

به نام پروردگار مهربان

ریاضی ۲ پازدهم

آموزش، تمرین، دوره

عباس اشرفی، محمدامین مولایی ارپناهی



مهروماه

فهرست

۷	هندسهٔ تحلیلی و جبر	فصل ۱
۷۱	هندسه	فصل ۲
۹۷	تابع	فصل ۳
۱۵۳	مثلثات	فصل ۴
۱۸۳	توابع نمایی و لگاریتمی	فصل ۵
۲۲۱	حد و پیوستگی	فصل ۶
۲۶۵	آمار و احتمال	فصل ۷
۲۸۳	فرمول‌نامه	پیوست

فصل ١

هندسة تحليلية

و جبر

هندسه تحلیلی و جبر

درس اول

هندسه تحلیلی

- ◀ یادآوری و تکمیل معادله خط
- ◀ فاصله دو نقطه
- ◀ مختصات نقطه وسط پاره خط
- ◀ فاصله نقطه از خط

درس دوم

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

- ◀ یادآوری
- ◀ روش تغییرمتغیر برای حل معادله
- ◀ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم
- ◀ تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از P و S
- ◀ ماکزیمم و مینیمم سهمی
- ◀ صفرهای تابع درجه ۲
- ◀ نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$
- ◀ به دست آوردن معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$

درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

- ◀ معادلات گویا
- ◀ معادلات رادیکالی

مثال ۲۴ فاصله نقطه $P(-4, 7)$ را تا خطوط زیر محاسبه نمایید.

الف) $L: x = 1$

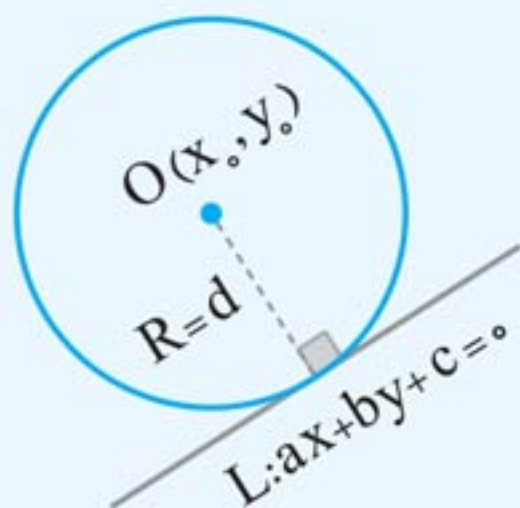
با توجه به چاشنی قبل، فاصله مورد نظر برابر است با:

$$d = |1 - (-4)| = 5$$

ب) $T: y = 3$

با توجه به چاشنی قبل، فاصله مورد نظر برابر است با: $d' = |3 - 7| = 4$

چاشنی: فاصله هر خط مماس بر دایره تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.



$$R = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



(مشابه کار در کلاس صفحه ۹)

مثال ۲۵ میله‌ای که در راستای

خط $L: 12x - 5y = 3$ قرار دارد

مطابق شکل بر چرخ چوبی دایره‌ای

شکل به مرکز $W(2, -1)$ مماس

است. شعاع چرخ را به دست آورید

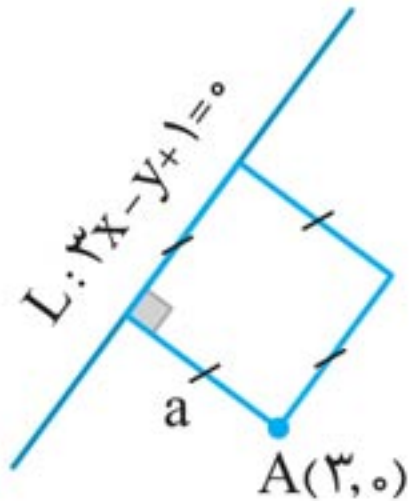
پاسخ شعاع چرخ برابر فاصله مرکز آن تا خط $L: 12x - 5y - 3 = 0$

$$R = d = \frac{|12(2) - 5(-1) - 3|}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

است، پس:

مثال ۲۶ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 3x + 1$ واقع است و $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع است. مساحت مربع را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۹)



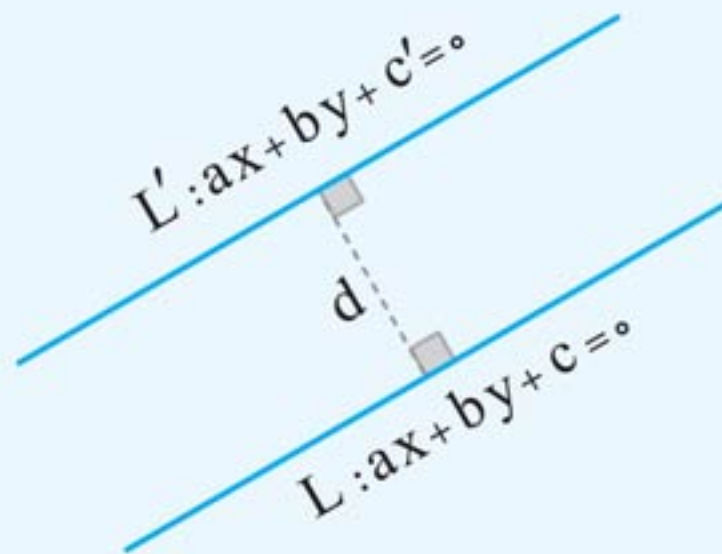
پاسخ A بر روی خط L نیست پس بر روی ضلع مقابل مربع است. با توجه به شکل، فاصله A تا خط L برابر اندازه ضلع مربع است.

$$a = d = \frac{|3(3) - (0) + 1|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

پس مساحت مربع برابر است با: $S = a^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$

چاشنی: فاصله دو خط موازی L و L' که معادله آنها به صورت $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ می باشد برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$





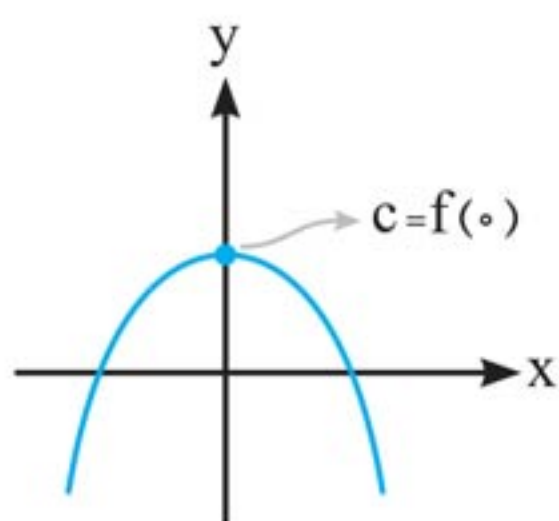
نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$

نمودار توابع درجه ۲ مطابق جدول زیر رسم می‌شوند:

Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
a	محور X ها را در دو نقطه قطع می‌کند.	در یک نقطه بر محور X ها مماس است.	محور X ها را قطع نمی‌کند.
$a > 0$ (سهمی رو به بالا)			
$a < 0$ (سهمی رو به پایین)			

ویژگی‌های نمودار تابع درجه دوم $(f(x) = ax^2 + bx + c)$:

- ۱ Δ : تعداد ریشه‌ها را مشخص می‌کند.
- ۲ a : جهت دهانه سهمی را مشخص می‌کند.
- ۳ c : محل برخورد تابع با محور y ها یعنی $f(0)$ را مشخص می‌کند.



به عنوان نمونه در سهمی زیر می‌توان گفت:

(۱) سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $\Delta > 0$ است.

(۲) دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ است.

(۳) سهمی محور y ها را در قسمت مثبت قطع می‌کند، پس $c > 0$ است.

چاشنی: تعیین تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$

به کمک S و P :

به کمک نمودار درختی زیر، به راحتی می‌توان تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ را که همان صفرهای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ هستند، به دست آورد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P > 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها هم‌علامت} \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow + \text{ دو ریشه} \\ S < 0 \Rightarrow - \text{ دو ریشه} \end{cases} \\ P = 0 \Rightarrow \text{یک ریشه صفر} \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow + \text{ یکی و } 0 \text{ یکی} \\ S < 0 \Rightarrow - \text{ یکی و } 0 \text{ یکی} \end{cases} \\ P < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} + \text{ یکی} \\ - \text{ یکی} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} S > 0 \Rightarrow \text{ریشه منفی} > | \text{ریشه مثبت} \\ S < 0 \Rightarrow \text{ریشه منفی} < | \text{ریشه مثبت} \end{cases} \end{array} \right. \\ \Delta = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \text{یک ریشه مضاعف} + \\ \frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow \text{یک ریشه مضاعف} - \end{array} \right. \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \end{array} \right.$$

تذکره: در حل مسائل این قسمت باید ابتدا Δ ، سپس P و در آخر S معادله را بررسی و تعیین علامت کنیم.

مثال ۴۱ تعداد و علامت ریشه‌های معادلات زیر را به دست آورید.

الف) $2x^2 - 6x + 1 = 0$

ابتدا Δ ، سپس P و در آخر هم S :

$\Delta = (-6)^2 - 4(2)(1) = 28 > 0 \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

$P = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ دو ریشه هم‌علامت دارد.

$S = -\frac{-6}{2} = 3 > 0 \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت‌اند.

هندسه

ترسیم‌های هندسی

درس اول

- ◀ مجموعه نقاط دارای خاصیت یکسان
- ◀ وضعیت خط و دایره نسبت به هم
- ◀ عمود منصف
- ◀ رسم عمود منصف
- ◀ رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن
- ◀ رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
- ◀ رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن
- ◀ نیمساز
- ◀ نحوه رسم نیمساز یک زاویه

استدلال و قضیه تالس

درس دوم

- ◀ نسبت و تناسب
- ◀ استدلال
- ◀ قضیه تالس و تعمیم آن
- ◀ برهان خلف
- ◀ عکس قضیه تالس
- ◀ قضیه‌های دو شرطی

تشابه‌مثلث‌ها

درس سوم

- ◀ دو مثلث متشابه
- ◀ قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها
- ◀ قضایای تشابه دو مثلث
- ◀ برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

تشابه مثلث‌ها

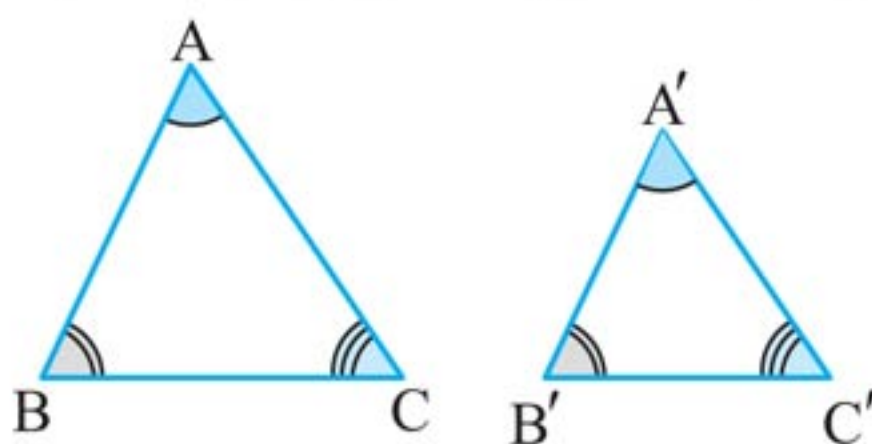
درس سوم

وعده ۱۶

دو مثلث متشابه



دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را متشابه گوییم هرگاه زوایای متناظر با هم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد.



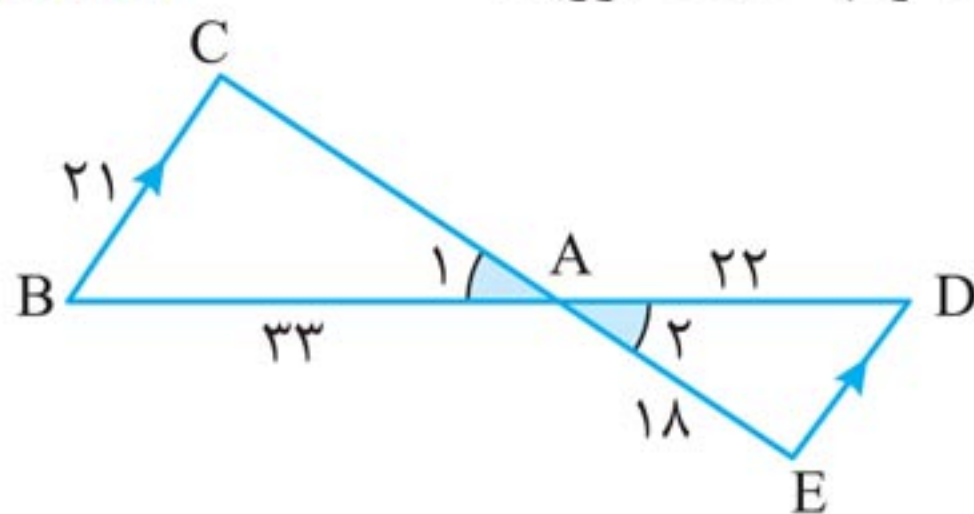
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

❖ قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

❖ قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

❖ قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

🏠 **مثال ۹** در شکل زیر، $BC \parallel DE$ است. اندازه پاره‌های CA و DE را به دست آورید. (کار در کلاس صفحه ۴۳)



پاسخ دو زاویه A_1 و A_2 متقابل به رأس هستند و با هم برابرند.

زاویه‌های B و D نیز برابرند چون دو خط BC و DE موازی‌اند و BD مورب است در نتیجه دو مثلث ABC و ADE براساس دو

زاویه یکسان متشابه‌اند. بنابراین:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

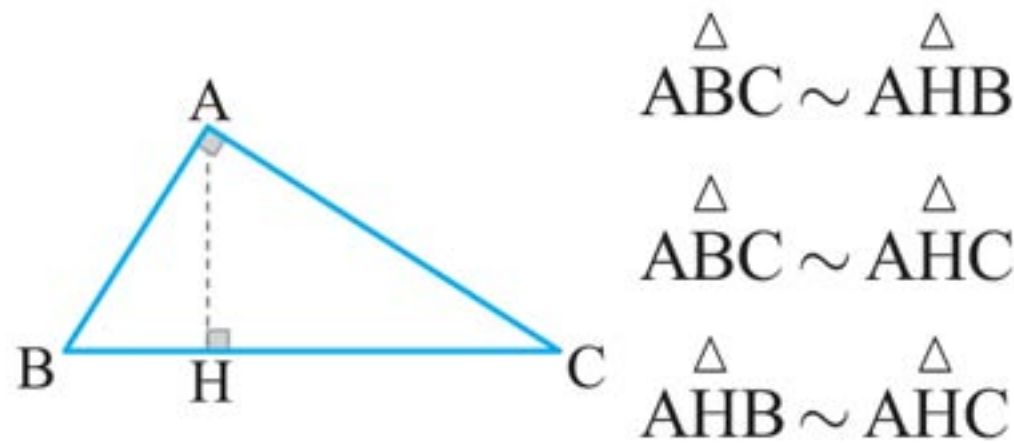
با جای گذاری مقادیر معلوم، مقدار اضلاع خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{DE}{21} = \frac{18}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{DE}{21} = \frac{2}{3} \Rightarrow DE = 14 \\ \frac{18}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AC = 27 \end{cases}$$



برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



از تشابه این مثلث‌ها می‌توان نتیجه گرفت:

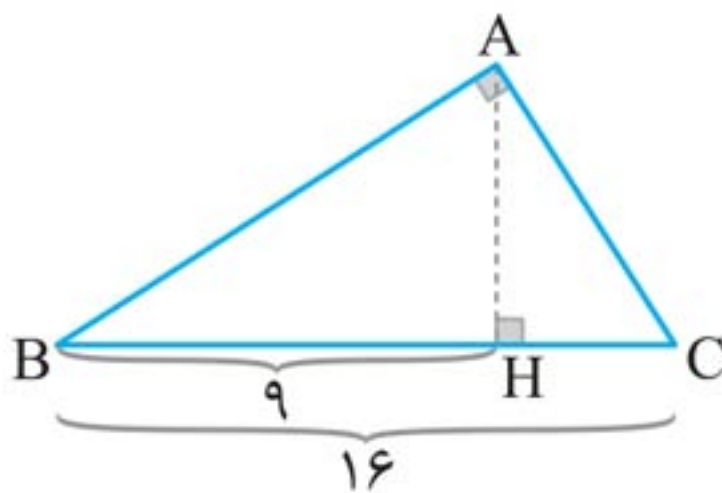
$$AC^2 = CH \times BC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AH^2 = BH \times HC$$

می‌توان از محاسبه مساحت مثلث، رابطه زیر را ثابت کرد:

$$AB \times AC = AH \times BC$$



مثال ۱۵ در مثلث ABC

به کمک اندازه‌های داده‌شده مقادیر AH ، AB و AC را بیابید.

پاسخ به کمک دو مقدار داده‌شده، AB را می‌یابیم:

$$AB^2 = BH \times BC = 9 \times 16 \Rightarrow AB = 3 \times 4 = 12$$

حال مقدار CH را با کم کردن BH از BC پیدا می‌کنیم:

$$CH = BC - BH = 16 - 9 = 7$$

تابع

آشنایی با برخی از انواع توابع

درس اول

- ◀ تابع
- ◀ صورتهای مختلف نمایش تابع
- ◀ انواع توابع
- ◀ توابع گویا
- ◀ تساوی دو تابع
- ◀ توابع رادیکالی
- ◀ توابع پله‌ای
- ◀ توابع جزء صحیح
- ◀ نمودار توابع شامل جزء صحیح

وارون یک تابع و
تابع یک‌به‌یک

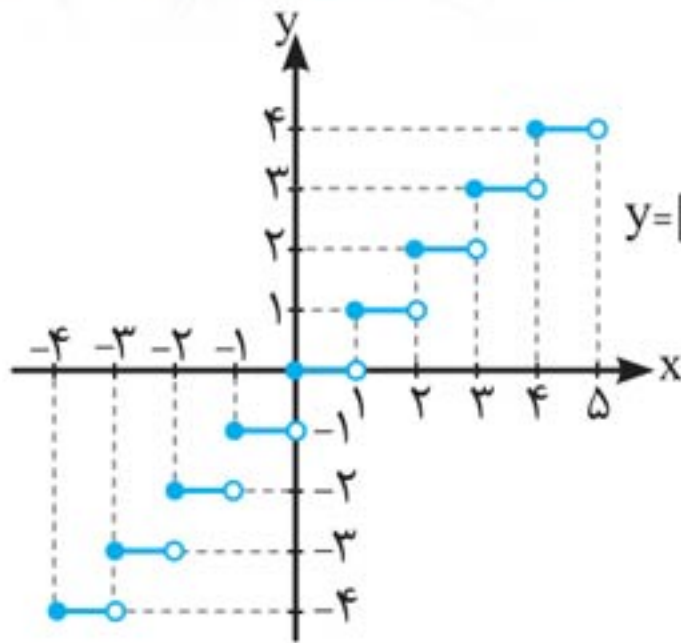
درس دوم

- ◀ وارون یک تابع
- ◀ تابع یک‌به‌یک
- ◀ محدود کردن دامنه برای یک به یک نمودن تابع
- ◀ تابع وارون
- ◀ به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع
خطی غیر ثابت

اعمال جبری روی توابع

درس سوم

- ◀ جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع
- ◀ رسم نمودار به کمک انتقال، انقباض، انبساط و ...



نمودار تابع جزء صحیح به $y = [x]$ صورت روبه‌رو است:

چاشنی: ویژگی‌های جزء صحیح:

۱ هر عدد صحیح از جزء صحیح می‌تواند خارج شود:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x + a] = [x] + a$$

به طور مثال:

$$[x + 7] = [x] + 7$$

۲ مجموع جزء صحیح یک عدد و جزء صحیح قرینه آن عدد برابر

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{یا } -1 \text{ است.}$$

به طور مثال برای عدد صحیح $x = -3$ داریم:

$$[x] + [-x] = [-3] + [-(-3)] = -3 + 3 = 0$$

هم‌چنین برای عدد غیر صحیح $x = -1/1$ داریم:

$$[x] + [-x] = [-1/1] + [-(-1/1)] = -2 + [1/1] = -2 + 1 = -1$$

۳ همواره اختلاف هر عدد از جزء صحیح آن عدد بزرگ‌تر مساوی

$$0 \leq x - [x] < 1$$

صفر و کوچک‌تر از ۱ است.

مثال ۱۴ برد تابع $y = 2x - 2[x] + 3$ را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم همواره $0 \leq x - [x] < 1$ برقرار است، پس:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2x - 2[x] < 2$$

$$\xrightarrow{+3} 3 \leq 2x - 2[x] + 3 < 5 \Rightarrow 3 \leq y < 5 \Rightarrow R = [3, 5)$$



نمودار توابع شامل جزء صحیح

برای رسم این توابع با دامنه مشخص، باید هر بازه که در آن جزء صحیح دارای یک مقدار ثابت است را به دست آوریم. بدین ترتیب می‌توانیم هر پله از نمودار را به طور جداگانه رسم کنیم.

مثال ۱۵ نمودار توابع زیر را رسم نمایید. (مشابه تمرین ۸ صفحه ۵۶)

الف) $f(x) = 2\left[\frac{x}{3}\right]$, $D_f = [-3, 4]$

با توجه به دامنه می‌توان گفت: $-3 \leq x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} \leq \frac{4}{3}$

بدین ترتیب $\left[\frac{x}{3}\right]$ می‌تواند دارای مقادیر زیر باشد:

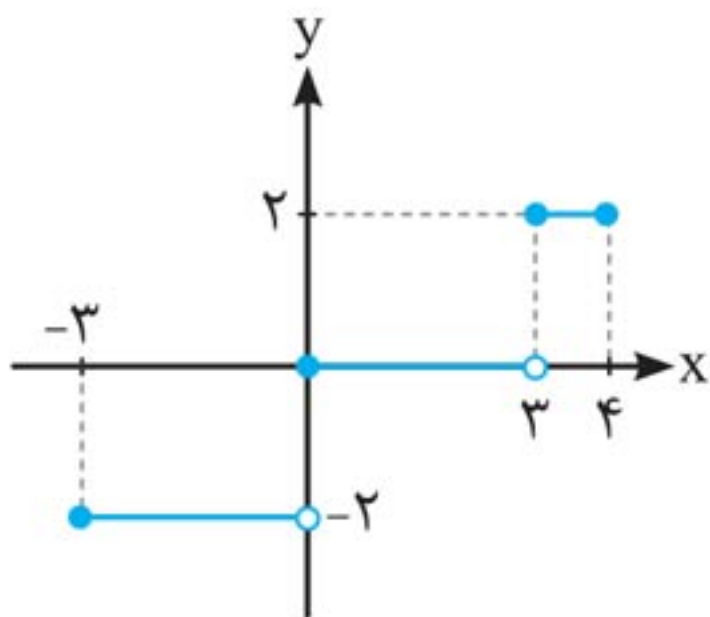
$$-1 \leq \frac{x}{3} < 0 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq x < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -1$$

$$0 \leq \frac{x}{3} < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq x < 3 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 0$$

$$1 \leq \frac{x}{3} \leq \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3 \leq x \leq 4 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 1$$

در نتیجه ضابطه $f(x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} 2(-1) = -2 & ; -3 \leq x < 0 \\ 2(0) = 0 & ; 0 \leq x < 3 \\ 2(1) = 2 & ; 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



حال نمودار با توجه به ضابطه $f(x)$ رسم می‌شود.



جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آن‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ضابطه	تعریف دامنه
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$
$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

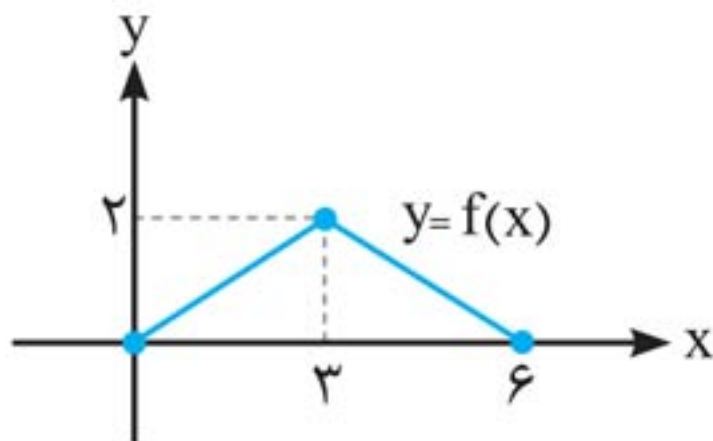
مثال ۲۷ برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x+4}$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، توابع زیر را به همراه دامنه‌شان به دست آورید.

الف) $(f + g)(x)$

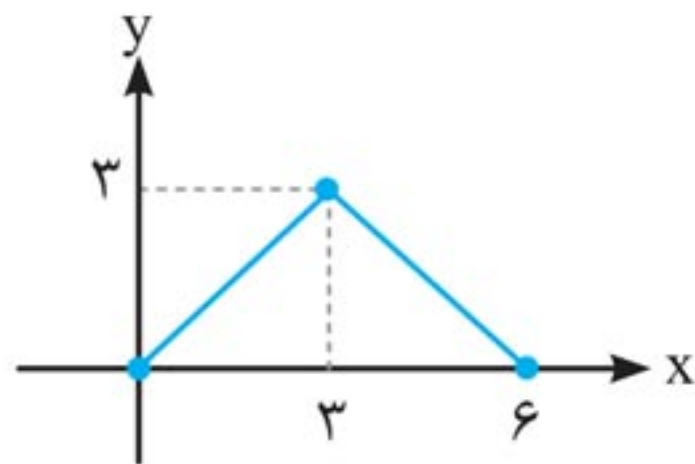
$$\begin{cases} f: x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow D_f = [-4, +\infty) \\ g: D_g = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-4, +\infty)$$

الف) اگر $k > 1$ باشد: در این حالت عرض نقاط، k برابر شده و نمودار $y = f(x)$ در راستای محور y ها کشیده تر می شود (انبساط می کند).



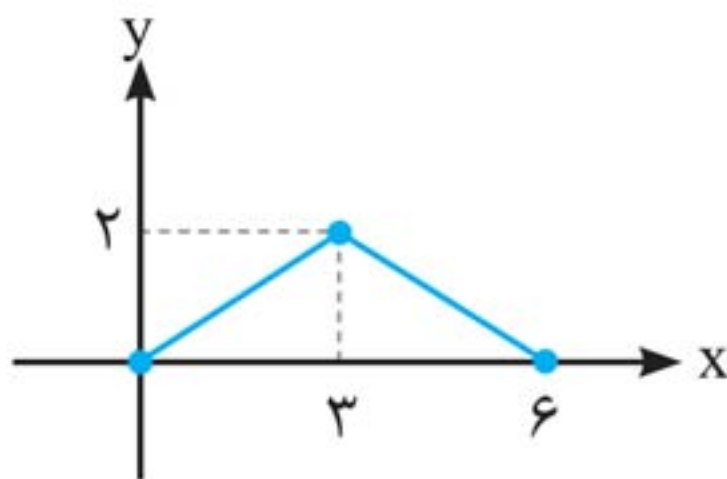
برای نمونه فرض کنید نمودار $y = f(x)$ مانند روبه رو باشد:



اگر نمودار $y = \frac{3}{2} f(x)$ را بخواهیم، کفایت عرض همه نقاط $y = f(x)$ را $\frac{3}{2}$ برابر نماییم. دقت نمایید نمودار تابع $f(x)$ در راستای y ها انبساط کرده است.

ب) اگر $0 < k < 1$ باشد: در این حالت عرض نقاط k برابر شده و نمودار $y = f(x)$ در راستای محور y ها جمع تر می شود (دچار انقباض می کند).

برای نمونه فرض کنید نمودار $y = f(x)$ مانند زیر باشد.



مثلثات

درس اول

واحد‌های
اندازه‌گیری زاویه

- یادآوری
- رادیان

◀ تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه دایره مثلثاتی

◀ نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

◀ نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل

◀ نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

◀ نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

◀ نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان

◀ نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $\frac{3\pi}{2}$ رادیان

◀ نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم

◀ معرفی توابع مثلثاتی

◀ رسم تابع سینوس

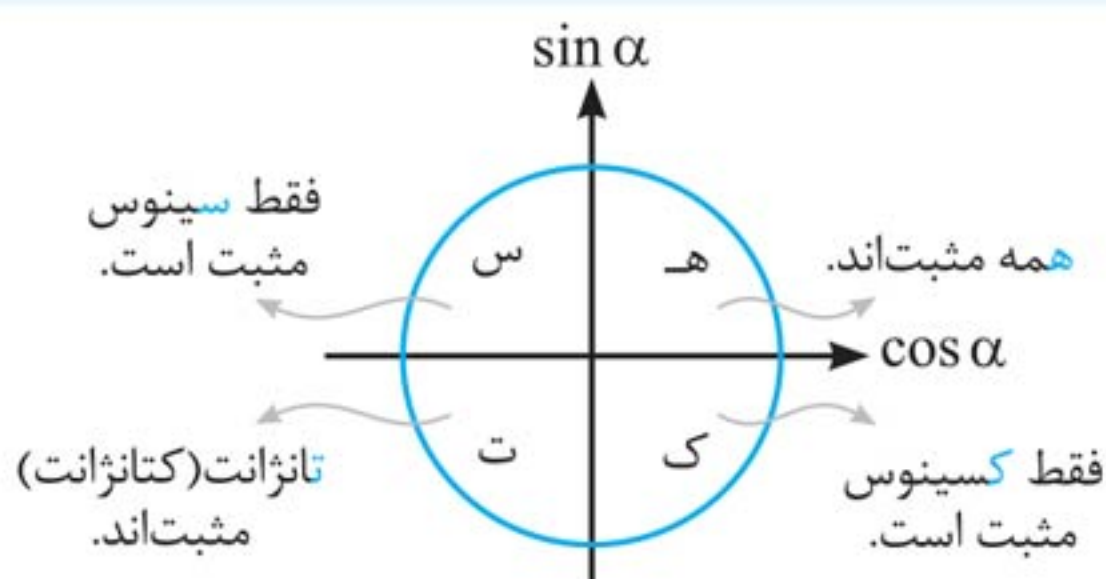
◀ رسم تابع کسینوس

◀ رسم توابع $y = a \sin(x-b) + c$ یا $y = a \cos(x-b) + c$

درس سوم

توابع مثلثاتی

چاشنی: برای تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی زوایای مختلف می‌توانیم از «قاعده هستک» استفاده کنیم.



در این وعده به یادآوری مباحث گذشته پرداختیم، زیرا در ادامه درس کاربرد فراوانی دارند.

چاشنی: اتحادهای مثلثاتی اولیه به صورت زیر هستند.

۱ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

۲ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

۳ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

مثال ۴ اگر $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم

باشد، بقیه نسبت‌های مثلثاتی کمان α را به دست آورید.

(مشابه فعالیت صفحه ۷۸)

پاسخ از اتحادهای مثلثاتی اولیه استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{24}{25}$$

حال می‌دانیم در ربع چهارم فقط $\cos \alpha$ مثبت است، پس:

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

هم‌چنین:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}, \quad \cot \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$



چاشنی: نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم به صورت زیر می‌باشند:

نسبت زاویه α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
۰ رادیان = ۰° یا رادیان $2\pi = 360^\circ$	۰	۱	۰	ت ن
۳۰° رادیان $= \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
۴۵° رادیان $= \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
۶۰° رادیان $= \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
۹۰° رادیان $= \frac{\pi}{2}$	۱	۰	ت ن	۰
۱۸۰° رادیان $= \pi$	۰	-۱	۰	ت ن
۲۷۰° رادیان $= \frac{3\pi}{2}$	-۱	۰	ت ن	۰

تذکر: باید دقت کنیم هنگامی که $\cos \alpha = 0$ می‌باشد، $\tan \alpha$ تعریف نشده است، زیرا $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ و مخرج کسر نمی‌تواند صفر شود. همچنین هنگامی که $\sin \alpha = 0$ می‌باشد، $\cot \alpha$ تعریف نشده است، زیرا $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ و مخرج کسر نمی‌تواند صفر شود.



درس سوم

توابع مثلثاتی

وعدۀ ۱۱



معرفی توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطۀ $y = \sin x$ و تابع کسینوس با ضابطۀ $y = \cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این کتاب با آنها آشنا می‌شوید.

مقدار \sin و \cos همواره کوچک‌تر مساوی ۱ و بزرگ‌تر مساوی -۱

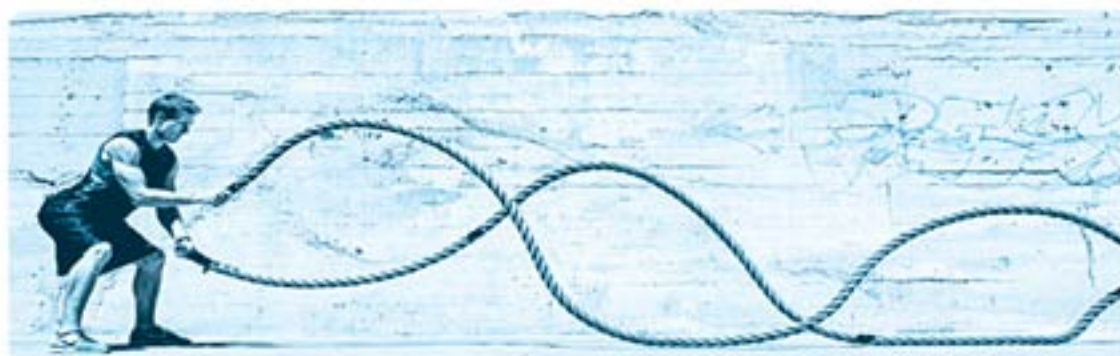
است، پس:

$$y = \sin x \text{ یا } y = \cos x \Rightarrow \begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [-1, 1] \end{cases}$$

وعدۀ ۱۲



رسم تابع سینوس



برای رسم $y = \sin x$ از نقطه‌یابی استفاده می‌نماییم:

x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰

حد و پیوستگی

فرایندهای حدی

درس اول

- مفهوم شهودی حد
- تعریف حدود چپ و راست و حد

محاسبهٔ حد توابع

درس دوم

- قضایای حد
- محاسبهٔ حد توابع خاص
- حدهای مثلثاتی

پیوستگی

درس سوم

- پیوستگی در نقطه
- پیوستگی روی یک بازه

چاشنی: حد تابع $f(x)$ در $x = x_0$ هیچ ربطی به مقدار تابع در $x = x_0$ ندارد.

به طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ،

آن‌گاه دربارهٔ $f(x_0)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم:

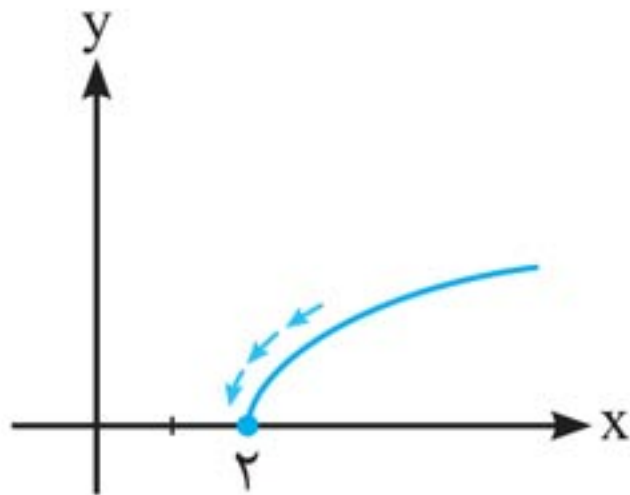
۱ $f(x_0)$ موجود نیست.

۲ $f(x_0)$ موجود است؛ ولی $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

۳ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

مثال ۳ هر یک از حدود زیر را به کمک نمودار توابع آن‌ها به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}$



نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ مطابق شکل روبه‌رو است.

مطابق نمودار، وقتی $x \rightarrow 2^+$ مقدار تابع به صفر نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$

با توجه به نمودار رسم‌شده در قسمت قبل، تابع در سمت چپ $x = 2$ تعریف نشده است، پس حد ندارد.

آمار و احتمال

درس اول

- احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل
- ◀ یادآوری
 - ◀ احتمال شرطی
 - ◀ پیشامدهای مستقل

آمار توصیفی

درس دوم

- ◀ معیارهای گرایش به مرکز
- ◀ معیارهای پراکندگی



درس دوم

آمار توصیفی

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی می‌پردازد.

وعدۀ ۴



معیارهای گرایش به مرکز

از جمله معیارهای گرایش به مرکز می‌توان به میانگین و میانه اشاره کرد.
 ◀ میانگین: متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با \bar{X} نشان می‌دهیم. میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_N برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (N \text{ برابر با تعداد کل داده‌هاست.})$$

◀ ویژگی‌های میانگین

۱ اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آن‌ها نیز با همان مقدار ثابت جمع می‌شود.

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow \text{میانگین} = \bar{X} \\ x_1 + k, \dots, x_n + k \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = \bar{X}_{\text{قدیم}} + k \\ \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = \bar{X} + k \end{cases}$$

۲ اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آن‌ها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد.

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_n \Rightarrow \text{میانگین} = \bar{X} \\ kx_1, \dots, kx_n \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = k\bar{X}_{\text{قدیم}} \Rightarrow \bar{X}_{\text{جدید}} = k\bar{X} \end{cases}$$

فصل ۴

۱ اندازه زاویه بر حسب رادیان:

$$\alpha = \frac{\text{طول کمان روبه روی زاویه } \alpha}{\text{شعاع دایره}} = \frac{l}{r}$$

۲ تبدیل رادیان به درجه:

D اندازه زاویه بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان است.

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

۳ روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی:

$$\text{نسبت‌های مثلثاتی } (-\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{نسبت‌های مثلثاتی } (\pi - \alpha) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{نسبت‌های مثلثاتی } (\pi + \alpha) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{نسبت‌های مثلثاتی } (\forall k\pi - \alpha), k \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\forall k\pi - \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\forall k\pi - \alpha) = \cos \alpha \\ \tan(\forall k\pi - \alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(\forall k\pi - \alpha) = -\cot \alpha \end{array} \right.$$

$$y = \sin x \Rightarrow \begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [-1, 1] \end{cases} \quad \text{۴ توابع مثلثاتی:}$$

$$y = \cos x \Rightarrow \begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [-1, 1] \end{cases}$$

فصل ۵

۱ توان‌های حقیقی: $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$a^0 = 1 \qquad (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

۲ تابع نمایی: $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) $\Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (0, +\infty) \end{cases}$

۳ نامعادلات نمایی: $(a > 0, a \neq 1): a^x > a^y \xrightarrow{a > 1} x > y$

$$a^x > a^y \xrightarrow{0 < a < 1} x < y$$

۴ معادلات نمایی: $a^x = a^y$, ($a > 0, a \neq 1$) $\Leftrightarrow x = y$

۵ تابع لگاریتمی:

$$f(x) = \log_a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow \begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases}$$



۶ ده فرمان لگاریتم:

الف) $a^y = x \Leftrightarrow \log_a^x = y$

ب) $\log_a^1 = 0$, $\log_a^a = 1$, $\log_a^{\frac{1}{a}} = -1$

پ) $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$ ت) $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$

ث) $\log_{\frac{a}{b}}^n = \frac{n}{m} \log_a^b$ ج) $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

ح) $a^{\log_a^b} = b^{\log_a^a} = b$ د) $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$

خ) $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

تذکره: تمامی لگاریتم‌های بالا تعریف شده‌اند.

۷ معادلات لگاریتمی:

$(a > 0, a \neq 1) \log_a^x = \log_a^y \xleftrightarrow{x, y > 0} x = y$

۸ نامعادلات لگاریتمی:

$a > 1: \log_a^x > \log_a^y \xleftrightarrow{x, y > 0} x > y$

$0 < a < 1: \log_a^x > \log_a^y \xleftrightarrow{x, y > 0} x < y$

۹ انرژی آزاد شده در یک زلزله: $\log E = 11/8 + 1/5 M$

M: بزرگی زلزله بر حسب ریشتر

E: انرژی آزاد شده در واحد ارگ (Erg)

فصل ۶

۱ شرط وجود حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$:

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$