به نام پروردگار مهربان

هندسه
دوازدهم

ریاضی

آموزش به سبک لقمه

آرین تفضلی‌زاده

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

مقدمه

به نام ناب‌ترین واژهٔ زندگیم خدا

یکی از دغدغه‌های اصلی دانش‌آموزان در دوران امتحانات نهایی، جمع‌بندی مباحث درسی و مرور نکات و تمرین‌های مهم کتاب درسی است. همه‌ساله دانش‌آموزان در دوران امتحانات نهایی درگیر منابع زیادی برای مرور می‌شوند که به راحتی نمی‌توانند به آن‌ها اعتماد کنند و دچار وسواس مطالعاتی می‌شوند. کتاب‌های لقمه، متخصص درامر خلاصه‌سازی و ارائهٔ مطالب مفید، کاربردی و اصلی کتاب‌های درسی در کوتاه‌ترین زمان ممکن هستند. کتاب پیش‌رو حاصل ۶ ماه تلاش بی‌وقفه و باوسواس برای رسیدن شما به نتیجهٔ مطلوب است.

در این کتاب مثال‌های مهم کتاب درسی، تمرین‌ها و کار در کلاس‌های مهم و کاربردی با راه‌حل‌های کاملاً تشریحی و مفهومی به طور کامل آورده شده است.

در نهایت منبع مناسبی برای رسیدن به نتیجهٔ مطلوب درامتحان نهایی درس هندسهٔ ۳ را در اختیار شما قرار دادیم تا به‌امید خدا بتونید به راحتی نمرهٔ عالی در این درس کسب کنید. فقط کافیه بدونید با مطالعهٔ این کتاب در کمترین زمان ممکن، بهترین نتیجه حاصل خواهد شد. (با لقمه، ۲۰ نهایی تو مُشته)

تشکر و قدردانی

- از مدیریت محترم انتشـــارات مهروماه جناب آقای احمد اختیاری برای پیشنهادات سازنده در مراحل تولید کتاب
- جناب آقای مهندس عباس اشرفی مدیر دپارتمان ریاضی انتشارات مهرومـــاه که همـــواره به عنوان اســـتاد راهنما و بـــرادر بزرگ‌تر در تمامی مراحل تألیف در کنار بنده بودند.
- از زحمات و تلاش‌های بی‌وقفهٔ ســـرکار خانم دنیا سلیمی مسئول ویراستاری برای پیشنهاد قراردادن فصل آزمون در پایان هر فصل
- سرکار خانم زهرا انیشه که برای تدوین و ویرایش کتاب بسیار تلاش کردند و زحمت کشیدند.

و به نوبهٔ خودم از تیم بزرگ مهروماه که شـــبانه‌روز برای رســـیدن این کتاب به دست دانش‌آموزان سرزمینم تلاش کردند، سپاسگزارم.

از پـــدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی مشـــوق و حامی من بودند صمیمانه قدردانی می‌کنم.

برای همهٔ دانش‌آموزان ناب سرزمینم، از خالق احساس حال دل‌آرام، آرامشی از جنس لبخند خداوند و سلامتی و توفیق را خواستارم.

امضای خالق احساس پای تمام آرزوهای به صلاحتون

آرین تفضلی‌زاده

پاییز ۱۳۹۸

فهرست

مثال: دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(۱)(۱۳)-(۶)(-۱)$$

$$\Rightarrow |A|=۱۳-(-۶)=۱۹$$

ب **دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ :**

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

در ایـن روش (فقـط بـرای ماتریس‌هـای (۳×۳) قابل اسـتفاده اسـت.) دو سـتون اول و دوم ماتریس را در کنـارش می‌نویسـیم و دترمینـان ماتریـس A برابـر اسـت با مجموع حاصـل ضرب درایه‌هـای واقع بر قطـر اصلی و دو قطـر موازی آن (مطابق شـکل)، منهای مجموع حاصل‌ضـرب درایه‌های واقـع بـر قطـر فرعـی و دو قطر مـوازی آن به صـورت زیر:

$$|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال: دترمینان ماتریس A را با اسـتفاده از دسـتور سـاروس محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

پاسخ

$$A=\left|\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{matrix}$$

$$|A|=(۲+۰+۱۲)-(۰-۲+۸)=۸$$

مثال: **دترمینان ماتریس $\mathbf{A}$ را برحسب ستون سوم و با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

پاسخ

ابتدا توسط بسط برحسب ستون سوم، دترمینان را به‌دست می‌آوریم:

$$|A|=۳\times(-۱)^{۴}\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}+۰+۴\times(-۱)^{۶}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=-۶+۴=-۲$$

حال توسط روش ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۴ & ۲ & ۰ \end{array}\right. \qquad |A|=(۴+۰+۰)-(۶+۰+۰)=-۲$$

چاشنی: ◂ دترمینان ماتریس صفر، همواره صفر است.

◂ دترمینان ماتریسی که یک سطر یا یک ستون آن مضرب غیرصفری از سطر یا ستون دیگر است همواره برابر صفر است.

◂ دترمینان ماتریسی که سطر یا ستون تکراری داشته باشد برابر صفر است.

مثال: **دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.**

الف) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

$|A|=1\times(-1)^2\times\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=8$

ب) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$

$|A|=0$

پ) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow |A|=0$ سطر دوم مضربی از سطر اول است.

مثال: **اگر** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ **باشد، در این صورت** $|\mathbf{A}^2|$ **را بیابید.** (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم $|A^n|=|A|^n$ داریم: $|A^2|=|A|^2$

دترمینان ماتریس A را به روش ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\left|\begin{matrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 4\\ 0 & 0\end{matrix}$$

$|A|=(40+0+0)-(0)=40$

$\Rightarrow |A^2|=|A|^2=(40)^2=1600$

توجه: دترمینـــان ماتریس‌هایـــی که بالا و پاییـــن قطر اصلی همهٔ عناصـــر آن صفر هســـتند (ماتریس‌های قطری) برابـــر با حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی است.

$$B=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=abc$$

چاشنی: ویژگی‌های دترمینان:

۱ دترمینان هر ماتریس عددی حقیقی است.

۲ $|A\pm B| \neq |A| \pm |B|$

۳ $|A^n|=|A|^n$

۴ به شرطی که A و B مربعی باشند. $|AB|=|A||B|$

۵ n مرتبهٔ ماتریس است. $|\lambda A|=\lambda^n\,|A|$

(اگر از λ برابر یک ماتریس بخواهیم دترمینان بگیریم کافی است λ را به‌توان مرتبه رسانده و در همان مقدار دترمینان A ، ضرب کنیم)

مثال: اگر $A=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & |A| \end{bmatrix}$ باشـــد، دترمینان ماتریس $A^۲$ را بیابید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم: $|A^n|=|A|^n$

$$|A|=\left|۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & |A| \end{vmatrix}\right| = ۲^۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & |A| \end{vmatrix}$$

$$|A|=۴\times(|A|-۶) \Rightarrow -۳|A|=-۲۴ \Rightarrow |A|=۸$$

$$|A|^۲=(۸)^۲=۶۴$$

مثال: اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{11}=۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

پاسخ

$$a_{11}=۴\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۴&۰&۰\\۰&۴&۰\\۰&۰&۴\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۴\times۴\times۴=۴^{۳}=۶۴$$

مثال: اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

پاسخ

$$|A_{۳\times۳}|=۵\Rightarrow\big||A|A\big|=|۵A|=۵^{۳}|A|$$

$$\Rightarrow ۵^{۳}\times۵=۵^{۴}=۶۲۵$$

آزمون فصل اول

۱. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\\۵&۶\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳&-۲\\۱&-۵\\۴&۳\end{bmatrix}$، یک ماتریس ۲×۳ مانند C را طوری پیدا کنید که $A+B-C=O_{۳\times۲}$.

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&۴\\۵&۶\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-۳&-۲\\۱&-۵\\۴&۳\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{bmatrix}$$

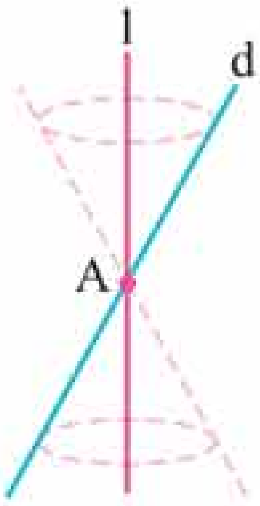
فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

درس ۱ آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

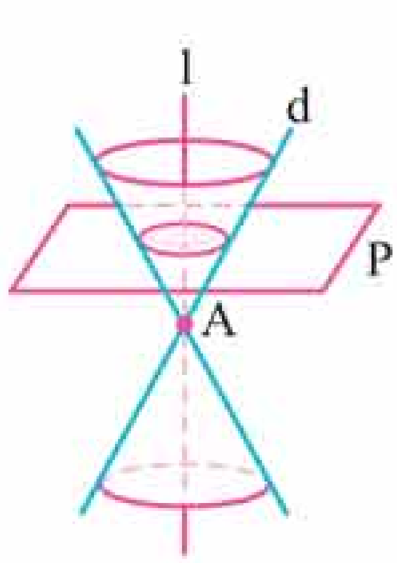
وعدهٔ ۱

رویهٔ مخروطی

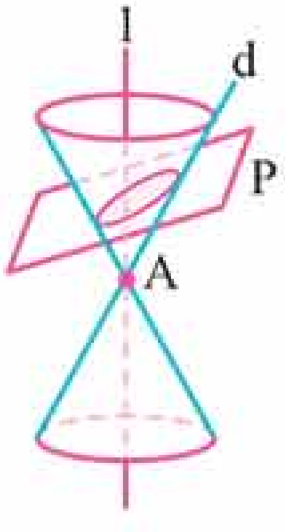


فرض کنید دو خط d و l در نقطهٔ A ، متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم، در این حالت خط l را محور، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح‌مخروطی‌ می‌نامیم.

حال به‌طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا می‌شویم.



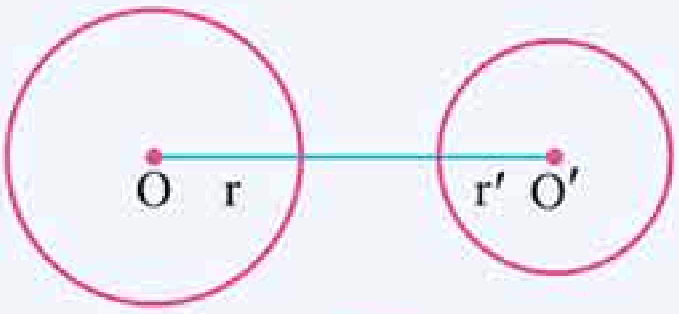
الف در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ب در حالتی که صفحهٔ P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک **بیضی** خواهد بود.

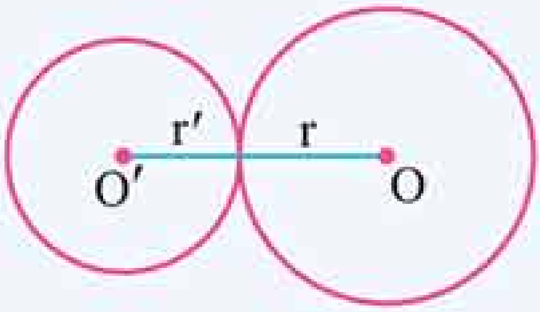
یادآوری: اوضاع نسبی دو دایره که در سال گذشته با آن آشنا شدید، در برخی سؤالات مورد نیاز است. دو دایرهٔ $C(O\,,\,r)$ و $C'(O'\,,\,r')$ را با فرض $r > r'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم که این دو دایره می‌توانند ۵ حالت نسبت به هم داشته باشند:

۱ دو دایرهٔ متخارج:



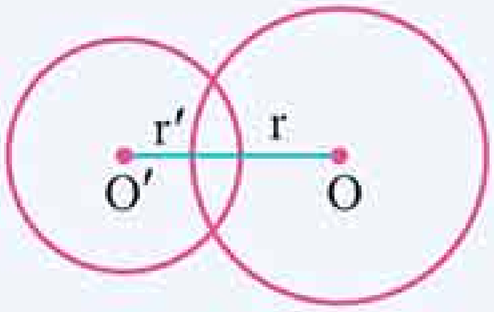
$$\mathbf{d > r + r'}$$

۲ دو دایرهٔ مماس برون:



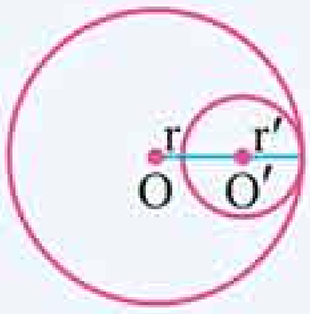
$$\mathbf{d = r + r'}$$

۳ دو دایرهٔ متقاطع:



$$\mathbf{|r - r'| < d < r + r'}$$

۴ دو دایرهٔ مماس درون:

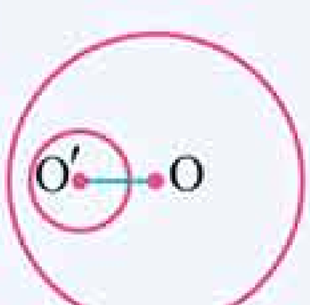


$$\mathbf{d = |r - r'|}$$

۵ دو دایرهٔ هم‌مرکز:

$$\mathbf{d = 0}$$

۶ دو دایرهٔ متداخل:



$$\mathbf{|d| < |r - r'|}$$

مقاطع مخروطی

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۴y-۱=۰$ مماس بیرونی باشد.

پاسخ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$O_۱(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,-۲)$$

$$r_۱=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶+۴}}{۲}=۳$$

می‌دانیم اگر $d=O_۱O_۲$ طول خط المرکزین دو دایرهٔ مماس خارج باشد، $d=r_۱+r_۲$، بنابراین داریم:

$$d=|O_۱O_۲|=\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۱۸}$$

$$\Rightarrow d=۳\sqrt{۲}$$

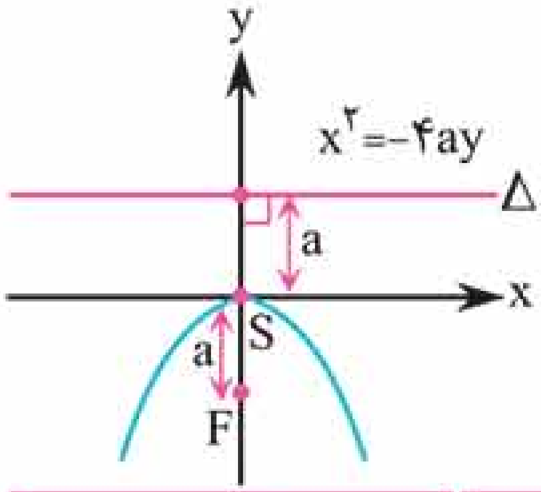
$$d=r_۱+r_۲\Rightarrow ۳\sqrt{۲}=۳+r_۲\Rightarrow r_۲=۳\sqrt{۲}-۳$$

حال با داشتن مرکز و شعاع می‌توانیم معادلهٔ دایرهٔ خواسته شده را بنویسیم:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=(۳\sqrt{۲}-۳)^۲$$

۴ سهمی قائم رو به پایین



مرکز سهمی: $S(۰,۰)$

کانون سهمی: $F(۰,-a)$

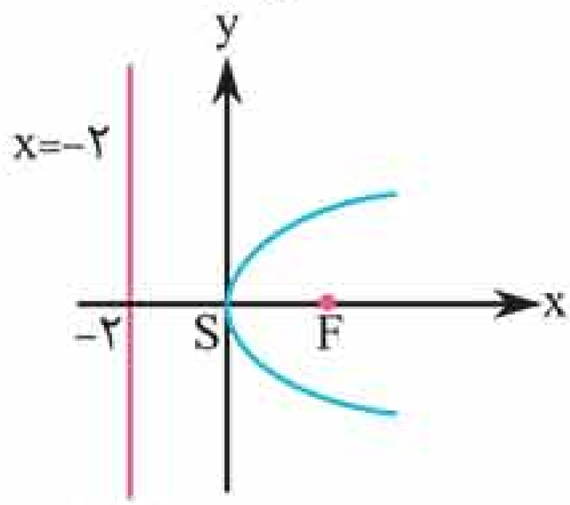
خط هادی: $\Delta: y=a$

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی $(a>۰)$
روبه راست	محور x	$x=-a$	$(a,۰)$	$y^۲=۴ax$
رو به چپ	محور x	$x=a$	$(-a,۰)$	$y^۲=-۴ax$
رو به بالا	محور y	$y=-a$	$(۰,a)$	$x^۲=۴ay$
رو به پایین	محور y	$y=a$	$(۰,-a)$	$x^۲=-۴ay$

مثال: معادلهٔ $y^۲=۸x$ مربوط به چه شکلی است؟

پاسخ این معادله، یک سهمی است که دهانهٔ آن به سمت راست و محور آن محور x هاست.

با قرار دادن $۴a=۸$ داریم $a=۲$ لذا کانون آن $F(۲,۰)$ و خط هادی آن موازی محور yها، به معادلهٔ $x=-۲$ و رأس آن مبدأ مختصات است.



$S(۰,۰)$

$F(۲,۰)$

$\Delta: x=-۲$

ب) معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ) در فضای $\mathbb{R}^3$، نقطهٔ A به طول ۲ روی محور طول‌ها و نقطهٔ $B = (-4, 6, -3)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.

۱۲. اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به‌دست آورید.

۱۳. بردارهای $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ را در نظر بگیرید.
الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید.
ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

۱۴. ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

۱۵. مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (1, m, -11)$، $\vec{b} = (2, 3, -1)$ و $\vec{c} = (1, -1, 3)$ در یک صفحه باشند.

۱۶. اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

فصل ۱ ماتریس و کاربردها

۱ تساوی دو ماتریس:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$\forall_{i,j}\ ,\ a_{ij}=b_{ij}\Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

۲ جمع و تفاضل دو ماتریس:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$\Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

۳ ضرب یک عدد در ماتریس:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

۴ خاصیت جابه‌جایی در جمع:

$$A+B=B+A$$

۵ خاصیت شرکت‌پذیری در جمع:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

۶ خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها:

$$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$$

۷ خاصیت عضو قرینه برای عمل جمع ماتریس‌ها:

$$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$$

۸ $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۹ $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۱۰ $rA=rB\ ,\ r\neq ۰\Rightarrow A=B$

۱۱ $A=B\ ,\ r\neq ۰\Rightarrow rA=rB$

۱۲ خاصیت عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌ها:

$$A_{n\times n} \times I_n = I_n \times A_{n\times n} = A_{n\times n}$$

۱۳ برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است مانند B به‌طوری که داشته باشیم:

$$A \times B = B \times A = I$$

در این‌صورت B را وارون A می‌نامیم و با A^{-1} نمایش می‌دهیم.

۱۴ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، در این‌صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۱۵ در حالت کلی اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله دو مجهول $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$ باشند، در این‌حالت دستگاه مذکور به شکل $AX = B$ نوشته شده و در صورت وارون‌پذیر بودن A ($|A| \neq 0$) با ضرب طرفین در A^{-1} داریم:

$$AX = B \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(AX) = A^{-1} \times B$$

$$\Rightarrow (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$$

۱۴ در معادلهٔ سهمی فاصلهٔ کانون تا خط هادی $۲a$ است.

۱۵ فاصلهٔ رأس سهمی تا خط هادی و کانون همواره a واحد است.

فصل ۳ بردارها

۱ برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $A=(x_A , y_A , z_A)$ و $B=(x_B , y_B , z_B)$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲+(z_B-z_A)^۲}$$

۲ مختصات وسط دو نقطهٔ A و B از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$M=\frac{A+B}{۲}$$

۳ حاصل جمع دو بردار در فضای $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$:

الف) $\vec{a}=(a_۱ , a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱ , b_۲)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱ , a_۲+b_۲)$$

ب) $\vec{a}=(a_۱ , a_۲ , a_۳)$ ، $\vec{b}=(b_۱ , b_۲ , b_۳)$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱ , a_۲+b_۲ , a_۳+b_۳)$$

۴ تفاضل دو بردار همانند جمع دو بردار به صورت زیر است:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

۵ بردار یکه محور x ها: $\vec{i}=(۱,۰,۰)$

۶ بردار یکه محور y ها: $\vec{j}=(۰,۱,۰)$

۷ بردار یکه محور z ها: $\vec{k}=(۰,۰,۱)$