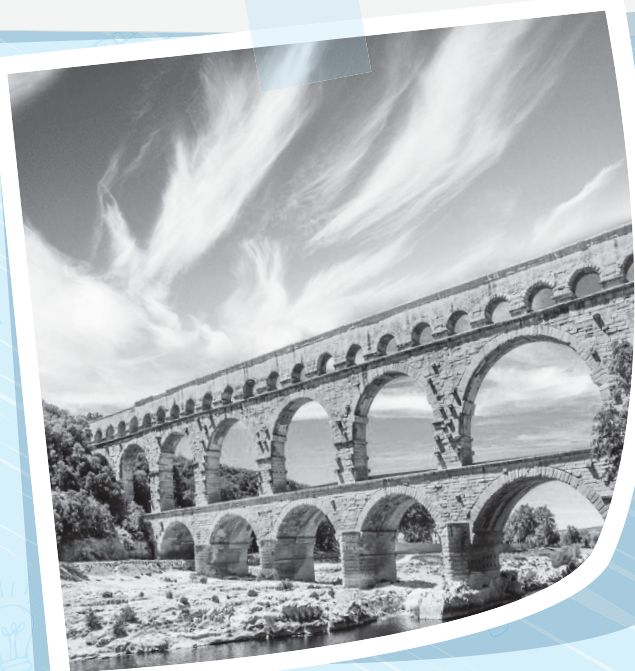


فصل اول

معادله درجه دوم



○ معادله و مسائل توصیفی

○ حل معادله درجه دوم و کاربردها

○ معادله‌های شامل عبارتهای گویا

معادله درجه اول

فرض کنید از ما بپرسند کدام عدد است که چهار برابر آن منهای عدد پنج، مساوی دو برابر همان عدد به علاوه عدد سه می‌باشد؟ به نظر شما چه طور می‌توان این عدد را پیدا کرد؟

برای پیدا کردن این عدد و به طور کلی برای حل این‌گونه مسائل از معادله کمک می‌گیریم. فرض می‌کنیم عدد مورد نظر x باشد، معادل ریاضی جمله‌ای که گفته شده را می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{منهای پنج}} 4x - 5 \\ \xrightarrow{\text{برابر 4}} 4x \\ \xrightarrow{\text{با هم مساوی}} 4x - 5 = 2x + 3 \\ \xrightarrow{\text{به علاوه سه}} 2x + 3 \\ \xrightarrow{\text{برابر 2}} 2x \end{array} \right.$$

حال برای پیدا کردن x ، جملات شامل x را به یک طرف تساوی و اعداد ثابت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم و هر طرف را ساده می‌کنیم:

$$4x - 2x = 3 + 5 \Rightarrow 2x = 8$$

اکنون اگر طرفین تساوی را بر ۲ تقسیم کنیم، x به دست می‌آید:

$$x = 4$$

پس عددی که مورد نظر سؤال بود، عدد ۴ است.

در این مسأله، چند مفهوم و تعریف وجود داشت. اولاً معادله‌ای که نوشتیم یک معادله درجه اول است (چون توان متغیر آن ۱ می‌باشد). ثانیاً مراحل حل آن به کار بردیم، به اعمال جبری ساده معروف است. ثالثاً به $x = 4$ جواب یا ریشه معادله می‌گویند (زیرا به ازای آن معادله به یک تساوی عددی درست تبدیل می‌شود). در حالت کلی می‌توانیم بگوییم:

معادله درجه اول: هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند. جواب

این معادله از رابطه $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید (زیرا $ax = -b$ و در نتیجه $x = -\frac{b}{a}$).

اعمال جبری ساده: اعمالی که برای حل یک معادله، مجاز به انجام آن‌ها هستیم، عبارتند از:

۱) جمع کردن طرفین معادله با مقدارهای مساوی

۲) کم کردن مقدارهای مساوی از طرفین معادله

۳) ضرب کردن طرفین معادله در مقدارهای مساوی و مخالف صفر

۴) تقسیم کردن طرفین معادله بر مقدارهای مساوی و مخالف صفر

نکته فایده‌آمیز: ما دو تا سؤال داریم. اول این‌که چرا تو تعریف معادله، گفتین a مخالف صفر باشه؟ دوم این‌که تو اعمال جبری ساده برای ضرب

و تقسیم چرا شرط مخالف صفر رو آوردین؟ خوب اگه صفر باشه چی میشه؟

پاسخ: وای بچه‌هون! باز تو عجله کردی. فیلی سؤال‌های فوبی پرسیدی ولی اگه کمی صبر می‌کردی، فردم همه رو می‌گفتم که چرا! جواب سؤال اولت رو بزار بعداً مقفیل توضیح می‌دم ولی سؤال دوم رو همین الان می‌گم چرا. ببین مثلاً ما به معادله $\frac{5}{3}x = 3$ داریم. اگه بفوایم این رو حل کنیم، باید طرفین تساوی رو در $\frac{3}{5}$ ضرب کنیم تا جواب به دست بیاد که جواب هم $\frac{9}{5}$ می‌شه. اما اگه من طرفین تساوی رو در صفر ضرب می‌کردم، چی می‌شد؟ هیپی! می‌شه $0 = 0$. به چه دردی می‌فورد؟ هیپی، کمکی تو به دست آوردن جواب نمی‌کرد و الکی به یک تساوی بی‌فودی می‌رسیدیم. برای تقسیم هم همین‌طور. تو تقسیم که برتره، چون اصلاً نمی‌شه طرفین رو به صفر تقسیم کرد! یه کار کاملاً بی‌معنی. حالا به توضیحات زیر در مورد سؤال اولت دقت کن.

جواب معادله: هر مقداری که معادله به ازای آن، به یک تساوی عددی درست تبدیل شود، جواب معادله است، پس می‌توانیم بگوییم جواب معادله

همواره در خود معادله صدق می‌کند.

حالت‌های مختلف در معادله $ax + b = 0$:

$a = 0, b \neq 0 \Rightarrow 0 + b = 0 \Rightarrow 0 = -b \Rightarrow$ $\neq 0$ تساوی غیرممکن	معادله به‌ازای هیچ x ای درست نیست.
$a = 0, b = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ تساوی همواره درست	معادله به‌ازای هر x ای درست است.
$a \neq 0, b = 0 \Rightarrow ax + 0 = 0 \Rightarrow ax = 0 \xrightarrow{a \neq 0} x = 0$	معادله فقط جواب صفر دارد.
$a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \xrightarrow{a \neq 0} x = -\frac{b}{a}$	معادله دارای یک جواب مخالف صفر است.

پس برای این‌که معادله $ax + b = 0$ یک معادله درجه اول و دارای جواب باشد، شرط $a \neq 0$ لازم است.

همیشه یادم باشه

یک معادله درجه اول باید به شکل $ax + b = 0$ باشد و حتماً a مخالف صفر است، جواب آن هم $x = -\frac{b}{a}$ می‌شود. برای حل یک معادله درجه اول باید:

۱) اگر در معادله جمله‌هایی وجود دارد که شامل اعمال ضرب و تقسیم یا توان‌رسانی است، اول آن‌ها را انجام دهیم. مثلاً شامل جمله‌هایی مثل $2(x-1)$ یا $(x+2)^2$ باشد.

۲) اگر در معادله جمله‌های کسری است، طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم (تا مخرج‌ها از بین بروند). مثلاً در معادله $\frac{3x}{3} + 1 = \frac{x-1}{3}$ طرفین را در ۶ ضرب کنیم تا معادله به شکل $2x - 2 = 9x + 6$ در بیاید.

۳) جمله‌های دارای مجهول را به یک طرف و جمله‌های معلوم را به طرف دیگر تساوی معادله ببریم. مثلاً در معادله قبل آن را به شکل $9x - 2x = -2 - 6$ بنویسیم. البته این را فراموش نکنیم که وقتی جمله‌ای را از یک طرف تساوی به طرف دیگر تساوی می‌بریم، علامتش قرینه می‌شود.

۴) در دو طرف تساوی، جمله‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم تا ساده شوند. مثلاً معادله قبل به شکل $7x = -8$ درمی‌آید.

۵) در مرحله آخر، طرفین معادله را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم تا مقدار مجهول به‌دست بیاید. مثلاً جواب معادله بالا می‌شود:

$$\frac{7x}{7} = -\frac{8}{7} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

مثال جواب‌های معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

$$(x-1)^2 = 4 + (x+2)^2 \quad \text{ب)}$$

$$5(x-4) = \frac{3(2x+1)}{2} \quad \text{الف)}$$

پاسخ: الف) طبق مراحل حل معادله را پیش می‌بریم تا مطلب کاملاً برایتان جا بیفتد.

$$5(x-4) = \frac{3(2x+1)}{2} \Rightarrow 5x - 20 = \frac{6x+3}{2}$$

۱) در سمت راست و چپ معادله، یک عمل ضرب باید انجام دهیم:

۲) در سمت راست، یک جمله کسری با مخرج ۲ داریم. پس طرفین معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2(5x-20) = 6x+3 \Rightarrow 10x-40 = 6x+3$$

۳) جمله‌های دارای مجهول را به طرف چپ و جمله‌های معلوم را به طرف راست می‌بریم:

$$10x - 6x = 3 + 40$$

$$4x = 43$$

۴) طرفین معادله را ساده می‌کنیم:

$$x = \frac{43}{4}$$

۵) طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم تا جواب به‌دست آید:

ب) ۱) سمت راست و چپ، یک پرانتز با توان ۲ داریم. حاصل آن‌ها را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$(x-1)^2 = 4 + (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 + x^2 + 4x + 4$$

۲) جمله کسری نداریم.

۳) معلوم‌ها را به طرف راست و مجهول‌ها را به طرف چپ می‌بریم:

$$x^2 - 2x - x^2 - 4x = 4 + 4 - 1$$

$$-6x = 7$$

۴) طرفین معادله را ساده می‌کنیم:

$$x = -\frac{7}{6}$$

۵) طرفین معادله را بر ۶- تقسیم می‌کنیم تا جواب به‌دست آید:

۱- جواب معادله $2x + 1 = \frac{x-4}{5} - \frac{2-3x}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{37}{45}$ (۲) $\frac{7}{45}$ (۳) $\frac{37}{48}$ (۴) $\frac{7}{48}$

۲- اگر $a \neq 2b$ ، جواب معادله $a(x-1) - 2bx + 2b = 0$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) a (۳) b (۴) ۱

۳- به ازای کدام مقدار m، معادله $m(x-2) = 5x-1$ به یک تساوی نادرست (غیرممکن) تبدیل می‌شود؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{5}$

۴- اگر $(3m-x)^2 = (mx+2)^2$ یک معادله درجه اول باشد، آن‌گاه جواب آن کدام است؟ ($m > 0$)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۵- اگر معادله $(ax+2)^2 = (3x-1)^2$ یک معادله درجه اول باشد که جواب آن $x = \frac{1}{4}$ است، a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) -۳

۶- مجموع ثلث و خمس عددی ۳۴ واحد بیشتر از ربع آن عدد است. نصف نصف این عدد کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۰ (۴) ۳۰

۷- اگر به سه برابر عددی، ۴ واحد اضافه گردد و از نصف حاصل، همان عدد کم شود، باقی‌مانده ۵ می‌شود. آن عدد کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۱۴ (۳) ۸ (۴) ۶

۸- علی، رضا و مهدی با هم در پولی شریک هستند. اگر سهم علی و رضا به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ از پول باشد و مهدی ۱۰۰ هزار تومان پول گذاشته باشد، پول علی چند هزار تومان بوده است؟

- (۱) ۱۵۰ (۲) ۲۵۰ (۳) ۱۲۵ (۴) ۲۲۵

۹- عددی ۲ برابر عدد دیگر و مربع آن برابر مکعب عدد دیگر است. میانگین این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۰- محیط یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $(1 + \sqrt{2})$ سانتی‌متر است. مساحت آن کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{12}$ (۳) ۹ (۴) $9\sqrt{2}$

۱۱- مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی ۶۵۷ است. رقم دهگان عدد کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱ (۳) ۷ (۴) ۲

۱۲- حاصل جمع چهار عدد طبیعی زوج متوالی ۳۶ شده است. حاصل ضرب دو عدد وسطی کدام است؟


- (۱) ۸۰ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۱۲۰

۱۳- ۵ سال دیگر مجموع سن رضا و مجید، برابر ۳۰ خواهد شد. اگر سال گذشته سن رضا دو برابر سن مجید بوده باشد، اختلاف سن آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۵

۱۴- امسال پدری در ۳۰ سالگی فرزندش ۵۶ سال دارد. چند سال قبل، سن پدر، سه برابر سن پسرش بوده است؟ 

- (۱) ۱۳ (۲) ۲۶ (۳) ۱۷ (۴) ۳۹

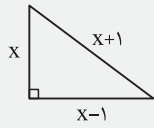
۱۵-  مینا تعدادی شکلات داشت. نیمی را به برادرش و نیمه بقیه‌اش را به دوستش و نیمه باقی‌مانده را به مادرش داد و ۵ شکلات برای خودش باقی ماند. او در ابتدا چند شکلات داشته است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۱۶- در یک شرکت ۳ مدیر، ۲ معاون، ۱۵۰ کارمند و ۵ خدمات‌چی وجود دارد. اگر حقوق یک کارمند ۲ برابر یک خدمات‌چی، نصف یک معاون و $\frac{1}{5}$ یک مدیر باشد و این شرکت ماهیانه ۳۴۳۰۰۰۰۰ تومان حقوق پرداخت کند، یک معاون، ماهی چند میلیون تومان حقوق می‌گیرد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۱

معادله درجه دوم و مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)



فرض کنید می‌خواهیم طول وتر مثلث قائم‌الزاویه زیر را پیدا کنیم. با استفاده از رابطه فیثاغورث داریم:

$$x^2 + (x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \xrightarrow{\text{فکتوراز } x} x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

اگر $x = 0$ باشد، طول یکی از اضلاع، صفر و یکی دیگر از اضلاع، منفی می‌شود که قابل قبول نیست، پس فقط $x = 4$ قابل قبول است و طول اضلاع ۳ و ۴ و طول وتر ۵ می‌شود.

معادله‌ای که برای حل این مسأله نوشتیم، درجه اول نبود. به این معادله، درجه دوم گفته می‌شود (چون بیشترین توان متغیر ۲ است). در حالت کلی داریم:

معادله درجه دوم: هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن $a \neq 0$ است، یک معادله درجه دوم می‌نامند. در این معادله، a ، ضریب x^2 ، b ، ضریب x و c ، عدد ثابت است و به این شکل از معادله، صورت استاندارد آن گفته می‌شود.

توجه معادله درجه دوم را هم با اعمال جبری ساده حل می‌کنیم.

فانم اجازه! همیشه تو این معادله هم بگید اگر a صفر باشه یا حتی b و c ، چه حالت‌هایی پیش میاد؟

پاسخ: بله که میشه، ولی پهن تو این معادله، حالت‌ها خیلی زیاده و مهمه، بگذار یک کم همین حالت معمولی معادله رو تمرین کنیم، بعد تو درسنامه‌های بعدی مفصل برات توضیح می‌دم.

همیشه یادم باشه

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ یک معادله درجه دوم است، بزرگ‌ترین توان x باید ۲ باشد. جواب معادله هم در خود معادله صدق می‌کند و یا هر عددی که در معادله صدق کند، جواب معادله است.

مثال اگر معادله $x^2 + 3m + x = x^2 - (n-1)x^2 - 2x + 1$ یک معادله درجه دوم با جواب $x = 1$ باشد، مقدار m و n را پیدا کنید و عدد ثابت را بیابید.

پاسخ: اولاً چون معادله درجه دوم است، باید بزرگ‌ترین توان متغیر ۲ باشد. بنابراین ضریب x^3 باید صفر شود تا یک معادله درجه دوم داشته باشیم:

$$n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

حالا معادله را مرتب می‌کنیم و به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$mx^2 - 2x + 1 = x^2 + 3m + x \Rightarrow mx^2 - x^2 - 2x - x + 1 - 3m = 0 \Rightarrow (m-1)x^2 - 3x + 1 - 3m = 0 \quad (*)$$

البته برای پیدا کردن مقدار m نیازی به استاندارد کردن نبود ولی برای پیدا کردن جمله ثابت در مرحله بعد به آن احتیاج داشتیم که می‌توانستیم بعداً این کار را انجام دهیم.

چون $x = 1$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$(m-1)(1)^2 - 3(1) + 1 - 3m = 0 \Rightarrow m - 3 - 3m = 0 \Rightarrow -2m - 3 = 0 \Rightarrow -2m = 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

عدد ثابت معادله، طبق رابطه (*) برابر $1 - 3m$ است. در نتیجه:

$$\text{عدد ثابت} = 1 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

رمزنگاری: می‌توانیم حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده و از آن برای رمزگذاری کلمات فارسی استفاده کنیم. قانون رمزگذاری را این‌طور قرارداد می‌کنیم که:

۱) هر حرف بدون نقطه با شماره آن از ۱ تا ۳۲ مشخص شود.

۲) حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شوند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف موردنظر باشد. مثلاً حرف «ط» با عدد ۱۹ (چون ۱۹ امین حرف الفبا است) و حرف «ث» با $5x^3$ (چون ۵ امین حرف الفبا است و تعداد نقطه‌هایش ۳ است) مشخص می‌شوند.

۳) برای نوشتن کلمات از علامت جمع بین رمزهای هر حرف استفاده می‌کنیم. مثلاً معادل رمزی کلمه «ریاضی» به صورت زیر می‌شود:

ر	+	ی	+	ا	+	ض	+	ی
↓		↓		↓		↓		↓
۱۲		۳۲x ^۲		۱		۱۸x		۳۲
$\Rightarrow 12 + 32x^2 + 1 + 18x + 32$								

همیشه یادم باشه

برای رمزنگاری، حواسمان به حروف نقطه‌دار باشد و حتماً آن‌ها را به صورت ax^n بنویسیم. وقتی حرفی مثل «ی» وسط کلمه می‌آید، ۲ تا نقطه دارد و در آخر کلمه، بدون نقطه است، پس باید آن را در وسط به صورت $۳۲x^۲$ و در آخر به صورت ۳۲ بنویسیم.

مثال الگوی ریاضی معادل کلمه «دانش آموز» را بنویسید.

$$\begin{matrix} \text{د} & + & \text{ا} & + & \text{ن} & + & \text{ش} & + & \text{آ} & + & \text{م} & + & \text{و} & + & \text{ز} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۱۰ & & ۱ & & ۲۹x & & ۱۶x^۳ & & ۱ & & ۲۸ & & ۳۰ & & ۱۳x \end{matrix} \Rightarrow ۱۰ + ۱ + ۲۹x + ۱۶x^۳ + ۱ + ۲۸ + ۳۰ + ۱۳x$$

پاسخ:

۱۷- با کدام شرط، معادله $(a-3)x^2 + (b-2)x + 1 = 0$ همواره یک معادله درجه دوم است؟

- (۱) $a = 3$ (۲) $a \neq 3$ (۳) $b = 2$ (۴) $b \neq 3$

۱۸- کدام معادله درجه دوم است؟

- (۱) $(x-1)^2 = x^2 - 5x + 6$ (۲) $(2x-1)^2 = (3+2x)^2$
 (۳) $2x^2 + 5x - 8 - x^2 = x^2 + 1$ (۴) $(3x-1)^2 = (x+1)^2$

۱۹- اگر در شکل استاندارد معادله $(x-2)(2x+1) = 3x+6$ ، ضریب جمله درجه دوم برابر ۱ باشد، ضریب جمله درجه اول کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۳۲ (۳) -۸ (۴) -۳۲

۲۰- ضریب جمله درجه ۲ در معادله $(x-4)^2 = (3x+1)^2$ ، در صورتی که عدد ثابت معادله ۶۰ باشد، کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۳۲ (۳) -۸ (۴) -۳۲

۲۱- اگر $ax^3 + bx^2 + cx - dx^2 + d = 0$ یک معادله درجه دوم باشد که ضریب جمله درجه دوم آن برابر ۳، ضریب جمله درجه اول آن برابر ۲- و جمله ثابت آن برابر ۱- است، مقدار $a-b-c+d$ کدام است؟

آزمون‌های سراسری کاج

- (۱) -۵ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) -۲

۲۲- اگر $x = 2$ جواب معادله درجه دوم $(m-2n)x^3 + nx^2 + 2mx - 12 = 0$ باشد، حاصل $m^2 + n^2$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴) ۱۰

۲۳- اگر α جواب معادله $3x^2 - 5x + \alpha = 0$ باشد، مقدار عبارت $3\alpha^2 - 4\alpha + 3$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲

۲۴- اگر a جواب معادله درجه دوم $3x^2 - 8x - 4 = 0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{a^2}{8} - \frac{a}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

۲۵- معادل ریاضی کلمه «شیرین» کدام است؟

- (۱) $۱۶x^۳ + ۳۲ + ۱۲ + ۳۲ + ۲۹x$ (۲) $۱۶x^۳ + ۷x + ۲۹x$
 (۳) $۱۶x^۳ + ۶۴x^۲ + ۲۹x + ۱۲$ (۴) $۱۶x^۳ + ۳۲x^۲ + ۱۲ + ۳۲x^۲ + ۲۹x$

۲۶- معادل ریاضی کلمه «درخت سبز» شامل چند عدد زوج است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۶

۲۷- کلمه معادل رمز « $2x + 29x + 23x + 16x^3$ » کدام است؟

- (۱) بوزش (۲) بنفش (۳) مثلث (۴) بلوچ

۲۸- معادل فارسی رمز « $32x^2 + 25 + 15 + 1 + 29x$ » کدام است؟

- (۱) ناسوز (۲) یکتا (۳) یکرو (۴) یکسان

۲۹- در نوشتن معادل ریاضی کلمه «روزهای شنبه» مجموع ضرایب جملات درجه اول کدام است؟

- (۱) ۱۳۷ (۲) ۸۲ (۳) ۴۴ (۴) ۳۶

۳۰- حروف رمز یک کلمه به صورت درهم ریخته، ۳۰، ۲۶، ۱، $13x$ ، ۱۲ و ۱۲ است. این کلمه کدام است؟

- (۱) سوزدار (۲) رازدار (۳) روزگار (۴) دادمان

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

در فصل اول با اتحادها و تجزیه عبارتهای جبری آشنا شدید. حال از تمام آن مطالب برای حل معادله‌های درجه دوم می‌توانید استفاده کنید. در واقع یکی از روش‌های حل معادله‌های درجه دوم، روش تجزیه است و چون معادله‌ها درجه ۲ هستند، فقط اتحادهای «مربع دوجمله‌ای»، «مزدوج» و «جمله مشترک» به کار ما می‌آیند. از روش‌های دیگر تجزیه مثل «فاکتورگیری» هم می‌توانیم استفاده کنیم. با استفاده از همان قانون‌هایی که برای پیدا کردن اتحادها در فصل قبل گفتیم، اتحاد لازم برای تجزیه را پیدا می‌کنیم، بعد به حل معادله می‌پردازیم.

یادآوری اگر $a \times b = 0$ ، آن‌گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

اتحاد مربع مجموع دوجمله‌ای	$x^2 + 2ax + a^2 = 0 \Rightarrow (x+a)^2 = 0 \Rightarrow (x+a)(x+a) = 0$ $\Rightarrow x = -a$ یا $x = -a$	دو ریشه برابر یا ریشه مضاعف
اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای	$x^2 - 2bx + b^2 = 0 \Rightarrow (x-b)^2 = 0 \Rightarrow (x-b)(x-b) = 0$ $\Rightarrow x = b$ یا $x = b$	دو ریشه برابر یا ریشه مضاعف
اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری	$x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow (x-a)(x+a) = 0 \Rightarrow x = a$ یا $x = -a$ یا $x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$; $(a \in \mathbb{R})$	دو ریشه قرینه هم
اتحاد جمله مشترک	$x^2 + (a+b)x + ab = 0 \Rightarrow (x+a)(x+b) = 0 \Rightarrow x = -a$ یا $x = -b$	دو ریشه متمایز
فاکتورگیری	$x^2 + ax = 0 \Rightarrow x(x+a) = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = -a$	یک ریشه صفر و یک ریشه غیرصفر

همیشه یادم باشه

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

- وقتی ۳ تا جمله داریم که ۲ تا از آن‌ها مربع کامل است (و سومی هم دو برابر جذر آن دو تا)، برای حل معادله از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم. جواب این معادله ریشه مضاعف محسوب می‌شود.
- اگر $b = 0$ باشد و دو تا جمله مربع کامل داشته باشیم که بین آن‌ها علامت منفی است (حتماً یکی منفی و یکی مثبت)، در واقع اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. جواب این معادله، دو ریشه قرینه هم‌دیگر است. در این حالت، یعنی $b = 0$ ، اگر a و c هم‌علامت باشند، معادله جواب ندارد.
- اگر $c = 0$ باشد، از فاکتورگیری استفاده می‌کنیم. جواب این معادله صفر و یک عدد دیگر است.
- اگر ۳ تا جمله داشتیم که در شرط‌های اتحاد جمله مشترک صدق می‌کردند، از این اتحاد استفاده می‌کنیم. در این حالت جواب معادله دو عدد متمایز است.

فانم اجازه! اومدیم به معادله‌ای هیچ کدام از شرط‌های بالا رو نداشت. اون وقت چی کار کنیم؟ چه طوری حل همیشه؟ یعنی دیگه حل نمیشه

و جواب نداره؟

پاسخ: سؤال فوبی پرسیدی! بعید بود از تو! اون وقت می‌ریم سراغ بقیه روش‌های حل معادله درجه دوم که در درسنامه‌های بعدی کم‌کم باهاشون آشنا می‌شی. فعلاً همین‌ها رو این‌جا فوب یاد بگیر تا بعداً بعوت بگم بی‌کار کنی.

مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} \quad \text{ب) } 9x^2 - (1-x)^2 = 0 \quad \text{ج) } x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{د) } 6x^2 = x$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$$

پاسخ: الف) ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

سه جمله داریم که ۲ تا از آن‌ها مربع کامل $(x^2$ و $\frac{1}{9})$ و جمله دیگر، دو برابر جذر آن دو تا $(2 \times \frac{1}{3} \times x)$ است. پس اتحاد مربع تفاضل دوجمله‌ای است:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$$

ب) روش اول: دو جمله مربع کامل $9x^2$ و $(1-x)^2$ را با علامت منفی بین آن‌ها داریم. پس می‌توانیم از اتحاد مزدوج استفاده کنیم:

$$9x^2 - (1-x)^2 = 0 \Rightarrow (3x - (1-x))(3x + (1-x)) = 0 \Rightarrow (3x - 1 + x)(3x + 1 - x) = 0 \Rightarrow (4x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \\ \text{یا} \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم: از ریشه‌گیری هم می‌توانستیم جواب را به‌دست آوریم. ببینید:

$$9x^2 = (1-x)^2 \Rightarrow 3x = \pm(1-x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 1-x \Rightarrow 3x+x=1 \Rightarrow 4x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ 3x = -(1-x) \Rightarrow 3x-x=-1 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

نکته اجازها! چرا اشتباه درس می‌دین؟ شما که گفتین اگه با اتحاد مزدوج جواب رو به‌دست بیاریم، دو تا جواب، قرینه هم هستند. پس چرا این‌جا نشدند؟ جوابتون رو غلط به‌دست آوردید؟

پاسخ: قبلی هم درست به‌دست آوردیم. بلکه که گفتیم. اما اگه فوب به درس توه کرده بودی، اون‌جا وقتی معادله به شکل $x^2 - a^2 = 0$ و $a \in \mathbb{R}$ هست، گفتیم جواب‌ها رو عدد قرینه هم میشه. در این مثال، جمله دوم، عدد نیست، یک عبارت که فودش شامل متغیر هست، پس شبیه چیزی که ما گفتیم، نیست. در واقع اگه این معادله رو اول ساده می‌کردی، بعد جوابش رو پیدا می‌کردی، می‌فهمیدی چرا این‌طوری شده:

$$9x^2 - (1-2x+x^2) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 1 + 2x - x^2 = 0 \Rightarrow 8x^2 + 2x - 1 = 0$$

همون‌طوری که می‌بینی به یه معادله‌ای رسیدیم که با هیچ‌کدوم از اتحادها نمی‌تونیم اون‌رو تهبزه کنیم، البته شبیه اتحاد جمله مشترک است. روش سوم رو ببین:

نکته برای تجزیه و حل معادلات درجه ۲ از روش A (که برای اتحادهای شبیه جمله مشترک، استفاده می‌کردیم) هم می‌توانیم استفاده کنیم. مشابه آن‌چه که در اتحادها گفتیم، با این روش، معادله را تجزیه کرده و جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم.

روش سوم: از روش A، معادله را تجزیه کرده و آن را حل می‌کنیم:

$$A = 8x^2 + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 8A = 64x^2 + 16x - 8 \Rightarrow 8A = (8x-2)(8x+4) \Rightarrow 8A = 2(4x-1)4(2x+1)$$

$$\xrightarrow{\div 8} A = (4x-1)(2x+1) \Rightarrow \text{معادله: } (4x-1)(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

دیدی مقدر سفت شد؟! پس روش اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری در واقع یه راه میانبر و فوب برای حل این معادله بود. تازه در درسامه‌های بعدی با روش‌های دیگه هم هلمش رو فواهی دید.

ج خیلی راحت با اتحاد جمله مشترک می‌توان معادله را تجزیه کرد و جواب‌ها را به‌دست آورد:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=1$$

$$6x^2 - x = 0 \xrightarrow{\text{فکتورگیری}} x(6x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 6x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{6} \end{cases} \quad (د)$$

نکته گاهی بعضی معادلات درجه دوم به‌صورت کلی $ax^2 + bx + c = 0$ نیستند، اما با یک تغییر ساده به این شکل، تبدیل می‌شوند. مثلاً معادله $(x+m)^2 + 3(x+m) + 2 = 0$ را ببینید، می‌توانید حاصل پرانتز $(x+m)$ را به‌دست آورید و معادله را ساده کنید و بعد جواب‌ها را به‌دست آورید، ولی به‌جای این کار طولانی، اگر $x+m$ را برابر t فرض کنید، آن‌گاه معادله به‌صورت $t^2 + 3t + 2 = 0$ درمی‌آید که همان شکل کلی معادله درجه دوم است و به‌راحتی با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه‌شده و حل می‌شود. در نهایت باید جواب t را مساوی $x+m$ قرار دهید و x را پیدا کنید. به این عمل **تغییر متغیر** می‌گویند که در معادله‌هایی به این صورت، بسیار کاربردی و مفید است.

مثال جواب‌های معادله $(t-1)^4 - 4(t-1)^2 + 3 = 0$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با فرض $x = (t-1)^2$ معادله به‌صورت $x^2 - 4x + 3 = 0$ درمی‌آید که با اتحاد جمله مشترک آن را تجزیه می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$(x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \xrightarrow{x=(t-1)^2} (t-1)^2 = 3 \Rightarrow t-1 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} + 1 = 4 \\ t = -\sqrt{3} + 1 = -2 \end{cases} \\ x=1 \xrightarrow{x=(t-1)^2} (t-1)^2 = 1 \Rightarrow t-1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} t = 1+1 = 2 \\ t = -1+1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین معادله داده‌شده دارای ۴ جواب است. اگرچه در ابتدا یک معادله درجه ۴ و غیرقابل حل به‌نظر می‌آمد، ولی با یک تغییر متغیر ساده و تبدیل آن به معادله درجه دوم توانستیم به‌راحتی جواب‌ها را پیدا کنیم.

۳۱- معادله $(1-x+x^2)(x+1) = x(x^2-1) + x$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

انسانی داخل ۸۶

۳۲- جواب معادله $-3x^2 + 6x + 4 = -3x^2 + 6x + 5$ کدام است؟

- (۱) $\{\frac{1}{3}, -1\}$ (۲) $\{-\frac{1}{3}, 1\}$ (۳) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$ (۴) $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

آزمونهای سراسری گاج

۳۳- معادله $x^2 - 5x + 3 = -(x+5)x$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک جواب منفی (۳) ۲ (۴) یک جواب مثبت

۳۴- مربع عددی از ده برابر آن عدد، ۲۵ واحد کم تر است، آن عدد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۵

۳۵- یکی از ریشه های معادله درجه دوم $(2x-3)^2 = 7$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{7}+3}{3}$ (۲) $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{7}-3}{2}$ (۴) $\frac{-\sqrt{7}-3}{3}$

۳۶- حاصل ضرب جواب های معادله $(x-1)^2 = (2x+5)^2$ کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۱۲ (۳) ۸ (۴) $-\frac{16}{3}$

۳۷- در معادله $(x-\alpha)^2 = \beta^2$ مجموع مربعات جواب ها کدام است؟

- (۱) $\alpha^2 + \beta^2$ (۲) $\alpha^2 - \beta^2$ (۳) $2(\alpha^2 + \beta^2)$ (۴) $2(\alpha^2 - \beta^2)$

۳۸- حاصل ضرب ریشه های معادله $(x+1)(x-5) + 12(x+1) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۷ (۴) ۸

آزمونهای سراسری گاج

۳۹- مربع یک عدد طبیعی فرد، مساوی ۱۰ برابر آن عدد منهای ۹ است. این عدد کدام است؟

- (۱) $\{7, 11\}$ (۲) $\{9, 11\}$ (۳) $\{1, 7\}$ (۴) $\{1, 9\}$

آزمونهای سراسری گاج

۴۰- اگر $x = -2$ یکی از جواب های معادله $a^2x - 2ax + a^2 = 0$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۶, ۲ (۲) -۶, -۲ (۳) ۶, ۲ (۴) ۶, -۲

۴۱- معادله درجه دوم $ax^2 - 4x + c = 0$ با چه شرطی دارای ریشه مضاعف $x = -1$ است؟

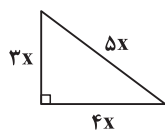
- (۱) $a = c = -2$ (۲) $a = -c = 2$ (۳) $a = -c = -2$ (۴) $a = c = 2$

۴۲- اگر x عددی طبیعی باشد، به طوری که حاصل ضرب عدد صحیح قبل از آن در عدد طبیعی بعد از آن برابر ۸۰ گردد، جذر x کدام است؟

آزمونهای سراسری گاج

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳- عدد مربوط به محیط و مساحت شکل مقابل با هم برابر است. طول وتر مثلث کدام است؟ ($x > 0$)



آزمونهای سراسری گاج

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۴۴- اگر معادله درجه دوم $a^2x^2 + (a-5) = 0$ جواب نداشته باشد، a کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۶ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) -۵

۴۵- اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx - c = 0$ دارای یک جواب صفر و یک جواب بزرگ تر از ۳- باشد، آن گاه کدام گزینه درست است؟ ($a > 0$)

- (۱) $b + 3a = 0$ (۲) $b < 3a$ (۳) $b - 3a = 0$ (۴) $b > 3a$

۴۶- اگر جواب بزرگ تر معادله $6 = (t-3) + (t-3)^2$ برابر A و جواب کوچک تر آن برابر B باشد، آن گاه $2A + B$ برابر کدام است؟

آزمونهای سراسری گاج

- (۱) ۴ (۲) ۱۰ (۳) -۱۱ (۴) ۱

۴۷- اگر $A = 2x - 1$ ، آن گاه جواب های معادله $A^2 + 2A - 24 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\pm \frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\pm \frac{3}{2}$

۴۸- مربع جواب بزرگ تر معادله $x^3 - 13x^2 + 22x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸۱ (۳) ۳۶ (۴) ۱۲۱

۴۹- در مورد جواب‌های معادله $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ کدام درست است؟

۱) ۳ جواب مثبت دارد. ۲) جواب منفی و ۱ جواب مثبت دارد.

۳) ۲ جواب مثبت و ۱ جواب منفی دارد. ۴) ۳ جواب منفی دارد.

۵۰- تعداد جواب‌های معادله $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۱- تعداد جواب‌های حقیقی معادله $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟

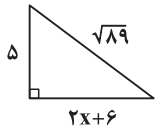
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵۲- اگر بزرگ‌ترین جواب معادله $x^2 - 7x + 12 = 0$ برابر A و کوچک‌ترین جواب آن برابر B باشد، آن‌گاه A - B برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۴

انسانی خارج ۹۲

آزمون‌های سراسری گاج



آزمون‌های سراسری گاج

۵۳- مساحت مثلث قائم‌الزاویه مقابل، کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۵ ۳) ۲۵ ۴) ۵۰

۵۴- چهار برابر مربع عددی از ۱۲ برابر آن ۹ واحد کم‌تر است. معکوس آن عدد کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۵۵- عددی مثبت با ۳ جمع، بعد این مجموع، نصف و حاصل آن به توان ۲ رسید و جوابش ۴ شد. آن عدد باید چند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۷

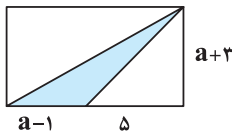
۵۶- مساحت دایره‌ای از دو برابر محیط آن 12π واحد بیشتر است. اختلاف مساحت و محیط این دایره کدام است؟

۱) 16π ۲) 24π ۳) 12π ۴) 14π

۵۷- عددی ۴ برابر عدد دیگر و حاصل ضرب آن دو نیز ۴ برابر مجموعشان می‌باشد. تفاضل آن‌ها کدام است؟

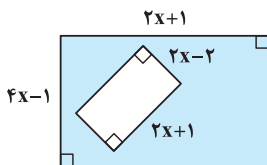
۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

۵۸- اگر مساحت مستطیل مقابل، ۵۶ واحد باشد، مساحت مثلث رنگی کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) $10/5$ ۴) $11/5$

۵۹- اگر مساحت قسمت رنگی شکل مقابل، ۴۹ باشد، مقدار x کدام است؟



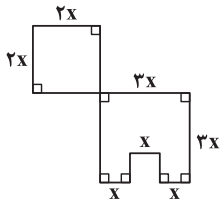
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۵

۶۰- اگر محیط و مساحت شکل مقابل با هم برابر باشد، مقدار x کدام است؟

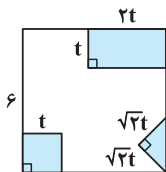


۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $\frac{11}{2}$ ۴) $\frac{11}{6}$

۶۱- از مربعی به ضلع ۶ cm سه قسمت رنگی زیر، بریده شده و مساحت باقی‌مانده 24cm^2 است.

تمرین کتاب درسی

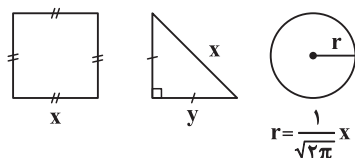
t کدام است؟



۱) ۳ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۹ ۴) ۱

۶۲- اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، محیط مربع کدام است؟

تمرین کتاب درسی



۱) ۸

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۱۰

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

پاسخ‌های تشریحی

ابتدا طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها، یعنی ۱۵ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$\begin{aligned} \overbrace{5(2-3x)} + \overbrace{-3(x-4)} &= \overbrace{15(2x+1)} \Rightarrow 10 - 15x - 3x + 12 = 30x + 15 \\ \Rightarrow 30x + 15x + 3x &= 10 + 12 - 15 \Rightarrow 48x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

ابتدا معادله داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$a(x-1) - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow ax - a - 2bx + 2b = 0 \Rightarrow (a-2b)x - a + 2b = 0$$

حالا یک معادله درجه اول داریم و چون طبق فرض $a \neq 2b$ است، پس ضریب x مخالف صفر می‌باشد و معادله جواب دارد:

$$(a-2b)x = a-2b \xrightarrow{\div(a-2b)} x = \frac{a-2b}{a-2b} \Rightarrow x = 1$$

$$m(x-2) = 5x-1 \Rightarrow mx-2m = 5x-1 \Rightarrow mx-5x = -1+2m \Rightarrow (m-5)x = 2m-1$$

برای این‌که به یک تساوی نادرست برسیم، باید معادله فوق را به شکل $0 \times x = A \neq 0$ تبدیل کنیم، در نتیجه اگر $m-5 = 0$ و بنابراین $m = 5$ باشد، داریم:

$$0 \times x = 2(5) - 1 \Rightarrow 0 \times x = 9 \text{ غیرممکن}$$

بهازای سایر مقادیر m ، معادله درجه اول حاصل، یک جواب خواهد داشت.

معادله را ساده می‌کنیم:

$$m^2x^2 + 4mx + 4 = 9m^2 - 6mx + x^2 \Rightarrow m^2x^2 + 4mx + 4 - 9m^2 + 6mx - x^2 = 0 \Rightarrow (m^2-1)x^2 + 10mx = 9m^2 - 4$$

چون معادله درجه اول است، پس باید ضریب x^2 صفر باشد:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1 \xrightarrow{m > 0} m = 1$$

$$(3x-1)^2 = (ax+2)^2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = a^2x^2 + 4ax + 4 \Rightarrow 9x^2 - 6x - a^2x^2 - 4ax = 4 - 1 \Rightarrow (9-a^2)x^2 - (6+4a)x = 3$$

اولاً چون معادله درجه اول است، ضریب x^2 در آن صفر می‌باشد:

$$9 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

ثانیاً چون $x = \frac{1}{3}$ جواب معادله است، در آن صدق می‌کند:

$$-(6+4a)x = 3 \xrightarrow{x = \frac{1}{3}} (-6-4a)\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \Rightarrow -3-2a = 3 \Rightarrow -2a = 3+3 \Rightarrow -2a = 6 \Rightarrow a = -3$$

عدد موردنظر را x فرض می‌کنیم. داریم:

مخرج مشترک کسرها

$$\frac{\overset{\text{ثلث}}{x}}{3} + \frac{\overset{\text{خمس}}{x}}{5} = \frac{\overset{\text{ربع}}{x}}{4} + 34 \xrightarrow{\times 60} 20x + 12x - 15x = 2040 \Rightarrow 17x = 2040 \Rightarrow x = \frac{2040}{17} = 120$$

نصف‌نصف

$$\Rightarrow \frac{\overset{\text{نصف}}{x}}{2} = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow \frac{\overset{\text{نصف}}{x}}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم، ابتدا معادله ریاضی تک‌تک جملات را نوشته، سپس معادله آن را برای محاسبه x می‌نویسیم:

$$5 = \frac{3x+4}{2} - x \xrightarrow{\text{باقی مانده ۵ برابر ۵}} \frac{3x+4}{2} - x = 5 \xrightarrow{\text{همان عدد ۳x+4 کم شود}} \frac{3x+4}{2} \xrightarrow{\text{نصف حاصل}} \frac{3x+4}{2} = 5 + x$$

همان‌طور که دیدید وقتی مرحله به مرحله پیش می‌رویم، سرانجام خیلی راحت به معادله موردنظر می‌رسیم. حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{3x+4}{2} - x = 5 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در ۲}} 3x+4-2x = 10 \Rightarrow 3x-2x = 10-4 \Rightarrow x = 6$$

اگر کل پول را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 100 = x \Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x - x = -100 \Rightarrow \frac{5x+6x-15x}{15} = -100 \Rightarrow -\frac{4}{15}x = -100$$

$$\Rightarrow x = \frac{15 \times 100}{4} = 15 \times 25 = 375 \text{ هزار تومان}$$

پس پول علی برابر است با:

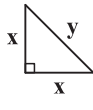
$$\frac{1}{3} \times 375 = 125 \text{ هزار تومان}$$

اعداد مورد نظر را x و y فرض می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x^2 = y^3 \end{cases} \Rightarrow (2y)^2 = y^3 \Rightarrow 4y^2 = y^3 \xrightarrow{\div y^2} 4 = y \Rightarrow x = 2y = 2(4) = 8$$

$$\Rightarrow \text{میانگین دو عدد} = \frac{x+y}{2} = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم. پس داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط} = x + x + y \Rightarrow 6(1 + \sqrt{2}) = 2x + y \\ \text{فیثاغورث: } x^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow 2x^2 = y^2 \xrightarrow{x \cdot y > 0} y = \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + \sqrt{2}x = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x(2 + \sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x = \frac{6(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{6(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{36}{2} = \frac{36}{4} = 9$$

می‌توانیم اعداد زوج را به صورت $2x$ و اعداد فرد را به صورت $2x-1$ نشان دهیم. وقتی سه عدد زوج متوالی داریم، سه عدد را به صورت

$2x-3, 2x-1, 2x+1$ یا $2x-2, 2x, 2x+2$ یا $2x, 2x+2, 2x+4$ یا ... و وقتی سه عدد فرد متوالی داریم، سه عدد را به صورت $2x-1, 2x+1, 2x+3$ یا ... نمایش دهیم. معمولاً حالت اولی که برای هر کدام نوشتیم ما را راحت‌تر و سریع‌تر به جواب می‌رساند. در این تست داریم:

$$2x-3 + 2x + 2x+4 = 657 \Rightarrow 6x-3 = 657 \Rightarrow 6x = 660 \Rightarrow x = \frac{660}{6} \Rightarrow x = 110$$

$= 1$ رقم دهگان عدد کوچک‌تر $\Rightarrow 217, 219, 221$ اعداد: $2(110) - 3, 2(110) - 1, 2(110) + 1$ اعداد فرد متوالی \Rightarrow

اعداد طبیعی زوج متوالی را $2x - 2, 2x + 2, 2x + 4$ در نظر می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$2x-2 + 2x + 2x+4 = 36 \Rightarrow 8x = 36 - 4 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{8} \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب دو عدد وسطی} = 8 \times 10 = 80$$

شانم اجازه! ما چهار تا عدد رو به شکل $2x, 2x+2, 2x+4, 2x+6$ گرفتیم، جوابمون هم درست در اومد!

پاسخ: فب کار اشتباهی نکردی که به جواب غلط برسی. اینم درسته، حتی اگه چهار عدد رو به صورت $2x-2, 2x, 2x+2, 2x+4$ یا یکی فرض دیکه (و البته درست) هم در نظر بگیری، باز به جواب درست می‌رسی! ولی همیشه بهتره این‌ها رو طوری بگیری که مناسبات کم‌تر بشه. مثلاً اون طوری که ما گرفتیم، همون اول در سمت چپ 2 و 2- با هم حذف شدن و مناسبات کم‌تری داشتیم ولی تو باید 2 و 4 و 6 رو با هم جمع می‌کردی.

اگر سن رضا را x و سن مجید را y فرض کنیم، با توجه به توضیحات سؤال می‌توانیم معادله‌های زیر را بنویسیم:

سن 5 سال بعد رضا
سن 5 سال بعد مجید

$$(\downarrow 5 + x) + (\downarrow 5 + y) = 30 \Rightarrow 10 + x + y = 30 \Rightarrow x + y = 20 \quad (*)$$

$$(x-1) = 2(y-1) \Rightarrow x-1 = 2y-2 \Rightarrow x-2y = -1 \quad (**)$$

سن سال گذشته مجید رضا

اگر معادله $(**)$ را از معادله $(*)$ کم کنیم، داریم:

$$x + y - (x - 2y) = 20 - (-1) \Rightarrow x + y - x + 2y = 20 + 1 \Rightarrow 3y = 21 \Rightarrow y = 7$$

$$\xrightarrow{x+y=20} x + 7 = 20 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow x - y = 13 - 7 = 6$$

اختلاف سن پدر و پسر 26 سال $(56 - 30 = 26)$ است، یعنی وقتی پسر به دنیا آمده، پدر 26 سال داشته است. اگر فرض کنیم x سال بعد از

تولد پسر، سن پدر، سه برابر سن پسر شود، آن‌گاه می‌توانیم معادله آن را به صورت $3x = 26 + x$ بنویسیم و با حل آن داریم:

$$26 = 3x - x \Rightarrow 26 = 2x \Rightarrow x = 13$$

یعنی 13 سال بعد از تولد پسر (وقتی پسر 13 سال دارد)، پدر $26 + 13 = 39$ سال داشته که 3 برابر سن پسرش بوده است. اما در سؤال از ما خواسته که پیدا کنیم چند سال قبل از امسال این اتفاق افتاده است، در نتیجه داریم:

$$\text{سال قبل} = 56 - 39 = 17$$

فرض کنیم تعداد شکلات‌های مینا در ابتدا X تا بوده است. مرحله به مرحله پیش می‌رویم و تعداد شکلات‌های برادر، دوست و مادر مینا را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{دوستش} & & \text{مادرش} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{برادرش} & & & & & & \\ \downarrow & & & & & & \\ \frac{X}{2} & \Rightarrow & X - \frac{X}{2} = \frac{X}{2} & \Rightarrow & \frac{X}{2} & \Rightarrow & \frac{X}{2} \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{باقی مانده}} & & & & \\ & & \frac{X}{2} & \Rightarrow & \frac{X}{4} & \Rightarrow & \frac{X}{4} \\ & & & & \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{باقی مانده}} & & \\ & & & & \frac{X}{4} & \Rightarrow & \frac{X}{8} \end{array}$$

فانم اجازه! همیشه بگید چی شد؟ خیلی پیچیده شد!!

پاسخ: بین اولش که نصف شکلات‌ها رو به برادرش می‌ده، یعنی $\frac{X}{2}$ رو، بعد گفته نیمه بقیه‌اش رو به دوستش می‌ده، یعنی از $X - \frac{X}{2} = \frac{X}{2}$ که باقی مونده، نصف‌اش رو که میشه $\frac{X}{4}$ به دوستش می‌ده. دوباره از نصف باقی‌مانده به مادرش می‌ده. چون از X تا شکلات، رو به برادرش و $\frac{X}{4}$ رو به دوستش داده بود، پس $X - \frac{X}{2} - \frac{X}{4} = \frac{X}{4}$ شکلات باقی می‌مونه که نصف اون به مادرش می‌رسه، یعنی $\frac{X}{8}$. در نهایت گفته ۵ تا برای خودش باقی می‌مونه، یعنی آگه سهم همه رو از X تا کم کنی ۵ تا می‌مونه. به ارامه حل دقت کن:

$$X - \left(\frac{X}{2} + \frac{X}{4} + \frac{X}{8}\right) = 5 \Rightarrow X - \left(\frac{4X + 2X + X}{8}\right) = 5 \Rightarrow X - \frac{7X}{8} = 5 \Rightarrow \frac{X}{8} = 5 \Rightarrow X = 40$$

اگر حقوق یک کارمند را X در نظر بگیریم و حقوق خدمات‌چی، معاون و مدیر را به ترتیب Y ، Z و r فرض کنیم، داریم:

$$x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}, \quad x = \frac{1}{2}z \Rightarrow z = 2x, \quad x = \frac{1}{5}r \Rightarrow r = 5x$$

حال با توجه به تعداد افراد در هر پُست، مجموع حقوق‌ها را برحسب X به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3r + 2z + 15 \cdot x + 5y = 3(5x) + 2(2x) + 15 \cdot x + 5\left(\frac{x}{2}\right) = 15x + 4x + 15 \cdot x + \frac{5}{2}x = \left(\frac{30 + 8 + 30 + 5}{2}\right)x = \frac{343}{2}x$$

$$\Rightarrow \frac{343}{2}x = 343000000 \Rightarrow x = 2000000 \text{ تومان}$$

پس حقوق معاون برابر است با:

$$z = 2x = 2(2000000) = 4000000 \text{ تومان}$$

باید ضریب X^2 مخالف صفر باشد:

$$a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$$

بررسی گزینه‌ها:

$$1) (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$2) (2x-1)^2 = (3+2x)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 9 + 12x + 4x^2 \Rightarrow 16x = -8 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$3) 2x^2 + 5x - 8 - x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 5x - 8 = x^2 + 1 \Rightarrow 5x = 9 \Rightarrow \text{معادله درجه اول}$$

$$4) (3x-1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 8x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \text{معادله درجه دوم}$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$(x-2)(2x+1) = 3x+6 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 3x+6 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 3x - 4 = 0$$

ضریب جمله درجه اول

$$(3x+1)^2 = (x-4)^2 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 8x^2 + 14x - 15 = 0$$

باید عدد ثابت معادله ۶۰ باشد، پس ابتدا طرفین معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$32x^2 + 56x - 60 = 0$$

حال باید معادله را در یک منفی ضرب کنیم:

$$-32x^2 - 56x + 60 = 0 \Rightarrow \text{ضریب جمله درجه ۲} = -32$$

اولاً چون معادله درجه دوم است، باید ضریب X^2 ، صفر باشد:

$$a = 0$$

ثانیاً اگر معادله را به صورت استاندارد بنویسیم، داریم:

$$\begin{array}{l} \text{ضریب جمله} \\ \text{درجه دوم} \\ (b-d)x^2 + cx + d = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} b-d = 3 \quad (*) \\ c = -2 \\ d = -1 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{عدد ثابت} \\ \uparrow \\ b+1 = 3 \Rightarrow b = 2 \\ \Rightarrow a-b-c+d = 0-2+2-1 = -1 \\ \text{ضریب جمله} \\ \text{درجه اول} \end{array}$$

اولاً چون معادله درجه دوم است، ضریب x^3 باید صفر باشد:

$$m - 2n = 0 \Rightarrow m = 2n \quad (*)$$

ثانیاً چون $x = 2$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$n(2)^2 + 2m(2) - 12 = 0 \Rightarrow 4n + 4m - 12 = 0 \xrightarrow{(*)} 4n + 4(2n) - 12 = 0 \Rightarrow 4n + 8n - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 12n = 12 \Rightarrow n = 1 \xrightarrow{(*)} m = 2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

چون α جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$3\alpha^2 - 5\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$$

حال چون مقدار $3\alpha^2 - 4\alpha + 3$ از ما خواسته شده، کافی است طرفین تساوی فوق را به‌اضافه ۳ کنیم:

$$3\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 3$$

a جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$3a^2 - 8a - 4 = 0 \Rightarrow 3a^2 - 8a = 4$$

اگر طرفین تساوی فوق را بر ۲۴ تقسیم کنیم، به عبارت خواسته‌شده در صورت سؤال می‌رسیم:

$$\frac{a^2}{8} - \frac{a}{3} = \frac{1}{6}$$

در این کلمه داریم:

$$\text{ش} + \text{ی} + \text{ر} + \text{ی} + \text{ن}$$

پس معادل ریاضی آن برابر است با:

$$16x^3 + 32x^2 + 12 + 32x^2 + 29x$$

👉 خانم اجازه! ما گزینه (۳) رو جواب زدیم، خب دوتا $32x^2$ داشتیم، با هم جمع کردیم دیگه، شد $64x^2$ ، بعد هم جملات رو به ترتیب

از توان بزرگ به کوچیک نوشتیم. چیش غلطه؟

پاسخ: همه پیش! اومدی پروفیسور بازی در بیاری، زدی همه پی رو فراب کردی! فودت کلمه معادل عبارت گزینه (۳) رو بنویس، ببین پی میشه؟ اصلاً میشه؟ برای جمله $64x^2$ باید حرف ۶۴م که رو تا نقطه هم داشته باشه رو بنویسی، داریم همپین حرفی رو؟ بعرض هم هیچ وقت ترتیب جمله‌ها رو عوض نکن، چون عبارت حاصل، ریگه مال اون کلمه نیست. آگه به فرض، همپین مشکل عددی (مثل ۶۴) هم پیش نیار، به کلمه ریگه‌ای که به احتمال زیار بی‌معنی سافته میشه!

$$\text{د} + \text{ر} + \text{خ} + \text{ت} + \text{س} + \text{ب} + \text{ز}$$

$$10 + 12 + 9x + 4x^2 + 15 + 2x + 13x$$

در این رمز ۴ عدد زوج «۰، ۱۲، ۴ و ۲» وجود دارد.

بدون پیدا کردن حروف هم می‌توان جواب را پیدا کرد. چون در رمز داده‌شده تمام جملات x دارند، پس عدد ثابت و در نتیجه حرف بدون نقطه در کلمه نداریم. تنها گزینه‌ای که تمام حروف آن نقطه‌دار است، کلمه «بنفش» می‌باشد.

$$32x^2 + 25 + 15 + 1 + 29x$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{ی} & \text{س} & \text{ن} & \text{ا} & \text{ن} \end{matrix} \Rightarrow \text{یکسان}$$

جملات درجه اول، یعنی جملات شامل x . در رمزنگاری جملاتی که یک نقطه دارند شامل x هستند. پس لازم نیست رمز همه حروف را بنویسیم. فقط رمز حروف یک نقطه‌ای را پیدا کرده و بعد ضرایب (شماره آن حروف) آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. حروف «ز»، «ن» و «ب» در این کلمه یک نقطه‌ای هستند، در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \text{ز} \rightarrow 13x \\ \text{ن} \rightarrow 29x \\ \text{ب} \rightarrow 2x \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ضرایب } x = 13 + 29 + 2 = 44$$

معادل فارسی هر رمز را پیدا می‌کنیم و بعد با کنار هم قرار دادن حرف‌ها، کلمه مناسب را پیدا می‌کنیم:

$$12 \rightarrow \text{ر} \quad , \quad 12 \rightarrow \text{ر} \quad , \quad 13x \rightarrow \text{ز} \quad , \quad 1 \rightarrow \text{ا} \quad , \quad 26 \rightarrow \text{گ} \quad , \quad 30 \rightarrow \text{و}$$

پس حروف «ر، ز، ا، گ، و» را داریم که با آن می‌توان کلمه «روزگار» را درست کرد.

$$(1-x+x^2)(x+1) = x(x^2-1) + x \Rightarrow x^3 + 1 = x^3 - x + x \Rightarrow 1 = -1$$

اتحاد جاق و لاغر

به یک تساوی نادرست رسیدیم، پس این معادله، جواب ندارد.

$$x^2 + 6x + 4 + 2x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 5x + 3 = -x^2 - 5x \Rightarrow 2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

۱ ۳۳

اگر عدد مطلوب را X فرض کنیم، داریم:

۴ ۳۴

$$x^2 = 10x - 25 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$(2x - 3)^2 = 7 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} 2x - 3 = \pm\sqrt{7} \Rightarrow 2x = \pm\sqrt{7} + 3 \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{7} + 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{7} + 3}{2} \\ \text{یا} \\ x = \frac{-\sqrt{7} + 3}{2} \end{cases}$$

۲ ۳۵

$$(2x + 5)^2 = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \begin{cases} 2x + 5 = x - 1 \Rightarrow 2x - x = -1 - 5 \Rightarrow x = -6 \\ 2x + 5 = -(x - 1) \Rightarrow 2x + 5 = -x + 1 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

۳ ۳۶

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب جوابها} = (-6)\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{24}{3} = 8$$

۳ ۳۷

$$(x - \alpha)^2 = \beta^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} x - \alpha = \pm\beta \Rightarrow \begin{cases} x - \alpha = \beta \Rightarrow x = \alpha + \beta \\ x - \alpha = -\beta \Rightarrow x = \alpha - \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مربعات جوابها} = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

البته اگر از فصل قبل به یاد داشته باشید، اتحاد فوق یکی از اتحادهایی بود که از اتحاد مربع دوجمله‌ای نتیجه می‌شد و جواب آن برابر $2\alpha^2 + 2\beta^2$ می‌شد و دیگر نیازی به توان‌رسانی هم نبود.

۳ ۳۸

$$(x + 1)(x - 5) + 12(x + 1) = 0 \xrightarrow{\text{فکتور از (x+1)}} (x + 1)(x - 5 + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases} \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = (-1)(-7) = 7$$

اگر عدد طبیعی فرد را X فرض کنیم، داریم:

۴ ۳۹

$$x^2 = 10x - 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ یا } x = 1$$

چون $x = -2$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

۲ ۴۰

$$(a + 3)(-2)^2 - 2a(-2) + a^2 = 0 \Rightarrow 4a + 12 + 4a + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 + 8a + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 6)(a + 2) = 0 \Rightarrow a = -6 \text{ یا } a = -2$$

روش اول: می‌دانیم اگر معادله به صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای باشد، دارای ریشه مضاعف است. پس معادله باید به شکل $(x + 1)^2 = 0$ و در نتیجه $x^2 + 2x + 1 = 0$ باشد. اما در صورت سؤال، ضریب X برابر -4 است. پس طرفین این معادله را در -2 ضرب می‌کنیم تا ضریب X آن -4 شود:

$$-2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$a = -2, c = -2 \Rightarrow a = c = -2$$

حال با مقایسه این معادله با معادله $ax^2 - 4x + c = 0$ داریم:**روش دوم:** می‌دانیم جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس:

$$x = -1 \Rightarrow a(-1)^2 - 4(-1) + c = 0 \Rightarrow a + 4 + c = 0 \Rightarrow a + c = -4$$

از بین گزینه‌ها، تنها گزینه (1) در این شرط صدق می‌کند:

$$a = c = -2 \Rightarrow a + c = -2 - 2 = -4$$

$$(x - 1)(x + 1) = 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

معادله مسأله را نوشته و آن را حل می‌کنیم:

۲ ۴۲

چون X عددی طبیعی است، پس $x = 9$ قابل قبول است و جذر X برابر 3 می‌باشد.**فانم اجازه!** تو سؤال گفته: «حاصل ضرب عدد صحیح قبل از آن در عدد طبیعی بعد از آن»، چرا شما این اعداد رو تو معادلهنوشتید $x - 1$ و $x + 1$ ؟ مگه مثل هم‌اند؟ قبل X، عدد صحیح و بعد از X، عدد طبیعی!

پاسخ: وای! الانه که ریگه رار بززم! آفه این چه سوالیه می‌پرسی؟ مگه نگفته X عدد طبیعی؟ فب تو فرض کن X عدد 5 باشه. حالا با دقت جواب من رو بره. عدد صحیح قبل 5 و عدد طبیعی بعد از 5 چه اعدادی هستن؟

فانم اجازه! خب خانم معلومه دیگه، 4 و 6!

پاسخ: فب! مگه $4 = 5 - 1$ و $6 = 5 + 1$ نیست؟ پس آگه اون عدد X باشه، عدد صحیح قبلش $x - 1$ و عدد طبیعی بعرضش $x + 1$ می‌شه. چرا؟ فب معلومه ریگه، چون مجموعه اعداد طبیعی و اعداد صحیح مثبت با هم برابرند، در واقع هر عدد طبیعی یک عدد صحیح هم هست. امیدوارم پای ریگه‌ای از این سؤال‌ها نپرسی! چون عواقب پاسخ طرف مقابلت با فودته ©

$$\begin{cases} \text{محیط} = 3x + 4x + 5x = 12x \\ \text{مساحت} = \frac{1}{2} \times 3x \times 4x = 6x^2 \end{cases} \Rightarrow 12x = 6x^2 \xrightarrow{\div 6} 2x = x^2 \xrightarrow{\div (x \neq 0)} x = 2$$

۴ ۴۳

وتر $\rightarrow (6, 8, 10)$: اضلاع مثلث \Rightarrow

۳ ۴۴

$$a^2x^2 + (a - 5) = 0 \Rightarrow a^2x^2 = -(a - 5) \Rightarrow a^2x^2 = -a + 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5 - a}{a^2}$$

برای این که معادله جواب نداشته باشد، باید $\frac{5 - a}{a^2} < 0$ باشد:

$$\frac{5 - a}{a^2} < 0 \xrightarrow{a^2 > 0} 5 - a < 0 \Rightarrow -a < -5 \Rightarrow a > 5$$

تنها $a = 6$ در این شرط صدق می‌کند. البته می‌توانستیم گزینه‌ها را هم امتحان کنیم. مثلاً با قرار دادن $a = -6$ در معادله داریم:

$$(-6)^2x^2 + (-6 - 5) = 0 \Rightarrow 36x^2 - 11 = 0 \Rightarrow 36x^2 = 11 \Rightarrow x^2 = \frac{11}{36} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}$$

بنابراین بازای $x = -6$ معادله دو جواب دارد، پس قابل قبول نیست، بعد به همین ترتیب بقیه گزینه‌ها را هم امتحان کنیم.

۲ ۴۵

$x = 0$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$0 + 0 - c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \text{معادله } ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x = -\frac{b}{a} > -3 \Rightarrow \frac{b}{a} < 3 \xrightarrow{a > 0} b < 3a \end{cases}$$

با فرض $x = 3 - t$ داریم:

۲ ۴۶

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -3 \Rightarrow \begin{cases} t - 3 = 2 \Rightarrow t = 5 = A \\ \text{یا} \\ t - 3 = -3 \Rightarrow t = 0 = B \end{cases} \Rightarrow 2A + B = 2(5) + 0 = 10$$

حواستان باشد که همان ۲ و ۳ را جواب معادله نگیرید و گزینه نادرست (۴) را انتخاب کنید.

فانم اجازه! ما که از تغییر متغیر حل نکردیم، همون معادله رو ساده کردیم و جواب‌ها رو به دست آوردیم. خیلی هم راحت تر بود! ببینید:

$$t^2 - 6t + 9 + t - 3 - 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t(t - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{یا} \\ t = 5 \end{cases}$$

پاسخ: آفرین! این بار رو درست گفتی. ما راه سخت تر رو نوشتیم تا اونم یاد بگیرید. الان روش تو راحت تر بود ولی وقتی ضربایب و عددهای ثابت معادله بزرگ باشن، روش ما خیلی بهتره. همین طور وقتی توان متغیر ۴ باشه، اون وقته که روش تغییر متغیر بهترین راه هله.

روش اول: ابتدا معادله $A^2 + 2A - 24 = 0$ را حل کرده و مقدار A را پیدا می‌کنیم:

۲ ۴۷

$$A^2 + 2A - 24 = 0 \Rightarrow (A - 4)(A + 6) = 0 \Rightarrow A = 4 \text{ یا } A = -6 \xrightarrow{A = 2x - 1} \begin{cases} 2x - 1 = 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ \text{یا} \\ 2x - 1 = -6 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

روش دوم: مقدار $A = 2x - 1$ را در معادله قرار دهیم، بعد آن را حل کنیم:

$$(2x - 1)^2 + 2(2x - 1) - 24 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 - 24 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{2}$$

۴ ۴۸

$$x^3 - 13x^2 + 22x = 0 \xrightarrow[\text{از } x]{\text{فکتور}} x(x^2 - 13x + 22) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x^2 - 13x + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ (x - 11)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 11 \text{ یا } x = 2 \end{cases}$$

پس جواب بزرگ تر معادله $x = 11$ و مربع آن ۱۲۱ است.

معادله را به شکلی که برای ما قابل حل باشد، تبدیل کنیم:

۳ ۴۹

$$\underbrace{x^3 - x^2}_{\text{فکتور از } x^2} - \underbrace{4x + 4}_{\text{فکتور از } (x-1)} = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \xrightarrow{(x-1)} (x - 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

پس معادله دارای ۲ جواب مثبت و ۱ جواب منفی است.

این معادله ظاهراً درجه ۴ است ولی می‌توان (با تغییر متغیر) آن را به معادله درجه ۲ تبدیل کرد و جواب‌های آن را به‌دست آورد. اگر فرض کنیم $x^2 = t$ باشد، آن‌گاه معادله به صورت $t^2 - 13t + 36 = 0$ درمی‌آید و داریم:

$$(t-4)(t-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ \text{یا} \\ t=9 \end{cases} \xrightarrow{x^2=t} \begin{cases} x^2=4 \\ \text{یا} \\ x^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ \text{یا} \\ x=\pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{۴ جواب دارد.}$$

با فرض $x^2 = t$ داریم: ۱ ۵۱

$$t^2 + 10t + 9 = 0 \Rightarrow (t+1)(t+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ \text{یا} \\ t=-9 \end{cases} \xrightarrow{x^2=t} \begin{cases} x^2=-1 \\ \text{یا} \\ x^2=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{غ‌ق‌ق} \\ \text{یا} \\ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

پس این معادله هیچ جوابی ندارد!

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \\ \text{یا} \\ t=4 \end{cases} \xrightarrow{x^2=t} \begin{cases} x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ \text{یا} \\ x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

با فرض $x^2 = t$ داریم: ۲ ۵۲

پس بزرگ‌ترین جواب معادله $A = 2$ و کوچک‌ترین جواب آن $B = -2$ است و داریم:

$$A - B = 2 - (-2) = 4$$

۱ ۵۳

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times (2x + 6)$$

پس برای به‌دست آوردن مساحت، باید x را پیدا کنیم. با استفاده از رابطه فیثاغورث داریم:

$$5^2 + (2x+6)^2 = (\sqrt{89})^2 \Rightarrow 25 + 4x^2 + 24x + 36 = 89 \Rightarrow 4x^2 + 24x - 28 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x+7)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -7 \text{ یا } x = 1$$

حال با داشتن $x = 1$ مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times (2 \times 1 + 6) = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 = 20$$

👉 خانم اجازه! چرا گفتید جواب $x = -7$ قابل قبول نیست؟

پاسخ: باز از اون سؤال‌هایی پرسیدی که اصلاً قبلش هورت به جواب فکر نکردی! فب مکه $2x + 6$ طول ضلع مثلث نیست؟ به‌ازای $x = -7$ ، طول ضلع $-8 = -6 + (-7) = -1$ می‌شه که قابل قبول نیست، چون طول ضلع نمی‌تونه منفی باشه. تو این مدل سؤال‌ها همیشه هواستون به این موضوع باشه.

عدد موردنظر را x فرض می‌کنیم، پس داریم: ۱ ۵۴

$$x \xrightarrow{\text{مربع}} x^2 \xrightarrow{\text{چهار برابر}} 4x^2 \xrightarrow{\text{از ۱۲ برابر آن ۹ واحد کم‌تر}} 4x^2 = 12x - 9 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{2}{3}$$

عدد مثبت را x فرض می‌کنیم. طبق مفروضات سؤال داریم: ۲ ۵۵

$$x \xrightarrow{\text{جمع با ۳}} x+3 \xrightarrow{\text{مجموع، نصف شود}} \frac{x+3}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{جواب=۴}} \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 6x + 9}{4} = 4 \xrightarrow{\times 4} x^2 + 6x + 9 = 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x+7)(x-1) = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

اگر مساحت و محیط دایره را به ترتیب با S و P نشان دهیم، آن‌گاه با فرض r شعاع دایره داریم: ۲ ۵۶

$$S = \pi r^2, \quad P = 2\pi r, \quad S = 2P + 12\pi$$

$$\Rightarrow \pi r^2 = 2(2\pi r) + 12\pi \xrightarrow{\div \pi} r^2 = 4r + 12 \Rightarrow r^2 - 4r - 12 = 0 \Rightarrow (r+2)(r-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -2 \\ \text{یا} \\ r = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S - P = \pi r^2 - 2\pi r \xrightarrow{r=6} \pi(6)^2 - 2\pi(6) = 36\pi - 12\pi = 24\pi$$

در این تست، دو عدد مجهول داریم که آن‌ها را x و y در نظر می‌گیریم. رابطه بین آن‌ها را با توجه به توضیحات سؤال می‌نویسیم: ۳ ۵۷

$$x = 4y, \quad xy = 4(x+y) \Rightarrow (4y)y = 4(4y+y) \Rightarrow y^2 = 4y + y \Rightarrow y^2 - 5y = 0$$

$$\Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ و } y = 5 \Rightarrow x = 4y = 4(5) = 20 \Rightarrow x - y = 20 - 5 = 15$$

$$(a+3)(a-1+5) = 56 \Rightarrow (a+3)(a+4) = 56 \Rightarrow a^2 + 7a + 12 = 56$$

۴ ۵۸

$$\Rightarrow a^2 + 7a - 44 = 0 \Rightarrow (a+11)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غنی ق } a = -11 \\ \text{یا} \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}(a-1)(a+3) \stackrel{a=4}{=} \frac{1}{2}(4-1)(4+3) = \frac{1}{2} \times 3 \times 7 = \frac{21}{2} = 10.5$$

مساحت مستطیل کوچک را پیدا کرده و از مساحت مستطیل بزرگ کم می‌کنیم:

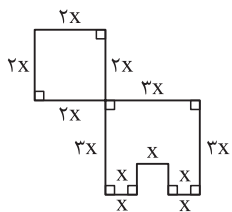
۱ ۵۹

$$\text{مساحت قسمت رنگی} = (2x+1)(4x-1) - (2x-2)(2x+1) = 8x^2 + 2x - 1 - (4x^2 - 2x - 2)$$

$$= 8x^2 + 2x - 1 - 4x^2 + 2x + 2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\xrightarrow{\text{مساحت}=49} 4x^2 + 4x + 1 = 49 \Rightarrow 4x^2 + 4x - 48 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -4$$

۴ ۶۰



$$\text{محیط} = 4(2x) + 3(3x) + 5(x) = 8x + 9x + 5x = 22x$$

$$\text{مساحت} = \underbrace{(2x)^2}_{\text{مربع کوچک}} + \underbrace{((3x)^2 - x^2)}_{\substack{\text{مربع} \\ \text{بزرگ} \\ \text{خالی} \\ \text{شده}}} = 4x^2 + 9x^2 - x^2 = 12x^2$$

$$\text{محیط} = \text{مساحت} \Rightarrow 22x = 12x^2 \xrightarrow{x \neq 0} 22 = 12x \Rightarrow x = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

ابتدا مساحت هر کدام از قسمت‌های رنگی را به دست می‌آوریم:

۲ ۶۱

$$\text{مساحت مربع کوچک} = t^2, \text{ مساحت مستطیل} = t \times 2t = 2t^2, \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}t \times \sqrt{2}t = t^2$$

حال مساحت مربع را به دست آورده و مجموع مساحت‌های قسمت‌های رنگی را از آن کم می‌کنیم:

$$\text{مساحت باقی‌مانده} = 6^2 - (t^2 + 2t^2 + t^2) = 24 \Rightarrow 36 - 4t^2 = 24 \Rightarrow 4t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = 3 \xrightarrow{t > 0} t = \sqrt{3}$$

۱ ۶۲

$$\text{مساحت مربع} = x^2$$

$$\text{مثلاً در فیثاغورث: } y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow 2y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}x^2 \quad (*)$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}y \times y = \frac{1}{2}y^2 \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{1}{4}x^2$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x \right)^2 = \pi \left(\frac{1}{2\pi}x^2 \right) = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مساحت‌ها} = x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} = \left(\frac{4+1+2}{4} \right) x^2 = \frac{7}{4}x^2 = 7 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2 \Rightarrow \text{محیط مربع} = 4x = 4 \times 2 = 8$$

ضریب x^2 برابر ۱ است، پس کافی است مربع نصف ضریب x را به طرفین تساوی اضافه کنیم:

۲ ۶۳

$$\left(-\frac{1}{4} \right)^2 = 4^2 = 16$$

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

۳ ۶۴

$$2x^2 + x + 1 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{2} \right)^2 = 1$$

حال باید مربع نصف ضریب x را به طرفین تساوی اضافه کنیم:

۲ ۶۵

$$x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = -5 \xrightarrow{+ \left(-\frac{1}{2} \right)^2} x^2 - 8x + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = -5 + \frac{64}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = -5 + 16 = 11$$

حال باید از عدد ۱۱ در سمت راست تساوی جذر بگیریم:

۲ ۶۶

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 2 \xrightarrow{+ \left(\frac{3}{2} \right)^2} x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 = 2 + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{17}{4} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

پس در مرحله پنجم از عدد $\frac{17}{4}$ جذر گرفتیم.