فهرست

فصل ۱: هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصل ۲: هندسه

فصل ۳: تابع

فصل ۴: مثلثات

فصل ۵: توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۶: حد و پیوستگی

فصل ۷: آمار و احتمال

درس ۱

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

مقدمات

در سال‌های قبل دیدید آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی کاری است که نتیجهٔ آن از قبل معلوم نباشد. مجموعهٔ تمام حالت‌های ممکن برای نتیجهٔ آزمایش را فضای نمونه‌ای نامیدیم و با S نشان دادیم.

به هر زیرمجموعه از S، یک پیشامد تصادفی گفتیم. پس اگر فضای نمونه‌ای S دارای n عضو باشد، ۲^n پیشامد تصادفی دارد. پیشامد $A=\varnothing$ غیرممکن است و پیشامد $A=S$ حتمی یا قطعی است. احتمال پیشامد A همیشه نسبت تعداد اعضایش به تعداد اعضای S بود:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

در جدول زیر چند فضای نمونه‌ای را در آزمایش‌های تصادفی ببینید:

آزمایش تصادفی	فضای نمونه‌ای (کل حالات ممکن)	تعداد اعضای فضای نمونه‌ای (تعداد کل حالات)
پرتاب یک سکه	$S=\{$ر،پ$\}$	$n(S)=۲^۱=۲$
پرتاب دو سکه	$S=\{$رر، پر، رپ، پپ$\}$	$n(S)=۲^۲=۴$
پرتاب ۳ سکه	$S=\{$ررپ، پرر، پرپ، پپپ، ررر، رپر، پپر، رپپ$\}$	$n(S)=۲^۳=۸$
پرتاب یک تاس	$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$	$n(S)=۶^۱=۶$
پرتاب دو تاس	$S=\left\{\begin{matrix}(۱,۱)(۱,۲)\ \dots\ (۱,۶)\\ (۲,۱),(۲,۲)\dots(۲,۶)\\ \dots(۶,۱)\dots(۶,۶)\end{matrix}\right\}$	$n(S)=۶^۲=۳۶$
کنار هم قراردادن سه نفر A,B,C	$S=\left\{\begin{matrix}ABC,BCA,CBA\\ ACB,BAC,CAB\end{matrix}\right\}$	$n(S)=۳!=۶$
انتخاب ۳ نفر از بین ۵ نفر e,d,c,b,a	$S=\left\{\begin{matrix}abc,acd,bcd,cde\\ abd,ace,bce\\ abe,ade,bde\end{matrix}\right\}$	$n(S)=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{(۵-۳)!۳!}=۱۰$
انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبهٔ شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه	$S=\left\{\begin{matrix}B_۱B_۲,B_۱W_۱,B_۱W_۲,B_۱W_۳\\ B_۲W_۱,B_۲W_۲,B_۲W_۳,W_۱W_۲,W_۱W_۳,W_۲W_۳\end{matrix}\right\}$	$n(S)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$
ساختن عدد دورقمی با ارقام ۰، ۲، ۳ و ۵ با تکرار	$S=\left\{\begin{matrix}۲۰,۳۰,۵۰\\ ۲۲,۳۲,۵۲\\ ۲۳,۳۳,۵۳\\ ۲۵,۳۵,۵۵\end{matrix}\right\}$	$n(S)=\underset{\text{۲ یا ۳ یا ۵}}{۳}\times\underset{\text{۰ یا ۲ یا ۳ یا ۵}}{۴}=۱۲$

آزمایش تصادفی	فضای نمونه‌ای (کل حالات ممکن)	تعداد اعضای فضای نمونه‌ای (تعداد کل حالات)
عددی دورقمی به تصادف با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌سازیم.	$S=\left\{\begin{matrix} ۱۲,۱۳,۱۴,۱۵ \\ ۲۱,۲۳,۲۴,۲۵ \\ ۳۱,۳۲,۳۴,۳۵ \\ ۴۱,۴۲,۴۳,۴۵ \\ ۵۱,۵۲,۵۳,۵۴ \end{matrix}\right\}$	$n(S)=\dfrac{۵}{\text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}}\times\dfrac{۴}{\text{به جز رقم اول}}=۲۰$
روز تولد یک نفر در هفته و حرف اول نام او	$S=\left\{\begin{matrix} (\text{ی، شنبه}) & \dots & (\text{ب، شنبه}) & (\text{الف، شنبه}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (\text{ی، جمعه}) & \dots & (\text{ب، جمعه}) & (\text{الف، جمعه}) \end{matrix}\right\}$	$n(S)=\dfrac{۷}{\text{روز}}\times\dfrac{۳۲}{\text{حرف}}=۲۲۴$

تست در پرتاب دو تاس با هم چقدر احتمال دارد مجموع ارقام روشده ۴ یا ۹ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳۶}$ ۳) $\frac{۷}{۳۶}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

پاسخ گزینهٔ ۳ فضای نمونه‌ای در پرتاب دو تاس $S=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۶,۶)\}$ است که $۶^۲=۳۶$ عضو دارد. حالت‌های مطلوب عبارت‌اند از:

$$A=\left\{\begin{matrix} \overbrace{(۱,۳)}^{\text{مجموع ۴}} & \overbrace{(۴,۵)}^{\text{مجموع ۹}} \\ (۳,۱) & (۵,۴) \\ (۲,۲) & (۶,۳) \\ & (۳,۶) \end{matrix}\right\} \Rightarrow n(A)=۳+۴=۷$$

حتمال برابر است با: $P(A)=\frac{۷}{۳۶}$

تست یک خانوادهٔ ۴ فرزندی با کدام احتمال دو پسر و دو دختر دارند؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گزینهٔ ۱ فضای نمونه‌ای برای جنسیت ۴ فرزند دارای $۱۶=۲^۴=۲\times۲\times۲\times۲$ عضو است. پس $n(S)=۱۶$. پیشامد مطلوب ما، اعضایی به شکل پ‌پدد است که دو پسر و دو دختر دارند. تعداد این اعضا برابر است با: $\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}=۶$

پس داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$

در میان n فرزند اگر kتا پسر (یا kتا دختر) باشند، تعداد حالت‌ها برابر $\binom{n}{k}$ است.

تست در کیفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ قرمز هست. سه مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دقیقاً یک سفید و حداقل یک قرمز خارج می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۳}{۲۲}$ ۳) $\frac{۱۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۱۸}{۵۵}$

پاسخ گزینهٔ ۴ تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $n(S)=$ تعداد انتخاب‌های ۳تا از ۱۲ مهره $=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲}=۲۲۰$

برای محاسبهٔ $\binom{n}{r}$ باید $n!$ را به تعداد rتا باز کنیم، سپس در مخرج هم $r!$ را باز کرده و ساده می‌کنیم. ببینید:

$$\binom{۱۰}{۴}\xrightarrow{\text{در صورت !۱۰ را ۴تا باز می‌کنیم و در مخرج !۴ را باز می‌کنیم.}}\frac{\overbrace{۱۰\times۹\times۸\times۷}^{\text{چهار تا}}}{۴\times۳\times۲}=۱۰\times۳\times۷=۲۱۰$$

حالا ادامهٔ حل سؤال: پیشامد مورد نظر این است که دقیقاً یک سفید و حداقل یک قرمز دربیاید؛ یعنی یک سفید و یک سیاه و یک قرمز یا یک سفید و دو قرمز.

پس:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک سفید}}\times\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو قرمز و}}+\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یا یک سفید}}\times\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک قرمز و}}\times\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یک سیاه و}}=۴\times۳+۴\times۳\times۵=۷۲$$

و در نتیجه:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷۲}{۲۲۰}\xrightarrow[\div۴]{\div۴}=\frac{۱۸}{۵۵}$$

تست ۵ نفر A، B، C، D و E به تصادف کنار هم می‌ایستند. با کدام احتمال بین دو نفر A و C فقط یک نفر قرار دارد؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $n(S)=۵!=۱۲۰$

تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با: $n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب شخص بین A و C}}\times\underbrace{۲!}_{\text{ترتیب A و C}}\times\underbrace{۳!}_{\text{دستهٔ A x C در کنار دو نفر دیگر}}=۳۶$ ، پس: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶}{۱۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$

تست از بین ۷ گوی با شماره‌های ۱ تا ۷ دو گوی برمی‌داریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های آن‌ها زوج است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

پاسخ گزینهٔ ۳ فضای نمونه‌ای برای انتخاب دوتا از ۷ گوی، دارای $n(S)=\binom{۷}{۲}=۲۱$ عضو است. حالا می‌خواهیم مجموع شماره‌ها زوج باشد یعنی باید هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. پس برای شمردن $n(A)$ باید دوتا از بین ۲، ۴ و ۶ یا دوتا از بین ۱، ۳، ۵ و ۷ برداریم:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو زوج}}+\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو فرد}}=۳+۶=۹$$

پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}$$

تست با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ و بدون تکرار، عددی چهاررقمی می‌سازیم. چه‌قدر احتمال دارد این عدد کم‌تر از ۳۰۰۰ و مضرب ۵ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ گزینهٔ ۳ تعداد کل حالت‌ها و تعداد حالت‌های موردنظر را می‌شماریم:

$$n(S)=\frac{۴}{\text{به جز صفر}}\times\frac{۴}{\text{به جز قبلی}}\times\frac{۳}{\text{به جز قبلی‌ها}}=۴۸$$

$$n(A)=\frac{۲}{\text{۱ یا ۲}}\times\frac{۳}{\text{به جز یکان و صدگان}}\times\frac{۱}{\text{فقط صفر}}=۶$$

پس داریم:

$$P(A)=\frac{۶}{۴۸}=\frac{۱}{۸}$$

تست با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، عددی دورقمی می‌سازیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۷ است؟

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۶ ۴) ۰/۲۸

پاسخ گزینهٔ ۳ کلاً $n(S)=۵\times۵=۲۵$ عدد دورقمی با این ارقام وجود دارد که مضارب ۷ در بین آن‌ها عبارت‌اند از ۱۴، ۲۱، ۳۵ و ۴۲؛ پس ۴ $n(A)=$ و داریم: $P(A)=\frac{۴}{۲۵}=۰/۱۶$.

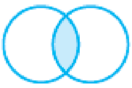
اعمال روی پیشامدها

الف) متمم پیشامد A را با A' یا A^c نشان می دهیم؛ رخدادن A' یعنی رخندادن A به بیان ریاضی داریم:

$$A' = S - A \Rightarrow P(A') = ۱ - P(A)$$

و نیاز به یادآوری نیست که $\varnothing' = S$ و $S' = \varnothing$. همچنین:

$$A' \cup A = S \quad \text{و} \quad A' \cap A = \varnothing$$

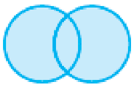


ب) پیشامدی که A و B هر دو با هم رخ بدهند (یعنی هم A و هم B) را $A \cap B$ می‌نامیم.

اگر A و B اشتراک داشته باشند می‌گوییم با هم سازگارند و اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، یعنی A و B اشتراک نداشته باشند (نتوانند با هم رخ بدهند) می گوییم A و B ناسازگارند.

پس ناسازگار یعنی:

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow P(A \cap B) = ۰$$

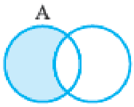


پ) پیشامدی که در آن A یا B یا هر دو (یعنی حداقل یکی از آن‌ها) رخ دهند را $A \cup B$ می نامیم. فرمول احتمال $A \cup B$ را به یاد داریم:

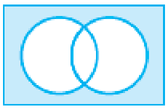
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

که در حالت ناسازگار این‌طور می‌شد:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

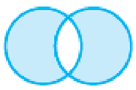


ت) پیشامدی که در آن فقط A رخ دهد یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد را به صورت $A \cap B'$ یا $A - B$ نشان می‌دهیم. فرمول احتمالش به صورت $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ بود.



ث) پیشامدی که در آن نه A و نه B، یعنی هیچ‌کدام از آن‌ها رخ ندهند به صورت $A' \cap B'$ بیان می شود که برای احتمالش می‌نویسیم:

$$P(A' \cap B') = ۱ - P(A \cup B)$$



ج) راستی پیشامدی که در آن فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند (A یا B و نه هر دو) به صورت $(B - A) \cup (A - B)$ یا $(A \cup B) - (A \cap B)$ قابل بیان است.

و بد نیست همین‌جا یادآوری کنیم که:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \,,\, (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B' \,,\, B - A = B \cap A'$$

تست اگر $P(A) = \frac{۱}{۵}$ و $P(B) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A \cup B) = \frac{۱}{۲}$، چه‌قدر احتمال دارد فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند؟

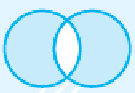
۱) $\frac{۱۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۷}{۳۰}$

پاسخ گزینهٔ ۲ اول $P(A \cap B)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۳۰}$$

حالا خواستهٔ سؤال $P(A - B) + P(B - A)$ یا $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ است:



$$P(\text{فقط یکی}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳۰} = \frac{۱۵ - ۱}{۳۰} = \frac{۷}{۱۵}$$

تست در پرتاب دو تاس با هم چه‌قدر احتمال دارد ضرب ارقام بیشتر از ۱۵ یا هر دو تاس زوج باشند؟

۱) $\frac{۱۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ گزینهٔ ۴ این پیشامد از اجتماع پیشامدهای $\underbrace{\text{ضرب بیشتر از ۱۵}}_{A}$ و $\underbrace{\text{هر دو زوج}}_{B}$ ساخته شده است.

شمارهٔ تاس اول

$$A = \{۳۶, ۴۴, ۴۵, ۴۶, ۵۴, ۵۵, ۵۶, ۶۳, ۶۴, ۶۵, ۶۶\} \Rightarrow n(A) = ۱۱$$

شمارهٔ تاس دوم

$$B = \{۲۲, ۲۴, ۲۶, ۴۲, ۴۴, ۴۶, ۶۲, ۶۴, ۶۶\} \Rightarrow n(B) = ۹$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(\{۴۴, ۴۶, ۶۴, ۶۶\}) = ۴$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{۱۱ + ۹ - ۴}{۳۶} = \frac{۴}{۹}$$

تست اگر احتمال رخ‌ندادن پیشامد B برابر $\frac{۳}{۴}$ و احتمال رخ‌ندادن هیچ‌یک از دو پیشامد A و B برابر $\frac{۱}{۱۰}$ باشد، چه‌قدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۹}{۲۰}$

پاسخ گزینه ۲ صورت سؤال می‌گوید $P(B')=\frac{۳}{۴}$ و $P(A'\cap B')=\frac{۱}{۱۰}$، پس داریم:

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A\cup B)=۱-P(A'\cap B')=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

حالا فرمول $P(A\cup B)$ را ببینید:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ \frac{۹}{۱۰}=P(A)+\frac{۱}{۴}-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(A)-P(A\cap B)}_{\text{این } P(A-B) \text{ است (فقط A رخ دهد)}}=\frac{۹}{۱۰}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۸-۵}{۲۰}=\frac{۱۳}{۲۰}\ \Rightarrow\ P(A-B)=\frac{۱۳}{۲۰}$$

تست اگر $P(A\cap B)=۰/۱$ و $P(A)=۰/۲$ باشد، احتمال رخ‌دادن A' یا B یا هر دوی آن‌ها کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۹

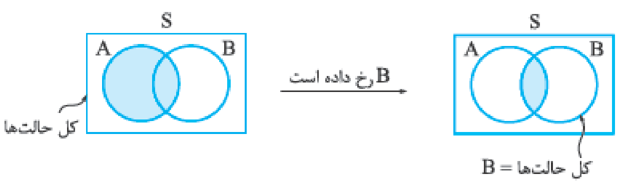
پاسخ گزینه ۴ سؤال از ما $P(A'\cup B)$ را می‌خواهد. با استفاده از مکمل داریم:

$$P(A'\cup B)=۱-P(A\cap B')=۱-P(A-B)=۱-(P(A)-P(A\cap B))=۱-(۰/۲-۰/۱)=۱-۰/۱=۰/۹$$

مکمل $A'\cup B$ به صورت $A\cap B'$ است.

احتمال شرطی

احتمال پیشامد A را چه‌طور حساب می‌کردیم؟ تعداد حالت‌های A را بر تعداد کل حالت‌ها تقسیم می‌کردیم. حالا اگر بدانیم پیشامد B رخ داده است، باید رخ‌دادن B را در کل حالت‌ها و در حالت‌های مطلوب در نظر بگیریم. ببینید:



B = کل حالت‌ها　　S = کل حالت‌ها

$A\cap B$ = مطلوب　　A = مطلوب

(ب) $P(A)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$　　(الف) $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

البته باید برای خواننده بنویسیم که احتمال پیشامد A در قسمت (ب)، با فرض رخ‌دادن B است؛ این‌طوری می‌نویسیم: $P(A|B)$ و می‌خوانیم: احتمال A به شرط B.

مثلاً در پرتاب تاس، احتمال ۴ آمدن برابر $P(\{۴\})=\frac{۱}{۶}$ است. حالا اگر بدانیم که تاس زوج آمده است، احتمال ۴ آمدن می‌شود:

$$P(\{۴\}|\text{زوج})=\frac{۱}{۳}$$

دقت می‌کنید که فضای نمونه‌ای جدید $S=\{۲,۴,۶\}$ است.

دو روش برای محاسبهٔ احتمال شرطی داریم.

روش محدودکردن فضای نمونه‌ای

در این روش، صورت سؤال باید به ما آزمایش را بدهد؛ یعنی باید بدانیم مسئله دربارهٔ چه آزمایش و چه پیشامدهایی است. شرط صورت سؤال فضای نمونه‌ای را محدود می‌کند و ما احتمال را در فضای جدید حساب می‌کنیم. ببینید:

تست از کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ آبی یک مهره بیرون می‌آوریم. اگر این مهره سبز نباشد با کدام احتمال سفید است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۱۰}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ گزینهٔ ۳ سؤال از ما P(سفید است | سبز نیست) را می خواهد. ببینید:

۴ سفید، ۵ سبز، ۶ آبی

(S)
$n(S)=۱۵$ $\xrightarrow{\text{می‌دانیم سبز نیست}}$

۴ سفید، ۶ آبی

(S محدودشده)
$n(S)=۱۰ \Rightarrow$ P(سفید است | سبز نیست) $=\frac{۴}{۱۰}$

تست تاسی را دو بار می‌اندازیم. اگر جمع ارقام روشده ۸ باشد با کدام احتمال هر دو رقم ظاهرشده اول هستند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ گزینهٔ ۱ پرتاب دو تاس: $n(S)=۳۶$ $\xrightarrow{\text{شرط: جمع ۸ است.}}$ $S=\{\underline{۳۵},\underline{۵۳},۲۶,۴۴,۶۲\}$

$\xrightarrow{\text{محدودشده}: n(S)=۵}$ P(هر دو اول | جمع ۸ باشد) $=\frac{۲}{۵}$

تست از میان اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ دوتا را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع این دو عدد زوج باشد، با کدام احتمال هر دو فرد هستند؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

پاسخ گزینهٔ ۴ انتخاب ۲تا از این ۹ عدد دارای $\binom{۹}{۲}=۳۶$ حالت است. اما فقط حالت‌هایی مورد نظر هستند که مجموع دو عدد زوج باشد یعنی هر دو زوج یا هر دو فرد باشند:

$$\underset{\text{محدودشده}}{n(S)}=\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو تا از بین ۸،۶،۴،۲}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو تا از بین ۹،۷،۵،۳،۱}}=۶+۱۰=۱۶$$

حالا در این فضای نمونه‌ای محدودشده، خواستهٔ سؤال این است که هر دو فرد باشند:

$$n(A)=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

و داریم:

P(هر دو فرد | مجموع زوج) $=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$

تست توزیع کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر است. اگر یک کارمند از این اداره انتخاب شده و فوق لیسانس نداشته باشد، با کدام احتمال مرد است؟

	فوق لیسانس	لیسانس	دیپلم
مرد	۸	۱۲	۱۷
زن	۲	۱۶	۵

۱) ۰/۵۲ ۲) ۰/۵۴
۳) ۰/۵۶ ۴) ۰/۵۸

پاسخ گزینهٔ ۴ فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت زیر است.

	~~فوق لیسانس~~	لیسانس	دیپلم
مرد	~~۸~~	۱۲	۱۷
زن	~~۲~~	۱۶	۵

قسمت فوق لیسانس را خط زدیم، چون پیش‌فرض این است که شخص فوق لیسانس ندارد.

حالا احتمال مردبودن:

P(مرد | فوق‌لیسانس ندارد) $=\frac{n(\text{مرد})}{n(\text{فوق‌لیسانس ندارد})}=\frac{۱۷+۱۲}{۱۷+۵+۱۲+۱۶}=\frac{۲۹}{۵۰}=۰/۵۸$

استفاده از فرمول احتمال شرطی

اگر در صورت سؤال ندانیم فضای نمونه‌ای و پیشامد چه عضوهایی دارند و نتوانیم اثر رخدادن B و محدودشدن S را درک کنیم، باید مقادیر احتمال را داشته باشیم. آن‌وقت: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

یعنی احتمال شرطی برابر است با تقسیم احتمال اشتراک بر احتمال پیشامد اول (فرض مسئله).

پس مثلاً $P(A'|B')$ برابر است با (احتمال رخدادن A' به شرط رخدادن B'): $\dfrac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$

مثال اگر $P(A)=\frac{1}{3}$، $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$، مقدار $P(B|A)$ کدام است؟

پاسخ

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}=0/6$$

تست احتمال این‌که زنی بارداریِ طبیعی و زایمان طبیعی داشته باشد ۰/۴ است. در میان زنان یک شهر احتمال بارداری طبیعی $\frac{3}{4}$ است. اگر یک زن، بارداری طبیعی داشته باشد با کدام احتمال زایمان طبیعی خواهد داشت؟

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{8}{10}$ ۳) $\frac{8}{15}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ گزینهٔ ۳

$$P(\text{زایمان طبیعی}|\text{بارداری طبیعی})=\frac{P(\text{بارداری و زایمان طبیعی})}{P(\text{بارداری طبیعی})}=\frac{0/4}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{4}{10}}{\frac{3}{4}}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

تست در یک کشور ۴۰ درصد سالمندان ناراحتی کلیوی و ۳۰ درصد آن‌ها بیماری خونی دارند. اگر سالمندی به عارضهٔ خونی مبتلا شود، احتمال بروز ناراحتی کلیوی ۶۰ درصد است. با کدام احتمال یکی از سالمندان این کشور به حداقل یکی از این دو مبتلا است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۵۸ ۴) ۰/۵۲

پاسخ گزینهٔ ۴ حداقل یکی، یعنی $A\cup B$ و سؤال به ما این‌ها را گفته: $P(A|B)=0/6\ ,\ P(B)=0/3\ ,\ P(A)=0/4$

اول به فرمول شرطی نگاه کنیم: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow 0/6=\dfrac{P(A\cap B)}{0/3}\Rightarrow P(A\cap B)=0/18$

حالا داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/4+0/3-0/18=0/52$

در مثال بالا دیدیم که با داشتن $P(B)$ و $P(A|B)$ می توان $P(A\cap B)$ را به دست آورد. دوباره ببینید: $P(A\cap B)=P(B)\,P(A|B)$

این رابطه را **قاعدهٔ ضرب احتمال** می‌نامند و زمانی به کار می‌رود که یک عمل در چند مرحله پشت سر هم انجام می‌شود.

در واقع قاعدهٔ ضرب احتمال، یک توقف می‌دهد تا سهم یک پیشامد را در دو مرحله حساب کنیم. یعنی به جای این‌که از اول کار، $A\cap B$ را بخواهیم می‌گوییم اول A انجام شود **(این می‌شود $P(A)$)**؛ حالا در شرایطی که A انجام شده می‌خواهیم مرحلهٔ دوم یعنی B انجام شود (این می‌شود $P(B|A)$). مثلاً دانشجویان دانشگاهی به نسبت ۲ به ۳ پسر و دخترند؛ پس احتمال دختربودن یک دانشجو می‌شود $P(\text{دختر})=\frac{3}{5}$.

حالا می‌دانیم احتمال خوابگاهی‌بودن در دختران ۲۰ درصد است؛ پس $P(\text{خوابگاهی}|\text{دختر})=\frac{20}{100}$ و می‌توانیم احتمال دختر و خوابگاهی را به دست آوریم:

$$P(\text{دختر}\cap\text{خوابگاهی})=\underbrace{P(\text{دختر})}_{\substack{\text{سهم دختران}\\ \text{از کل دانشجویان}\\ \text{(مرحلهٔ اول)}}}\times\underbrace{P(\text{خوابگاهی}|\text{دختر})}_{\substack{\text{سهم خوابگاهی}\\ \text{از دختران}\\ \text{(مرحلهٔ دوم)}}}=\frac{3}{5}\times\frac{20}{100}=\frac{3}{25}=0/12$$

تست شاگرد اول مدرسهٔ سمپاد با احتمال ۰/۶ در کنکور سراسری یک‌رقمی می‌شود. احتمال این‌که علی شاگرد اول سمپاد شود ۰/۸ است. با کدام احتمال علی هم شاگرد اول می‌شود و هم در کنکور یک‌رقمی می‌شود؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۳۲ ۴) ۰/۸

پاسخ گزینهٔ ۱

$P(\text{شاگرد اول} \cap \text{تک‌رقمی}) = P(\text{شاگرد اول}) \times P(\text{تک‌رقمی} \mid \text{شاگرد اول}) = ۰/۸ \times ۰/۶ = ۰/۴۸$

یک مثال دیگر هم از ترکیب فرمول شرطی و قوانین احتمال ببینید:

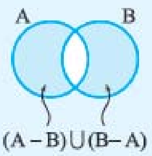
تست اگر $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B) = \frac{۱}{۴}$ و $P(A \cup B) = \frac{۵}{۱۲}$ و بدانیم فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ داده، با کدام احتمال آن پیشامد A است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ گزینهٔ ۱

سؤال از ما $P(A \mid \underbrace{(A-B) \cup (B-A)}_{\text{فقط یکی رخ دهد}})$ را می‌خواهد. فرمول شرطی را بنویسیم:

$$P(A \mid (A-B) \cup (B-A)) = \frac{P(A \cap [(A-B) \cup (B-A)]}{P((A-B) \cup (B-A))}$$



نگاهی به نمودار ون کنید:

اشتراک A و «فقط یکی رخ دهد»، ناحیهٔ $A-B$ است، پس داریم:

$$\text{خواستهٔ سؤال} = \frac{P(A-B)}{P\big((A-B) \cup (B-A)\big)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}$$

با اعداد $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B) = \frac{۱}{۴}$ و $P(A \cup B) = \frac{۵}{۱۲}$ مقدار $P(A \cap B)$ می شود $\frac{۲}{۱۲}$ و داریم:

$$= \frac{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۶}} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۲}{۳}$$

پیشامدهای مستقل

دیدیم که پیش‌فرض رخ‌دادن B، احتمال A را تغییر می‌دهد.

حالا اگر وقوع یا عدم وقوع B، بر احتمال وقوع A اثری نگذارد، می‌گوییم A از B مستقل است. به بیان ریاضی اگر $P(A) = P(A \mid B) = P(A \mid B')$ باشد (یعنی رخ‌دادن یا رخ‌ندادن B اثری بر احتمال A ندارد)، با نوشتن فرمول شرطی داریم:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

یعنی A وقتی از B مستقل است که احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل‌ضرب احتمالشان باشد. از تقارن این شرط نسبت به A و B نتیجه می‌گیریم که وقتی A از B مستقل باشد، B نیز از A مستقل است، پس عبارات زیر معادل‌اند:

$$\begin{matrix} P(A \mid B) = P(A \mid B') = P(A) \\ P(B \mid A) = P(B \mid A') = P(B) \end{matrix} \Leftrightarrow \text{B و A مستقل‌اند} \Leftrightarrow \text{وقوع هر یک از دو پیشامد A و B بر احتمال وقوع دیگری اثر ندارد}$$

و شرط همهٔ آن‌ها این است که: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

حالا چه پیشامدهایی از هم مستقل‌اند؟ هر جا پیشامدها دارای منشأهای مختلف باشند از هم مستقل‌اند. مثلاً سکه و تاس؛ سکهٔ اول و سکهٔ دوم؛ فرزندان مختلف؛ پرتاب‌های مختلف یک تاس؛ قهرمانی دو تیم مختلف در دو لیگ مختلف (دقت می‌کنید که قهرمانی دو تیم A و B در یک لیگ، با هم ناسازگار است)؛ البته بعضی وقت‌ها مستقل‌بودن دو پیشامد به سادگی و به طور شهودی معلوم نیست. پس حتماً باید شرط $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ را کنترل کنیم یا این‌که ببینیم $P(A \mid B)$ با $P(A)$ مساوی هست؟

از مستقل‌بودن A و B نتیجه می‌شود متمم‌های آن‌ها نیز مستقل‌اند یعنی A و B' و همچنین A' و B' مستقل هستند.

پس داریم:

$$\begin{cases} \text{و } A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند} \\ P(A|B)=P(A)=P(A|B') \\ P(A\cap B)=P(A)P(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} P(A'\cap B)=P(A')P(B) \\ P(A'|B)=P(A') \\ P(A'\cap B')=P(A')P(B') \end{matrix}$$

پس از مستقل‌بودن، سه نتیجه می‌گیریم:

۱ نتیجهٔ A بر احتمال B اثر ندارد. ۲ احتمال اشتراک آن‌ها برابر ضرب احتمال‌ها است. ۳ احتمال شرطی برابر احتمال اولی است.

تست در پرتاب یک سکه و یک تاس با هم چه‌قدر احتمال دارد سکه رو و تاس مضرب ۳ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ **گزینهٔ ۱** سکه و تاس مستقل هستند. احتمال روشدن سکه $\frac{۱}{۲}$ و احتمال مضرب ۳ در تاس برابر $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$ است و چون از هم مستقل‌اند:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}$$

برای بیش از دو پیشامد هم با فرض مستقل‌بودن تمام آن‌ها از هم، می‌توانیم از نتایج بالا استفاده کنیم، یعنی احتمال اشتراک برابر ضرب احتمال‌های آن‌ها است.

تست شانس برد تیم فوتبال ایران مقابل کره ۰/۸ است. با کدام احتمال تاس ۴ می‌آید، سکه رو ظاهر می‌شود و ایران کره را می‌برد؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲۰}$

پاسخ **گزینهٔ ۳**

$$P(\text{تاس ۴}\cap\text{سکه رو}\cap\text{برد ایران})=P(\text{تاس ۴})\times P(\text{سکه رو})\times P(\text{برد ایران})=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

تست در پرتاب دو تاس در بین پیشامدهای

A: جمع ارقام دو تاس ۷ باشد. **B: جمع ارقام دو تاس ۹ باشد.** **C: تاس اول ۱ باشد.**

کدام دو پیشامد مستقل‌اند؟

۱) A , C ۲) A , B ۳) B , C ۴) هیچ‌کدام

پاسخ **گزینهٔ ۱** احتمال هر کدام و احتمال اشتراک‌ها را به دست می‌آوریم:

$$C=\{۱۶,۱۵,۱۴,۱۳,۱۲,۱۱\}\qquad B=\{۳۶,۶۳,۴۵,۵۴\}\qquad A=\{۱۶,۲۵,۳۴,۴۳,۵۲,۶۱\}$$

$$P(C)=P(\text{اولی ۱})=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\qquad P(B)=P(\text{مجموع ۹})=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}\qquad P(A)=P(\text{مجموع ۷})=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

اما A و B و همچنین B و C اشتراک ندارند؛ پس B با A و نیز B با C ناسازگار است. برویم سراغ A و C: $A\cap C=\{۱۶\}$

$$P(A\cap C)=\frac{۱}{۳۶}=P(A)\times P(C)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$$

می‌بینید که تساوی شرط مستقل‌بودن برقرار است. پس A و C مستقل‌اند.

راه دوم احتمال شرطی را حساب کنیم:

$$P(A|C)=P(\text{مجموع ۷}\mid\text{اولی ۱})$$

$$\text{فضای محدودشده}=S=\{۱۶,۱۵,۱۴,۱۳,۱۲,۱۱\}$$

$$(\text{مجموع ۷})\ A=\{۱۶\}\Rightarrow P(A|C)=\frac{۱}{۶}$$

می‌بینیم که $P(A|C)$ با $P(A)$ مساوی شد. پس A و C مستقل‌اند.

پس وقتی دو پیشامد A و B مستقل هستند این روابط را داریم:

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$: احتمال رخدادن هر دو پیشامد

$P(A|B)=P(A|B')=P(A)$: احتمال A به شرط رخدادن یا رخ‌ندادن B

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$: احتمال رخدادن حداقل یکی از آن‌ها

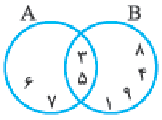
$P(A-B)=P(A)P(B')=P(A)-P(A)P(B)$: احتمال این‌که فقط A رخ دهد (و B رخ ندهد)

$P(B-A)=P(B)\,P(A')=P(B)-P(A)P(B)$: احتمال این‌که فقط B رخ دهد (و نه A)

$P(A|B)+P(A'|B)=۱$: این را هم داشته باشیم.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

احتمال شرطی شهودی

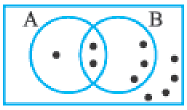


۱- در فضای نمونه‌ای S دو پیشامد A و B نشان داده شده‌اند. مقدار $P(A \mid B)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲- در سؤال بالا مقدار $P(A - B \mid A)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$



۳- هر نقطه بیانگر عضوی متمایز است. اگر A رخ ندهد با کدام احتمال B رخ می‌دهد؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$

۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۴- از کیسه‌ای شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه، مهره‌ها را یکی‌یکی بیرون می‌آوریم. اگر مهرهٔ اول سفید باشد با کدام احتمال مهرهٔ دوم نیز سفید است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۵- واحدهای یک مجتمع ۲۵تا هستند که یکی مسکونی، ۱۷تا تجاری و ۱۹تا اداری هستند. با کدام احتمال یک واحد غیراداری، تجاری است؟

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{6}{7}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۶- در بین ۴۲ دانش‌آموز یک کلاس، ۲۳ نفر دورهٔ اقتصاد و ۲۰ نفر دورهٔ حقوق و ۴ نفر در هیچ دوره‌ای ثبت‌نام نکرده‌اند. یک نفر از این کلاس انتخاب می‌کنیم. اگر در دورهٔ حقوق ثبت نام کرده باشد با کدام احتمال در اقتصاد ثبت‌نام کرده است؟

۱) $\frac{3}{11}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{11}$ ۴) $\frac{1}{5}$

● دانش‌آموزان یک مدرسه در جدول مقابل دسته‌بندی شده‌اند.

	دوم	سوم
تجربی	۱۸	۱۰
ریاضی	۱۲	۱۵

۷- احتمال تجربی‌بودن یک دانش‌آموز با فرض سال سومی بودن او چه‌قدر است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۸- یک دانش‌آموز ریاضی با کدام احتمال سال دومی است؟

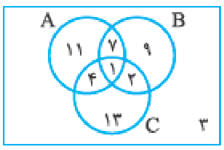
۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{5}{11}$ ۳) $\frac{9}{14}$ ۴) $\frac{4}{9}$

۹- فرض ریاضی‌بودن، احتمال «سال سومی بودن» را تقریباً چه‌قدر تغییر می‌دهد؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

● ۵۰ نفر پرسنل خیلی سبز در طبقهٔ دوم، در صبحانه انتخاب‌های مقابل را داشته‌اند:

A: شیر B: چای C: قهوه



۱۰- اگر یکی از پرسنل چای خورده باشد، با کدام احتمال قهوه هم خورده است؟

۱) $\frac{2}{19}$ ۲) $\frac{3}{19}$

۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۱۱- اگر یکی از پرسنل شیر نخورده باشد، با کدام احتمال چای هم نخورده است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{13}{24}$ ۳) $\frac{16}{27}$ ۴) $\frac{14}{25}$

افزایش	ثابت	کاهش	تعداد شعب
۶	۵	۴	۱-۴
۸	۲	۱	۵-۹
۹	۷	۳	۱۰-۱۵

● در بررسی فروشگاه‌های زنجیره‌ای در سال قبل، تعداد کارمندان کنترل شده‌اند. به سؤالات «۱۲» تا «۱۴» پاسخ دهید.

۱۲- اگر یک فروشگاه دارای ۵ تا ۹ شعبه باشد، با کدام احتمال افزایش تعداد کارمند داشته است؟

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) ۰/۸ ۳) $\frac{۸}{۲۳}$ ۴) ۰/۳

۱۳- اگر در یک فروشگاه تعداد کارمندان ثابت مانده باشد، با کدام احتمال بیش از ۹ شعبه داشته است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۴- با کدام احتمال یک فروشگاه انتخابی، کاهش تعداد کارمند داشته است؟

۱) $\frac{۷}{۴۵}$ ۲) $\frac{۷}{۴۶}$ ۳) $\frac{۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۴}{۲۳}$

۱۵- شش کارت قرمز و شش کارت آبی با شماره‌های ۱ تا ۶ داریم. اگر مجموع شماره‌های دو کارت انتخابی ۷ باشد، با کدام احتمال دو کارت هم‌رنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۶- از میان کارت‌های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ سه کارت به تصادف برمی‌داریم. اگر جمع شماره‌های این ۳ کارت فرد باشد، با کدام احتمال هر سه فرد هستند؟

۱) $\frac{۴}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۹}$ ۳) $\frac{۳}{۱۹}$ ۴) $\frac{۲}{۱۹}$

۱۷- در سؤال قبل اگر ضرب شماره‌های سه کارت انتخابی زوج باشد، با کدام احتمال جمع آن‌ها زوج است؟

۱) $\frac{۶}{۱۷}$ ۲) $\frac{۷}{۱۷}$ ۳) $\frac{۸}{۱۷}$ ۴) $\frac{۵}{۱۷}$

۱۸- از بین ۴ داوطلب ریاضی و ۶ داوطلب تجربی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. اگر در بین افراد انتخابی داوطلب رشتهٔ ریاضی باشد، با کدام احتمال فقط یک داوطلب ریاضی انتخاب شده است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۴۵

۱۹- در کیسه‌ای ۵ جفت کفش داریم. ۴ لنگه بیرون می‌آوریم. اگر در بین آن‌ها حداقل یک جفت باشد، با کدام احتمال فقط یک جفت هست؟

۱) $\frac{۱}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۳}$ ۳) $\frac{۲}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۲۰- خانواده‌ای ۲ فرزند دارند. اگر فرزند بزرگ‌تر دختر باشد، با کدام احتمال هر دو دختر هستند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۱- خانواده‌ای ۲ فرزند دارند. اگر بدانیم یک فرزند آن‌ها دختر است با کدام احتمال فرزند دیگر هم دختر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۲- در پرتاب سه سکه با هم می‌دانیم حداقل یکی رو ظاهر شده است. با کدام احتمال فقط یک رو ظاهر شده است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۲۳- خانواده‌ای با ۳ فرزند حداقل ۲ دختر دارند. با کدام احتمال فقط یک پسر دارند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۲۴- در میان ۴ فرزند یک خانواده می‌دانیم حداقل ۲ پسر وجود دارد. با کدام احتمال فرزند اول پسر است و فقط یک برادر دارد؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۱}$

۲۵- سکه‌ای را ۴ بار انداخته‌ایم. اگر ببینیم پرتاب اول «رو» است، با کدام احتمال حداقل دوتا «رو» و حداقل یک «پشت» داریم؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۲۶- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر فرزند اول و آخر هم‌جنس باشند، با کدام احتمال تعداد دخترها بیشتر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۷- خانواده‌ای با ۵ فرزند، هم پسر و هم دختر دارند. با کدام احتمال دقیقاً ۲ پسر دارند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۸- اگر ضرب ارقام روشده در پرتاب ۲ تاس، ۱۲ باشد با کدام احتمال جمع آن‌ها ۷ است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۲۹- اگر جمع ارقام دو تاس ۷ باشد، با کدام احتمال ضرب ارقام ۱۲ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۰- تاسی را دو بار می‌اندازیم. اگر عدد بار دوم کم‌تر از عدد بار اول باشد، با کدام احتمال حاصل‌ضرب دو رقم ظاهر شده فرد است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۳۱- در پرتاب دو تاس اگر حداقل یکی ۲ باشد، با کدام احتمال رقم ۳ دیده می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱۱}$

۳۲- در پرتاب دو تاس با کدام شرط، احتمال روشدن دو عدد فرد به ۶۰ درصد می‌رسد؟

۱) مجموع ۷ باشد. ۲) اختلاف ۲ باشد. ۳) هر دو مضرب ۳ باشند. ۴) مجموع ۶ باشد.

۳۳- در پرتاب دو تاس با هم اگر مجموع ارقام مضرب ۳ باشد، با کدام احتمال هیچ‌یک از اعداد مضرب ۳ نیستند؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۴- در پرتاب دو تاس با هم، A پیشامد روشدن دو عدد مضرب ۳ است. $P(A|B)$ با کدام انتخاب برای پیشامد B از بقیه کم‌تر است؟

۱) مجموع ۹ باشد. ۲) مجموع بیشتر از ۸ باشد. ۳) دو عدد یکسان باشند. ۴) تفاضل ارقام ۴ باشد.

۳۵- اگر بدانیم جمع ارقام روشده در پرتاب ۲ تاس عددی اول است، با کدام احتمال اختلاف ارقام زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۱۵}$

۳۶- در پرتاب سه تاس اگر جمع ارقام روشده ۱۵ باشد، با کدام احتمال حداقل یک رقم تکراری در بین برآمدها وجود دارد؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

۳۷- هیچ‌یک از ارقام روشده در پرتاب ۳ تاس مضرب ۳ نیستند. با کدام احتمال هر سه رقم روشده فرد هستند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۶۴}$ ۴) $\frac{۸}{۲۷}$

۳۸- اگر ارقام سه تاس متمایز باشند، با کدام احتمال اعداد متوالی ظاهر شده‌اند؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۳۹- در پرتاب ۳ تاس، هر سه رقم روشده بیشتر از ۲ هستند. با کدام احتمال سه رقم مختلف ظاهر شده است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۴۰- A، B، C، D و E در محلی سخنرانی می‌کنند. اگر سخنرانی A و B پشت سر هم نباشد، با کدام احتمال فقط دو نفر بین A و B هستند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۱- ۳ زن و ۴ مرد در یک ردیف قرار می‌گیرند. اگر زن‌ها کنار هم باشند، با کدام احتمال مردها نیز کنار هم هستند؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۶

فرمول احتمال شرطی

۴۲- اگر $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۲}{۵}$ و احتمال رخ‌دادن حداقل یکی از آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ باشد، $P(A|B)$ چه‌قدر کم‌تر از $P(B|A)$ است؟

۱) $\frac{۷}{۳۰}$ ۲) $\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $\frac{۷}{۳۶}$ ۴) $\frac{۷}{۶۰}$

۴۳- A و B دو پیشامد هم‌شانس از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A|B)=\frac{۳}{۴}$ و $P(B)=\frac{۳}{۵}$، مقدار $P(A|B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۴۴- اگر $P(A|B)=\frac{1}{4}$ و $P(B|A)=\frac{1}{5}$ و جمع احتمال‌های دو پیشامد A و B برابر ۱ باشد، مقدار $P(A|B')$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۴۵- اگر $P(A|B)=3P(B|A)=6P(B|A)=0/3$ و $P(A\cup B)=0/87$، آن‌گاه با کدام احتمال هم A و هم B رخ می‌دهند؟

۱) ۱ درصد ۲) ۴ درصد ۳) ۲ درصد ۴) ۳ درصد

۴۶- اگر $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A|B)=\frac{1}{5}$، حاصل $P(B'-A')$ کدام است؟

۱) $0/43$ ۲) $0/4$ ۳) $0/5$ ۴) $0/2$

۴۷- اگر $P(A|B)=\frac{12}{25}$، حاصل $P(A'|B)$ کدام است؟

۱) $0/48$ ۲) $0/26$ ۳) $0/52$ ۴) $0/62$

۴۸- اگر $P(A)=0/2$ و $P(B)=0/3$ و $P(A|B)=0/4$، مقدار $P(B|A)$ کدام است؟

۱) $0/8$ ۲) $0/6$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $0/75$

۴۹- اگر $P(B)=0/35$ و $P(A\cup B)=0/74$ و بدانیم B رخ نداده است، با کدام احتمال A نیز رخ نمی‌دهد؟

۱) $\frac{35}{74}$ ۲) $\frac{65}{74}$ ۳) $\frac{26}{35}$ ۴) $\frac{2}{5}$

پیشامدهای مستقل

۵۰- دو پیشامد مستقل A و B به ترتیب ۲ و ۵ عضو دارند و اجتماع آن‌ها دارای ۶ عضو است. فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵۱- اگر پیشامد A از خودش مستقل باشد، کدام نتیجه درست است؟

۱) A حتماً غیرممکن است.
۲) A حتماً خود فضای نمونه‌ای است.
۳) احتمال A، عددی صحیح است.
۴) $P(A)<\frac{1}{2}$

۵۲- کدام جملهٔ زیر همواره درست است؟

الف) هر پیشامد از $\varnothing$ مستقل است.
ب) هر پیشامد از S مستقل است.

۱) هر دو ۲) فقط (الف) ۳) فقط (ب) ۴) هیچ‌کدام

۵۳- در دو پرتاب یک سکه، A پیشامد شیربودن اولی، B پیشامد شیربودن دومی و C پیشامد یکسان‌بودن دو پرتاب است. چندتا گزاره درست‌اند؟

الف) A و B مستقل‌اند.
ب) A و C مستقل‌اند.
پ) C و B مستقل‌اند.
ت) C، B و A مستقل‌اند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۴- در کدام حالت، دو پیشامد A و B مستقل‌اند؟

۱) $P(A)=0/4$، $P(B)=0/5$ و $P(A\cup B)=0/75$
۲) $P(A)=0/4$ و $P(A|B)=0/5$
۳) $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$، $P(B')=\frac{1}{6}$ و $P(A)=\frac{1}{4}$
۴) $P(A|B)>P(A|B')$

۵۵- در پرتاب دو تاس با هم A پیشامد مجموعِ ۷ و B پیشامد این است که اولی ۴ باشد. اگر C به صورت «دومی ۳ باشد» تعریف شود، چند گزاره درست هستند؟

الف) A و B مستقل‌اند.
ب) A و C مستقل‌اند.
پ) C و B مستقل‌اند.
ت) A و $B\cap C$ مستقل‌اند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۶- در پرتاب دو تاس پیشامدهای زیر را داریم:

A: تاس اول ۴ باشد.
B: اختلاف دو رقم روشده k باشد.

به ازای کدام مقدار k این دو پیشامد مستقل‌اند؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۵۷- در پرتاب دو تاس پیشامدهای «تاس اول ۲ باشد» و «اختلاف دو رقم ۳ باشد» چگونه‌اند؟

۱) مستقل　۲) ناسازگار　۳) فقط وابسته　۴) یکی زیرمجموعهٔ دیگری

۵۸- در پرتاب ۶ سکه، A پیشامد رخ‌دادن فقط ۳ رو و B پیشامد رو بودن سکهٔ اول است. کدام گزاره درست است؟

۱) A و B ناسازگارند.　۲) $B \subset A$　۳) $A \subset B$　۴) A و B مستقل‌اند.

۵۹- در پرتاب یک تاس بین پیشامدهای «A: عدد فرد ظاهر شود.»، «B: عدد مضرب ۳ بیاید.» و «C: عدد کم‌تر از ۵ بیاید.» چند جفت پیشامد مستقل وجود دارد؟

۱) هیچ　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۶۰- در جدول روبه‌رو به ازای کدام مقدار x دو پیشامد مردبودن و متأهل‌بودن مستقل‌اند؟

	زن	مرد
مجرد	۳	۱۵
متاهل	x	۲۰

۱) ۴　۲) ۵　۳) ۶　۴) ۸

۶۱- m نفر که دوتای آن‌ها A و B هستند در صف می‌ایستند. به ازای کدام مقدار m دو پیشامد «A قبل از B است» و «B و A کنار هم هستند» از یکدیگر مستقل‌اند؟

۱) هر مقدار $m \geq ۲$　۲) ۵　۳) ۳　۴) ۴

۶۲- در دو پیشامد مستقل B و A اگر $P(B' | A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A' | B) = \frac{۱}{۴}$، مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$　۲) $\frac{۱۱}{۱۲}$　۳) $\frac{۳}{۴}$　۴) $\frac{۵}{۶}$

۶۳- اگر برای دو پیشامد مستقل A و B بدانیم $P(A | B) = ۰/۶$ و $P(A \cup B) = ۰/۷۲$، مقدار $P(B - A)$ کدام است؟

۱) ۰/۰۶　۲) ۰/۲۴　۳) ۰/۱۸　۴) ۰/۱۲

۶۴- اگر $P(A | B) = ۰/۵$ و $P(B | A') = ۰/۷$، برای دو پیشامد مستقل B و A حاصل $P(A' \cap B')$ کدام است؟

۱) ۰/۳۵　۲) $\frac{۵}{۷}$　۳) ۰/۲　۴) ۰/۱۵

۶۵- اگر $P(A) = ۰/۶$ و $P(B) = ۰/۷$ و دو پیشامد A' و B مستقل باشند، احتمال این‌که هیچ‌یک از دو پیشامد A و B رخ ندهند چه‌قدر کم‌تر از احتمال این است که A رخ دهد و B <u>ندهد</u>؟

۱) ۰/۱۴　۲) ۰/۰۷　۳) ۰/۰۶　۴) ۰/۰۱

۶۶- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A - B) = ۴P(A \cap B) = ۰/۴$، آن‌گاه احتمال این‌که $A \cup B'$ رخ دهد، کدام است؟

۱) ۰/۹　۲) ۰/۸　۳) ۰/۷　۴) ۰/۶

۶۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A - B) = P(A \cap B)$ باشد، کدام نتیجه درست است؟ $(A \neq \varnothing)$

۱) $P(B) = ۱$　۲) $P(B) = ۰$　۳) $P(B) = \frac{۱}{۲}$　۴) $P(B) = \frac{۱}{۳}$

۶۸- احتمال بهبود دو نفر A و B پس از عمل جراحی به ترتیب ۰/۷ و ۰/۶ است. با کدام احتمال پس از عمل فقط یکی از آن‌ها بهبود <u>نمی‌یابد</u>؟

۱) ۰/۴۸　۲) ۰/۴۶　۳) ۰/۴۴　۴) ۰/۴۲

۶۹- احتمال این‌که حبیب تا بیست سال دیگر زنده بماند ۰/۷۵ و احتمال این‌که برادرش تا ۲۰ سال بعد زنده بماند $\frac{۲}{۳}$ است. چه‌قدر احتمال دارد تا بیست سال بعد فقط برادر حبیب زنده بماند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$　۲) $\frac{۱}{۶}$　۳) $\frac{۱}{۳}$　۴) $\frac{۱}{۲}$

۷۰- احتمال این‌که هر یک از ۳ نفر بتوانند مسئله‌ای را حل کنند به ترتیب ۰/۷، ۰/۶ و $\frac{۱}{۲}$ است. با کدام احتمال مسئله حل می‌شود؟ (لااقل یکی مسئله را حل می‌کند.)

۱) ۰/۹۹۴　۲) ۰/۹۶　۳) ۰/۹۴　۴) ۰/۹۹۶

۷۱- روی تاسی ارقام ۱، ۱، ۱، ۲، ۲ و ۳ نوشته شده است. این تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال بار اول زوج و بار دوم فرد می‌آید؟

۱) $\frac{۱}{۹}$　۲) $\frac{۲}{۹}$　۳) $\frac{۴}{۹}$　۴) $\frac{۱}{۳}$

۷۲- سکه‌ای را آن‌قدر می‌اندازیم تا رو بیاید. با کدام احتمال ۴ پرتاب لازم است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$　۲) $\frac{۱}{۴}$　۳) $\frac{۱}{۱۶}$　۴) $\frac{۱}{۲}$

۷۳- در بین ۴ فرزند یک خانواده با کدام احتمال سومی تنها پسر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۷۴- سکه‌ای را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. اگر در پرتاب دوم «رو» بیاید با کدام احتمال در پرتاب سوم و چهارم پشت می‌آید؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۷۵- در پرتاب ۳ تاس با کدام احتمال حداقل یکی مضرب ۳ می‌آید؟

۱) $\frac{8}{27}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{19}{27}$

۷۶- با کدام احتمال، ۴ دانش‌آموز، متولد ماه‌های مختلف سال هستند؟

۱) $\frac{53}{96}$ ۲) $\frac{41}{96}$ ۳) $\frac{55}{96}$ ۴) $\frac{65}{96}$

۷۷- در بین ۳ نفر با کدام احتمال روز تولد حداقل دو نفر در هفته مثل هم است؟

۱) $\frac{18}{49}$ ۲) $\frac{19}{49}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{20}{49}$

۷۸- چه‌قدر احتمال دارد ۶ عضو تیم والیبال همگی متولد یک فصل از سال باشند؟

۱) $(\frac{1}{2})^6$ ۲) $(\frac{1}{2})^{12}$ ۳) $(\frac{1}{2})^{10}$ ۴) $(\frac{1}{2})^8$

۷۹- احتمال این‌که معلم دسته کلید خود را در یک کلاس جا بگذارد $\frac{1}{3}$ است. یک معلم با کدام احتمال کلید را در کلاس زنگ دوم جا گذاشته است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۸۰- احتمال پیروزی تیم والیبال ایران بر روسیه در هر گیم ۰/۴ است. اگر در یک مسابقهٔ خاص تیمی برنده شود که زودتر ۲ گیم را ببرد با کدام احتمال ایران می‌بَرَد؟

۱) ۰/۱۶ ۲) ۰/۱۹۲ ۳) ۰/۲۳۶ ۴) ۰/۳۵۲

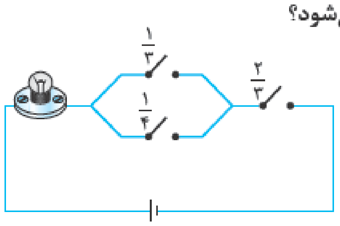
۸۱- احتمال قبولی A در کنکور دو برابر B است. اگر احتمال قبولی حداقل یکی از آن‌ها ۰/۷۲ باشد، با کدام احتمال فقط یکی از آن‌ها قبول می‌شود؟

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۵۴

۸۲- در یک آزمون زبان، شرکت‌کننده باید در امتحان شفاهی و کتبی نمرهٔ قبولی بگیرد. اگر احتمال قبولی او در آزمون شفاهی و کتبی برابر و در حداقل یک آزمون برابر ۰/۶۴ باشد، با کدام احتمال در آزمون زبان قبول می‌شود؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۳۲

۸۳- در مدار زیر احتمال بسته‌بودن هر کلید روی آن نوشته شده است. با کدام احتمال لامپ روشن می‌شود؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

[Z] سری

۸۴- سه کارت داریم. اولی دو روی سفید، دومی دو روی سیاه و سومی یک روی سفید و یک روی سیاه دارد. کارتی را برمی‌داریم و می‌بینیم یک روی آن سیاه است. با کدام احتمال روی دیگرش سفید است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸۵- در پرتاب دو تاس با هم به فرض این‌که هر دو رقم فرد باشند، احتمال این‌که مجموع دو رقم کم‌تر از k باشد $\frac{1}{3}$ است. مقدار k کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۸۶- در پرتاب ۲ تاس، A پیشامد این است که حداقل یک بار ۲ ظاهر شود. با کدام انتخاب برای پیشامد B، مقدار $P(A|B)$ از بقیه کم‌تر است؟

۱) مجموع ۷ باشد. ۲) مجموع ۵ باشد. ۳) اختلاف ۲ باشد. ۴) اختلاف ۳ باشد.

۸۷- به تصادف حروف PEPPER را در کنار هم قرار می‌دهیم. با فرض این‌که دو حرف E کنار هم نیستند، چه‌قدر احتمال دارد حروف P و E یک‌درمیان باشند؟

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۰۱۲۵ ۴) ۰/۰۲

۸۸- علی و رضا و تقی و سعید و مهدی وارد اتاقی می‌شوند. اگر علی قبل از مهدی باشد، با کدام احتمال سعید در بین آن‌ها وارد می‌شود؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۹- حروف SANAROM را در کنار هم می‌چینیم. اگر حروف صدادار کنار هم باشند، با کدام احتمال O بین دو حرف A است و حرف S در وسط قرار می‌گیرد؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۶۰}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۹۰- اگر $P(B\,|\,A)=۱$، مقدار $P(A'\,|\,B')$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{P(A')}{P(B')}$ ۳) $\frac{P(A)}{P(B)}$

۹۱- اگر $P(A\,|\,B')=P(B)=x$ باشد، حداکثر چه‌قدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) ۱

۹۲- A پیشامدی ۸عضوی در فضای نمونه‌ای ۱۰ عضوی S است. چند پیشامد ۳عضوی مانند B وجود دارد که $P(B\,|\,A)=\frac{۱}{۴}$ باشد؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۶ ۳) ۱۴ ۴) ۴۲

۹۳- در پرتاب یک تاس، چند پیشامد دوعضوی وجود دارند که از پیشامد {۳,۶} مستقل باشند؟

۱) هیچ ۲) ۱۴ ۳) ۱۰ ۴) ۶

۹۴- در فضای نمونه‌ای {۱,۲,۳,۴,۵,۶} چند پیشامد وجود دارد که با {۱,۲} سازگار و از {۱,۲} مستقل‌اند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹۵- A و B دو پیشامد مستقل با احتمال‌های ۰/۶ و ۰/۵۲ هستند. رخ‌دادن پیشامد A احتمال $A-B$ را چه‌قدر تغییر می‌دهد؟

۱) صفر ۲) ۰/۱۹۲ ۳) ۰/۲۲۴ ۴) ۰/۳۱۲

۹۶- در خانواده‌ای شانس تولد پسر ۰/۶ است. در بین سه فرزند اگر حداقل یک پسر داشته باشند با کدام احتمال فقط یک پسر دارند؟

۱) $\frac{۲}{۱۳}$ ۲) $\frac{۴}{۱۳}$ ۳) $\frac{۳}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱}{۱۳}$

۹۷- اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ و $P(\{b,c,d\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{a\})=\frac{۱}{۴}$، حاصل $P(\{a,e\}\,|\,\{b,c,d,e\})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۹۸- در دو پیشامد هم‌شانس و مستقل A و B، مقدار $P(A\cup B)$ برابر $\frac{۱۶}{۲۵}$ است. حاصل $P(A-B)$ کدام است؟

۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۴

پاسخ تشریحی آمار و احتمال

۱- گزینهٔ ۳ پیش‌فرض، B است. پس فضای نمونه‌ای محدودشده $S=B=\{۱,۳,۴,۵,۸,۹\}$ است. ما می‌خواهیم در این شرایط A رخ دهد، یعنی پیشامد موردنظر $A\cap B=\{۳,۵\}$ است و داریم:
$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۲- گزینهٔ ۲ پیش‌فرض، A و پیشامد موردنظر $A-B$ است. پس داریم:
$$P(A-B\mid A)=\frac{n(A-B)}{n(A)}=\frac{n(\{۶,۷\})}{n(\{۳,۵,۶,۷\})}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$
بیان فارسی صورت سؤال هم زیباست: «اگر A رخ دهد، با کدام احتمال فقط A رخ داده است؟»

۳- گزینهٔ ۲ پیش‌فرض سؤال A' است و می‌خواهیم B رخ دهد. پس داریم:
$$P(B\mid A')=\frac{n(B\cap A')}{n(A')}=\frac{\text{تعداد اعضایی که در B هست و در A نیست}}{\text{تعداد اعضایی که در A نیست}}=\frac{۳}{۷}$$

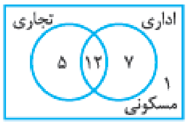
۴- گزینهٔ ۴ پیش‌فرض مسئله این است که مهرهٔ اول سفید باشد، پس کیسه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\boxed{\begin{matrix}۴W\\۵B\end{matrix}}\xrightarrow{\text{مهرهٔ اول سفید است}}\boxed{\begin{matrix}۳W\\۵B\end{matrix}}$$

و احتمال سفیدبودن دومی برابر است با:
$$P(\text{دومی سفید}\mid\text{اولی سفید})=\frac{۳}{۸}$$
احتمال سفیدبودن اولی، $\frac{۴}{۹}$ بود.

۵- گزینهٔ ۱ پیش‌فرض مسئله این است که واحد انتخابی اداری نیست. پس فضای نمونه‌ای محدودشده $۲۵-۱۹=۶$ عضو دارد. در بین آن‌ها دنبال واحد تجاری هستیم که تمام این ۶ واحد به‌جز ۱ واحد مسکونی، تجاری‌اند، پس داریم: $P(\text{تجاری}\mid\text{اداری نیست})=\frac{۵}{۶}$

این را هم ببینید:



۶- گزینهٔ ۲ از بین ۴۲ نفر، ۴ نفر در هیچ دوره‌ای ثبت‌نام نکرده‌اند پس $۴۲-۴=۳۸$ نفر در حداقل یک دوره ثبت‌نام کرده‌اند:

$n(A\cup B)=۳۸$

اقتصاد: $n(A)=۲۳$

حقوق: $n(B)=۲۰ \Rightarrow n(A\cap B)=۲۳+۲۰-۳۸=۵$

حالا سؤال از ما احتمال اقتصاد به شرط حقوق را می‌خواهد:
$$P(\text{اقتصاد}\mid\text{حقوق})=\frac{n(\text{اقتصاد}\cap\text{حقوق})}{n(\text{حقوق})}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$$

۷- گزینهٔ ۱ باید فضای نمونه‌ای را به سومی‌ها محدود کنیم:
$$P(\text{تجربی}\mid\text{سال سوم})=\frac{n(\text{سال سوم و تجربی})}{n(\text{سوم})}=\frac{۱۰}{۱۰+۱۵}=\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۲}{۵}$$

۸- گزینهٔ ۴ باید فضای نمونه‌ای را به ریاضی‌ها محدود کنیم:
$$P(\text{دومی}\mid\text{ریاضی})=\frac{n(\text{دومی و ریاضی})}{n(\text{ریاضی})}=\frac{۱۲}{۱۲+۱۵}=\frac{۱۲}{۲۷}=\frac{۴}{۹}$$

۹- گزینهٔ ۱ در حالت عادی احتمال سال سومی‌بودن برابر است با:
$$P(\text{سومی})=\frac{۱۰+۱۵}{۱۸+۱۰+۱۲+۱۵}=\frac{۲۵}{۵۵}=\frac{۵}{۱۱}$$
و با فرض ریاضی‌بودن داریم:
$$P(\text{سومی‌بودن}\mid\text{ریاضی})=\frac{n(\text{ریاضی و سومی})}{n(\text{ریاضی})}=\frac{۱۵}{۱۲+۱۵}=\frac{۱۵}{۲۷}=\frac{۵}{۹}$$
و میزان تغییر برابر است با: $\frac{۵}{۹}-\frac{۵}{۱۱}=\frac{۵\times۱۱-۵\times۹}{۱۱\times۹}=\frac{۱۰}{۹۹}\simeq ۰/۱$

۱۰- گزینهٔ ۲ صورت سؤال می‌گوید یکی از پرسنل چای خورده است پس فضای نمونه‌ای به افرادی که چای خورده‌اند محدود شده است:
$$P(\text{قهوه}\mid\text{چای})=\frac{n(\text{چای و قهوه})}{n(\text{چای})}=\frac{n(B\cap C)}{n(B)}=\frac{۲+۱}{۱+۲+۷+۹}=\frac{۳}{۱۹}$$

۱۱- گزینهٔ ۳ فضای نمونه‌ای را به افرادی که شیر نخورده‌اند محدود می‌کنیم:
$$P(\text{چای نخورده}\mid\text{شیر نخورده})=\frac{n(\text{شیر نخورده و چای نخورده})}{n(\text{شیر نخورده})}=\frac{n(A'\cap B')}{n(A')}=\frac{۱۳+۳}{۹+۲+۱۳+۳}=\frac{۱۶}{۲۷}$$

۱۲- گزینهٔ ۱ فضای نمونه‌ای به سطر دوم جدول محدودشده (یعنی فروشگاه‌های دارای ۵ تا ۹ شعبه):
$$P(\text{افزایش}\cap\text{سطر دوم})=\frac{n(\text{افزایش}\cap\text{سطر دوم})}{n(\text{سطر دوم})}=\frac{۸}{۱+۲+۸}=\frac{۸}{۱۱}$$

۱۳- گزینهٔ فضای نمونه‌ای محدود به فروشگاه‌هایی است که تعداد کارمندان ثابت‌مانده، پس فقط به ستون دوم جدول نگاه می‌کنیم و داریم:

$$P(\text{بیش از ۹} \mid \text{ثابت ماندن}) = P(\text{سطر سوم} \mid \text{ستون دوم})$$

$$= \frac{n(\text{ستون دوم و سطر سوم})}{n(\text{ستون دوم})} = \frac{۷}{۵+۲+۷} = \frac{۱}{۲}$$

۱۴- گزینهٔ این اصلاً احتمال شرطی نیست و فضای نمونه‌ای شامل کل فروشگاه‌ها و پیشامد موردنظر، کل ستون اول است:

$$P(\text{کاهش}) = \frac{n(\text{کاهش})}{n(\text{کل})} = \frac{۸}{۴۵}$$

۱۵- گزینهٔ فضای نمونه‌ای حالت‌هایی است که مجموع شماره‌ها ۷ باشد. این حالت‌ها عبارت‌اند از: $(۳,۴)$ و $(۲,۵)$ و $(۱,۶)$ اما دقت کنید که هر کدام از این جفت اعداد، ۴ حالت دارند. چون عدد اول می‌تواند قرمز یا آبی باشد و عدد دوم نیز همین‌طور. مثلاً برای ۱ و ۶ داریم: $۱_R۶_R ، ۱_B۶_R ، ۱_R۶_B ، ۱_B۶_B$

پس فضای نمونه‌ای محدودشده دارای $۱۲ = ۴ \times ۳$ عضو است که در بین آن‌ها ۶ تا همرنگ هستند:

$$\{۱_B۶_B ، ۱_R۶_R ، ۲_B۵_B ، ۲_R۵_R ، ۳_R۵_R ، ۳_B۵_B\}$$

بنابراین:

$$P(\text{همرنگ} \mid \text{مجموع ۷}) = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

۱۶- گزینهٔ جمع شماره‌ها وقتی فرد است که هر سه فرد باشند یا فقط یکی فرد باشد (۴تا زوج و ۳تا فرد داریم):

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{سه‌تا فرد}} + \underbrace{\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱}}_{\text{یک فرد و دو زوج}} = ۱+۶\times۳=۱۹$$

حالت موردنظر یعنی هر سه فرد، فقط یکی از آن‌ها است پس:

$$P(\text{هر سه فرد} \mid \text{مجموع فرد}) = \frac{۱}{۱۹}$$

۱۷- گزینهٔ ضرب شماره‌ها وقتی زوج است که هر سه شماره فرد نباشند پس:

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = \underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{کل}} - \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{هر سه فرد}} = ۳۵-۱=۳۴$$

حالا مجموع زوج می‌خواهیم. پس باید هر سه زوج یا دو فرد و یک زوج باشند:

$$n(A) = \underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر سه زوج}} + \underbrace{\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}}_{\text{یک زوج و دو فرد}} = ۴+۳\times۴=۱۶$$

بنابراین:

$$P(\text{جمع زوج} \mid \text{ضرب زوج}) = \frac{۱۶}{۳۴} = \frac{۸}{۱۷}$$

۱۸- گزینهٔ فضای نمونه‌ای محدودشده این است که حداقل یک ریاضی انتخاب شود:

$$n(S) = \underbrace{\binom{۱۰}{۳}}_{\text{کل}} - \underbrace{\binom{۶}{۳}\binom{۴}{۰}}_{\text{هیچ ریاضی}} = ۱۲۰-۲۰=۱۰۰$$

حالا می‌خواهیم دقیقاً یک ریاضی انتخاب شده باشد:

$$n(A) = \underbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۲}}_{\text{دو تجربی و یک ریاضی}} = ۴\times۱۵=۶۰$$

پس:

$$P(\text{یک ریاضی} \mid \text{حداقل یک ریاضی}) = \frac{۶۰}{۱۰۰} = ۰/۶$$

۱۹- گزینهٔ در بین آن‌ها حداقل یک جفت هست یعنی یا یک جفت و دو لنگه تکی انتخاب شده یا دقیقاً دو جفت. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای محدودشده برابر است با:

$$n(S_{\text{محدودشده}}) = \underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دو جفت}} + \underbrace{\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{یک جفت و دوتا لنگه تکی}}$$

$$=۱۰+۵\times۶\times۲\times۲=۱۳۰$$

برای انتخاب دوتا لنگه تکی، ابتدا از جفت‌های مانده ۲ جفت را برمی‌داریم (این می‌شود ترکیب ۲ از ۴) سپس از هر جفت یک لنگه برمی‌داریم (دو بار ترکیب ۱ از ۲ را نوشتیم).

حالا مطلوب ما دقیقاً حالت دوم است یعنی فقط یک جفت داشته باشیم:

$$n(A) = \binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = ۵\times۶\times۲\times۲=۱۲۰$$

و بنابراین:

$$P(\text{فقط یک جفت} \mid \text{حداقل یک جفت}) = \frac{۱۲۰}{۱۳۰} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

۲۰- گزینهٔ فضای نمونه‌ای ۲ فرزند {دد، پد، دپ، پپ} است. اگر فرزند بزرگ‌تر دختر باشد، فضای نمونه‌ای به صورت {پد، دد} محدود می‌شود و داریم:

$$P(\text{هر دو دختر} \mid \text{اولی دختر}) = \frac{۱}{۲}$$

۲۱- گزینهٔ فضای نمونه‌ای ۲ فرزند {پپ، دپ، پد، دد} بود اما این بار فقط می‌دانیم یک فرزند دختر است اما معلوم نیست فرزند اول است یا دوم؟! پس فضای محدودشده {دد، پد، دپ} است و احتمال «هر دو دختر» برابر است با:

$$P(\text{هر دو دختر} \mid \text{حداقل یکی دختر}) = \frac{۱}{۳}$$

۲۲- گزینهٔ فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت زیر است:

S={ررر، پرر، رپپ، رپر، پرپ، ررپ، پپر}

پس: $n(S)=۷$

البته می‌توانستیم بگوییم از $۸ = ۲^۳$ حالت در پرتاب ۳ سکه، حالت «پپپ» قبول نیست. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای محدودشده ۷تا است. حالا فقط ۱ «رو» می‌خواهیم یعنی ۳ حالت «رپپ، پرپ، پپر» قبول‌اند و داریم:

$$P(\text{فقط یک رو} \mid \text{حداقل یک رو}) = \frac{۳}{۷}$$

۲۳- گزینهٔ حداقل ۲ دختر دارند، پس فضای نمونه‌ای محدودشده ۴ عضو دارد: S={ددپ، دپد، پدد، ددد}

در بین آن‌ها ۳ حالت فقط یک پسر است پس داریم:

$$P(\text{فقط یک پسر} \mid \text{حداقل ۲ دختر}) = \frac{۳}{۴}$$

۲۴- گزینهٔ ۲ فضای نمونه‌ای محدودشده حالت‌هایی است که ۲ یا ۳ یا ۴ پسر دارند.

در بین n فرزند تعداد حالت‌های k پسر برابر است با: $\binom{n}{k}$

پس: $n(S)=\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۶+۴+۱=۱۱$

حالا می‌خواهیم فرزند اول پسر باشد و فقط یک برادر داشته باشد یعنی حالت‌های زیر قبول‌اند:

A={(پ‌دد‌پ و پ)، (دپ‌د و پ)، (دد‌پ و پ)}

بنابراین ۳ حالت مورد قبول داریم پس: $P(A\,|\,\text{حداقل ۲ پسر})=\frac{۳}{۱۱}$

۲۵- گزینهٔ ۳ پیش‌فرض مسئله این است که پرتاب اول رو باشد. پس ۳ پرتاب دیگر هر کدام ۲ حالت دارند و فضای نمونه‌ای محدودشده، $۲^۳=۸$ عضو دارد.

خواستهٔ سؤال این است که حداقل ۲ «رو» و حداقل یک «پشت» داشته باشیم. خُب یک «رو» که در پرتاب اول حتمی است. پس باید در سه پرتاب بعدی، $\underbrace{\text{حداقل ۱ «رو» و حداقل ۱ «پشت» داشته باشیم}}_{(A)}$

یعنی ۳ پرتاب بعدی «ررر» و «پ‌پ‌پ» نباشند. پس $۸-۲=۶$ حالت مورد قبول‌اند و داریم: $P(A\,|\,\text{پرتاب اول رو})=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$

۲۶- گزینهٔ ۴ فضای نمونه‌ای محدودشده این است که فرزند اول و آخر هم‌جنس باشند. پس ۲ حالت داریم: اول و آخر «دد» یا اول و آخر «پپ». در هر حالت برای دو فرزند وسطی ۴ حالت داریم.

پس: $n(S_{\text{محدودشده}})=۲\times۴=۸$

حالا سؤال گفته تعداد دخترها بیشتر است، پس باید دو فرزند اول و آخر پسر نباشند (دختر باشند) و در بین دوتای وسطی هم حداقل یکی دختر باشد: $A\{\text{دددد و دپ‌دد و ددپ‌د}\}\Rightarrow n(A)=۳$

البته با آنالیز ترکیبی هم می‌شود تعداد اعضای A را شمرد:

$$n(A)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{اولی و آخری}\\ \text{دختر}}}{۱}\times\underset{\substack{\uparrow\\ \text{دوتای وسطی}\\ \text{هر دو پسر نباشند}}}{(۲^۲-۱)}=۳$$

بنابراین: $P(\text{دختر بیشتر است}\,|\,\text{اول و آخر هم‌جنس})=\frac{۳}{۸}$

۲۷- گزینهٔ ۳ فضای نمونه‌ای محدودشده، این است که همهٔ فرزندان پسر یا همه دختر نباشند:

$$n(S_{\text{محدودشده}})=۲^۵-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ددددد}\\ \text{پپپپپ}}}{۲}=۳۲-۲=۳۰$$

حالا دقیقاً ۲ پسر می‌خواهیم که تعداد حالت‌های آن برابر است با:

$$\text{د د د پ پ}\Rightarrow\frac{۵!}{۲!۳!}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

پس داریم: $P(\text{دقیقاً ۲ پسر}\,|\,\text{هم پسر و هم دختر})=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$

۲۸- گزینهٔ ۲ حاصل‌ضرب ۱۲ در حالت‌های ۳۴، ۴۳، ۲۶ و ۶۲ تولید می‌شود یعنی فضای نمونه‌ای محدودشده ۴ عضو دارد. ما در بین این‌ها جمعِ ۷ می‌خواهیم که در دو حالت ۴۳ و ۳۴ رخ داده است. پس: $P(\text{مجموع ۷}\,|\,\text{حاصل‌ضرب ۱۲})=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۲۹- گزینهٔ ۱ برای مجموع ۷، شش حالت داریم:

۱۶,۲۵,۳۴,۴۳,۵۲,۶۱

پس فضای نمونه‌ای محدودشده ۶عضوی است. حالا دنبال حاصل‌ضرب ۱۲ هستیم یعنی ۳۴ و ۴۳ قبول‌اند، پس:

$P(\text{حاصل‌ضرب ۱۲}\,|\,\text{مجموع ۷})=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

۳۰- گزینهٔ ۴ فضای نمونه‌ای محدودشده شامل ۱۵ عضو است:

$S=\{۲۱,۳۲,۳۱,۴۱,۴۲,۴۳,۵۱,۵۲,۵۳,۵۴,۶۱,۶۲,۶۳,۶۴,۶۵\}$

حالا در بین این‌ها می‌خواهیم حاصل‌ضرب، فرد باشد یعنی باید هر دو فرد باشند؛ پس حالت‌های $\{۳۱,۵۱,۵۳\}$ قبول‌اند و داریم:

$P(\text{حاصل‌ضرب فرد}\,|\,\text{بار دوم کم‌تر})=\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}$

۳۱- گزینهٔ ۳ در پرتاب ۲ تاس کلاً $۶^۲=۳۶$ حالت داریم اما در این‌جا فضای نمونه‌ای محدودشده است. چون باید حداقل یک رقم ۲ باشد، داریم: $S=\{۱۲,۲۲,۳۲,۴۲,۵۲,۶۲,۲۱,۲۳,۲۴,۲۵,۲۶\}$

دقت کردید که ۲۲ را یک بار می‌نویسیم.

پس: $n(S_{\text{محدودشده}})=۱۱$

البته می‌توانستیم $n(S)$ را با آنالیز ترکیبی هم بشماریم:

$n(\text{حداقل یکی ۲ باشد})=n(\text{کل})-n(\text{هیچ‌کدام ۲ نباشد})$

$=۶\times۶-۵\times۵=۳۶-۲۵=۱۱$

حالا در این فضای محدودشده می‌خواهیم رقم ۳ دیده شود. پس دو حالت ۲۳ و ۳۲ قبول‌اند و داریم: $P=\frac{۲}{۱۱}$

۳۲- گزینهٔ ۴ در (۱)، شرط مجموعِ ۷، احتمال رو شدن دو عدد فرد را به صفر می‌رساند. چون امکان ندارد که مجموع ۷ باشد و هر دو عدد هم فرد باشند. در (۲) حالت‌های اختلاف ۲ عبارت‌اند از:

$S_{\text{محدودشده}}=\{۱۳,۳۱,۲۴,۴۲,۳۵,۵۳,۴۶,۶۴\}$

و در این فضای محدودشده، احتمال «هر دو فرد» می‌شود:

$P(\text{هر دو فرد}\,|\,\text{اختلاف ۲})=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}=٪۵۰$

در (۳) اگر هر دو مضرب ۳ باشند، فضای نمونه‌ای جدید $S=\{۳۳,۳۶,۶۳,۶۶\}$ است و در این فضا احتمال «هر دو فرد» می‌شود: $P(\text{هر دو فرد}\,|\,\text{هر دو مضرب ۳})=\frac{۱}{۴}=٪۲۵$

در (۴) اگر مجموع ۶ باشد، فضای نمونه‌ای محدودشده $\{۱۵,۲۴,۳۳,۴۲,۵۱\}$ است که ۵ عضو دارد و ۳ تای آن‌ها از نوع «هر دو فرد» هستند: $P(\text{هر دو فرد}\,|\,\text{مجموع ۶})=\frac{۳}{۵}=٪۶۰$

۳۳- گزینهٔ ۲ مجموع‌های مضرب ۳ عبارت‌اند از:

۱۲ , ۹ , ۶ , ۳

پس فضای نمونه‌ای محدودشده به صورت زیر است:

$$S=\{۶۶,(۶۳,۳۶,۴۵,۵۴),(۱۵,۵۱,۲۴,۴۲,۳۳),(۱۲,۲۱)\}$$

که ۱۲ عضو دارد. در بین آن‌ها حالت‌هایی را می‌خواهیم که هیچ یک از دو عدد مضرب ۳ نباشند:

$$A=\{(۴۵,۵۴),(۱۵,۵۱,۲۴,۴۲),(۱۲,۲۱)\}$$

پس:

$$P(A\,|\,\text{مجموع مضرب ۳})=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

۳۴- گزینهٔ ۴ واضح است که با فرض (۴) یعنی اگر اختلاف ارقام ۴ باشد، امکان ندارد هر دو عدد مضرب ۳ شوند. پس در این حالت $P(A\,|\,B)$ صفر است و حتماً کم‌تر از بقیه خواهد بود.

در (۱) مجموعِ ۹ دارای حالت‌های $\{۳۶,۶۳,۴۵,۵۴\}$ است که در $\frac{۲}{۴}$ حالت‌ها، هر دو عدد مضرب ۳ هستند. در (۲) مجموع بیشتر از ۸ دارای حالت‌های $\{(۳۶,۶۳,۴۵,۵۴),(۵۵,۴۶,۶۴),(۵۶,۶۵),۶۶\}$ است و در بین آن‌ها $\frac{۳}{۱۰}$ احتمال دارد هر دو مضرب ۳ باشند.

در (۳) هم شش حالت $\{۱۱,۲۲,۳۳,۴۴,۵۵,۶۶\}$ مفروض‌اند که با احتمال $\frac{۲}{۶}$ از بین آن‌ها، هر دو عدد مضرب ۳ هستند.

۳۵- گزینهٔ ۳ مجموع ارقام باید ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ باشد. پس فضای نمونه‌ای محدودشده دارای $۱+۲+۴+۶+۲$ عضو است.

پس: $n(S_{\text{محدودشده}})=۱۵$

در پرتاب دو تاس، مجموع دو رقم می‌تواند از ۲ تا ۱۲ باشد و تعداد حالت‌ها برابر است با:

جمع دو تاس	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	
	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد حالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶

حالا ما اختلاف ارقام زوج را می‌خواهیم یعنی اختلاف ۰ یا ۲ یا ۴. حالت‌های مطلوب عبارت‌اند از (یادتان نرود که مجموع باید عدد اول باشد): $\{۱۱\}$

دقت کنید که اگر اختلاف ارقام زوج باشد حتماً مجموع آن‌ها نیز زوج است، پس فقط مجموع ۲ را می‌پذیریم و داریم:

$$P(\text{اختلاف زوج}\,|\,\text{مجموع اول})=\frac{۱}{۱۵}$$

۳۶- گزینهٔ ۱ مجموعِ ۱۵ در سه تاس، حالت‌های مختلفی دارد:

(الف) ۴ , ۵ , ۶ (ب) ۳ , ۶ , ۶ (پ) ۵ , ۵ , ۵

در حالت (الف)، ۶ جایگشت و در (ب) سه جایگشت و در (پ) یک جایگشت داریم پس فضای نمونه‌ای محدودشده $۶+۳+۱=۱۰$ عضو دارد.

در بین این‌ها موارد (ب) و (پ) حداقل یک رقم تکراری دارند که روی هم $۳+۱=۴$ عضو دارند. پس داریم:

$$P(\text{تکراری}\,|\,\text{مجموع ۱۵})=\frac{۴}{۱۰}$$

۳۷- گزینهٔ ۲ ارقام سه تاس ۱، ۲، ۴ و ۵ هستند پس هر تاس ۴ حالت دارد. بنابراین فضای نمونه‌ای محدودشده $۴\times۴\times۴=۶۴$ عضو خواهد داشت. حالا می‌خواهیم هر سه رقم رو شده فرد باشند پس هر تاس باید ۱ یا ۵ آمده باشد: $n(A)=۲\times۲\times۲=۸$

و داریم:

$$P(\text{هر سه فرد}\,|\,\text{هیچ یک مضرب ۳ نیستند.})=\frac{۸}{۶۴}=\frac{۱}{۸}$$

۳۸- گزینهٔ ۴ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای محدودشده $n(S)=۶\times۵\times۴=۱۲۰$ می‌باشد. حالت‌های ارقام متوالی عبارت‌اند از: $(۴,۵,۶)$، $(۳,۴,۵)$، $(۲,۳,۴)$، $(۱,۲,۳)$. البته هر کدام $۳!=۶$ حالت برای جایگشت دارند. پس $۴\times۶=۲۴$ حالت مطلوب وجود دارد و بنابراین:

$$P(\text{متوالی}\,|\,\text{متمایز})=\frac{۴\times۶}{۶\times۵\times۴}=\frac{۱}{۵}$$

۳۹- گزینهٔ ۲ ارقام رو شده ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ هستند پس هر تاس ۴ حالت دارد و فضای نمونه‌ای محدودشده $۴\times۴\times۴=۶۴$ عضوی است. برای سه رقم مختلف هم $۴\times۳\times۲$ حالت داریم. پس احتمال برابر است با:

$$P=\frac{۴\times۳\times۲}{۴\times۴\times۴}=\frac{۳}{۸}$$

بیان فارسی متمم این پیشامد زیباست:

در پرتاب ۳ تاس، ارقام رو شده بیشتر از ۲ هستند. با کدام احتمال حداقل یک رقم تکراری ظاهر شده است؟ جواب می‌شود $\frac{۵}{۸}$.

۴۰- گزینهٔ ۳ پیش‌فرض سؤال این است که A و B پشت سر هم نباشند، پس داریم:

$n(S_{\text{محدودشده}})$ = کل − تعداد حالت‌هایی که A و B پشت سر هم هستند =

$$=۵!-\underbrace{EDC\,AB}_{۴!\times۲!}=۱۲۰-۲۴\times۲=۱۲۰-۴۸=۷۲$$

مطلوب این است که فقط دو نفر بین A و B باشند:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\substack{\text{دو نفر از بین}\\ E,D,C}}\times\underbrace{۲!}_{\text{ترتیب آن‌ها}}\times\underbrace{۲!}_{A,B}\times\underbrace{۲!}_{\substack{\text{جایگشت این ۴ نفر}\\ \text{با نفر پنجم}}}=۲۴$$

پس داریم:

$$P=\frac{۲۴}{۷۲}=\frac{۱}{۳}$$

۴۱- گزینهٔ ۲ تعداد کل حالت‌هایی که زن‌ها کنار هم باشند برابر است با:

مممم (ززز) $\Rightarrow ۵!\times۳!$

حالا می‌خواهیم مردها نیز کنار هم باشند:

$\boxed{\text{مممم}}$ (ززز) $\Rightarrow ۲!\times۳!\times۴!$

پس داریم:

$$P(\text{مردها کنار هم}\,|\,\text{زن‌ها کنار هم})=\frac{۲!\,۳!\,۴!}{۵!\,۳!}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۴۲- گزینهٔ ۴ احتمال رخدادن حداقل یکی از آن‌ها همان $P(A\cup B)$ است. پس می‌توانیم $P(A\cap B)$ را به دست بیاوریم و از روی آن احتمال شرطی‌ها را پیدا کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱۰+۱۲-۱۵}{۳۰}=\frac{۷}{۳۰}$$

پس داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۷}{۳۰}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۷}{۱۲}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۷}{۳۰}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۷}{۱۰}$$

و در نتیجه:

$$P(B|A)-P(A|B)=\frac{۷}{۱۰}-\frac{۷}{۱۲}=\frac{۴۲-۳۵}{۶۰}=\frac{۷}{۶۰}$$

۴۳- گزینهٔ ۴ فرمول احتمال شرطی را ببینید:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۳}{۵}} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۹}{۲۰}$$

حالا مقدار $P(A|B')$ برابر است با:

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{۱-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-\frac{۳}{۵}}$$

اما سؤال گفته بود A و B هم‌شانس هستند پس $P(A)$ هم همان $P(B)$ است:

$$\xrightarrow{P(A)=P(B)=\frac{۳}{۵}} =\frac{\frac{۳}{۵}-\frac{۹}{۲۰}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{\frac{۱۲-۹}{۲۰}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۳}{۸}$$

۴۴- گزینهٔ ۳ فرمول‌های دو قسمت را بنویسیم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{۱}{۵}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۴}$$

با طرفین‌وسطین داریم:

$$۵P(A\cap B)=P(A) \quad و \quad ۴P(A\cap B)=P(B)$$

سؤال گفته مجموع احتمال B و A برابر ۱ است پس:

$$P(A)+P(B)=۵P(A\cap B)+۴P(A\cap B)=۹P(A\cap B)=۱$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \begin{cases} P(B)=\frac{۴}{۹} \\ P(A)=\frac{۵}{۹} \end{cases}$$

و خواستهٔ سؤال $P(A|B')$ است:

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{۱-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{۱-P(B)}$$

$$=\frac{\frac{۵}{۹}-\frac{۱}{۹}}{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\frac{۴}{۹}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۴}{۵}$$

۴۵- گزینهٔ ۴ سؤال می‌گوید:

$$P(A\cup B)=۰/۸۷\,,\,P(B|A)=۰/۰۵ \quad و \quad P(A|B)=۰/۱$$

از تجربهٔ تست قبل، می‌دانیم باید همه‌چیز را به $A\cap B$ ارتباط دهیم. پس اگر $P(A\cap B)=x$ باشد داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow P(B)=۱۰x$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۵}{۱۰۰} \Rightarrow P(A)=۲۰x$$

حالا:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=۲۰x+۱۰x-x=۲۹x=۰/۸۷ \Rightarrow x=۰/۰۳$$

یعنی با احتمال ۰/۰۳ هم A و هم B رخ می‌دهند.

۴۶- گزینهٔ ۱ با داشتن $P(A|B)$ و $P(B)$ می‌توانیم مقدار $P(A\cap B)$ را حساب کنیم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۵}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۵}$$

حالا سؤال $P(B'-A')$ را می‌خواهد:

$$P(B'-A')=P(B')-P(B'\cap A')$$

برای $P(B'\cap A')$ هم متمم $A\cup B$ را در نظر می‌گیریم:

$$P(B'\cap A')=۱-P(A\cup B)=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))$$

$$=۱-(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۵})=۱-\frac{۱۵+۱۰-۲}{۳۰}=۱-\frac{۲۳}{۳۰}=\frac{۷}{۳۰}$$

$$\Rightarrow P(B'-A')=\underbrace{P(B')}_{\frac{۲}{۳}}-\underbrace{P(B'\cap A')}_{\frac{۷}{۳۰}}=\frac{۱۳}{۳۰}=۰/۴۳$$

۴۷- گزینهٔ ۳ به فرمول $P(A'|B)$ نگاه کنید:

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} =\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=۱-P(A|B)$$

پس این‌طور شد:

$$P(A'|B)=۱-P(A|B)$$

حالا داریم:

$$P(A|B)=\frac{۱۲}{۲۵} \Rightarrow P(A'|B)=۱-\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۱۳}{۲۵}=۰/۵۲$$

۴۸- گزینهٔ ۲ اگر فرمول احتمال شرطی برای $P(A|B)$ و $P(B|A)$ را بنویسیم و بر هم تقسیم کنیم داریم:

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)}=\frac{P(A)}{P(B)}$$

بعضی‌ها این نتیجه را هم حفظ می‌کنند.

در این سؤال داریم:

$$\frac{۰/۴}{P(B|A)}=\frac{۰/۲}{۰/۳}\Rightarrow P(B|A)=\frac{۰/۳\times۰/۴}{۰/۲}=۰/۶$$

۴۹- گزینهٔ ۴ سؤال $P(A'|B')$ را می‌خواهد:

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(B)}$$

$$=\frac{۱-۰/۷۴}{۱-۰/۳۵}=\frac{۰/۲۶}{۰/۶۵}=\frac{۲۶}{۶۵}\xrightarrow[\div۱۳]{\div۱۳}=\frac{۲}{۵}$$

۵۰- گزینهٔ ۳ شرط مستقل‌بودن این است که $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. پس اول احتمال اشتراک را پیدا کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{۶}{n}=\frac{۲}{n}+\frac{۵}{n}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{n}$$

حالا باید این مقدار را مساوی ضرب احتمال A و B قرار دهیم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{n}=\frac{۲}{n}\times\frac{۵}{n}\Rightarrow\frac{۱۰}{n^۲}=\frac{۱}{n}\Rightarrow n=۱۰$$

یعنی فضای نمونه‌ای، ده‌عضوی است.

۵۱- گزینهٔ ۳ شرط مستقل‌بودن این است که احتمال اشتراک برابر ضرب احتمال‌ها باشد. پس A وقتی از خودش مستقل است که $P(A\cap A)=P(A)\times P(A)$ باشد؛ یعنی:

$$P(A)=(P(A))^۲$$

این هم وقتی رخ می‌دهد که $P(A)=۰$ یا $P(A)=۱$ باشد. پس A پیشامد حتمی یا غیرممکن است.

دقت کنید پیشامد A در این حالت، از مکملش هم مستقل است.

۵۲- گزینهٔ ۱

درست است $P(A\cap\varnothing)=P(A)P(\varnothing)\Rightarrow P(\varnothing)=P(A)\times۰=۰$

درست است $P(A\cap S)=P(A)P(S)\Rightarrow P(A)=P(A)\times۱$

پس هر دو درست هستند.

۵۳- گزینهٔ ۳ این فضای نمونه‌ای:

$S=\{$خخ، شخ، خش، شش$\}$

اول احتمال هر کدام را حساب کنیم:

$P(A)=P($اولی ش$)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

$P(B)=P($دومی ش$)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

$P(C)=P($مثل هم$)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

حالا اشتراک‌ها را کنترل کنیم: $P(A\cap C)=P($اولی ش و مثل هم$)$

$=P($ش ش$)=\frac{۱}{۴}=P(A)\times P(C)$

$P(B\cap C)=P($دومی ش و مثل هم$)$

$=P($ش ش$)=\frac{۱}{۴}=P(B)\times P(C)$

$P(A\cap B)=P($اولی ش و دومی ش$)$

$=P($ش ش$)=\frac{۱}{۴}=P(A)\times P(B)$

پس این سه پیشامد دوبه‌دو مستقل‌اند. اما:

$$P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$$

پس سه پیشامد از هم مستقل نیستند، یعنی ۳ تا از گزاره‌ها درست هستند.

۵۴- گزینهٔ ۳ برای مستقل‌بودن دو پیشامد A و B باید یکی از این دو شرط کنترل شود: $P(A|B)=P(A|B')=P(A)$ (الف)

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (ب)

پس (۲) و (۴) نادرست هستند، چون شرط (الف) در آن‌ها برقرار نیست.

برای (۱) و (۳) اول باید فرمول اجتماع را بنویسیم و $P(A\cap B)$ را به دست آوریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

(۱) $۰/۷۵=۰/۴+۰/۵-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱۵\neq۰/۴\times۰/۵$

(۳) $\frac{۷}{۸}=\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۶}-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۵}{۲۴}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۶}$ پس (۳) مستقل‌اند.

۵۵- گزینهٔ ۳ تکلیف (پ) از همه زودتر معلوم است چون پرتاب اول و دوم از هم مستقل‌اند پس B و C مستقل‌اند؛ دقت کنید که $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(C)=\frac{۱}{۶}$. برای پیشامد A داریم:

$A=$ حالت‌های مجموع ۷ $=\{۱۶,۲۵,۳۴,۴۳,۵۲,۶۱\}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$A\cap C=$ دومی ۳ و مجموع ۷ $=\{۴۳\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{۱}{۳۶}$

$A\cap B=$ مجموع ۷ و اولی ۴ $=\{۴۳\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$

$B\cap C=$ دومی ۳ و اولی ۴ $=\{۴۳\}\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{۱}{۳۶}$

حالا دقت کنید که A و C مستقل‌اند: $\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$، همچنین A و B هم مستقل‌اند. اما A و $B\cap C$ مستقل نیستند چون:

$$\underbrace{P(A\cap B\cap C)}_{\{(۴,۳)\}}=\frac{۱}{۳۶}\neq P(A)\times P(B\cap C)$$

یعنی ۳ گزاره درست‌اند.

۵۶- گزینهٔ ۴ حالت‌هایی که تاس اول ۴ باشد $A=\{۴۱,۴۲,۴۳,۴۴,۴۵,۴۶\}$ هستند پس $P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$.
اگر اختلاف دو رقم صفر باشد، فضای نمونه‌ای به $B=\{۱۱,۲۲,۳۳,۴۴,۵۵,۶۶\}$ محدود می‌شود و در این حالت $P(A|B)=\frac{۱}{۶}$ خواهد بود که با $P(A)$ فرقی ندارد پس B و A مستقل‌اند.

دقت می‌کنید که وقتی تاس اول ۴ باشد اختلاف دو تاس هرگز ۵ یا ۴ نیست. در مورد اختلاف ۲ هم فضا به $B=\{۱۳,۳۱,۲۴,۴۲,۳۵,۵۳,۴۶,۶۴\}$ محدود می‌شود و داریم:
$$P(A|B)=\frac{۲}{۸}\neq P(A)$$

۵۷- گزینهٔ ۱ احتمال این‌که تاس اول ۲ باشد $P(A)=\frac{۱}{۶}$ است.
احتمال این‌که اختلاف دو رقم ۳ باشد $\frac{۱}{۶}$ است:
$$B=\{۱۴,۲۵,۳۶,۶۳,۵۲,۴۱\}\Rightarrow P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$
حالا احتمال اشتراک آن‌ها: $A\cap B=\{۲۵\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$
و چون $\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}$ یعنی $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ برقرار است دو پیشامد از هم مستقل‌اند.

به خاطر می‌سپاریم که در پرتاب دو تاس، «اختلاف دو رقم ۳ باشد» و «تاس اول a باشد» همواره مستقل‌اند. هم‌چنین پیشامد «تاس اول a باشد» از پیشامد «دو تاس یکسان باشند» مستقل است. ضمناً مجموعِ ۷ از هر عددی در تاس اول مستقل است.

۵۸- گزینهٔ ۴ احتمال رخدادن فقط ۳ رو برابر است با:
$$n(S)=۲^۶=۶۴$$
$$n(A)=\binom{۶}{۳}=۲۰\Rightarrow P(A)=\frac{۲۰}{۶۴}$$
احتمال رو بودن سکهٔ اول برابر است با: $P(B)=\frac{۱}{۲}$
حالا اشتراک این‌ها یعنی فقط ۳ رو رخ دهد و اولی هم رو باشد (پس در ۵ پرتاب بعدی فقط دو رو داریم) برابر است با:
$$n(A\cap B)=۱\times\binom{۵}{۲}=۱۰\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱۰}{۶۴}$$
می‌بینید که شرط $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ برقرار است پس دو پیشامد مستقل‌اند.

همیشه در پرتاب n سکه (n زوج)، پیشامد این‌که نصف سکه‌ها رو بیایند از پیشامد رو بودن اولی مستقل است.

۵۹- گزینهٔ ۳ پیشامدها را بنویسیم:
$$A=\text{پیشامد عدد فرد}=\{۱,۳,۵\}$$
$$B=\text{پیشامد عدد مضرب ۳}=\{۳,۶\}$$
$$C=\text{پیشامد عددکم‌تر از ۵}=\{۱,۲,۳,۴\}$$
پس: $A\cap B=\{۳\}\,,\,A\cap C=\{۱,۳\}\,,\,B\cap C=\{۳\}$
حالا شرط مستقل‌بودن را کنترل کنیم:
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۶}\times\frac{۲}{۶}\quad\checkmark$$
$$P(A\cap C)=P(A)\times P(C)\Rightarrow\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۶}\quad\checkmark$$
$$P(B\cap C)=P(B)\times P(C)\Rightarrow\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۶}\quad\times$$
پس A و B مستقل‌اند، A و C نیز مستقل‌اند اما C و B وابسته‌اند و فقط ۲ جفت پیشامد مستقل داریم.

۶۰- گزینهٔ ۱
$$P(\text{مرد})=\frac{n(\text{مرد})}{n(\text{کل})}=\frac{۳۵}{۳۸+x}$$
$$P(\text{متأهل})=\frac{n(\text{متأهل})}{n(\text{کل})}=\frac{۲۰+x}{۳۸+x}$$
$$P(\text{متأهل}\cap\text{مرد})=\frac{n(\text{مرد و متأهل})}{n(\text{کل})}=\frac{۲۰}{۳۸+x}$$
شرط مستقل‌بودن این است که:
$$\frac{۲۰}{۳۸+x}=\frac{۳۵}{۳۸+x}\times\frac{۲۰+x}{۳۸+x}$$
$$\Rightarrow ۲۰=۳۵\times\frac{۲۰+x}{۳۸+x}\Rightarrow ۲۰(۳۸+x)=۳۵\times(۲۰+x)$$
$$\Rightarrow ۷۶۰+۲۰x=۷۰۰+۳۵x\Rightarrow ۶۰=۱۵x\Rightarrow x=۴$$
چون نسبت متأهل به مجرد در مردان ۴ به ۳ است باید در زنان هم همین نسبت برقرار باشد.

۶۱- گزینهٔ ۱
$$P(\text{قبل از B است A})=\frac{\frac{m!}{۲!}}{m!}=\frac{۱}{۲}$$
$$P(\text{کنار هم هستند B و A})=\frac{۲!(m-۱)!}{m!}=\frac{۲}{m}$$
$$P(\text{کنار هم و A قبل از B است B و A})=\frac{(m-۱)!\times۱}{m!}=\frac{۱}{m}$$
شرط مستقل‌بودن: $\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{m}=\frac{۱}{m}$
خُب این رابطه همواره برقرار است پس این دو پیشامد همواره مستقل‌اند $(m\geq۲)$.

۶۲- گزینهٔ ۲
$$P(A'|B)=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{مستقل}}P(A')=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۴}$$
$$P(B'|A)=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{مستقل}}P(B')=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳}$$
حالا مقدار $P(A\cup B)$ برابر است با:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A)\times P(B)}_{\text{چون مستقل‌اند}}$$
$$=\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۹+۸-۶}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

راه دوم متمم پیشامد $A\cup B$ به صورت $A'\cap B'$ است، پس داریم:

$$P(A\cup B)=۱-P(A'\cap B')=۱-\underbrace{P(A')\times P(B')}_{\text{چون مستقل‌اند}}$$

$$=۱-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۳}=۱-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۶۳- گزینهٔ ۴ در پیشامدهای مستقل $P(A|B)=P(A)$ است. پس $P(A)=۰/۶$ را در فرمول $P(A\cup B)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A)\times P(B)}_{P(A\cap B)}$$

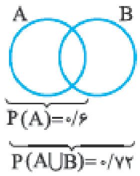
$$\Rightarrow ۰/۷۲=۰/۶+P(B)-۰/۶P(B)$$

$$\Rightarrow ۰/۱۲=۰/۴P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{۰/۱۲}{۰/۴}=۰/۳$$

حالا $P(B-A)$ برابر است با: $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

$$=P(B)-P(A)\times P(B)=۰/۳-۰/۶\times۰/۳=۰/۳-۰/۱۸=۰/۱۲$$

راه دوم به نمودار ون دقت کنید:



$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)$$

$$\Rightarrow ۰/۷۲=۰/۶+P(B-A)$$

$$\Rightarrow P(B-A)=۰/۱۲$$

۶۴- گزینهٔ ۴ در پیشامدهای مستقل، احتمال شرطی برابر احتمال پیشامد سمت چپ است. پس:

$$\xrightarrow{\text{مستقل}}\begin{cases}P(B|A')=۰/۷=P(B)\\ P(A|B)=۰/۵=P(A)\end{cases}$$

حالا $P(A'\cap B')$ را می‌خواهیم:

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$$

$$=(۱-۰/۵)\times(۱-۰/۷)=۰/۵\times۰/۳=۰/۱۵$$

۶۵- گزینهٔ ۳ از این‌که A' و B مستقل‌اند نتیجه می‌شود که A و B نیز مستقل‌اند. احتمال این‌که هیچ‌یک از آن‌ها رخ ندهند برابر است با:

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$$

$$=(۱-۰/۶)\times(۱-۰/۷)=۰/۴\times۰/۳=۰/۱۲$$

احتمال این‌که A رخ دهد و B ندهد برابر است با:

$$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$$

$$=۰/۶\times(۱-۰/۷)=۰/۶\times۰/۳=۰/۱۸$$

پس اختلاف آن‌ها می‌شود $۰/۰۶$.

۶۶- گزینهٔ ۱ در حالت مستقل، فرمول‌ها را می‌نویسیم:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)P(B')=۰/۴$$

$$۴P(A\cap B)=۴P(A)P(B)=۰/۴\Rightarrow P(A)P(B)=۰/۱$$

و اگر دو رابطهٔ بالا را بر هم تقسیم کنیم:

$$\frac{P(B')}{P(B)}=۴\xrightarrow{P(B)+P(B')=۱}P(B)=۰/۲ \text{ و } P(B')=۰/۸$$

و با قراردادن این مقادیر در یکی از دو رابطهٔ بالا داریم: $P(A)=۰/۵$

حالا احتمال $A\cup B'$ را می‌خواهیم.

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A)P(B')$$

$$=۰/۵+۰/۸-۰/۵\times۰/۸=۰/۹$$

راه دوم استفاده از متمم است: $(A\cup B')'=A'\cap B$

$$P(A\cup B')=۱-P(A'\cap B)$$

$$=۱-P(A')P(B)=۱-۰/۵\times۰/۲=۱-۰/۱=۰/۹$$

۶۷- گزینهٔ ۳ طبق فرمول مستقل داریم:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)P(B')$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

حالا سؤال می‌گوید این‌ها مساوی‌اند، پس:

$$P(A)P(B')=P(A)P(B)\Rightarrow P(B)=P(B')$$

جمع $P(B)$ و $P(B')$ باید ۱ باشد پس: $P(B)=P(B')=\frac{۱}{۲}$

۶۸- گزینهٔ ۲ فقط یکی بهبود نمی‌یابد یعنی فقط یکی بهبود می‌یابد (چه‌طور؟). این پیشامد را قبلاً به صورت $(A-B)\cup(B-A)$ یا $(A\cup B)-(A\cap B)$ معرفی کردیم:

$$P(\text{فقط یکی})=P(A-B)+P(B-A)$$

$$=P(A\cap B')+P(B\cap A')$$

$$=P(A)P(B')+P(B)P(A')$$

$$=۰/۷(۱-۰/۶)+۰/۶(۱-۰/۷)$$

$$=(۰/۷)(۰/۴)+(۰/۶)(۰/۳)$$

$$=۰/۲۸+۰/۱۸=۰/۴۶$$

۶۹- گزینهٔ ۲ زنده‌ماندن و نماندن افراد از هم مستقل است (*عُمر دست خداست!*) پس داریم:

$$P(\text{فقط } B \text{ زنده بماند})=P(A \text{ نماند و } B \text{ بماند})$$

$$=P(B\cap A')=P(B)\times P(A')=\frac{۲}{۳}\times(۱-۰/۷۵)$$

$$=\frac{۲}{۳}\times۰/۲۵=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۶}$$

۷۰- گزینهٔ ۳ ما فرمولی برای $P(A\cup B\cup C)$ بلد نیستیم! پس با استفاده از متمم می‌گوییم:

$$P(\text{حداقل یکی حل کند})=۱-P(\text{هیچ‌کدام حل نکنند})$$

$$=۱-P(A'\cap B'\cap C')$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل}}=۱-P(A')P(B')P(C')$$

$$=۱-۰/۳\times۰/۴\times۰/۵$$

$$=۱-۰/۰۶۰=۰/۹۴$$

۷۱- گزینهٔ ۲ پرتاب‌ها از هم مستقل‌اند پس داریم:

$$P(\text{بار دوم فرد و بار اول زوج})=P(\text{بار اول زوج})\times P(\text{بار دوم فرد})$$

احتمال زوج‌آمدن تاس، $\frac{۲}{۶}$ و احتمال فردآمدن تاس، $\frac{۴}{۶}$ است و داریم:

$$=\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۹}$$

۷۲- گزینهٔ ۳ وقتی تا رسیدن به «رو» ۴ پرتاب لازم شده یعنی سه پرتاب اول پشت و چهارمی «رو» بوده است (از هم مستقل‌اند):

$$P(\text{ر پ پ پ})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

۷۳- گزینهٔ ۴ فرزندان از هم مستقل‌اند، پس باید احتمال دختربودن اولی، دومی و چهارمی و پسربودن سومی را در هم ضرب کنیم:

$$P(\text{د پ د د})=P(\text{د})P(\text{د})P(\text{پ})P(\text{د})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

۷۴- گزینهٔ ۱ چون پرتاب‌ها از هم مستقل‌اند، احتمال این‌که پرتاب سوم و چهارم پشت باشند، با شرط رو بودن پرتاب دوم، عوض نمی‌شود. پس داریم:

$$P(\text{سومی و چهارمی پشت}\mid\text{دومی رو})$$

$$=P(\text{سومی و چهارمی پشت})=P(\text{سومی پشت})\times P(\text{چهارمی پشت})$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

۷۵- گزینهٔ ۴ از متمم استفاده می‌کنیم:

$$P(\text{حداقل یکی مضرب ۳})=۱-P(\text{هیچ‌کدام مضرب ۳ نباشد})$$

احتمال این‌که یک تاس مضرب ۳ نباشد برابر است با:

$$P=\frac{n(\{۱,۲,۴,۵\})}{n(\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\})}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

چون تاس‌ها از هم مستقل‌اند:

$$P(\text{حداقل یکی مضرب ۳})=۱-\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}=۱-\frac{۸}{۲۷}=\frac{۱۹}{۲۷}$$

۷۶- گزینهٔ ۳ نفر اول ۱۲ ماه را دارد و احتمالش $\frac{۱۲}{۱۲}$ است. نفر دوم یک ماه را ندارد و احتمالش $\frac{۱۱}{۱۲}$ است. نفر سوم دو ماه را ندارد و احتمالش $\frac{۱۰}{۱۲}$ است. نفر چهارم هم سه ماه را ندارد و احتمالش می‌شود $\frac{۹}{۱۲}$. پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{از هم مستقل‌اند}}\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}=۱\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۵}{۶}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۵۵}{۹۶}$$

۷۷- گزینهٔ ۲ از متمم استفاده کنیم:

$$P(\text{حداقل دو نفر مثل هم})=۱-P(\text{هیچ دو نفری مثل هم نباشند})$$

$$=۱-P(\text{سه روز مختلف})$$

$$=۱-\underbrace{\frac{۷}{۷}}_{\text{اولی}}\times\underbrace{\frac{۶}{۷}}_{\text{دومی}}\times\underbrace{\frac{۵}{۷}}_{\text{سومی}}=۱-\frac{۳۰}{۴۹}=\frac{۱۹}{۴۹}$$

۷۸- گزینهٔ ۳ نفر اول آزاد است که هر یک از ۴ فصل را انتخاب کند پس احتمالش می‌شود $\frac{۴}{۴}$ اما پنج نفر دیگر باید همگی همان ماه باشند و احتمال هر کدام $\frac{۱}{۴}$ است. پس داریم:

$$\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}=(\frac{۱}{۴})^{۵}=(\frac{۱}{۲})^{۱۰}$$

۷۹- گزینهٔ ۴ باید در کلاس زنگ اول جا نگذارد و در کلاس دوم جا بگذارد:

$$P=(۱-\frac{۱}{۳})\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}$$

۸۰- گزینهٔ ۴ ایران باید دو گیم اول را ببرد یا گیم اول را ببرد و دوم را ببازد و سوم را ببرد یا گیم اول را ببازد و دوم و سوم را ببرد.

پس ۳ حالت داریم که ناسازگارند: $WW+WLW+LWW$

$$P=۰/۴\times۰/۴+۰/۴\times۰/۶\times۰/۴+۰/۶\times۰/۴\times۰/۴$$

$$=۰/۱۶+۰/۰۹۶+۰/۰۹۶=۰/۳۵۲$$

۸۱- گزینهٔ ۴ سؤال می‌گوید $P(A)=۲x$ و $P(B)=x$ و چون دو نفر از هم مستقل‌اند $P(A\cap B)=P(A)P(B)=۲x^{۲}$.

حالا احتمال قبولی حداقل یک نفر برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=۲x+x-۲x^{۲}=۳x-۲x^{۲}=۰/۷۲$$

پس داریم: $۲x^{۲}-۳x+۰/۷۲=۰$

از حل این معادله $x=۱/۲$ و $x=۰/۳$ به دست می‌آیند که فقط $x=۰/۳$ قبول است. حالا احتمال قبولی فقط یکی برابر است با:

$$P(A\cup B)-P(A\cap B)=۰/۷۲-\underbrace{۰/۱۸}_{۲x^{۲}}=۰/۵۴$$

۸۲- گزینهٔ ۲ احتمال قبولی در حداقل یک آزمون همان $P(A\cup B)$ است:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)\times P(B)}$$

$$\xrightarrow[\text{و هم‌شانس‌اند.}]{\text{دو آزمون از هم مستقل}}=x+x-xx=۰/۶۴$$

پس داریم: $x^{۲}-۲x+۰/۶۴=۰$

از حل این معادله مقادیر x عبارت‌اند از: $x=۱/۶,۰/۴$ که فقط $x=۰/۴$ قبول است.

حالا احتمال قبولی در آزمون زبان برابر است با:

$$P(\text{کتبی و شفاهی})=P(A\cap B)=x^{۲}=۰/۴^{۲}=۰/۱۶$$

۸۳- گزینهٔ ۲ باید کلید سری (با احتمال $\frac{۲}{۳}$) بسته باشد و از بین دو کلید موازی هم حداقل یکی بسته باشد. پس داریم:

$$P=\frac{۲}{۳}\times(\underbrace{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}}_{\text{حداقل یکی بسته باشد}})=\frac{۲}{۳}\times\frac{۶}{۱۲}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}$$

۸۴- گزینهٔ ۳ وقتی یک روی کارت انتخابی سیاه است، پس فضای نمونه‌ای شامل کارت «دو رو سفید» نیست. یعنی دو کارت $B_۲W$ و $B_۱B_۲$ در فضای محدودشده هستند و روی سیاه که دیده‌ایم یکی از ۳ حالت $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ است. پس $n(S_{محدودشده})=۳$؛ حالا می‌خواهیم روی دیگرش سفید باشد یعنی فقط $B_۳$ مورد قبول است. بنابراین: $P=\frac{۱}{۳}$

۸۵- گزینهٔ ۳ فضای نمونه‌ای محدودشده ۹ عضو دارد:

$$S=\{۱۱,۱۳,۱۵,۳۱,۳۳,۳۵,۵۱,۵۳,۵۵\}$$

$$n(S)=۳\times ۳=۹$$

حالا احتمال این‌که مجموع دو عدد کم‌تر از k باشد $\frac{۱}{۳}$ شده؛ پس ۳تا از عضوهای فضای نمونه‌ای محدودشده در شرط مجموع کم‌تر از k صدق می‌کنند (چون $\frac{۳}{۹}$ می‌شود $\frac{۱}{۳}$) ببینید:

$$S_{محدودشده}=\{\underbrace{۱۱}_{۲},\underbrace{۱۳,۳۱}_{۴},\underbrace{۵۱,۱۵,۳۳}_{۶},\underbrace{۳۵,۵۳}_{۸},\underbrace{۵۵}_{۱۰}\}$$

جمع:

با کمی دقت احتمال این‌که مجموع کم‌تر از ۵ و یا ۶ (کم‌تر یا مساوی ۴) باشد، می‌شود $\frac{۳}{۹}$. پس: $k=۵$ یا ۶

۸۶- گزینهٔ ۳ باید پیشامدی را انتخاب کرد که تعداد بیشتری عضو دارد و با پیشامد A کم‌تر اشتراک دارد. پس اعضای پیشامدها را بنویسیم.

(۱) مجموع ۷، دارای ۶ حالت است: $\{۱۶,۲۵,۳۴,۴۳,۵۲,۶۱\}$

در ۲ حالت از بین این‌ها ۲ ظاهر شده پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{۲}{۶}$.

(۲) مجموع ۵، دارای ۴ حالت است: $\{۱۴,۲۳,۳۲,۴۱\}$

دوتا از حالت‌ها ۲ دارند، پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{۱}{۲}$.

(۳) اختلاف ۲، دارای ۸ حالت است: $\{۱۳,۲۴,۳۵,۶۴,۳۱,۴۲,۵۳,۴۶\}$

که در ۲تا از آن‌ها ۲ هست پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{۲}{۸}$.

(۴) اختلاف ۳، دارای ۶ حالت است: $\{۱۴,۲۵,۶۳,۴۱,۵۲,۳۶\}$

و باز هم ۲تای آن‌ها ۲ دارند، پس احتمال شرطی می‌شود $\frac{۲}{۶}$.

۸۷- گزینهٔ ۲ فضای نمونه‌ای محدودشده شامل جایگشت‌هایی است که دو حرف E کنار هم نباشند:

$$n(S_{محدودشده})=\underbrace{\frac{۶!}{۳!۲!}}_{\text{تعدادکل‌حالات}}-\underbrace{\frac{۵!}{۳!}}_{\text{تعدادحالات}}=۶۰-۲۰=۴۰$$

PEPPER PPP(EE)R

حالا می‌خواهیم حروف P و E یک‌درمیان باشند: $\boxed{PEPEP}R$

پس فقط $۲!$ حالت داریم (درون جعبه فقط همین حالت قبول است) بنابراین:

$$P=\frac{۲}{۴۰}=\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵$$

۸۸- گزینهٔ ۲ فضای نمونه‌ای محدودشده شامل حالت‌هایی است که علی قبل از مهدی باشد: $n(S_{محدودشده})=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$

مطلوب سؤال این است که سعید هم بین آن‌ها باشد. یعنی به ترتیب علی، سعید و مهدی وارد شوند: $n(A)=\frac{۵!}{۳!}=۲۰$

و داریم: $P=\frac{۲۰}{۶۰}=\frac{۱}{۳}$

۸۹- گزینهٔ ۲ پیش‌فرض سؤال این است که حروف صدادار کنار هم باشند:

$$SNRM\ \boxed{AAO}\Rightarrow ۵!\times \underbrace{\frac{۳!}{۲!}}_{\text{درون دسته}}=۳۶۰$$

حالا می‌خواهیم اولاً درون جعبه، حرف O باشد و ثانیاً حرف S در وسط باشد پس دو حالت، قابل قبول است:

$$N,M,R\boxed{S}\boxed{AOA}\quad \text{یا}\quad \boxed{AOA}\boxed{S}N,M,R$$

که در هر مورد $۶=۳!$ حالت داریم. پس: $P=\frac{۲\times ۶}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳۰}$

۹۰- گزینهٔ ۲ فرمول احتمال شرطی را بنویسیم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=۱\Rightarrow P(B\cap A)=P(A)$$

این یعنی $B\cap A=A$ و به بیان دیگر $A\subseteq B$ است. حالا داریم:

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}$$

در سال‌های قبل دیده‌اید که اگر $A\subseteq B$ باشد $B'\subseteq A'$ است.

بنابراین $A'\cap B'=B'$ و داریم: $P(A'|B')=\frac{P(B')}{P(B')}=۱$

۹۱- گزینهٔ ۲

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A-B)}{۱-P(B)}$$

سؤال گفته $P(A|B')$ و $P(B)$ هر دو برابر x هستند پس داریم:

$$x=\frac{P(A-B)}{۱-x}\Rightarrow P(A-B)=x(۱-x)=x-x^۲$$

$$x_S=-\frac{۱}{۲(-۱)}=\frac{۱}{۲}$$

پس حداکثر احتمال آن برابر است با:

$$y=x-x^۲\Rightarrow y_{max}=\frac{۱}{۲}-(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

۹۲- گزینهٔ ۲ فرمول احتمال شرطی را ببینید:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{n(B\cap A)}{n(A)}=\frac{n(B\cap A)}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

پس باید $B\cap A$ دوعضوی باشد. یعنی B پیشامدی است که دو عضو با A مشترک دارد. این دو عضو را به $\binom{۸}{۲}$ حالت انتخاب می‌کنیم و چون B دارای ۳ عضو است، یک عضو دیگر از بین اعضای A' باید برداریم:

$$S=\{\underbrace{x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵,x_۶,x_۷,x_۸}_{\text{عضوهای }A},x_۹,x_{۱۰}\}$$

$$\text{تعداد حالت‌های } B = \underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{انتخاب دو عضو مشترک با A}} \times \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب یک عضو غیرمشترک}} = ۲۸\times۲=۵۶$$

۹۳- گزینهٔ ۱ احتمال هر پیشامد دوعضوی برابر است با:

$$P(A)=P(\{۳,۶\})=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(B)=P(\{x,y\})=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ضرب احتمال این‌ها می‌شود $P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۹}$ که هرگز نمی‌تواند برابر $P(A\cap B)$ باشد (چون $P(A\cap B)$ می‌تواند $\frac{۱}{۶}$ یا $\frac{۲}{۶}$ یا صفر باشد و هرگز مخرجش ۹ نیست) پس امکان ندارد.

۹۴- گزینهٔ ۳ احتمال پیشامد $A=\{۱,۲\}$ برابر است با:

$$P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

حالا پیشامدی که با A سازگار است یعنی اشتراکش با A، $\{۱\}$ یا $\{۲\}$ یا $\{۱,۲\}$ است را می‌خواهیم:

(الف) اگر $A\cap B$ یک‌عضوی باشد، داریم:

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}=P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۳}\times P(B)$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$$

پس B باید دارای ۳ عضو باشد که یکی با A مشترک است:

$$\text{تعداد حالت } B = \overset{\text{عضو مشترک با A}}{\binom{۲}{۱}}\times\underset{\text{دوتا عضو از بین ۶،۵،۴،۳}}{\binom{۴}{۲}} = ۸$$

(ب) اگر $A\cap B$ دوعضوی باشد، داریم:

$$P(A\cap B)=\frac{۲}{۶}=P(A)\times P(B)=\frac{۲}{۶}\times P(B)\Rightarrow P(B)=۱$$

پس در این حالت B خود S است. بنابراین روی هم $۸+۱=۹$ حالت داریم.

۹۵- گزینهٔ ۲ باید $P(A-B|A)$ را حساب کنیم:

$$P(A-B|A)=\frac{P((A-B)\cap(A))}{P(A)}$$

چون $A-B$ قسمتی از A است، اشتراک A و $A-B$ همان $A-B$ خواهد بود:

$$=\frac{P(A-B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B')}{P(A)}$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل}}=\frac{P(A)P(B')}{P(A)}=P(B')=۱-۰/۵۲=۰/۴۸۰$$

احتمال خود $(A-B)$ را هم حساب کنیم:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=۰/۶\times۰/۴۸=۰/۲۸۸$$

میزان تغییر برابر است با $۰/۴۸۰-۰/۲۸۸$ یعنی $۰/۱۹۲$.

۹۶- گزینهٔ ۲

$$P(\text{فقط یک پسر} \mid \text{حداقل یک پسر})=\frac{P(\text{فقط یک پسر})}{P(\text{حداقل یک پسر})}$$

احتمال حداقل یک پسر برابر است با:

$$P(\text{حداقل یک پسر})=۱-P(\text{هر سه دختر})=۱-P(\text{د د د})$$

$$=۱-۰/۴\times۰/۴\times۰/۴=۱-۰/۰۶۴=۰/۹۳۶$$

احتمال فقط یک پسر برابر است با: $P(\text{فقط یک پسر})$

$$=P(\text{پ د د، د پ د، د د پ})=۳\times\underset{\text{پ}}{۰/۶}\times\underset{\text{د}}{۰/۴}\times\underset{\text{د}}{۰/۴}=۰/۲۸۸$$

و احتمال شرطی برابر است با:

$$\frac{۰/۲۸۸}{۰/۹۳۶}=\frac{۲۸۸}{۹۳۶}\xrightarrow[\div۱۲]{\div۱۲}\frac{۲۴}{۷۸}=\frac{۴}{۱۳}$$

۹۷- گزینهٔ ۲

$$P(\{a,e\}\mid\{b,c,d,e\})=\frac{P(\text{اشتراک})}{P(\text{دومی})}$$

$$=\frac{P(\{a,e\}\cap\{b,c,d,e\})}{P(\{b,c,d,e\})}=\frac{P(\{e\})}{P(\{b,c,d,e\})}$$

حالا به فضای نمونه‌ای و احتمال‌های داده‌شده دقت کنید:

$$S=\{\underset{\frac{۱}{۴}}{a},\underbrace{b,c,d}_{\frac{۲}{۳}},e\}\quad،\quad P(\{e\})=۱-\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(\{b,c,d,e\})=۱-P(\{a\})=\frac{۳}{۴}$$

پس جواب می‌شود:

$$=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۱۲\times۳}=\frac{۱}{۹}$$

۹۸- گزینهٔ ۲ وقتی A و B هم‌شانس هستند احتمال هر کدام از آن‌ها x است، پس داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A)P(B)}_{\text{چون مستقل‌اند}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۲۵}=x+x-xx=۲x-x^{۲}\Rightarrow x^{۲}-۲x+\frac{۱۶}{۲۵}=۰$$

از حل این معادله جواب‌های $x=\frac{۸}{۵}$ و $x=\frac{۲}{۵}$ به دست می‌آیند که $\frac{۸}{۵}$ قبول نیست (چون احتمال باید بین ۰ و ۱ باشد). بنابراین:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$=x-x^{۲}=\frac{۲}{۵}-\frac{۴}{۲۵}=\frac{۶}{۲۵}=۰/۲۴$$