که $A \subseteq B$ است، پس $A - B$ برابر $\varnothing$ است.

ب: به کمک قانون اجتماع و اشتراک متمم‌ها داریم: $(A' \cap B') = (A \cup B)'$

از آن‌جایی‌که $A \cup B = B$ می‌باشد پس $(A \cup B)' = B'$ است و در نتیجه $A' \cap B' = B'$ است.

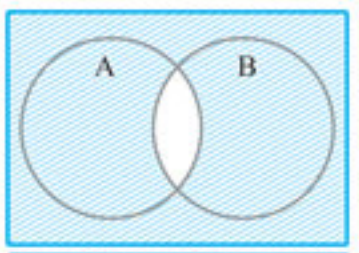
پ: چون $A \subseteq B$ است، پس $B' \subseteq A'$ است.

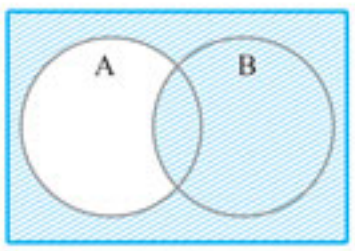
ت: از آن‌جایی‌که $U - (B - A) = (B - A)'$ و با توجه به این‌که $B - A = B \cap A'$ بنابراین:

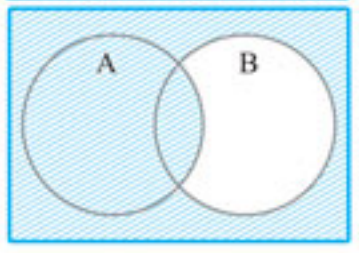
$$(B - A)' = (B \cap A')' = B' \cup A = A \cup B'$$

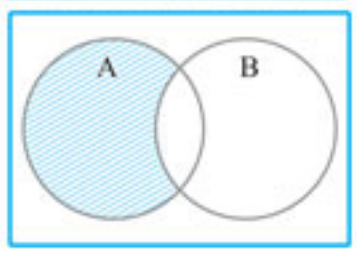
پس گزینهٔ «۴» درست است.

۴۴. نمودار $(A - B) \cup (A \cap B)'$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


مهروماه

۶۸. از ۳۰ دانش‌آموز، ۱۷ نفر در المپیاد ریاضی و ۱۵ نفر در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند. اگر ۵ نفر در هیچ المپیادی شرکت نکرده باشند، چند نفر فقط در یک المپیاد شرکت کرده‌اند؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۶۹. اگر U مجموعهٔ مرجع و A و B دو زیر مجموعهٔ آن باشند و $n(A\cup B)=۴۳$ ، $n(B)=۲۰$ ، $n(A)=۳۵$ و $n(U)=۵۰$ باشند، آن‌گاه $n(A\cap B')$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۷۰. اگر U مجموعهٔ مرجع و A و B زیر مجموعه‌های آن باشند و $n(U)=۱۰۰$ ، $n(A)=۶۰$ ، $n(B')=۶۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$ باشند، آن‌گاه $n(A\cup B)'$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۷۱. در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۲ نفر از دانش‌آموزان دارای برادر و ۱۴ نفر دارای خواهر هستند. اگر تعداد دانش‌آموزان تک فرزند را با x نمایش دهیم، محدودهٔ حسابی x کدام است؟

۱) $۰\le x\le ۱۶$ ۲) $۴\le x\le ۱۶$ ۳) $۴\le x\le ۱۸$ ۴) $۰\le x\le ۱۸$

۷۲. اگر $A\subseteq B\subseteq C'$ باشد و مجموعه‌های A ، B ، C و U (مرجع) به ترتیب دارای ۳، ۶، ۱۲ و ۳۰ عضو باشند، حاصل $n((A\cup B)-C)'$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰

۷۳. در یک کلاس ۶۰ نفری، ۲۸ نفر والیبال، ۲۶ نفر بسکتبال و عده‌ای هم فوتبال بازی می‌کنند. از این تعداد ۱۰ نفر فوتبال و والیبال، ۱۳ نفر بسکتبال و والیبال، ۹ نفر فوتبال و بسکتبال و ۷ نفر هر سه ورزش را بازی می‌کنند. در این کلاس چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟ (به شرط آن‌که هر فرد لااقل در یک ورزش شرکت کند)

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۷۴. ۳۰۰ نفر در روز اول از یک بازارچهٔ خیریه بازدید کردند. ۱۵۰ نفر تابلوی نقاشی، ۱۲۰ نفر گل و ۱۱۰ نفر گلدان خریدند. ۴۰ نفر گل و گلدان، ۵۰ نفر گل و تابلوی نقاشی، ۳۰ نفر گلدان و تابلوی نقاشی و ۱۰ نفر هر سه مورد را خریدند. چند نفر دقیقاً یکی از موارد تابلو، گلدان و گل را خریده‌اند؟

۱) ۱۷۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۹۰ ۴) ۲۰۰

الگو

- یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد را **الگو** می‌نامند.
- برای مطالعهٔ **الگوها** بهتر است آن‌ها را به زبان اعداد بیان کنیم و به کمک اعداد آن‌ها را ساماندهی کنیم. مثلاً به کمک اعداد می‌توان **الگوی** بلندی و کوتاهی طول روز را در طی یکسال یافت.

مثال: در مرحلهٔ پانزدهم از الگوی زیر تعداد دایره‌های مشکی کدام است؟

۱) ۵۱ ۲) ۵۹ ۳) ۵۵ ۴) ۶۳

پاسخ: اگر دایره‌های مشکی را بشماریم می‌توان به اعداد مقابل دست یافت: ۷ , ۱۱ , ۱۵ , ...

یعنی هر مرحله ۴ واحد به تعداد آن‌ها اضافه می‌شود.

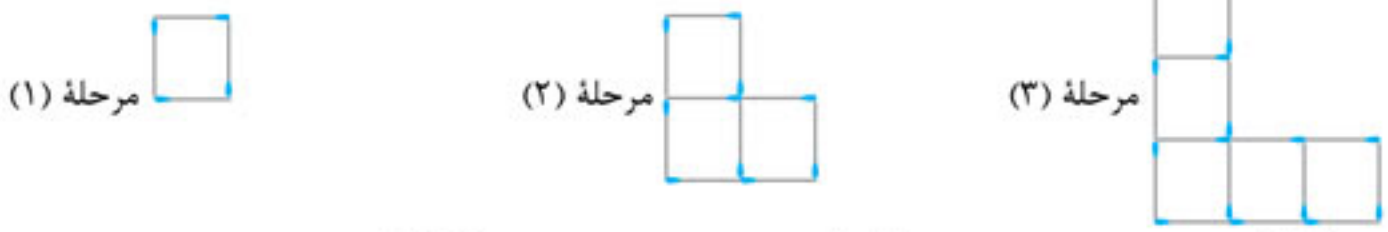
بنابراین برای رسیدن به پانزدهمین مرحله، ۱۴ بار عدد ۴ به عدد اول یعنی ۷ اضافه می‌گردد. $۷+(۱۴\times ۴)=۷+۵۶=۶۳$

پس گزینهٔ «۴» درست است.

۷۵. با توجه به الگوی زیر، در چندمین مرحله تعداد نقاط ۸۲ تا می‌شود؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

۷۶. تعداد چوب کبریت‌ها در مرحلهٔ دهم الگوی زیر کدام است؟

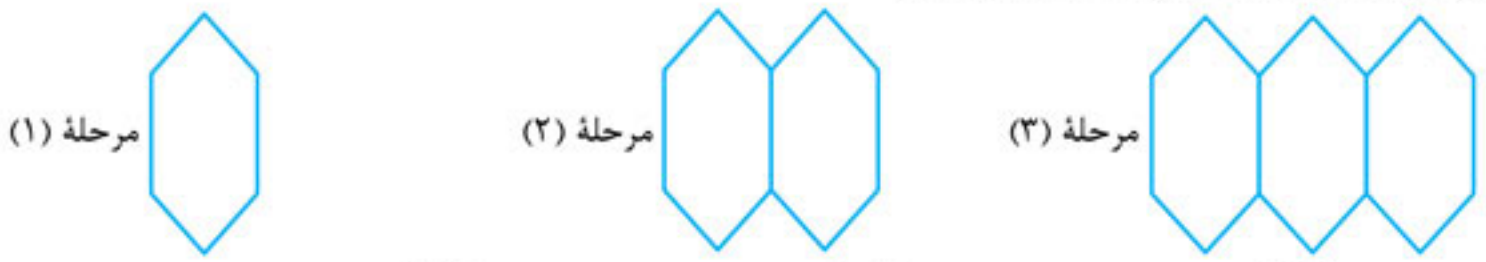


۱) ۵۸ ۲) ۶۴ ۳) ۷۰ ۴) ۷۶

۷۷. با تعدادی چوب کبریت مطابق الگوی زیر اشکالی را می‌سازیم. تعداد چوب کبریت‌های استفاده شده در مرحلهٔ هفتم کدام است؟

۱) ۵۳ ۲) ۵۴ ۳) ۶۹ ۴) ۷۰

۷۸. با توجه به الگوی زیر، تعداد پاره‌خط‌ها در مرحلهٔ دهم کدام است؟



۱) ۵۰ ۲) ۵۱ ۳) ۶۰ ۴) ۶۱

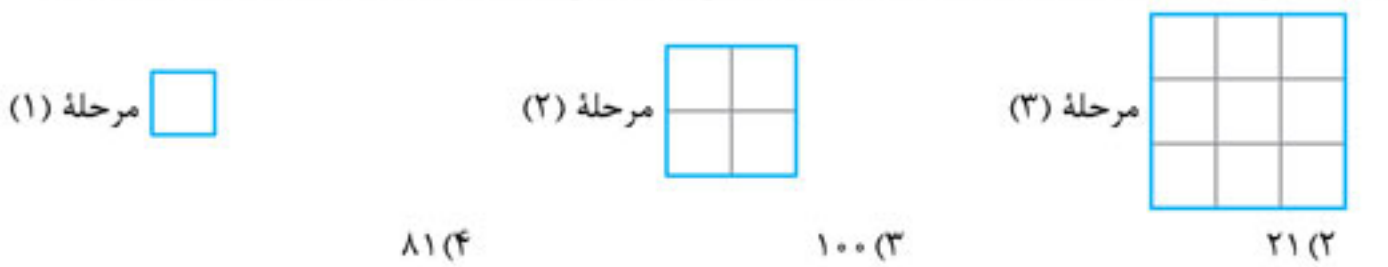
۷۹. با توجه به الگوی زیر، در مرحله دهم تعداد نقاط کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۸۱ ۴) ۱۴۴

۸۰. با توجه به الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های سفید در شکل مرحلهٔ یازدهم کدام است؟

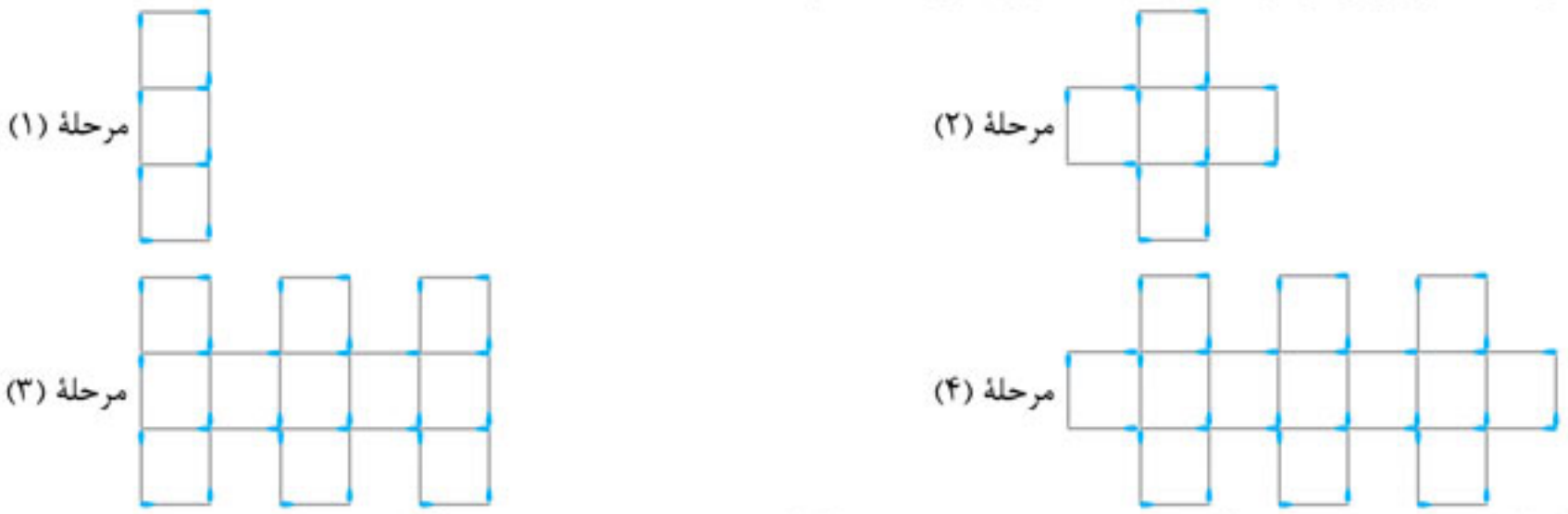
۱) ۱۳۲ ۲) ۱۳۶ ۳) ۱۲۲ ۴) ۱۲۶

۸۱. با توجه به الگوی زیر، مجموع تعداد مربع‌های کوچک تا آخر مرحلهٔ دهم چقدر از مجموع تعداد مربع‌های کوچک تا آخر مرحلهٔ نهم بیشتر است؟



۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۸۱

۸۲. با توجه به الگوی زیر، در مرحله یازدهم تعداد چوب کبریت‌ها کدام است؟



۱) ۱۲۶ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۰۶ ۴) ۸۲

مهروماه

دنباله

◀ هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند یک **دنباله** می‌نامیم. این اعداد، **جملات دنباله** نامیده می‌شوند.

جملهٔ عمومی دنباله

◀ جملهٔ n اُم یک دنباله را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامند (به شرط طبیعی بودن عدد n) و آن را با t_n یا a_n نمایش می‌دهند.

مثال: اگر در یک دنباله $a_1 = 0$ و به ازای $n \geq 2$ داشته باشیم. $a_n = (1-\frac{1}{n^2})\cdots(1-\frac{1}{16})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{4})(1-)$ آن‌گاه جملهٔ چندم دنبالهٔ a_n برابر ۰/۵۲۵ است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

● **پاسخ:** همهٔ پرانتزها را می‌توان به کمک اتحاد مزدوج به شکل زیر تجزیه نمود:

$$a_n = (1-(\frac{1}{2})^2)(1-(\frac{1}{3})^2)(1-(\frac{1}{4})^2)\cdots(1-(\frac{1}{n})^2)$$

حالا همهٔ عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم.

$$a_n = (1-\frac{1}{2})\ (1+\frac{1}{2})\ (1-\frac{1}{3})\ (1+\frac{1}{3})\ (1-\frac{1}{4})\ (1+\frac{1}{4})\ \cdots\ (1-\frac{1}{n})\ (1+\frac{1}{n})$$
$$a_n = \frac{1}{2}\ \times\frac{3}{2}\ \times\frac{2}{3}\ \times\frac{4}{3}\ \times\frac{3}{4}\ \times\frac{5}{4}\ \times\cdots\times(\frac{n-1}{n})\ (\frac{n+1}{n})$$

اگر دقت کنید اعداد دوم و سوم، چهارم و پنجم ... با هم ساده می‌شوند و فقط عبارت اول و آخر ساده نمی‌شوند.

$$a_n = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})$$

این مقدار برابر ۰/۵۲۵ است.

$$\frac{1}{2}(\frac{n+1}{n}) = 0/525 \xrightarrow{\times 2} \frac{n+1}{n} = 1/05 \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} n+1 = 1/05n$$

$$\Rightarrow 1 = 1/05n - n \Rightarrow 1 = 0/05n \Rightarrow n = \frac{1}{0/05}$$

می‌دانیم $0/05 = \frac{1}{20}$ است، بنابراین:

$$n = \frac{1}{0/05} = \frac{1}{\frac{1}{20}} = 20$$

پس گزینهٔ «۳» درست است.

دنبالهٔ بازگشتی

◀ دنباله‌ای که هر جملهٔ آن با **نظم خاصی** از روی جملات قبلی‌اش پیدا شود را **دنبالهٔ بازگشتی** می‌نامند. مشهورترین دنبالهٔ بازگشتی، **دنبالهٔ فیبوناتچی** است که در آن دو جملهٔ اول دنباله، یک هستند و از جملهٔ سوم به بعد هر جمله از مجموع دو جملهٔ قبلی به‌دست می‌آید یعنی:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$$

و می‌توان فرمول آن را به صورت مقابل نوشت:

$$\begin{cases} t_2 = t_1 = 1 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}$$

مثال: اگر جملات یک دنباله به‌صورت $a_{n+1} = 2a_n$ نوشته شود در صورتی که $a_1 = 3$ باشد، چندمین جمله برابر ۱۹۲ می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

● **پاسخ:** این دنباله از جملهٔ اول «۳» شروع می‌شود و هر جمله ۲ برابر جملهٔ قبلی است. جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$\{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192\}$$

همان‌طور که می‌بینید جملهٔ هفتم این دنباله برابر ۱۹۲ است.

پس گزینهٔ «۳» درست است.

مطالعهٔ آزاد

دنبالهٔ فیبوناتچی: این اعداد به نام لئوناردو فیبوناتچی ریاضیدان ایتالیایی نام‌گذاری شده است. وی نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است که بیشتر فعالیت‌هایش از آثار ریاضیدان‌های مسلمان به خصوص خوارزمی، کرجی و ابوکامل تأثیر پذیرفته است. در دوران حیات فیبوناتچی مسابقات ریاضی در اروپا مرسوم بود. در یکی از همین مسابقات که در سال ۱۲۲۵ در شهر پیزا توسط امپراتور فردریک دوم برگزار شده بود مسئله زیر مطرح شد:

«فرض کنیم خرگوش‌هایی وجود دارند که هر جفت (یک نر و ماده) از آن‌ها به سن یک ماهگی رسیده باشند به ازای هر ماه که از زندگیشان سپری شود یک جفت خرگوش به دنیا می‌آورند. حال اگر فرض کنیم این خرگوش‌ها هرگز نمی‌میرند و در آغاز یک جفت از این نوع خرگوش در اختیار داشته باشیم که به تازگی متولد شده‌اند، حساب کنید پس از n ماه چند جفت از این نوع خرگوش خواهیم داشت.» اگر تعداد خرگوش‌ها را در ماه‌های اول و دوم و ... حساب کنیم به دنبالهٔ فیبوناتچی می‌رسیم. فیبوناچی با حل این مسئله و معرفی این دنباله به جهان که خواص شگفت‌انگیزی دارد تأثیر زیادی بر ریاضی و حتی سایر علوم گذاشت.

۸۹. حاصل‌ضرب ده جملهٔ اول دنباله با جملهٔ عمومی $t_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $-\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{1}{11}$ ۴) $-\frac{1}{11}$

۹۰. در دنبالهٔ $t_n = \frac{n}{16} + (-\frac{1}{2})^n$ چند جملهٔ منفی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

۹۱. چند جملهٔ دنبالهٔ $t_n = -2n + 7$ در مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{10}{3} < \frac{3 - t_n}{5}$ قرار می‌گیرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) بی‌شمار

۹۲. جملهٔ $(2n+1)$اُم یک دنباله بر حسب n برابر با $\frac{4n^2+1}{2n-1}$ است. جملهٔ سوم دنباله کدام است؟

۱) $-\frac{37}{5}$ ۲) ۵ ۳) $\frac{37}{5}$ ۴) -5

۹۳. اگر جملهٔ اول دنباله‌ای برابر یک و $U_{n+1} = 3U_n - 1$ باشد، آن‌گاه جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۴۱ ۳) ۳۹ ۴) ۲۱

۹۴. در یک دنبالهٔ بازگشتی اگر جملهٔ اول برابر یک، جملهٔ صد و یکم برابر ۵۰۱ و فرمول دنباله $U_{n+2} = U_{n+1} - U_n$ باشد، مجموع جملات سوم تا خود جملهٔ صد و دوم کدام است؟

۱) ۴۷۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۴۹۰ ۴) ۵۰۰

۹۵. در یک دنبالهٔ اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$، جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۵۹ ۳) ۲۴۷ ۴) ۲۵۵

۹۶. در یک دنبالهٔ اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$، حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

دنبالهٔ حسابی

نام دیگر الگوهای خطی، دنبالهٔ حسابی است و دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید.

این عدد ثابت، **قدر نسبت** نامیده می‌شود و با d نمایش داده می‌شود. اگر $d > 0$ باشد، دنباله روندی افزایشی پیدا می‌کند که آن را صعودی می‌نامند و اگر $d < 0$ باشد، دنباله روندی کاهشی می‌یابد و آن را نزولی می‌نامند.

جملهٔ عمومی این دنباله $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

مهروماه

بنابراین $A\cup B=\{0,-1,1\}$ بوده و دارای سه عضو است و این مجموعه $2^3=8$ زیر مجموعه دارد.

۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴

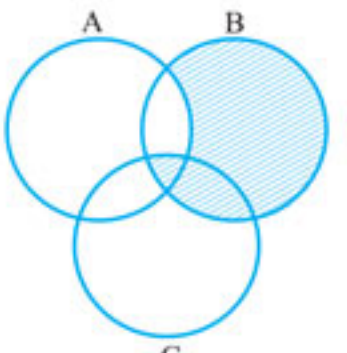
یادآوری: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی 2^n است.

اگر به اعضای یک مجموعهٔ n عضوی یک عضو دیگر اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+1$ می‌گردد. پس اگر قبلاً تعداد زیر مجموعه‌ها 2^n بوده، تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ جدید 2^{n+1} است. $\frac{2^{n+1}}{2^n}=\frac{2^n\times 2^1}{2^n}=2$

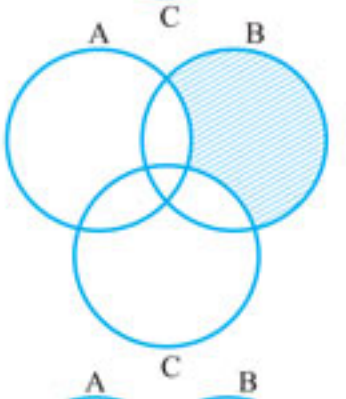
۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که همهٔ گزینه‌ها شامل $A\cap B\cap C$ یعنی قسمت مشترک سه مجموعه هستند، بهتر است در هر گزینه فقط قسمت‌های متفاوت را بررسی کنیم.

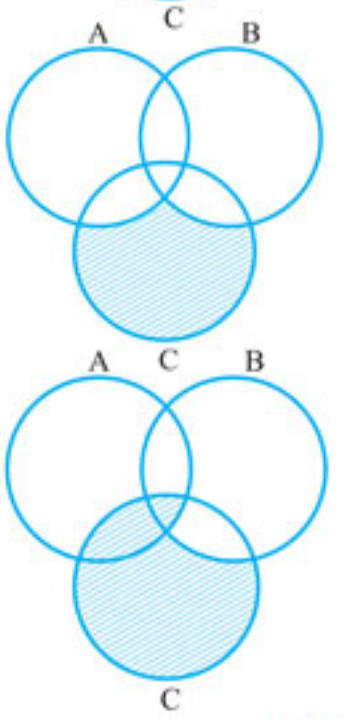
گزینهٔ ۱: $B-(A-C)$



گزینهٔ ۲: $(B-A)-C$



گزینهٔ ۳: $(C-B)-A$



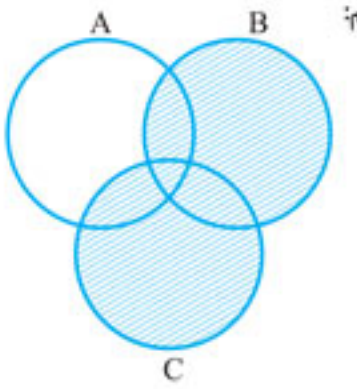
گزینهٔ ۴: $C-(B-A)$

با توجه به نمودارها مشخص می‌گردد **گزینهٔ ۲** صحیح است.

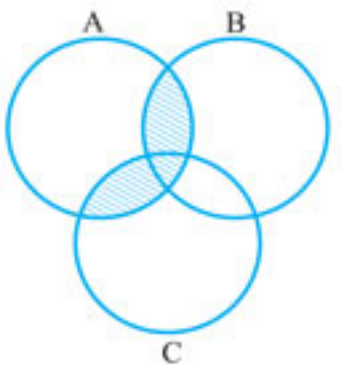
۱۲. ۱ ۳ ۴

مراحل رسم شکل را به ترتیب جلو می‌بریم:

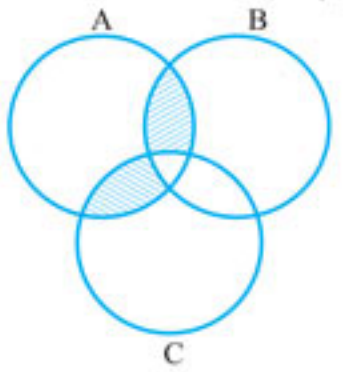
ابتدا $B\cup C$ را رسم می‌کنیم:



سپس $A\cap(B\cup C)$ را رسم می‌کنیم:



حالا از این مجموعه $B\cap C$ را کم می‌کنیم:

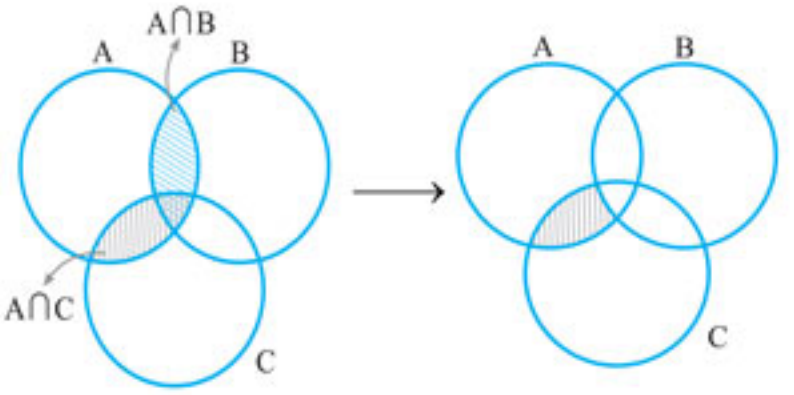


$A\cap(B\cup C)-(B\cap C)$

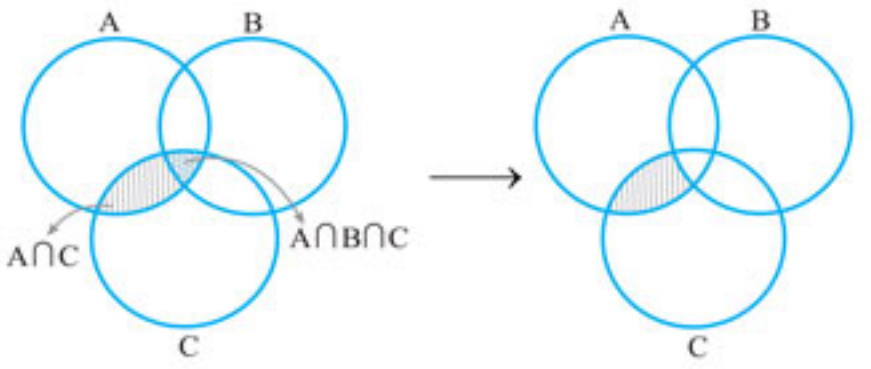
۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴

به ترتیب نمودار همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.

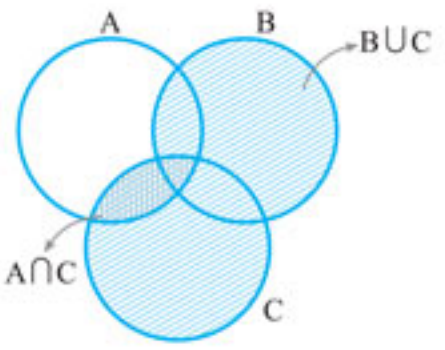
گزینهٔ ۱: $A\cap C-(A\cap B)$



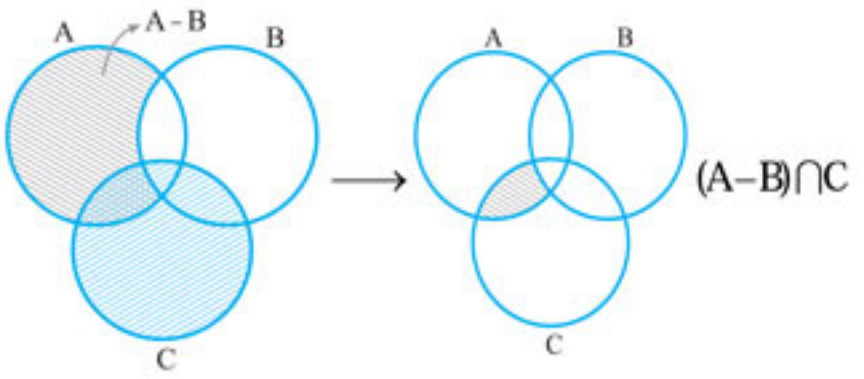
گزینهٔ ۲: $A\cap C-(A\cap B\cap C)$



گزینهٔ ۳: با توجه به شکل، $(A\cap C)-(B\cup C)$ برابر تهی است.



گزینهٔ ۴:



$(A-B)\cap C$

۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴

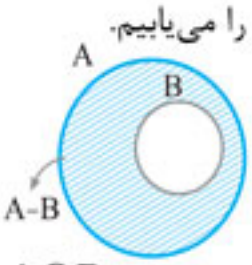
راهبرد ۱

برخی از قوانین جبر مجموعه‌ها

- خاصیت جابه‌جایی: $\begin{cases} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{cases}$
- خاصیت شرکت‌پذیری: $\begin{cases} A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \end{cases}$
- خاصیت پخشی: $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$
- قوانین جذب: $\begin{cases} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{cases}$
- اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه: $\begin{cases} A\cup B=B \\ A\cap B=A \end{cases}$

از آن‌جایی که $A\cup B=A$ است، بنابراین B زیر مجموعهٔ A است.

حال به کمک شکل، حاصل عبارت خواسته شده را می‌یابیم.



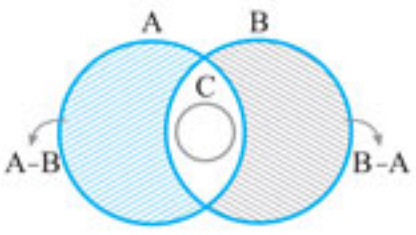
از آنجاکه $B\subseteq A$، پس $A\cap B=B$ است.

کافی است $A-B$ را هاشور بزنیم.

همان‌طور که می‌بینید اجتماع قسمت هاشورخورده با $A\cap B$ که همان B است، مجموعهٔ A را به‌طور کامل پوشش می‌دهد و $(A\cap B)\cup(A-B)=A$ می‌شود.

۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به این‌که $C\subseteq A\cap B$ نمودار این سه مجموعه به صورت مقابل است:



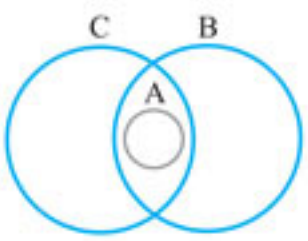
همان‌طور که می‌بینید $C\not\subset A-B$، $C\not\subset B-A$ و $C\not\subset(B-A)\cup(A-B)$ می‌باشند و فقط C می‌تواند زیر مجموعهٔ $A\cup B$ باشد.

۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴

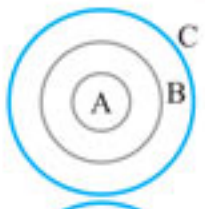
چون $A-B=\varnothing$ است، پس $A\subseteq B$ می‌باشد و چون $A-C=\varnothing$ است، پس $A\subseteq C$ می‌باشد یعنی A هم‌زمان، زیر مجموعه B و C است.

این اتفاق در ۴ حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

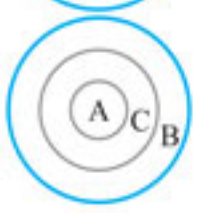
الف: $A=B=C$ باشد.



ب: A در قسمت اشتراک C,B باشد.



پ: $A\subset B\subset C$ باشد.



ت: $A\subset C\subset B$ باشد.

در تمام این حالات، تنها گزینه‌ای که همواره صحیح است **گزینهٔ ۴** است، یعنی $B\cap C\neq\varnothing$ است.

۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴

راهبرد ۲

- در جبر مجموعه‌ها، معمولاً رابطه‌ها دو طرفه نیستند، یعنی از $A=B$ می‌توان نتیجه گرفت $A\cap C=B\cap C$ ولی برعکس آن می‌تواند برقرار نباشد یعنی از $A\cap C=B\cap C$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A=B$ است.
- از $A=B$ می‌توان نتیجه گرفت $A-C=B-C$ ولی برعکس آن درست نیست، یعنی نمی‌توان از $A-C=B-C$ نتیجه گرفت $A=B$ است.
- از $A\subseteq B$ می‌توان نتیجه گرفت $A\cap C\subseteq B\cap C$ ولی برعکس آن درست نیست یعنی نمی‌توان از $A\cap C\subseteq B\cap C$ نتیجه گرفت $A\subseteq B$ است.

در این سؤال هم نمی‌توان از $A\cap C\subseteq A\cap B$ نتیجه گرفت $C\subseteq B$ است.

برای بررسی غلط بودن این رابطه کافی است یک مثال بزنیم. فرض کنید $A=\{1,2,3\}$، $B=\{1,2,9\}$ و $C=\{2,7\}$ باشند.

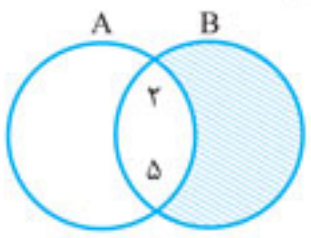
می‌بینید که: $\left.\begin{matrix} A\cap C=\{2\} \\ A\cap B=\{1,2\} \end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cap C\subseteq A\cap B$

ولی همان‌طور که می‌بینید $C\subseteq B$ نیست.

با همین مثال می‌توان فهمید که فقط گزینهٔ «۴» برقرار است.

۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴

از آن‌جایی که $B-A=B-(A\cap B)$ است و $B-A=B-\{2,5\}$، می‌توان نتیجه گرفت که $A\cap B=\{2,5\}$ است.



به لحاظ نموداری اگر $B-A=B-\{2,5\}$ باشد، می‌توان فهمید ۲ و ۵ لزوماً عضو مشترک دو مجموعهٔ A و B هستند.

۱۹. ۱ ۳ ۴

با توجه به موضوع مورد اشاره در راهبرد بالا می‌توان گفت قسمت **الف** و **پ** درست هستند ولی قسمت‌های **ب** و **ت** درست نیستند، یعنی در مورد $A-B=\varnothing$ نمی‌توان قطعاً گفت $A=B$ است چرا که مثلاً ممکن است $A\subseteq B$ باشد.

همین‌طور از این‌که قسمت مشترک A و B با قسمت مشترک A و C برابر است نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$ است.

نکته: نمی‌توان از طرفین یک تساوی چیزی را خط زد، یعنی:
$A\cap C=A\cap B\Rightarrow C=B$

۲۰. ۱ ۳ ۴

اولاً چون $A\subset B$ است، پس $A\cap B=A$ می‌باشد و قطعاً $A-B=\varnothing$ است.

حال حاصل $(A-B)\cup(B-A)=\varnothing\cup(B-A)$ برابر $B-A$ است.

حال تعداد اعضای مجموعهٔ اجتماع را می‌یابیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(A\cup B)=۶۰+۴۰-۲۰=۸۰$$

و مجدداً به کمک رابطهٔ تعداد اعضای مجموعهٔ متمم داریم:

$$n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۸۰=۲۰$$

۷۱. ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ دانش‌آموزان دارای برادر را با B و مجموعهٔ دانش‌آموزان دارای خواهر را با S نمایش می‌دهیم. اشتراک این دو مجموعه از تهی تا ۱۲ نفر می‌تواند باشد. بنابراین تعداد اعضای مجموعهٔ اجتماع عبارت است از:

$$n(B\cup S)=n(B)+n(S)-n(B\cap S)$$
$$n(B\cup S)=۱۲+۱۴-n(B\cap S)$$

طبق آن‌چه گفته شد $۰\le n(B\cap S)\le ۱۲$ است.

پس $۱۴\le n(B\cup S)\le ۲۶$ و چون x تعداد افراد تک فرزند است لذا تعداد اعضای x همان $n(B\cup S)'$ است.

$$x=n(B\cup S)'=n(U)-n(B\cup S)=۳۰-n(B\cup S)$$

با قرار دادن کمترین و بیشترین مقدار $n(B\cup S)$ یعنی ۱۴ و ۲۶ می‌توان حدود x را پیدا کرد.

$$\begin{matrix}x=۳۰-۱۴=۱۶\\ x=۳۰-۲۶=۴\end{matrix}\Rightarrow ۴\le x\le ۱۶$$

۷۲. ۱ ۲ ۳ ۴

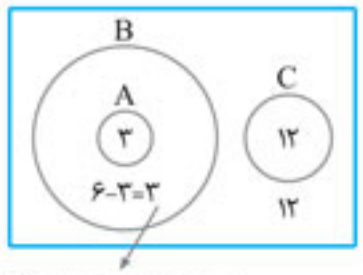
روش اول: می‌دانیم A زیر مجموعهٔ B است و هر دوی این‌ها زیر مجموعهٔ C' هستند.

نکته: اگر $A\subseteq B'$ باشد، به آن معنی است که دو مجموعهٔ A و B جدا از هم هستند و هیچ اشتراکی ندارند.

با توجه به نکته گفته شده می‌فهمیم که دو مجموعه A و B هیچ اشتراکی با C ندارند.

به کمک این اطلاعات نمودار ۳ مجموعه را رسم می‌کنیم.

به کمک نمودار متوجه می‌شویم تعداد اعضای داخل مجموعه‌های A و B و C برابر $۱۸=۱۲+۳+۳$ است، بنابراین تعداد اعضای خارج این سه مجموعه $۱۸-۳۰$ یعنی ۱۲ است.

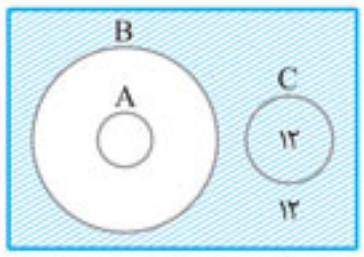


$n(B-A)$: تعداد اعضای خالص B

حال به کمک نمودارها مجموعهٔ مقابل را هاشور می‌زنیم:

$$((\underbrace{A\cup B}_{A\subseteq B})-C)'$$

با توجه به این‌که $A\subseteq B$ است می‌توان گفت: $A\cup B=B$



با توجه به این‌که $((A\cup B)-C)'$ قسمت هاشور خورده می‌باشد تعداد اعضای آن مشتمل برابر $۱۲+۱۲=۲۴$ است.

که ۱۲ عدد مربوط به خود مجموعهٔ C و ۱۲ عدد مربوط به مجموعهٔ خارج C می‌باشد.

روش دوم: به کمک جبرِ مجموعه‌ها

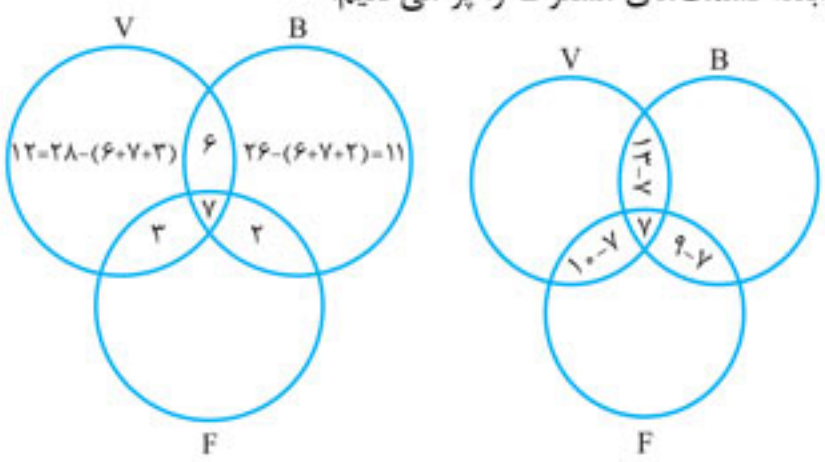
$$((A\cup B)-C)'\underset{A\cup B=B}{\overset{A\subseteq B}{=}}(B-C)'$$
$$=(B\cap C')'\underset{B\cap C'=B}{\overset{B\subseteq C'}{=}}n(B')=n(U)-n(B)=۳۰-۶=۲۴$$

۷۳. ۱ ۲ ۳ ۴

برای حل سؤالات ۳ مجموعه‌ای، بهترین کار مراجعه به نمودار است.

مجموعهٔ والیبال را با V، مجموعهٔ بسکتبال را با B و مجموعهٔ فوتبال را با F نمایش می‌دهیم.

ابتدا قسمت‌های مشترک را پر می‌کنیم:

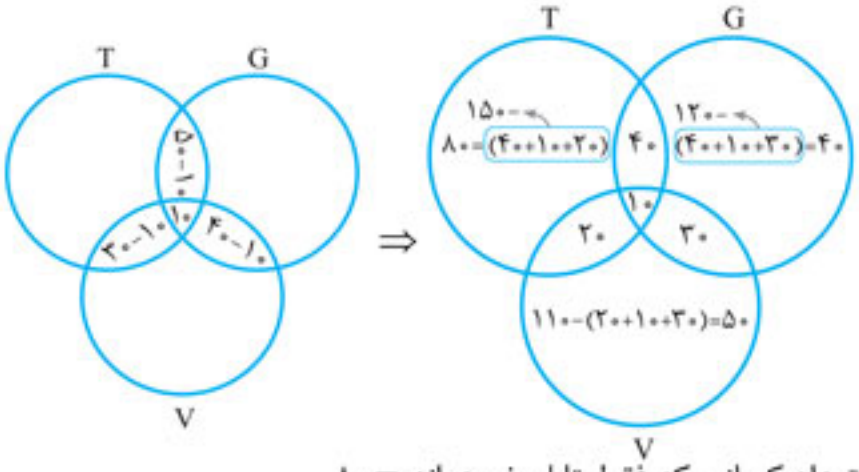


حال برای یافتن x باید تمام اعداد موجود را با هم جمع کرده و از ۶۰ کم کنیم.

$$x=۶۰-(۱۲+۱۱+۳+۷+۲+۶)=۱۹$$

۷۴. ۱ ۲ ۳ ۴

مجموعهٔ خریداران تابلو را با T، مجموعهٔ خریداران گل را با G و مجموعهٔ خریداران گلدان را V نمایش می‌دهیم.



تعداد کسانی که فقط تابلو خریده‌اند $=۸۰$

تعداد کسانی که فقط گل خریده‌اند $=۴۰$

تعداد کسانی که فقط گلدان خریده‌اند $=۵۰$

تعداد کسانی که دقیقاً یک خرید انجام داده‌اند $=\underbrace{۸۰+۴۰+۵۰}_{۱۷۰}$

۷۵. ۱ ۲ ۳ ۴

تعداد دایره‌ها را در هر مرحله می‌شماریم:

شمارهٔ جمله: (۱) (۲) (۳)

تعداد نقاط: ۴ , ۷ , ۱۰ , ...

می‌توان فهمید که در هر مرحله ۳ واحد به تعداد قبلی اضافه می‌شود و می‌توان شمارهٔ جمله را به تعداد نقاط به روش زیر ربط داد.

$$\overset{(۱)}{۳(۱)+۱}\ ,\ \overset{(۲)}{۳(۲)+۱}\ ,\ \overset{(۳)}{۳(۳)+۱}\ ,\ \ldots$$

بنابراین جملهٔ nام برابر $۳n+۱$ است و اگر برابر ۸۲ باشد، داریم:

$$۳n+۱=۸۲\Rightarrow ۳n=۸۱\Rightarrow n=۲۷$$

یعنی در بیست و هفتمین مرحله، تعداد دایره‌ها برابر ۸۲ می‌گردد.

مهروماه

۸۵. ۱ ۲ ۳ ۴

تعداد نقاط هر گزینه را در هر مرحله می‌نویسیم.

الف:

(۱) (۲) (۳)
۱ ۶ ۱۵
۵ ۹

ب:

(۱) (۲) (۳)
۱ ۵ ۹
+۴ +۴

پ:

(۱) (۲) (۳)
۵ ۱۰ ۱۸
+۵ +۸

ت:

(۱) (۲) (۳)
۴ ۸ ۱۲
+۴ +۴

دنبالهٔ خطی، دنباله‌ای است که اختلاف جملات آن ثابت باشد که فقط قسمت **ب** و **ت** دارای این خاصیت می‌باشند.

۸۶. ۱ ۲ ۳ ۴

از آن‌جایی‌که اختلاف جملات متوالی -۳ است، پس ضریب n در الگوی $t_n = an + b$ برابر -۳ است و یعنی $a = -۳$ می‌باشد.

$$t_n = -۳n + b$$

حال می‌دانیم جملهٔ دهم برابر -۱۰۰ است.

$$t_{۱۰} = -۳(۱۰) + b = -۱۰۰ \Rightarrow b = -۷۰$$

پس جملهٔ عمومی الگو به‌طور کامل پیدا شد. $t_n = -۳n - ۷۰$

برای پیدا کردن جملهٔ سوم کافی است به n مقدار ۳ را بدهیم.

$$t_۳ = -۳(۳) - ۷۰ = -۷۹$$

۸۷. ۱ ۲ ۳ ۴

اختلاف جملات الگو را محاسبه می‌کنیم:

+۷
۳ , ۸ , ۱۵ , ۲۴ , ...
+۵ +۹

دنبالهٔ اختلافات $۵, ۷, ۹, \ldots$ خود یک الگوی خطی است.

۵ , ۷ , ۹ , ...
۲ ۲

دنبالهٔ خطی اختلافات $۵, ۷, ۹, \ldots$ دو تا دو تا اضافه می‌شود و نصف آن ضریب $n^۲$ است پس جملهٔ nام دنباله به صورت $n^۲ + bn + c$ است.

حال باید دو مجهول b و c را بیابیم. برای یافتن دو مجهول باید دو معادله داشته باشیم کافی است یک‌بار به n عدد یک را بدهیم و برابر ۳ بگذاریم و یک‌بار به n عدد ۲ بدهیم و برابر ۸ بگذاریم.

$$t_n = n^۲ + bn + c \Rightarrow \begin{cases} (۱)^۲ + b(۱) + c = ۳ \\ (۲)^۲ + b(۲) + c = ۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\begin{cases} b + c = ۲ \\ ۲b + c = ۴ \end{cases}$$

$$b = ۲ \Rightarrow c = ۰$$

بنابراین دنباله به صورت $t_n = n^۲ + ۲n$ است.

تذکر: در این تست‌ها کافی است با دادن اعداد $۱, ۲, ۳, \ldots$ به گزینه‌ها جملات متوالی آن‌ها را با صورت سؤال مقایسه کنیم و گزینهٔ صحیح را بیابیم.

مثلاً اگر به جای n در همهٔ گزینه‌ها ۱ قراردهیم فقط گزینهٔ دوم و چهارم برابر عدد ۳ می‌شوند و گزینه‌های ۱ و ۳ حذف می‌شوند و با قراردادن ۲ به جای n تنها گزینه‌ای که ۸ می‌شود گزینهٔ چهار است.

۸۸. ۱ ۲ ۳ ۴

جملهٔ عمومی دنبالهٔ مربعی $t_n = n^۲$ و جملهٔ عمومی دنبالهٔ مثلثی $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

اگر دقت کنید $۲a_n = n(n+۱) = n^۲ + n$ می‌شود و با کم کردن t_n از $۲a_n$ مقدار $n^۲$ حذف می‌شود و فقط عبارت درجهٔ اول n باقی می‌ماند که از الگوی خطی پیروی می‌کند.

$$۲a_n - t_n = (n^۲ + n) - n^۲ = n$$

۸۹. ۱ ۲ ۳ ۴

جملات اول تا دهم را محاسبه می‌کنیم:

$$t_۱ = (-۱)^{۱+۱}\frac{۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$t_۲ = (-۱)^{۲+۱}\frac{۲}{۲+۱} = \frac{-۲}{۳}$$

$$t_۳ = (-۱)^{۳+۱}\frac{۳}{۳+۱} = \frac{۳}{۴}$$

به همین ترتیب بقیهٔ جملات را محاسبه می‌کنیم.

حال به محاسبهٔ حاصل‌ضرب خواسته‌شده می‌پردازیم:

$$t_۱ \times t_۲ \times t_۳ \times t_۴ \times t_۵ \times t_۶ \times t_۷ \times t_۸ \times t_۹ \times t_{۱۰}$$

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{-۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{-۴}{۵} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{-۶}{۷} \times \frac{۷}{۸} \times \frac{-۸}{۹} \times \frac{۹}{۱۰} \times \frac{-۱۰}{۱۱} = \frac{-۱}{۱۱}$$

۹۰. ۱ ۲ ۳ ۴

جملات دنباله را می‌سازیم:

$$\underbrace{\frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲}}_{t_۱}, \underbrace{\frac{۲}{۱۶} + \frac{۱}{۴}}_{t_۲}, \underbrace{\frac{۳}{۱۶} - \frac{۱}{۸}}_{t_۳}, \underbrace{\frac{۴}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶}}_{t_۴}, \ldots$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تنها جملهٔ منفی، جملهٔ اول است.

۹۱. ۱ ۲ ۳ ۴

به جای t_n در نامعادلهٔ داده شده $-۲n + ۷$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{۳ - t_n}{۵} < \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \frac{۳ - (-۲n + ۷)}{۵} < \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \frac{۲n - ۴}{۵} < \frac{۱۰}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲n - ۴ < \frac{۵۰}{۳} \Rightarrow ۲n < \frac{۵۰}{۳} + \frac{۴ \times ۳}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲n < \frac{۵۰ + ۱۲}{۳} \Rightarrow ۲n < \frac{۶۲}{۳} \Rightarrow n < \frac{۳۱}{۳}$$

با توجه به این‌که $\frac{۳۱}{۳}$ حدوداً ۱۰/۳ است و $n < ۱۰/۳$ است، پس ده جملهٔ اول دنباله در نامعادله صادق هستند.

۹۲. ۱ ۲ ۳ ۴

اطلاعات مسئله به ما می‌گوید $t_{۲n+۱} = \frac{۴n^۲ + ۱}{۲n - ۱}$ است.

برای یافتن $t_۳$ باید $۲n + ۱$ را برابر ۳ بگذاریم تا n پیدا شود و آن را در سمت راست مساوی جای‌گذاری کنیم:

$$۲n + ۱ = ۳ \Rightarrow ۲n = ۲ \Rightarrow n = ۱$$

$$\Rightarrow t_{۲n+۱} = \frac{۴n^۲ + ۱}{۲n - ۱} \xrightarrow{n=۱} t_۳ = \frac{۴(۱)^۲ + ۱}{۲(۱) - ۱} = \frac{۵}{۱} = ۵$$

مهروماه

۱۱۰. ۱ ۲ ■ ۴

فرض می‌کنیم بین ۸ و ۶۳ تعداد m عدد قرار داده‌ایم که همگی با هم تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d داده‌اند:

$$\underbrace{۸, \underbrace{۸+d, \quad \dots \quad , ۶۳-d}_{(m-۲)\text{ تا}}, ۶۳}$$

قدرنسبت این دنباله برابر است با: $d = \frac{۶۳-۸}{m+۱} = \frac{۵۵}{m+۱}$

از طرفی اولین عدد قرار داده شده $۸+d$ و آخرین عدد قرار داده شده $۶۳-d$ است که اختلاف آن‌ها طبق صورت سؤال برابر ۳۳ است.

$$(۶۳-d)-(۸+d)=۳۳ \Rightarrow ۵۵-۲d=۳۳$$
$$\Rightarrow ۲d=۲۲ \Rightarrow d=۱۱$$

حال با داشتن جملهٔ اول $t_۱=۸$ و قدرنسبت $d=۱۱$ می‌توان جملهٔ پنجم را به راحتی محاسبه نمود:

$$t_۵ = t_۱ + ۴d = ۸ + ۴(۱۱) = ۸ + ۴۴ = ۵۲$$

۱۱۱. ۱ ■ ۳ ۴

اگر بین دو عدد ۱۲ و ۴۶ تعداد $۲n+۱$ عدد قرار دهیم تعداد کل اعداد $۲n+۳$ می‌شود که جملهٔ وسط آن جملهٔ $n+۲$ اُم است.

$$\underbrace{۱۲, \dots}_{n+۱\text{ جمله}} \quad X \quad \underbrace{\dots, ۴۶}_{n+۱\text{ جمله}}$$

جملهٔ وسط، واسطهٔ حسابی ۱۲ و ۴۶ است.

$$\text{جملهٔ وسط} = \frac{۱۲+۴۶}{۲} = ۲۹$$

۱۱۲. ۱ ۲ ■ ۴

راهبرد ۴

جملات مشترک دو دنبالهٔ حسابی، تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبتی برابر ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنباله می‌دهند. برای نوشتن اعضای مشترک دنباله‌ها، اولین جملهٔ مشترک را می‌نویسیم و با قدرنسبت پیدا شده (ک.م.م قدرنسبت‌ها) از رابطهٔ $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ جملات دنبالهٔ جدید را می‌نویسیم.

اعضای A و B را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به اولین جملهٔ مشترک برسیم:

$$A: ۱, ۵, ۹, ۱۳, (۱۷), \dots \qquad d_A = ۴$$
$$B: ۳, ۱۰, (۱۷), ۲۴, \dots \qquad d_B = ۷$$

با توجه به قدرنسبت‌های دنباله‌های A و B که به ترتیب ۴ و ۷ می‌باشند قدرنسبت جملات مشترک را می‌یابیم، ک.م.م دو عدد ۴ و ۷ برابر ۲۸ می‌باشد، بنابراین قدرنسبت دنبالهٔ جدید ۲۸ است.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ جدید را می‌یابیم:

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d = ۱۷ + (n-۱)۲۸$$
$$= ۱۷ + ۲۸n - ۲۸ = ۲۸n - ۱۱$$

حال باید تعداد nهایی را بیابیم که باعث می‌شود $۲۸n-۱۱$ عددی سه رقمی شود.

$$۱۰۰ \le ۲۸n - ۱۱ \le ۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰+۱۱ \le ۲۸n \le ۹۹۹+۱۱$$
$$۱۱۱ \le ۲۸n \le ۱۰۱۰ \Rightarrow ۳/۹۶ \le n \le ۳۶/۰۷$$

باید اعداد طبیعی بین ۳/۹۶ تا ۳۶/۰۷ را بیابیم.

این اعداد از خود ۴ شروع می‌شود و تا خود ۳۶ ادامه پیدا می‌کند.

تعداد اعداد از ۴ تا ۳۶ برابر $(۳۶-۴)+۱=۳۳$ است.

۱۱۳. ۱ ۲ ۳ ■ ۴

$$\begin{cases} \text{اولین جمله مشترک} \\ ۲, ۵, ۸, (۱۱), \dots & d_۱ = ۳ \\ ۳, ۷, (۱۱), \dots & d_۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \text{ک.م.م} = ۱۲$$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ اعضای مشترک عبارت است از:

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d$$
$$\Rightarrow t_n = ۱۱ + (n-۱)۱۲ = ۱۲n - ۱۲ + ۱۱ = ۱۲n - ۱$$

حال $۱۲n-۱$ را بین ۱۰۰ و ۲۰۰ قرار می‌دهیم:

$$۱۰۰ < ۱۲n - ۱ < ۲۰۰ \Rightarrow ۱۰۱ < ۱۲n < ۲۰۱$$
$$\Rightarrow \frac{۱۰۱}{۱۲} < n < \frac{۲۰۱}{۱۲}$$
$$\Rightarrow ۸/۴ < n < ۱۶/۷۵$$

اولین عدد قابل قبول ۹ و آخرین عدد قابل قبول ۱۶ می‌باشد و تعداد این اعداد عبارت می‌شوند از:

$$(۱۶-۹)+۱ = ۸$$

۱۱۴. ۱ ■ ۳ ۴

راهبرد ۵

تعداد اعضای دنباله‌ای با قدرنسبت d، که از جملهٔ a شروع و به جملهٔ b ختم می‌شود از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$n = \frac{b-a}{d} + ۱$$

اعداد طبیعی که در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۵ دارند از رابطهٔ $t_n = ۷n+۵$ به‌دست می‌آیند که دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۷ می‌باشد.

حال اولین عدد سه رقمی این دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰ & ۷ \\ \hline ۷ & ۱۴ \\ \hline ۳۰ & \\ ۲۸ & \\ \hline ۲ & \end{array}$$

۱۰۰ عددی است که در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ای برابر با ۲ دارد بنابراین ۱۰۳ اولین عددی سه رقمی است که در تقسیم بر ۷ باقیماندهای برابر با ۵ دارد.

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰۰ & ۷ \\ \hline ۷ & ۱۴۲ \\ \hline ۳۰ & \\ ۲۸ & \\ \hline ۲۰ & \\ ۱۴ & \\ \hline ۶ & \end{array}$$

این تقسیم نشان می‌دهد که ۱۰۰۰ عددی است که در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ای برابر با ۶ دارد. بنابراین ۹۹۹ باقی‌مانده‌ای برابر با ۵ دارد.

برای پیدا کردن تعداد این جملات از فرمول اشاره شده در راهبرد استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد}: n = \frac{b-a}{d} + ۱ = \frac{۹۹۹-۱۰۳}{۷} + ۱ = ۱۲۸ + ۱ = ۱۲۹$$