فهرست

(فصل ۱)

تابع

(درس ۱)

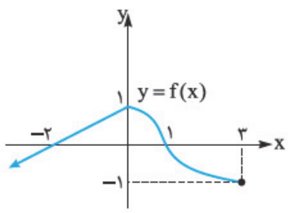
تبدیل نمودار توابع

گاهی وقت‌ها در حل مسائل مربوط به معادلات، نامعادلات و ... نیازمند عملیات جبری سنگین هستید، در صورتی که رسم شکل، دید بهتری از مسئله در اختیارتان قرار می‌دهد و در اغلب موارد منجر به حل مسئله می‌شود. با این حال خیلی‌ها از رسم فراری هستند، چون برای رسم بسیاری از توابع دنبال روش‌های سخت و پیچیده می‌گردند *(ولی اشتباه می‌کنن دیگه!)*. در این قسمت تکنیک‌هایی را یاد می‌گیریم که رسم بسیاری از توابع *براتون گلابی بشه!* این تکنیک‌ها «انتقال‌های عمودی و افقی[1]»، «انبساط و انقباض‌های عمودی و افقی» و «قرینه‌یابی» نام دارند. پس شروع کنیم ...

تکنیک‌های رسم توابع

فرض می‌کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد:

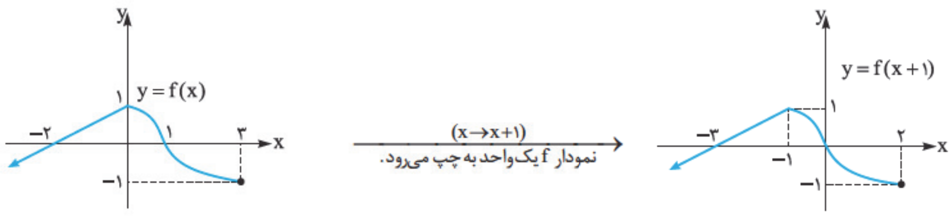
با این نمودار تمام تکنیک‌ها را بررسی می‌کنیم:



انتقال‌های افقی و عمودی

۱ رسم نمودار $y=f(x+a)$ و $y=f(x-a)$ $(a>0)$

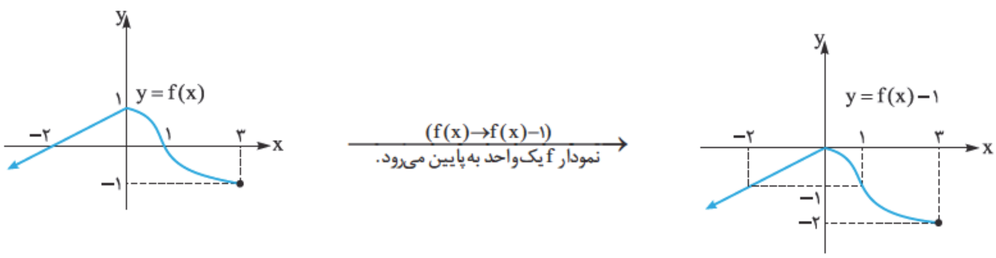
برای رسم نمودار $y=f(x+a)$، باید نمودار f را a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y=f(x-a)$، باید نمودار f را به اندازهٔ a واحد به سمت راست منتقل کنیم (انتقال افقی). برای مثال نمودار $y=f(x+1)$ به صورت زیر است:



نکته انتقال‌های افقی بر دامنهٔ تابع تأثیر می‌گذارند، اما روی برد تابع بی‌تأثیرند.

۲ رسم نمودار $y=f(x)+a$ و $y=f(x)-a$ $(a>0)$

برای رسم نمودار $y=f(x)+a$، نمودار f را به اندازهٔ a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y=f(x)-a$، نمودار f را به اندازهٔ a واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم (انتقال عمودی). برای مثال نمودار $y=f(x)-1$ به صورت زیر است:



نکته انتقال‌های عمودی روی دامنه بی‌تأثیرند، اما روی برد تابع تأثیر می‌گذارند.

۱- *این تکنیک رو سال دهم بهتون یاد دادن و تو کتاب ریاضی پایه مفصل بحث کردیم.*

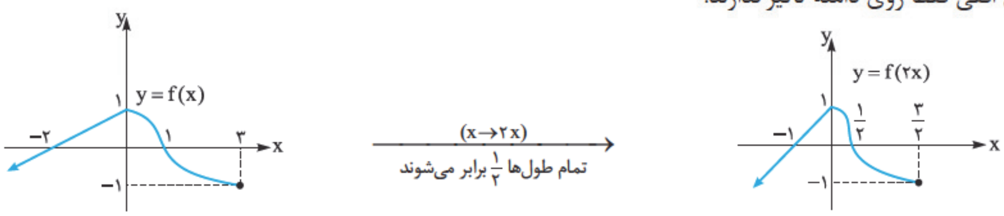
انقباض و انبساط افقی

۳ رسم نمودار $y=f(ax)$ $\quad (a>0)$

- اگر $0<a<1$، نمودار تابع f باید در راستای محور افقی و با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط گردد (انبساط افقی).
- اگر $a>1$، نمودار تابع f باید در راستای محور افقی و با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض گردد (انقباض افقی).

برای مثال نمودار $y=f(2x)$ به صورت زیر است:

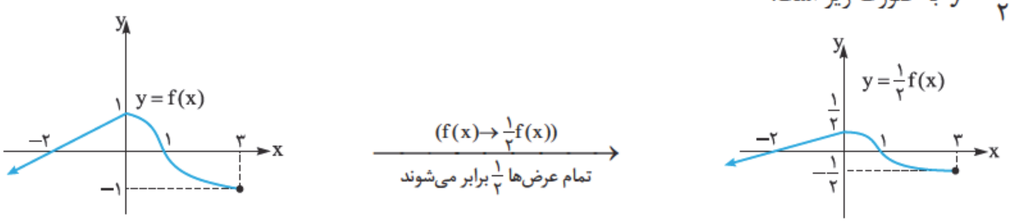
نکته انبساط و انقباض‌های افقی فقط روی دامنه تأثیرگذارند.



۴ رسم نمودار $y=af(x)$ $\quad (a>0)$

- اگر $0<a<1$، نمودار تابع f در راستای محور عمودی با ضریب a فشرده می‌شود (انقباض عمودی).
- اگر $a>1$، نمودار تابع f در راستای محور عمودی با ضریب a کشیده می‌شود (انبساط عمودی).

برای مثال نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(x)$ به صورت زیر است:



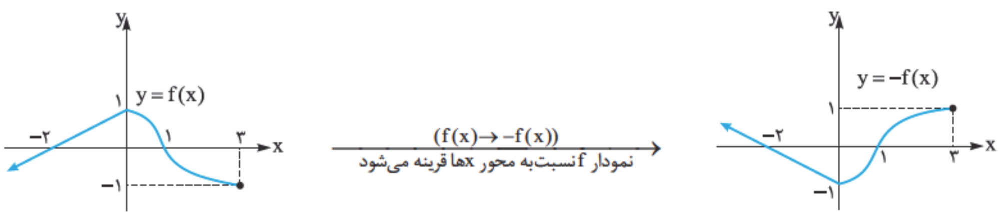
نکته انبساط و انقباض‌های عمودی روی برد تابع تأثیر می‌گذارند. *ولی زورشون به تغییر دامنه نمی‌رسه!*

قرینه‌یابی

۵ رسم نمودار $y=-f(x)$

برای رسم نمودار $y=-f(x)$، باید نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

برای مثال نمودار تابع $y=-f(x)$ به صورت زیر است:

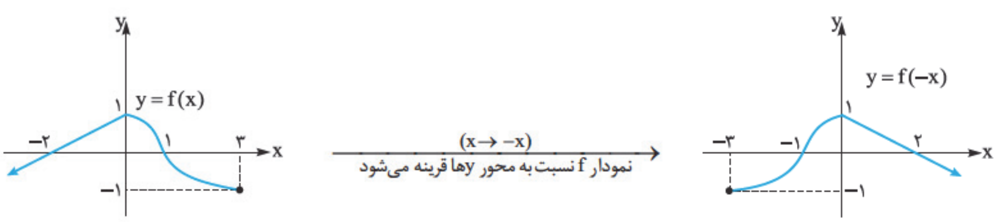


نکته در قرینه نسبت به محور xها، فقط برد تابع تغییر می‌کند و قرینه می‌شود.

۶ رسم نمودار $y=f(-x)$

برای رسم نمودار $y=f(-x)$، باید نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

برای مثال نمودار $y=f(-x)$ به صورت زیر است:



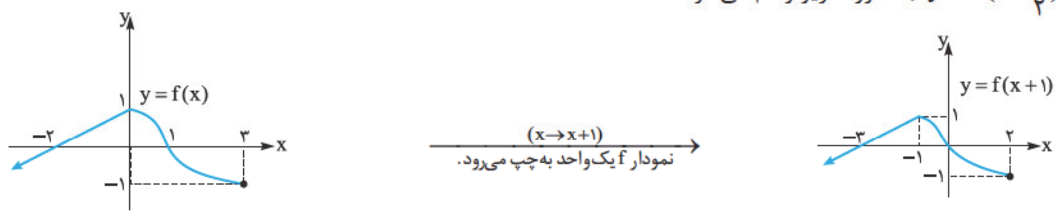
نکته در قرینه نسبت به محور yها، فقط دامنهٔ تابع تغییر می‌کند و قرینه می‌شود.

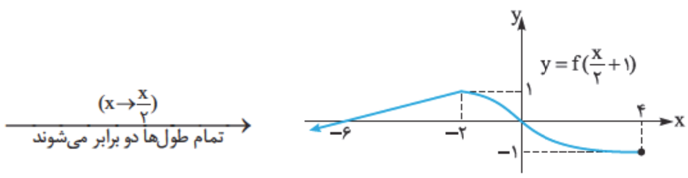
عملیات ترکیبی

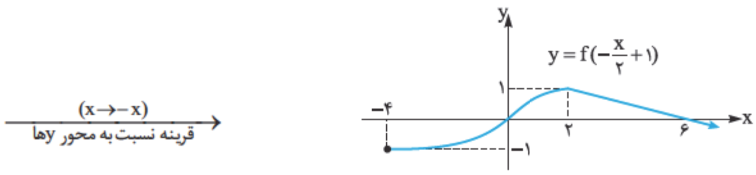
۷ رسم نمودار $y=f(ax+b)$

برای رسم، باید ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می‌دهیم، سپس تغییرات مربوط به ضریب x (که همان انبساط یا انقباض افقی هستند و یا قرینه‌یابی نسبت به محور yها) را روی شکل اعمال می‌کنیم.

برای مثال نمودار تابع $y=f(1-\frac{x}{2})$ به صورت زیر رسم می‌شود:



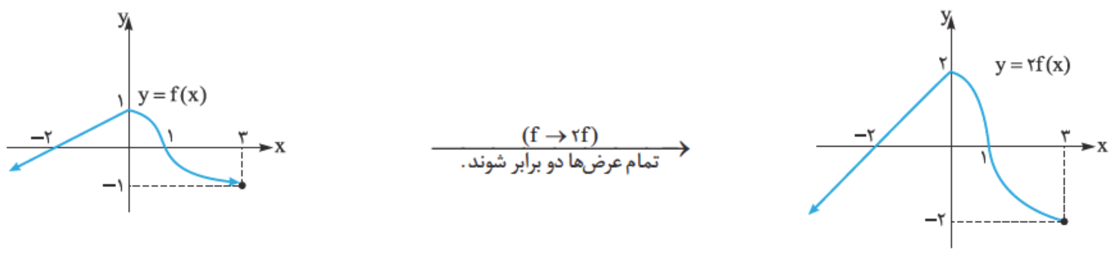


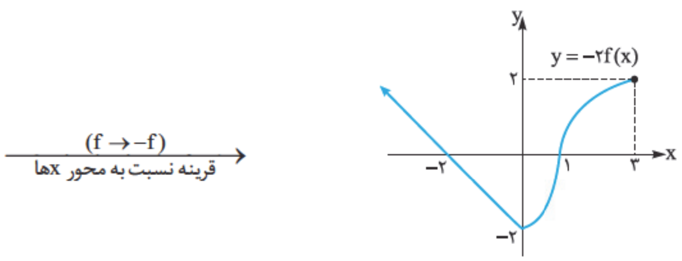


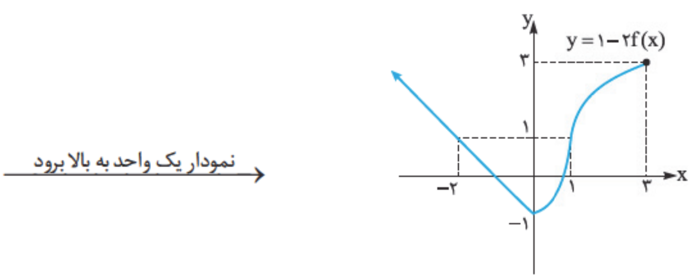
۸ رسم نمودار $y=af(x)+b$

برای رسم، ابتدا ضریب a را تأثیر می‌دهیم، (که همان انبساط یا انقباض عمودی هستند و یا قرینه‌یابی نسبت به محور xها) بعد انتقال عدد ثابت b را انجام می‌دهیم.

برای مثال نمودار $y=1-2f(x)$ به صورت زیر رسم می‌شود:

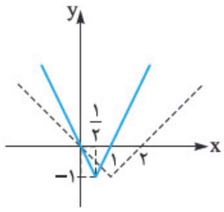






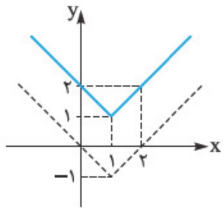
در حالتی که هم تغییرات روی x داریم و هم روی y، بهتر است ابتدا تغییرات روی x را اعمال کنید و سپس به سراغ تغییرات y بروید.

در یک نگاه:



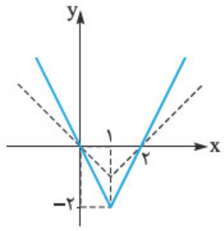
$y=f(2x)$

تمام طول‌ها نصف می‌شوند. (انقباض افقی)



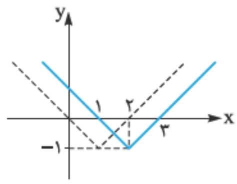
$y=f(x)+2$

دو واحد به سمت بالا می‌رود.



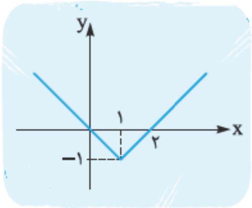
$y=2f(x)$

تمام عرض‌ها دو برابر می‌شوند.

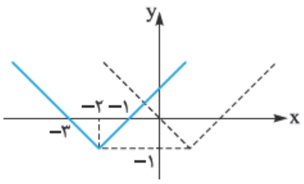


$y=f(x-1)$

یک واحد به سمت راست می‌رود.

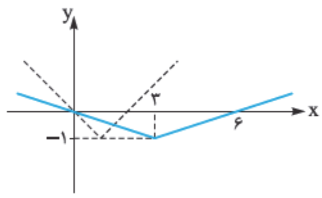


$y=f(x)$



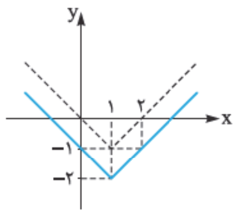
$y=f(x+3)$

سه واحد به سمت چپ می‌رود.



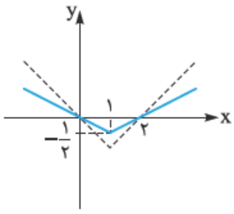
$y=f(\frac{x}{3})$

تمام طول‌ها سه برابر می‌شوند. (انبساط افقی)



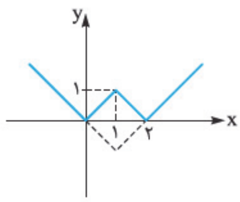
$y=f(x)-1$

یک واحد به سمت پایین می‌رود.



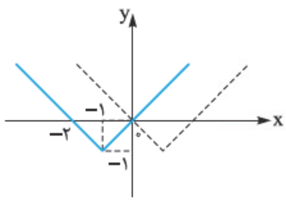
$y=\frac{1}{2}f(x)$

تمام عرض‌ها نصف می‌شوند (انقباض عمودی)



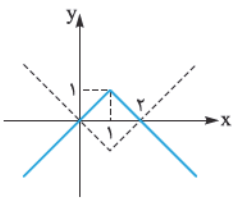
$y=|f(x)|$

قسمت‌های زیر محور xها نسبت به محور xها قرینه می‌شوند.



$y=f(-x)$

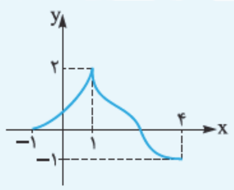
نسبت به محور yها قرینه می‌شوند.

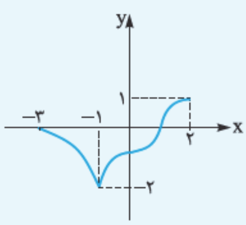


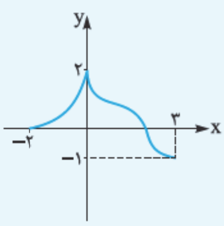
$y=-f(x)$

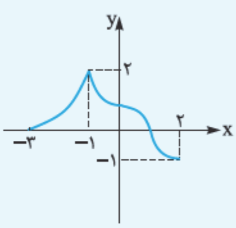
نسبت به محور xها قرینه می‌شود.

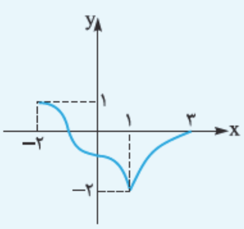
تست اگر نمودار تابع $y=-f(x-2)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(-x)$ کدام است؟



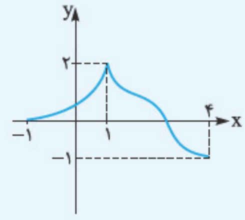
۱) 

۲) 

۳) 

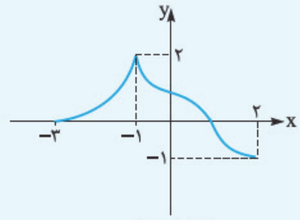
۴) 

پاسخ گزینهٔ ۴ **راه اول** در اینجا باید بر عکس عمل کنیم ابتدا با استفاده از انتقال و قرینه‌یابی از نمودار $y=-f(x-۲)$ به نمودار f می‌رسیم:



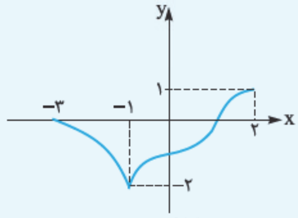
$y=-f(x-۲)$

دو واحد به‌چپ $\xrightarrow{x \to x+۲}$



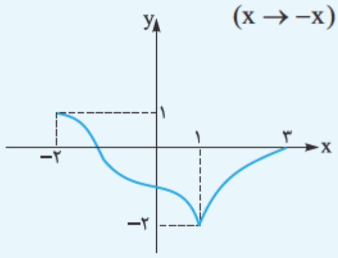
$y=-f(x)$

قرینه نسبت به‌محور xها $\longrightarrow$



$y=f(x)$

حالا برای رسم نمودار $y=f(-x)$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم: $(x \to -x)$

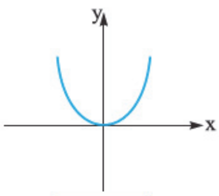


$\Leftarrow$ ۴ جواب است.

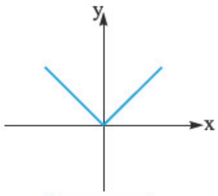
راه دوم $y=-f(x-۲)$ (نمودار داده‌شده) به ازای $x=-۱$ مقدار صفر می‌دهد. یعنی: $-f(-۱-۲)=۰ \Rightarrow f(-۳)=۰$

بنابراین تابع اصلی در نقطهٔ $x=-۳$ مقدار صفر را می‌دهد. پس باید تابع $y=f(-x)$ در نقطهٔ ۳ مقدار صفر بدهد در نتیجه ۴ جواب است.

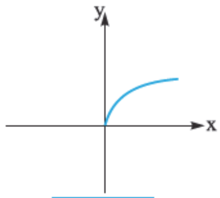
حالا وقتشه که نمودارهای اوریجینالی! که در رسم احتیاج داریم را با هم مرور کنیم. این نمودارها را در زیر می‌بینید:



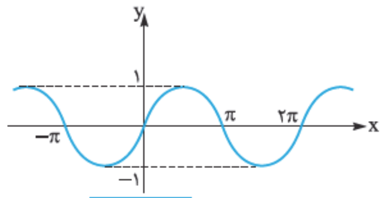
$y=x^۲$



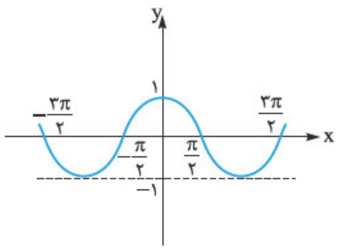
$y=|x|$



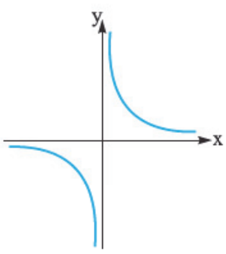
$y=\sqrt{x}$



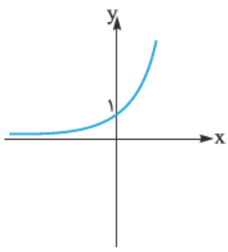
$y=\sin x$



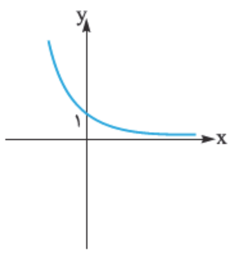
$y=\cos x$



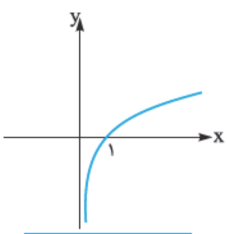
$y=\frac{۱}{x}$



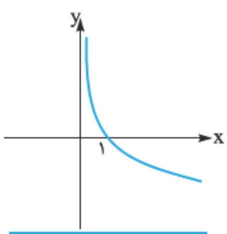
$y=a^x \quad (a>۱)$



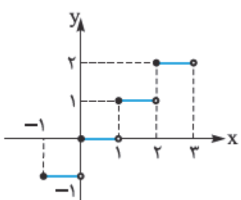
$y=a^x \quad (۰<a<۱)$



$y=\log_a x \quad (a>۱)$

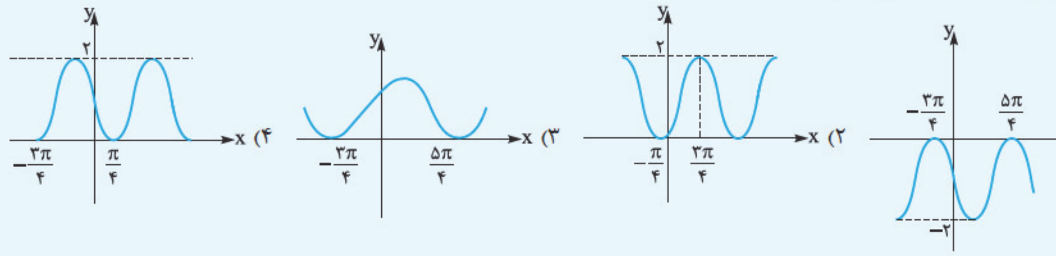


$y=\log_a x \quad (۰<a<۱)$

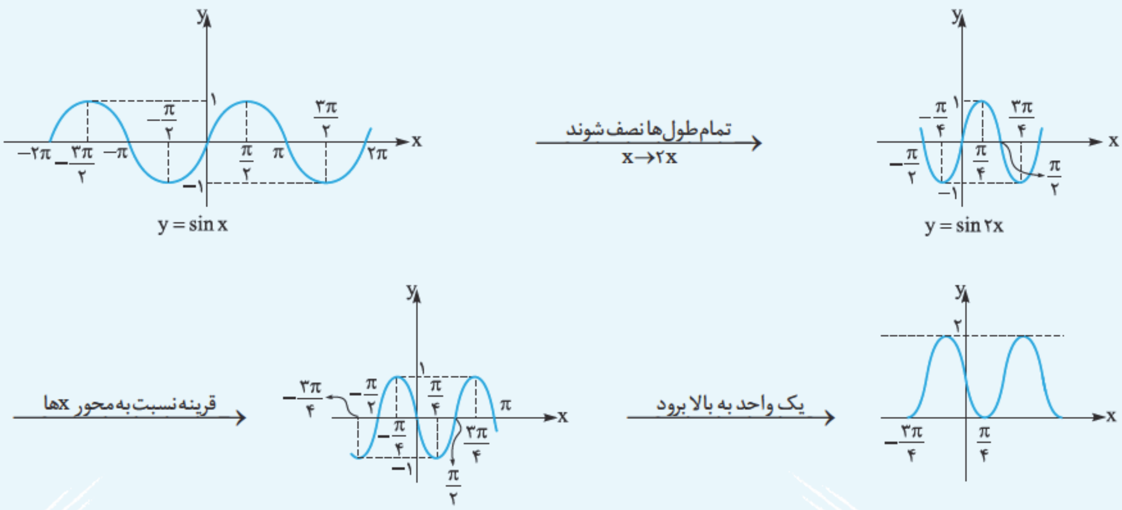


$y=[x]$

تست نمودار تابع $y=1-\sin 2x$ کدام است؟



پاسخ **گزینهٔ ۴** برای رسم نمودار $y=1-\sin 2x$ از نمودار $y=\sin x$ کمک می‌گیریم و مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



تست برای رسم نمودار $y=2x^2-4x+3$ با استفاده از نمودار $y=x^2$، به ترتیب چه مراحلی باید صورت پذیرد؟

۱) دو واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، ۳ واحد به بالا
۲) یک واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، یک واحد به بالا
۳) دو واحد به راست، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{2}$، ۳ واحد به بالا
۴) یک واحد به راست، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{2}$، یک واحد به بالا

پاسخ **گزینهٔ ۲** اول با استفاده از مربع کامل کردن ضابطهٔ تابع $y=2x^2-4x+3$ را جمع‌وجورش کنیم!

$$y=2x^2-4x+3=2x^2-4x+2+1=2(x^2-2x+1)+1=2(x-1)^2+1$$

برای رسم نمودار این تابع با استفاده از نمودار $y=x^2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=x^2 \xrightarrow[x\to x-1]{\text{یک واحد به راست}} y=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}} y=2(x-1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y=2(x-1)^2+1$$

یک موضوع دیگر که حتماً باید بررسی کنیم، تحلیل وضعیت نقاط متناظر تابع و انتقال‌یافتهٔ آن است.

تست اگر نقطهٔ $(2x_0-1,-\frac{y_0}{2})$ روی نمودار $g(x)=k|x+b|$، متناظر نقطهٔ (x_0,y_0) روی نمودار $f(x)=|x|$ باشد، $b+k$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ **گزینهٔ ۲** نقطهٔ (x_0,y_0) روی نمودار تابع f قرار دارد، بنابراین:

$$f(x_0)=y_0 \qquad (*)$$

هم‌چنین نقطهٔ $(2x_0-1,-\frac{y_0}{2})$ روی نمودار تابع g قرار دارد، پس:

$$g(2x_0-1)=-\frac{y_0}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} g(2x_0-1)=-\frac{1}{2}f(x_0) \qquad (**)$$

حالا برای پیدا کردن ضابطهٔ $g(x)$، با فرض $2x_0-1=x$ داریم:

$$2x_0=x+1 \Rightarrow x_0=\frac{x+1}{2}$$

$$\xrightarrow{(**)} g(x)=-\frac{1}{2}f(\frac{x+1}{2}) \xrightarrow{f(x)=|x|} g(x)=-\frac{1}{2}|\frac{x+1}{2}|=-\frac{1}{2}|\frac{1}{2}(x+1)|=-\frac{1}{4}|x+1|=k|x+b|$$

در نتیجه:

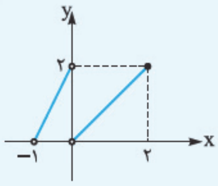
$$k=-\frac{1}{4}\ ,\ b=1 \Rightarrow k+b=\frac{3}{4}$$

تأثیر تبدیل نمودار روی دامنه و برد تابع

فرض کنیم u عبارتی خطی برحسب x باشد، در این صورت داریم:

۱) اگر دامنهٔ f بازهٔ $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنهٔ $cf(u)+d$ کافی است نامعادلات مضاعف $a \le u \le b$ را حل کنیم.

تست اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد. دامنهٔ تابع $y = ۲f(۱-\frac{x}{۳})$ کدام است؟



۱) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۲) $(\frac{۱}{۳},\frac{۴}{۳})-\{۱\}$ ۳) $(-۶,۳]$ ۴) $[-۳,۶)-\{۳\}$

پاسخ گزینهٔ ۴ با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع f برابر است با: $D_f = (-۱,۲]-\{۰\}$

بنابراین برای محاسبهٔ دامنهٔ $y = ۲f(۱-\frac{x}{۳})$ باید نامعادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} -۱ < ۱-\frac{x}{۳} \le ۲ \xrightarrow{-(۱)} -۲ < -\frac{x}{۳} \le ۱ \xrightarrow{\times(-۳)} -۳ \le x < ۶ \\ \text{و} \\ ۱-\frac{x}{۳} \ne ۰ \Rightarrow \frac{x}{۳} \ne ۱ \Rightarrow x \ne ۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-۳,۶)-\{۳\}$$

۲) اگر دامنهٔ $cf(u)+d$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنهٔ تابع $y=f(x)$، با توجه به این‌که $a \le x \le b$، عبارت u را تشکیل داده، دامنهٔ f را می‌یابیم.

تست اگر دامنهٔ تابع $y = f(x-۲)$ بازهٔ $[۱,۴)$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = ۱-f(۲x)$ کدام است؟

۱) $[۶,۱۲)$ ۲) $[\frac{۳}{۲},۳)$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $[-۲,۴)$

پاسخ گزینهٔ ۳ ابتدا با کمک دامنهٔ تابع $y = f(x-۲)$، دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را می‌یابیم:

$$۱ \le x < ۴ \xrightarrow{-۲} -۱ \le x-۲ < ۲ \Rightarrow D_f = [-۱,۲)$$

حالا مسئله مانند مدل ۱ شد. دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر $[-۱,۲)$ است. پس برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $g(x)=۱-f(۲x)$ نامعادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$-۱ \le ۲x < ۲ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲} \le x < ۱ \Rightarrow D_g = [-\frac{۱}{۲},۱)$$

۳) اگر برد تابع f بازهٔ $[a,b]$ باشد، برای یافتن برد $y = cf(u)+d$ کافی است برد f را ابتدا در c ضرب و سپس با d جمع کنیم.

تست اگر برد تابع f بازهٔ $(۱,۳]$ باشد. برد تابع $y = ۱-۲f(۳x)$ کدام است؟

۱) $[-۵,-۱)$ ۲) $[-۳,۱)$ ۳) $(-۹,-۳]$ ۴) $(-۴,۲]$

پاسخ گزینهٔ ۱ برد f بازهٔ $(۱,۳]$ است، پس $۱ < f(x) \le ۳$ و در نتیجه:

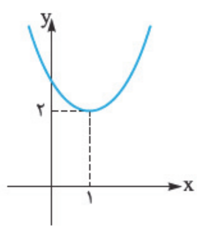
$$۱ < f(۳x) \le ۳ \xrightarrow{\times(-۲)} -۶ \le -۲f(۳x) < -۲ \xrightarrow{+۱} -۵ \le ۱-۲f(۳x) < -۱$$

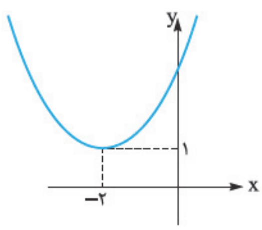
پس برد تابع داده‌شده، بازهٔ $[-۵,-۱)$ است.

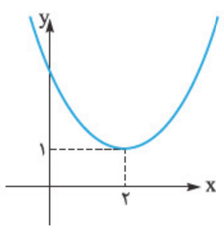
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

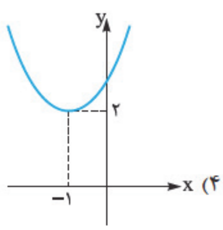
تبدیل نمودار توابع

۱- نمودار تابع $y = (x-۲)^۲+۱$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲- تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با دامنهٔ $[۰,۹]$ مفروض است. اگر مجموعه‌های A و B به ترتیب دامنه و برد تابع $y = f(x-۲)+۱$ باشند. $A \cap B$ کدام است؟

۱) $[۱,۳]$ ۲) $[۲,۴]$ ۳) $[۲,۱۱]$ ۴) $[۰,۳]$ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۳- اگر نمودار $f(x)=۱+\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ را $\frac{\pi}{۲}$ واحد به .... و یک واحد به .... منتقل کنیم، نمودار تابع $f(x)=\sin x$ حاصل می‌شود.

۱) چپ ـ بالا ۲) چپ ـ پایین ۳) راست ـ بالا ۴) راست ـ پایین

۴- نمودار تابع $f(x)=|x|$ را یک واحد به طرف xهای مثبت و یک واحد به طرف yهای منفی منتقل می‌کنیم. نمودار جدید و نمودار اولیه در چند نقطه متقاطع خواهند بود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵- برای رسم نمودار تابع $y=\frac{۲^x+۴}{۲}$، با انتقال نمودار تابع $y=۲^x$ به ترتیب چه مراحلی طی می‌شود؟ *(برگرفته از تمرین کتاب درسی)*

۱) یک واحد به راست و دو واحد به بالا ۲) چهار واحد به چپ و انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$

۳) یک واحد به راست و چهار واحد به بالا ۴) ۲ واحد به بالا و انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$

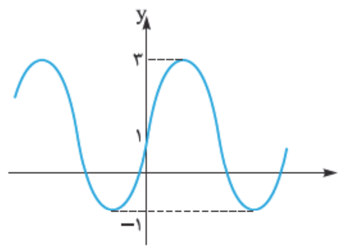
۶- نمودار یک سهمی پس از انتقال رأس آن به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و دو واحد به سمت بالا با ضابطهٔ $g(x)=(x-۲)^۲$ مشخص شده است. قبل از انتقال معادلهٔ تابع به کدام صورت بوده است؟

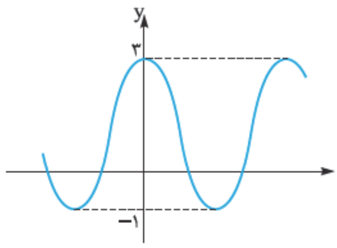
۱) $f(x)=(x-۱)^۲$ ۲) $f(x)=x^۲-۲x-۱$ ۳) $f(x)=x^۲+۶x+۱۱$ ۴) $f(x)=(x-۳)^۲$

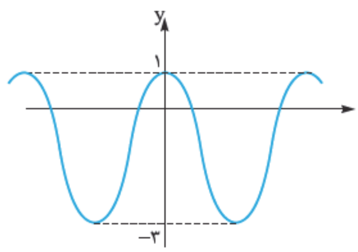
۷- سهمی $f(x)=ax^۲+bx+۱$ مفروض است. اگر رأس نمودارِ تابع با ضابطهٔ $y=f(x+۲)-۱$، نقطهٔ $(-۱,۱)$ باشد، a کدام است؟

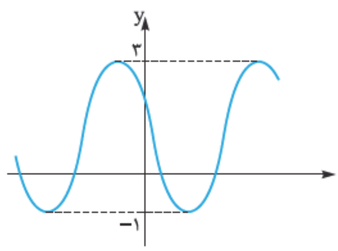
۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

۸- نمودار تابع $y=۲\cos x+۱$ کدام است؟

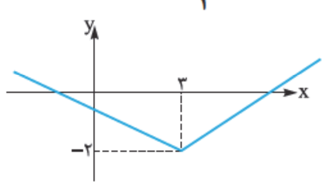
۱)


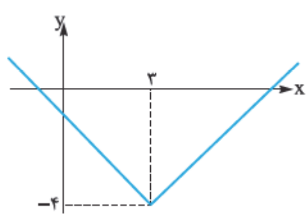
۲)


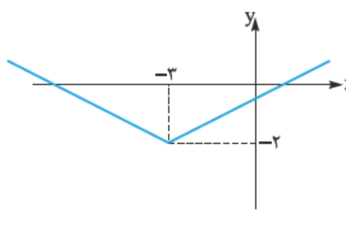
۳)


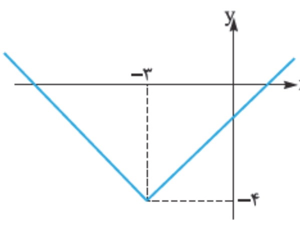
۴)


۹- نمودار تابع $y=\frac{|۳-x|-۴}{۲}$ کدام است؟

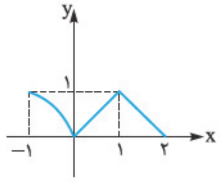
۱)


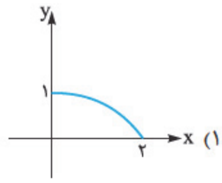
۲)


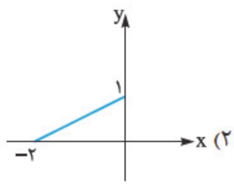
۳)


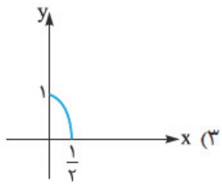
۴)


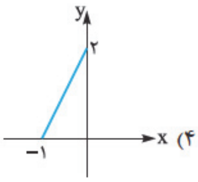
۱۰- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، کدام نمودار زیر بخشی از نمودار تابع $y=۲f(x+۱)$ است؟











۱۱- برای رسم نمودار تابع $g(x)=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}$ با انتقال نمودار تابع $f(x)=|x|$ چه مراحلی را می‌توان طی کرد؟

۱) انقباض افقی با ضریب ۲، یک واحد به چپ
۲) انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، یک واحد به چپ
۳) انبساط افقی با ضریب ۲، یک واحد به راست
۴) انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، یک واحد به راست

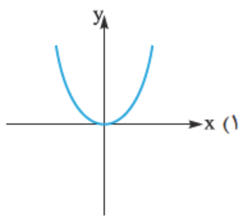
۱۲- تابع $f(x)=\log_۲(x+۲)$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=f(۲x)+a$ فقط از دو ناحیه عبور می‌کند؟

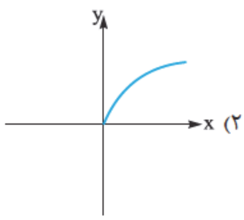
۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

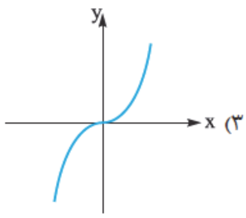
۱۳- برای رسم نمودار $y=۲\cos^۲ x-۱$ با انتقال نمودار $y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ چه مراحلی را می‌توان طی کرد؟

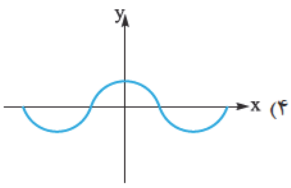
۱) $\frac{\pi}{۴}$ واحد به راست، انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\pi}{۴}$ واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲ و یک واحد به پایین
۳) $\frac{\pi}{۴}$ واحد به چپ، انبساط افقی با ضریب ۲
۴) $\frac{\pi}{۴}$ واحد به چپ، انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ و یک واحد به پایین

۱۴- نمودار تابع f کدام باشد تا تساوی $f(x)+f(-x)=۰$ به ازای هر x عضو دامنهٔ تابع برقرار باشد؟









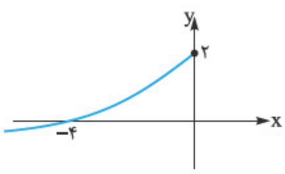
۱۵- نمودار تابع $y=۱+\sqrt{x+۱}$ را نسبت به محور yها انعکاس داده‌ایم، سپس آن را ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۲ واحد به پایین منتقل کرده‌ایم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=\sqrt{-x-۱}-۱$
۲) $y=-۳-\sqrt{x+۳}$
۳) $y=۱-\sqrt{x+۳}$
۴) $y=۳-\sqrt{-x-۱}$

۱۶- نمودار تابع $y=\log_۳(x+۱)$ را دو واحد به راست انتقال می‌دهیم. سپس شکل حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. نمودار تابع حاصل محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

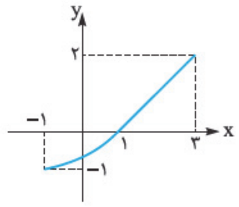
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۷
۴) ۱۰

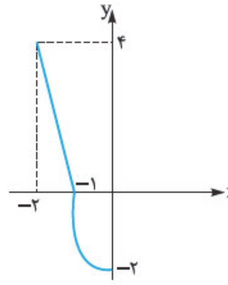
۱۷- نمودار تابع زیر از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. نمودار تابع از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟ *(برگرفته از تمرین کتاب درسی)*

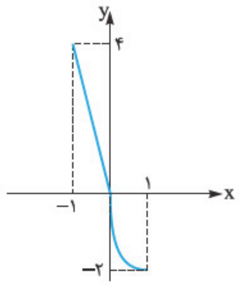


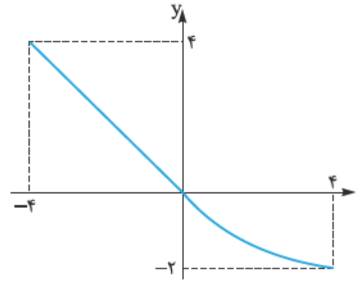
۱) $(-۹,-۳)$
۲) $(-۹,-۲)$
۳) $(-۱۶,-۳)$
۴) $(-۱۶,-۲)$

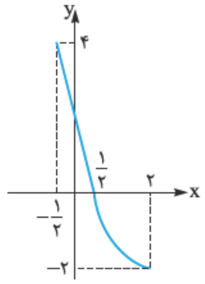
۱۸- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد. نمودار تابع $y = ۲f(۱-\frac{x}{۲})$ کدام است؟



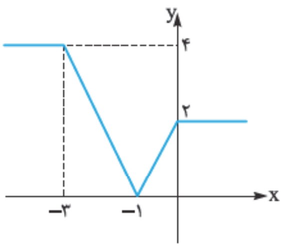
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۹- اگر نمودار تابع $y = f(۱-x)$ به صورت زیر باشد. سطح محصور بین نمودار تابع $y = f(x-۱)$ و محور xها در فاصلهٔ $[۰,۵]$ کدام است؟



۱) ۸
۲) ۸/۵
۳) ۹
۴) ۹/۵

۲۰- برای رسم نمودار تابع $g(x) = -۲x^۲ + ۸x - ۳$ با استفاده از نمودار $f(x) = x^۲$ چه انتقال‌هایی باید صورت گیرد؟

۱) ۲ واحد به چپ، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور xها، ۵ واحد به بالا
۲) ۲ واحد به چپ، انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور yها، ۳ واحد به پایین
۳) ۲ واحد به راست، انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور yها، ۳ واحد به پایین
۴) ۲ واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور xها، ۵ واحد به بالا

۲۱- نقطهٔ $(-۸,۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. کدام نقطه به طور قطع روی نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(-x) + ۱$ قرار دارد؟

۱) $(-۸,۴)$ ۲) $(۸,۴)$ ۳) $(۸,۱۰)$ ۴) $(-۸,-۲)$

۲۲- نقطه $A(x_۰,y_۰)$ روی نمودار f مفروض است. اگر نمودار تابع g انتقال‌یافتهٔ نمودار تابع f باشد و نقطهٔ $A'(\frac{x_۰}{۲},۱-y_۰)$ روی نمودار تابع g متناظر نقطهٔ A روی f باشد. با چه انتقالی می‌توان از نمودار f به نمودار g رسید؟

۱) انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، قرینه نسبت به محور yها، یک واحد به پایین ۲) انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، قرینه نسبت به محور xها، یک واحد به بالا
۳) انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور xها، یک واحد به بالا ۴) انبساط افقی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور yها، یک واحد به پایین

۲۳- اگر نقطهٔ $(\frac{۱-x_۰}{۲},y_۰+۱)$ روی نمودار g متناظر نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار f باشد. رابطهٔ بین f و g به کدام صورت است؟

۱) $f(x) = g(۱-۲x) - ۱$ ۲) $g(x) = f(۱-۲x) + ۱$ ۳) $f(x) = g(\frac{۱-x}{۲}) + ۱$ ۴) $g(x) = f(\frac{۱-x}{۲}) - ۱$

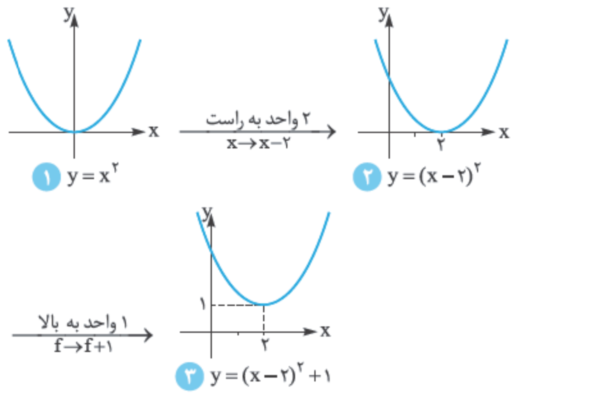
۲۴- اگر $g(x) = ۲f(۱-\frac{x}{۲})$ و نقطهٔ $A(۲,۲)$ روی نمودار g باشد. نقطهٔ متناظر A روی نمودار f به کدام صورت است؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۲,۴)$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(۰,۴)$

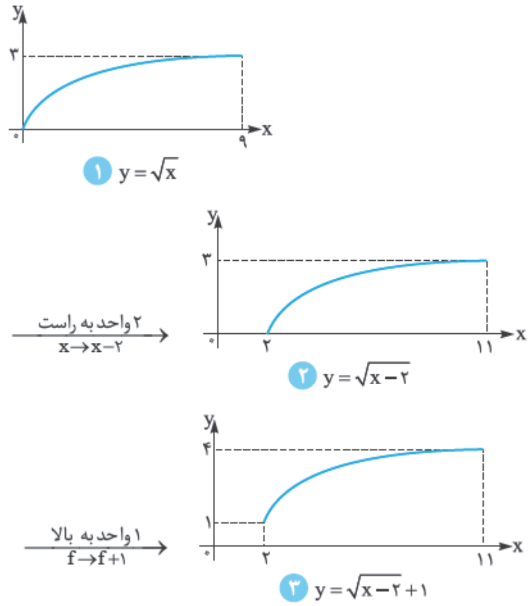
۲۵- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۱,۲)$ باشد. دامنهٔ تابع $y = -۲f(-\frac{x}{۲}+۱) + ۳$ کدام است؟

۱) $[۰,\frac{۳}{۲})$ ۲) $(۰,\frac{۳}{۲}]$ ۳) $(-۲,۴]$ ۴) $[-۲,۴)$

۱- **گزینهٔ ۳** برای رسم تابع $y=(x-۲)^{۲}+۱$ از روی تابع $y=x^{۲}$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



۲- **گزینهٔ ۲** تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با دامنهٔ $[۰,۹]$ را رسم می‌کنیم و با کمک انتقال به نمودار تابع $y=f(x-۲)+۱$ می‌رسیم.



دامنه و برد نمودار تابع $f(x-۲)+۱$ به ترتیب مجموعه‌های $[۲,۱۱]$ و $[۱,۴]$ هستند، پس: $A\cap B=[۲,۱۱]\cap[۱,۴]=[۲,۴]$

۳- **گزینهٔ ۲** قرار است تابع $f(x)=۱+\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ را با انتقال به تابع $y=\sin x$ تبدیل کنیم.

◁ اولاً باید جای xها، $x+\frac{\pi}{۲}$ بگذاریم:

$$y=۱+\sin(x-\frac{\pi}{۲}) \xrightarrow{x\to x+\frac{\pi}{۲}} y=۱+\sin((x+\frac{\pi}{۲})-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow y=۱+\sin x$$

تا این‌جا باید نمودار را $\frac{\pi}{۲}$ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

◁ ثانیاً باید یک واحد از $y=۱+\sin x$ کم کنیم:

$$y=۱+\sin x \xrightarrow{f\to f-۱} y=۱+\sin x-۱ \Rightarrow y=\sin x$$

پس ۱ واحد هم باید نمودار را به **پایین** انتقال دهیم.

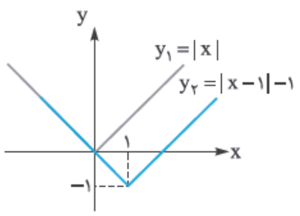
۴- **گزینهٔ ۴** انتقال‌های خواسته‌شده را به ترتیب روی تابع $f(x)=|x|$ انجام می‌دهیم.

◁ اولاً باید نمودار را یک واحد به طرف راست (به طرف xهای مثبت) ببریم، پس باید جای xها، $x-۱$ قرار دهیم که ضابطهٔ تابع $y=|x-۱|$ می‌شود.

◁ ثانیاً باید یک واحد به سمت پایین (به طرف yهای منفی) ببریم، پس باید $|x-۱|$ را منهای ۱ کنیم: $y=|x-۱|-۱$

حالا نمودار هر دو تابع $y_۱=|x|$ و $y_۲=|x-۱|-۱$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

همان‌طور که می‌بینید دو تابع به ازای $x\le ۰$ بر هم منطبق می‌شوند، پس در بی‌شمار نقطه متقاطع‌اند.



۵- **گزینهٔ ۱** اول ضابطهٔ تابع $y=\frac{۲^{x}+۴}{۲}$ را با تفکیک کسر ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=\frac{۲^{x}}{۲}+\frac{۴}{۲} \Rightarrow y=۲^{x-۱}+۲$$

تابع $y=۲^{x}$ را با انتقال در دو مرحلهٔ زیر به تابع $y=۲^{x-۱}+۲$ تبدیل می‌کنیم:

① تابع را ۱ واحد به راست منتقل می‌کنیم ($x\to x-۱$):

$$y=۲^{x} \xrightarrow{x\to x-۱} y=۲^{x-۱}$$

② پس نمودار تابع را ۲ واحد به بالا می‌بریم:

$$y=۲^{x-۱} \xrightarrow{f\to f+۲} y=۲^{x-۱}+۲$$

۶- **گزینهٔ ۲** نمودار سهمی $y=f(x)$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا برده‌ایم و به ضابطهٔ $g(x)=(x-۲)^{۲}$ رسیده‌ایم. برای آن‌که ضابطهٔ f به دست آید، عکس انتقال‌ها را انجام می‌دهیم؛ یعنی اول g را ۲ واحد به پایین و بعد ۱ واحد به چپ می‌بریم.

$$y=(x-۲)^{۲} \xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} y=(x-۲)^{۲}-۲$$

$$\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد به چپ}} y=((x+۱)-۲)^{۲}-۲$$

ضابطهٔ آخری را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=((x+۱)-۲)^{۲}-۲=(x-۱)^{۲}-۲=x^{۲}-۲x-۱$$

۷- **گزینهٔ ۴** اگر نمودار تابع $y_۱=f(x)$ را با انتقال ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y_۲=f(x+۲)-۱$ به دست می‌آید. اگر رأس تابع $y_۲$، نقطهٔ $(-۱,۱)$ باشد، برای پیداکردن رأس تابع $y_۱$ باید عکس انتقال‌های بالا را روی این نقطه انجام دهیم:

$$(-۱,۱) \xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}} (-۱,۲) \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} (۱,۲)$$

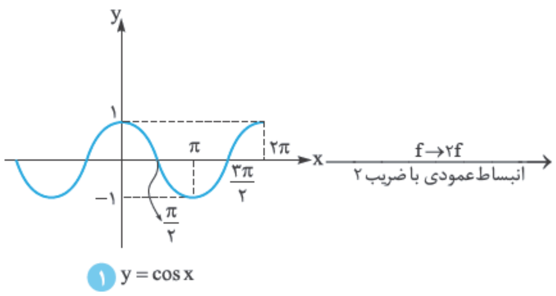
پس رأس تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+۱$، نقطهٔ $(۱,۲)$ است و داریم:

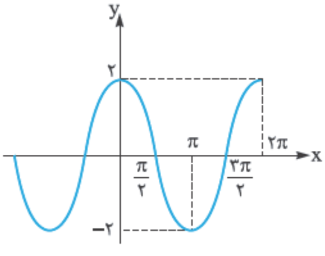
▷ $x_s=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow -\frac{b}{۲a}=۱ \Rightarrow b=-۲a$

▷ $f(۱)=۲ \Rightarrow a+b+۱=۲ \Rightarrow a+b=۱$

$$\xrightarrow{b=-۲a} a-۲a=۱ \Rightarrow -a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

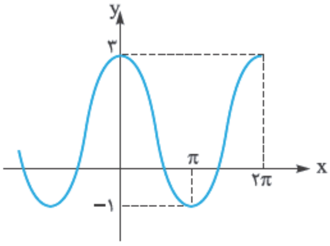
۸- **گزینهٔ ۲** **راه اول** برای رسم نمودار تابع $y=۲\cos x+۱$ از روی نمودار تابع $y=\cos x$، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:





۲ $y=۲\cos x$

$\xrightarrow[\text{۱ واحد به بالا}]{f\to f+۱}$



۳ $y=۲\cos x+۱$

راه دوم از نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم. مقدار تابع را در $x=۰$ به دست می‌آوریم:

$$y=۲\cos x+۱ \xrightarrow{x=۰} y(۰)=۲\underbrace{\cos ۰}_{۱}+۱=۳$$

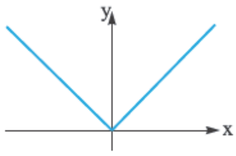
پس نقطهٔ $(۰,۳)$ باید روی نمودار باشد. تنها نموداری که این نقطه روی آن است، نمودار ۲ است.

۹- **گزینهٔ ۱** **راه اول** ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=\frac{|۳-x|-۴}{۲} \xrightarrow{|a-b|=|b-a|} y=\frac{|x-۳|-۴}{۲}$$

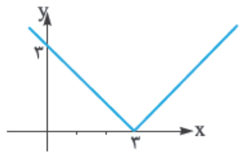
$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}|x-۳|-۲$$

مرحله‌به‌مرحله نمودار این تابع را از روی نمودار تابع $y=|x|$ رسم می‌کنیم:



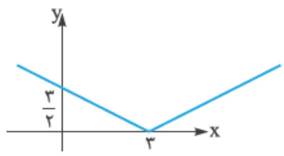
۱ $y=|x|$

$\xrightarrow[\text{۳ واحد به راست}]{x\to x-۳}$



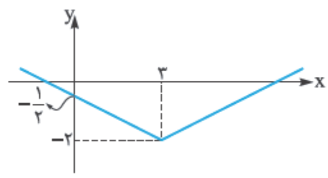
۲ $y=|x-۳|$

$\xrightarrow[\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{۱}{۲}]{f\to \frac{۱}{۲}f}$



۳ $y=\frac{۱}{۲}|x-۳|$

$\xrightarrow[\text{۲ واحد به پایین}]{f\to f-۲}$



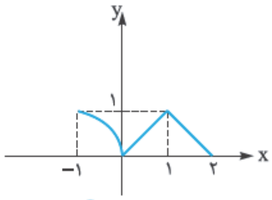
۴ $y=\frac{۱}{۲}|x-۳|-۲$

راه دوم از نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم. در ضابطهٔ تابع به جای x، ۳ می‌گذاریم:

$$y=\frac{|۳-x|-۴}{۲} \xrightarrow{x=۳} y(۳)=\frac{|۳-۳|-۴}{۲}=-۲$$

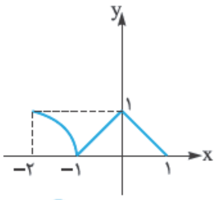
پس نقطهٔ $(۳,-۲)$ باید روی نمودار تابع باشد. تنها نموداری که این نقطه روی آن قرار دارد، ۱ است.

۱۰- **گزینهٔ ۴** نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم. برای رسم نمودار تابع $y=۲f(x+۱)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



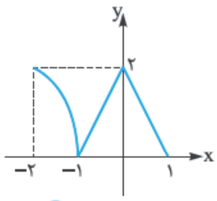
۱ $y=f(x)$

$\xrightarrow[\text{۱ واحد به چپ}]{x\to x+۱}$



۲ $y=f(x+۱)$

$\xrightarrow[\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}]{f\to ۲f}$



۳ $y=۲f(x+۱)$

نمودار تابع به دست آمده در بازهٔ $[-۱,۰]$ در ۴ آمده است.

۱۱- **گزینهٔ ۳** اول تابع g را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$g(x)=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|$$

خب قرار است با انتقال تابع $g(x)=|۲x+۱|$ به تابع $f(x)=|x|$ برسیم.

۱ اول جای x، $\frac{۱}{۲}x$ می‌گذاریم:

$$g(x)=|۲x+۱| \xrightarrow{x\to \frac{۱}{۲}x} y=|۲(\frac{۱}{۲}x)+۱|=|x+۱|$$

یعنی ابتدا تابع **انبساط طولی با ضریب** $۲=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}$ می‌کند.

۲ حالا به جای x، باید $x-۱$ بگذاریم:

$$y=|x+۱| \xrightarrow{x\to x-۱} y=|(x-۱)+۱|=|x|$$

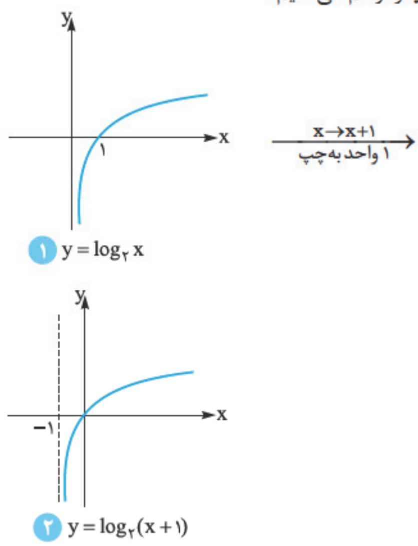
این‌جا هم تابع **۱ واحد به راست** می‌رود.

۱۲- **گزینهٔ ۳** با توجه به ضابطهٔ $f(x)=\log_۲(x+۲)$، ضابطهٔ تابع $f(۲x)+a$ را می‌نویسیم:

$$y=f(۲x)+a \Rightarrow y=\log_۲(۲x+۲)+a$$
$$=\log_۲ ۲(x+۱)+a=\log_۲ ۲+\log_۲(x+۱)+a$$
$$=۱+\log_۲(x+۱)+a$$

سادهٔ‌شدهٔ این تابع را به شکل $y=\log_۲(x+۱)+(a+۱)$ می‌نویسیم.

تابع $y=\log_2(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



برای رسم $y=\log_2(x+1)+(a+1)$ باید تابع بالا را $a+1$ واحد به بالا (*یا شاید* $|a+1|$ *واحد به پایین*) ببریم. اگر نمودار فوق را بالا یا پایین ببریم، نمودار از ۳ ناحیه عبور می‌کند، ولی الان جایش خوب است و از ۲ ناحیه عبور می‌کند؛ پس $a+1$، باید صفر باشد تا نمودار همین که هست بماند:

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1$$

۱۳- گزینهٔ «۱» ابتدا ضابطهٔ تابع $y=2\cos^2 x-1$ را ساده‌تر می‌کنیم. *یادتان هست که* $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، پس ضابطهٔ تابع به شکل $y=\cos 2x$ است.

می‌خواهیم با انتقال تابع $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$ به تابع $y=\cos 2x$ برسیم.

مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱ به جای xها، $x-\frac{\pi}{4}$ قرار می‌دهیم: $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$

$$\xrightarrow{x\to x-\frac{\pi}{4}} y=\cos((x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4})=\cos x$$

تابع $\frac{\pi}{4}$ **واحد به سمت راست** می‌رود.

۲ به جای xها، $2x$ قرار می‌دهیم:

$$y=\cos x \xrightarrow{x\to 2x} y=\cos 2x$$

$a=2$ است، بنابراین یعنی **انقباض افقی با ضریب** $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ داریم.

۱۴- گزینهٔ «۳»

تساوی $f(x)+f(-x)=0$ را به شکل $f(x)=-f(-x)$ می‌نویسیم:

برای رسم $y=-f(-x)$ دو مرحله طی می‌کنیم:

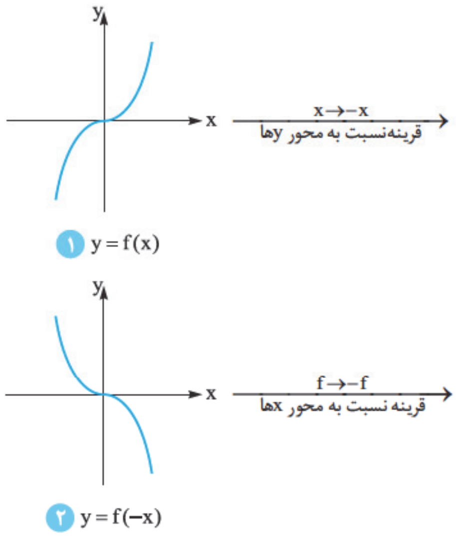
۱ f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:

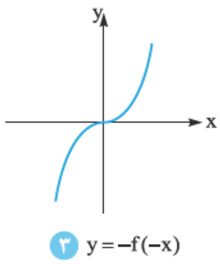
$$y=f(x) \xrightarrow{x\to -x} y=f(-x)$$

۲ بعد آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

$$y=f(-x) \xrightarrow{f\to -f} y=-f(-x)$$

پس برای آن‌که تابع $y=f(x)$ و $y=-f(-x)$ برابر باشند، باید دنبال تابعی باشیم که اگر آن را نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم، نمودارش بر خود تابع اولیه منطبق شود. این اتفاق فقط برای تابع ۳ رخ می‌دهد.





نکته اگر تساوی $f(x)=-f(-x)$ برای تابعی برقرار باشد، آن تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۱۵- گزینهٔ «۱» روی ضابطهٔ $y=1+\sqrt{x+1}$، انتقال‌های خواسته‌شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱ برای انعکاس نسبت به محور yها، باید به جای xها، $-x$ بگذاریم:

$$y=1+\sqrt{x+1} \xrightarrow{x\to -x} y=1+\sqrt{-x+1}$$

۲ حالا نمودار را باید ۲ واحد به چپ ببریم؛ پس به جای x، $x+2$ می‌گذاریم:

$$y=1+\sqrt{-x+1} \xrightarrow{x\to x+2}$$

$$y=1+\sqrt{-(x+2)+1}=1+\sqrt{-x-1}$$

۳ در آخر نمودار را ۲ واحد به پایین می‌بریم؛ بنابراین از ضابطهٔ تابع ۲ واحد کم می‌کنیم.

$$y=1+\sqrt{-x-1} \xrightarrow{f\to f-2} y=1+\sqrt{-x-1}-2$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{-x-1}-1$$

۱۶- گزینهٔ «۲» روی ضابطهٔ تابع $y=\log_3(x+1)$ انتقال‌های خواسته‌شده را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱ اول دو واحد به راست می‌بریم؛ پس به جای x، $x-2$ می‌گذاریم:

$$y=\log_3(x+1) \xrightarrow{x\to x-2}$$

$$y=\log_3(x-2+1)=\log_3(x-1)$$

۲ بعد نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم؛ بنابراین باید ضابطهٔ تابع را قرینه کنیم:

$$y=\log_3(x-1) \xrightarrow{f\to -f} y=-\log_3(x-1)$$

۳ در آخر نمودار را ۱ واحد به بالا می‌بریم؛ پس به ضابطهٔ تابع ۱ واحد اضافه می‌کنیم:

$$y=-\log_3(x-1) \xrightarrow{f\to f+1} y=-\log_3(x-1)+1$$

سؤال از ما طول نقطهٔ برخورد تابع به دست آمده با محور xها را می‌خواهد، پس y را برابر صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$y=-\log_3(x-1)+1 \xrightarrow{y=0} 0=-\log_3(x-1)+1$$

$$\Rightarrow \log_3(x-1)=1 \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4$$

۱۷- گزینهٔ «۴» نمودار رسم‌شده، نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ بوده که *یک‌سری بلا سرش آمده*:

① نمودار نسبت به محور yها قرینه شده، پس به جای xها، $-x$ می‌گذاریم:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{x \to -x} y=\sqrt{-x}$$

② نمودار نسبت به محور xها قرینه شده، پس ضابطهٔ تابع قرینه می‌شود:

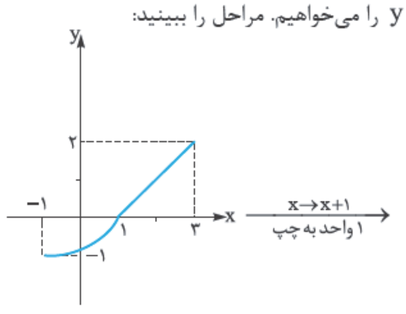
$$y=\sqrt{-x} \xrightarrow{f \to -f} y=-\sqrt{-x}$$

③ نمودار ۲ واحد به بالا رفته، پس به ضابطهٔ آن ۲ واحد اضافه می‌شود:

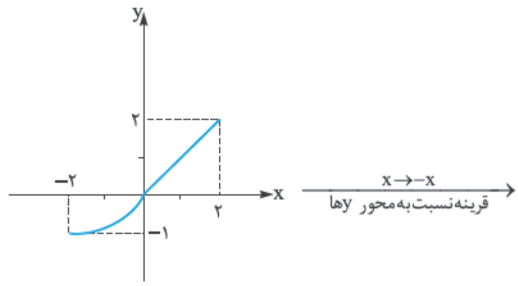
$$y=-\sqrt{-x} \xrightarrow{f \to f+2} y=-\sqrt{-x}+2$$

دقت کنید که چون دامنهٔ $y=\sqrt{x}$، برابر $[0,+\infty)$ است و در این‌جا دامنه، $(-\infty,0]$ است پس انتقال افقی نداشته‌ایم. بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $y=-\sqrt{-x}+2$ است و در بین گزینه‌ها فقط نقطهٔ $(-16,-2)$ روی آن قرار دارد.

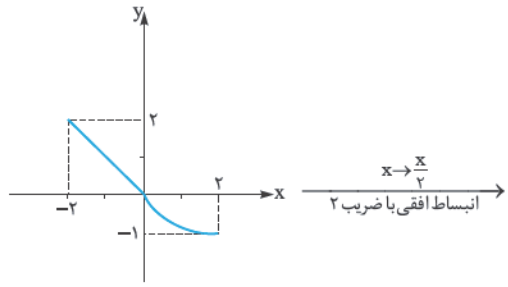
۱۸- گزینهٔ «۳» نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم و نمودار تابع $y=2f(1-\frac{x}{2})$ را می‌خواهیم. مراحل را ببینید:



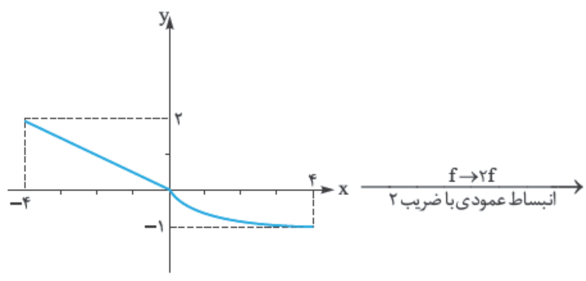
① $y=f(x)$



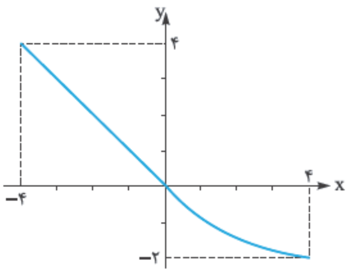
② $y=f(x+1)$



③ $y=f(-x+1)$



④ $y=f(-\frac{x}{2}+1)$



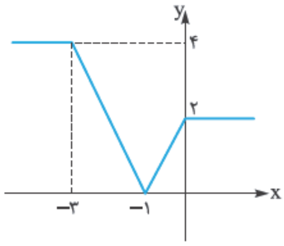
⑤ $y=2f(-\frac{x}{2}+1)$

۱۹- گزینهٔ «۳» باید با استفاده از نمودار تابع $y=f(1-x)$، نمودار تابع $y=f(x-1)$ را رسم کنیم، بعد مساحت بین آن نمودار و محور xها را در بازهٔ $[0,5]$ حساب کنیم. برای رسم $f(x-1)$ از روی $f(1-x)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

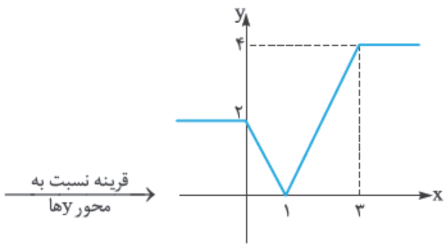
① در ضابطهٔ $y=f(1-x)$، به جای x، $-x$ می‌گذاریم:

$$y=f(1-x) \xrightarrow{x \to -x} y=f(1-(-x))=f(x+1)$$

در این مرحله باید نمودار را نسبت به محور yها قرینه کنیم:



$y=f(1-x)$

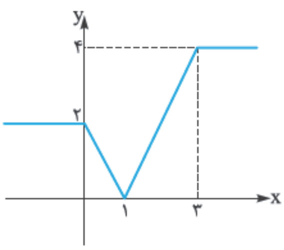


$y=f(x+1)$

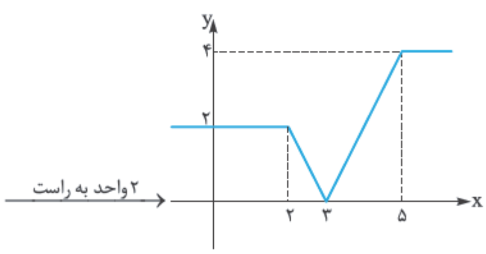
② در ضابطهٔ $y=f(x+1)$، به جای xها، $x-2$ می‌گذاریم:

$$y=f(x+1) \xrightarrow{x \to x-2} y=f((x-2)+1)=f(x-1)$$

در این مرحله باید نمودار را ۲ واحد به سمت راست ببریم:

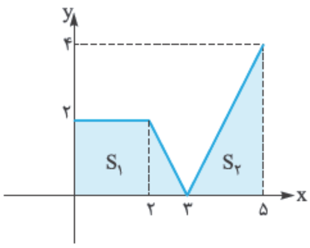


$y=f(x+1)$



$y=f(x-1)$

حالا مساحت محصور بین نمودار به دست آمده و محور xها را در بازهٔ $[۰,۵]$ حساب می‌کنیم:



$$S=S_1+S_2=\frac{(۲+۳)\times ۲}{۲}+\frac{۲\times ۴}{۲}=۵+۴=۹$$

۲۰- **گزینهٔ۴** اول ضابطهٔ تابع g را به شکل $g(x)=a(x+b)^۲+c$ می‌نویسیم:

$$g(x)=-۲x^۲+۸x-۳=-۲(x^۲-۴x+۴-۴)-۳$$
$$=-۲(x-۲)^۲+۸-۳ \Rightarrow g(x)=-۲(x-۲)^۲+۵$$

حالا مراحل رسم نمودار $g(x)=-۲(x-۲)^۲+۵$ از روی $f(x)=x^۲$ را می‌نویسیم:

۱ اول جای xها، $x-۲$ می‌گذاریم و نمودار **۲ واحد به راست** می‌رود:

$$y=x^۲ \xrightarrow{x\to x-۲} y=(x-۲)^۲$$

۲ بعد ضابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم که باعث می‌شود نمودار **با ضریب ۲ انبساط عمودی** پیدا کند: $y=(x-۲)^۲ \xrightarrow{f\to ۲f} y=۲(x-۲)^۲$

۳ ضابطه را در منفی ضرب می‌کنیم که باعث **قرینه‌شدن نمودار نسبت به محور xها** می‌شود: $y=۲(x-۲)^۲ \xrightarrow{f\to -f} y=-۲(x-۲)^۲$

۳ آخرسر ۵ واحد به ضابطه اضافه می‌کنیم که به خاطر آن نمودار **۵ واحد به بالا** می‌رود: $y=-۲(x-۲)^۲ \xrightarrow{f\to f+۵} y=-۲(x-۲)^۲+۵$

۲۱- **گزینهٔ۲** **راه اول** می‌خواهیم ببینیم نقطهٔ $(-۸,۶)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ به چه نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(-x)+۱$ نظیر می‌شود. مرحله‌به‌مرحله جلو می‌رویم:

۱ به جای xها، $-x$ می‌گذاریم، $y=f(x)$ به $y=f(-x)$ تبدیل می‌شود؛ در این حالت نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود:

$$(-۸,۶) \xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}} (۸,۶)$$

۲ بعد مقدار تابع را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم تا $y=f(-x)$ به $y=\frac{۱}{۲}f(-x)$ تبدیل شود؛ در این حالت طول نقاط ثابت می‌ماند و عرض آن‌ها نصف می‌شود. $(۸,۶) \xrightarrow{\text{عرض نصف می‌شود}} (۸,۳)$

۳ در آخر به مقدار تابع ۱ واحد اضافه می‌کنیم تا $y=\frac{۱}{۲}f(-x)$ به $y=\frac{۱}{۲}f(-x)+۱$ تبدیل شود؛ این‌جا هم طول نقاط ثابت و به عرضشان ۱ واحد اضافه می‌شود: $(۸,۳) \xrightarrow[\text{می‌شود}]{\text{۱ واحد به عرض اضافه}} (۸,۴)$

راه دوم $f(-۸)$ را داریم. در ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۲}f(-x)+۱$ باید به جای x عددی قرار دهیم تا $-x=-۸$ شود:

▷ $-x=-۸ \Rightarrow x=۸$

▷ $y=\frac{۱}{۲}f(-x)+۱ \xrightarrow{x=۸} y=\frac{۱}{۲}\underbrace{f(-۸)}_{۶}+۱=۳+۱=۴$

پس نقطهٔ موردنظر $(۸,۴)$ است.

۲۲- **گزینهٔ۲** نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی تابع f است، پس: $f(x_۰)=y_۰$

نقطهٔ $(\frac{x_۰}{۲},۱-y_۰)$ روی تابع g است، پس:

$$g(\frac{x_۰}{۲})=۱-y_۰ \xrightarrow{y_۰=f(x_۰)} g(\frac{x_۰}{۲})=۱-f(x_۰) \quad (I)$$

با قراردادن $\frac{x_۰}{۲}=t$، داریم: $\frac{x}{۲}=t \Rightarrow x=۲t$

حالا $x_۰=۲t$ را در رابطهٔ (I) قرار می‌دهیم: $g(t)=۱-f(۲t)$

در رابطهٔ آخر به جای تمام tها، خود x را می‌گذاریم: $g(x)=-f(۲x)+۱$

حالا مراحل رسم g از روی f را می‌نویسیم:

۱ به جای xها، ۲x می‌گذاریم، پس انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$y=f(x) \xrightarrow{x\to ۲x} y=f(۲x)$$

۲ ضابطه را قرینه می‌کنیم، پس نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود:

$$y=f(۲x) \xrightarrow{f\to -f} y=-f(۲x)$$

۳ در آخر ۱ واحد به ضابطه اضافه می‌کنیم، پس نمودار ۱ واحد به بالا می‌رود: $y=-f(۲x) \xrightarrow{f\to f+۱} y=-f(۲x)+۱$

۲۳- **گزینهٔ۲** نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی تابع f است، پس: $f(x_۰)=y_۰$

نقطهٔ $(\frac{۱-x_۰}{۲},y_۰+۱)$ روی تابع g است، پس: $g(\frac{۱-x_۰}{۲})=y_۰+۱$

$$\xrightarrow{y_۰=f(x_۰)} g(\frac{۱-x_۰}{۲})=f(x_۰)+۱ \quad (I)$$

با فرض $t=\frac{۱-x_۰}{۲}$ داریم: $t=\frac{۱-x_۰}{۲} \Rightarrow x_۰=۱-۲t$

تساوی $x_۰=۱-۲t$ را در (I) قرار می‌دهیم: $g(t)=f(۱-۲t)+۱$

می‌توانیم به جای t، x قرار دهیم: $g(x)=f(۱-۲x)+۱$

۲۴- **گزینهٔ۳** نقطهٔ $(۲,۲)$ روی تابع $g(x)=۲f(۱-\frac{x}{۲})$ است.

می‌خواهیم ببینیم این نقطه با چه نقطه‌ای روی تابع $y=f(x)$ نظیر بوده است.

نقطهٔ $(۲,۲)$ را روی تابع $y=۲f(۱-\frac{x}{۲})$ قرار می‌دهیم:

$$g(x)=۲f(۱-\frac{x}{۲}) \xrightarrow[g(x)=۲]{x=۲} ۲=۲f(۱-\frac{۲}{۲})$$
$$\Rightarrow ۲=۲f(۰) \Rightarrow f(۰)=۱$$

از $f(۰)=۱$ می‌فهمیم نقطهٔ $(۰,۱)$ روی f بوده است.

۲۵- **گزینهٔ۳**

نکته اگر دامنهٔ تابع f مجموعهٔ D_f باشد برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $y=af(g(x))+b$ باید $g(x)\in D_f$ باشد، پس این‌جا $-\frac{x}{۲}+۱$ باید عضو بازهٔ $[-۱,۲)$ باشد: $-۱\le -\frac{x}{۲}+۱<۲ \xrightarrow{-۱} -۲\le -\frac{x}{۲}<۱$

$$\xrightarrow{\times(-۲)} ۴\ge x>-۲ \Rightarrow D_y=(-۲,۴]$$