

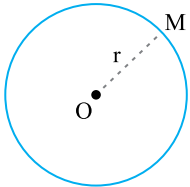
فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

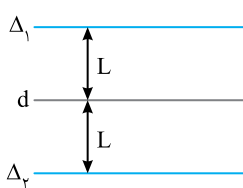
ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۱

ترسیم‌های هندسی



برای پیدا کردن تمام نقطه‌هایی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت r ($r \neq 0$) هستند، کافی است دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم. نقطه‌های روی این دایره، ویژگی مطلوب را دارند.
 $M \in \text{روی دایره} \Leftrightarrow OM = r$



مجموعه نقطه‌هایی که از خط d به فاصله ثابت L هستند، دو خط موازی با d و به فاصله L از آن است (دو خط Δ_1 و Δ_2 را در شکل ببینید).

دایره به مرکز O و شعاع ۶ مفروض است. خط Δ به فاصله ۲ از نقطه O قرار دارد. چند نقطه روی محیط دایره وجود دارد که فاصله‌اش از خط Δ برابر ۴ باشد؟

تست

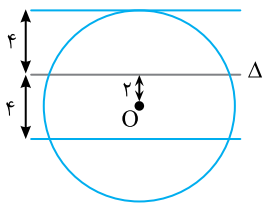
۱

۴ (صفر)

۳ (۴)

۲ (۳)

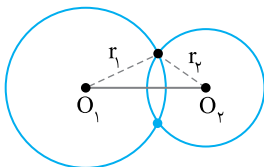
۱ (۲)



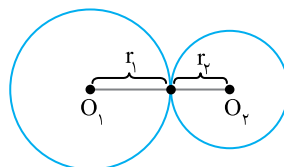
شکل مسئله به صورت مقابل است. می‌دانیم مجموعه نقاطی که از Δ به فاصله ۴ هستند دو خط موازی Δ به فاصله ۴ از Δ هستند. چون شعاع دایره برابر ۶ است، یکی از این دو خط موازی مماس بر دایره و دیگری دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. پس تعداد نقاطی روی دایره که از Δ به فاصله ۴ هستند، ۳ تا است.

راه‌حل

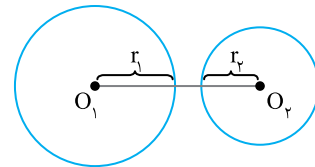
اگر در مسائل ترسیم بخواهیم نقطه‌هایی را به دست آوریم که دارای دو یا چند ویژگی هستند، ابتدا نقطه‌های هر ویژگی را جداگانه رسم می‌کنیم، سپس نقطه‌هایی را که در این ترسیم‌ها مشترک هستند به عنوان جواب در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال، اگر بخواهیم نقطه‌هایی را که «از نقطه ثابت O_1 به فاصله r_1 و از نقطه ثابت O_2 به فاصله r_2 هستند» به دست آوریم، باید نقطه‌های مشترک دو دایره، یکی به مرکز O_1 و شعاع r_1 و دیگری به مرکز O_2 و شعاع r_2 را به دست آوریم. برای این سؤال بسته به شرایط پنج حالت رخ می‌دهد.



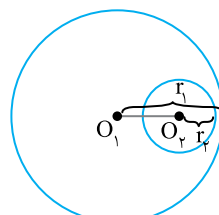
$|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$
دو جواب



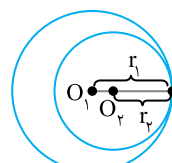
$O_1O_2 = r_1 + r_2$
یک جواب



$r_1 + r_2 < O_1O_2$
بدون جواب



$O_1O_2 < |r_1 - r_2|$
بدون جواب



$O_1O_2 = |r_1 - r_2|$
یک جواب

دو نقطه A و B به فاصله $3m-7$ واحد از هم قرار دارند. اگر تعداد نقطه‌هایی که از A و B به فاصله $m-1$ هستند برابر ۱ باشد، m کدام است؟

تست

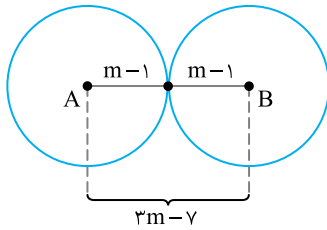
۲

۵ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)



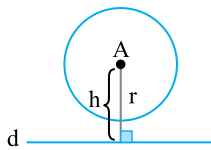
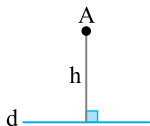
با شرط‌های داده شده، باید دو دایره به مرکزهای A و B و شعاع $m-1$ مماس خارج باشند. بنابراین

$$3m-7 = m-1 + m-1$$

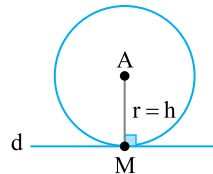
یعنی $m=5$.

راه‌حل

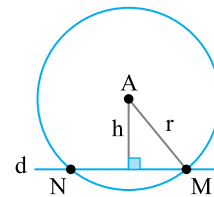
به عنوان مثالی دیگر، در شکل روبه‌رو فاصله نقطه A از خط d برابر h است. می‌خواهیم نقطه‌هایی را به دست آوریم که روی خط d هستند و از نقطه A به فاصله r هستند. با مقایسه r و h حالت‌های زیر رخ می‌دهد.



$r < h$
بدون جواب

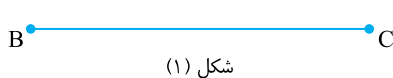


$r = h$
۱ جواب (در شکل M)

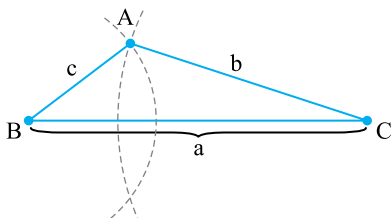


$h < r$
۲ جواب (در شکل M و N)

در مسائل ترسیم شکل، دقت کنید که شکل‌های هم‌نهشت را یکی حساب می‌کنیم. این موضوع را به خصوص برای رسم مثلث در خاطر داشته باشید.



شکل (۱)



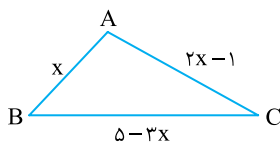
شکل (۲)

روش رسم مثلث با معلوم بودن طول سه ضلع: فرض کنید طول سه ضلع مثلث a، b و c است. ابتدا پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم (شکل (۱)). سپس به مرکز B و شعاع c، و همچنین به مرکز C و شعاع b کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند (شکل (۲)). مثلث مورد نظر است. واضح است که دو کمان رسم شده در صورت متقاطع بودن در پایین BC هم یکدیگر را قطع می‌کنند، اما به دلیل هم‌نهشت بودن دو مثلث آن‌ها را یکی در نظر می‌گیریم.

اگر a، b و c عددهای حقیقی و مثبت باشند، برای اینکه این سه عدد بتوانند طول سه ضلع یک مثلث باشند باید

$$a < b+c, \quad b < a+c, \quad c < a+b$$

و برعکس.



در مثلث ABC اگر $AB < AC$ ، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟

۳ (۲)
۲

۱ (۱)

۲ (۴)
۳

۳ (۳)
 $\sqrt{2}$

تست

۳

راه‌حل

از شرط مسئله نتیجه می‌گیریم

$$AB < AC \Rightarrow x < 2x-1 \Rightarrow 1 < x$$

از طرف دیگر هر ضلع باید از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد، پس

$$AC < AB+BC \Rightarrow 2x-1 < 5-3x+x \Rightarrow 4x < 6 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$BC < AB+AC \Rightarrow 5-3x < x+2x-1 \Rightarrow 6 < 6x \Rightarrow 1 < x$$

مسئله چون $AB < AC$ ، پس $AB < AC+BC$. بنابراین اشتراک این نامساوی‌ها، یعنی $1 < x < \frac{3}{2}$ حدود تغییرات x است و در بین

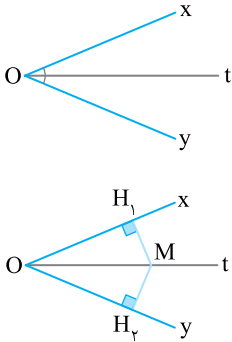
گزینه‌ها عدد $\sqrt{2}$ در این فاصله قرار دارد.

نیمساز، ویژگی‌ها و روش رسم آن: به زاویه xOy در شکل مقابل نگاه کنید. اگر نیم خط Ot به گونه‌ای باشد که زاویه xOy را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، Ot نیمساز زاویه xOy است.

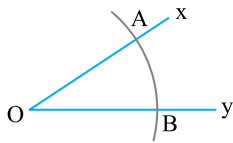
$$Ot \Rightarrow x\hat{O}t = y\hat{O}t$$

هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از ضلع‌های آن به یک فاصله است و برعکس.

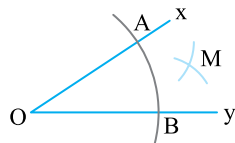
$$M \text{ روی نیمساز } Ot \Leftrightarrow MH_1 = MH_2$$



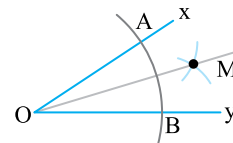
رسم نیمساز: روش اول برای رسم نیمساز زاویه xOy ، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند (شکل (۱)). سپس دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف پاره‌خط AB باز می‌کنیم و دو کمان به مراکز A و B با این دهانه رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند (شکل (۲)). OM نیمساز زاویه xOy است (شکل (۳)).



شکل (۱)

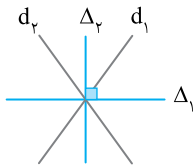


شکل (۲)



شکل (۳)

در شکل (۲) اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی نصف پاره‌خط AB باز کنیم دو کمان رسم شده از A و B بر یکدیگر مماس می‌شوند. در این حالت محل تماس این دو کمان را همان نقطه M در نظر می‌گیریم.



همه‌ی نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نقطه‌های روی نیمسازهای زاویه‌های بین آن‌ها هستند (خط‌های Δ_1 و Δ_2 در شکل). توجه کنید که Δ_1 و Δ_2 بر هم عمودند.

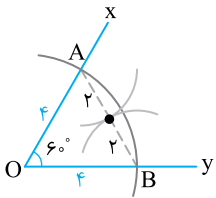
زاویه xOy برابر 60° است. به مرکز O کمانی به شعاع چهار واحد رسم کرده‌ایم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند. اگر بخواهیم نیمساز زاویه xOy را رسم کنیم، حداقل اندازه‌ی شعاع کمان‌هایی که باید به مرکز A و B رسم شوند کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)



با توجه به اطلاعات مسئله شکل روبه‌رو به دست می‌آید. مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، پس $AB=4$. اگر بخواهیم کمان‌های به مرکزهای A و B نقطه‌ی مشترک داشته باشند، باید حداقل شعاع این کمان‌ها برابر نصف اندازه‌ی پاره‌خط AB ، یعنی $\frac{4}{2}=2$ باشد. توجه کنید که در این حالت کمان‌ها در وسط AB بر یکدیگر مماس می‌شوند.

تست
۴

راه‌حل

در مثلث ABC ، $AB=8$ ، $AC=10$ و مساحت این مثلث برابر ۲۷ واحد مربع است. اگر D محل برخورد نیمساز زاویه A با ضلع BC باشد، فاصله‌ی D از ضلع AB کدام است؟

۵ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

با توجه به صورت مسئله شکل روبه‌رو به دست می‌آید. چون هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس

$$DH_1 = DH_2 \quad (1)$$

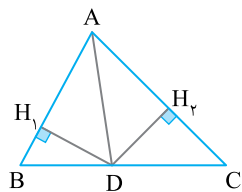
همچنین

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \times DH_1 + \frac{1}{2} AC \times DH_2 = S_{ABC}$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times DH_1 + \frac{1}{2} \times 10 \times DH_2 = 27$$

با توجه به برابری (۱)

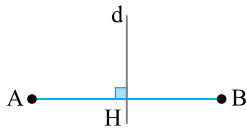
$$4DH_1 + 5DH_2 = 27 \Rightarrow 9DH_1 = 27 \Rightarrow DH_1 = 3$$



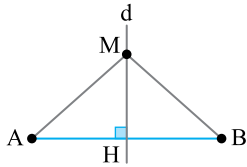
تست
۵

راه‌حل

عمودمنصف، ویژگی‌ها و روش رسم آن: خطی که از وسط یک پاره‌خط می‌گذرد و بر آن پاره‌خط عمود است، عمودمنصف آن پاره‌خط نام دارد.

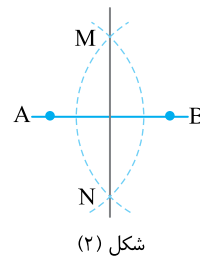
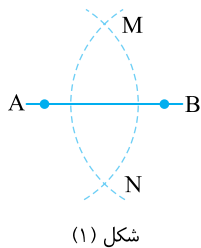


$$\begin{cases} \text{H وسط AB} \\ d \perp AB \end{cases} \Rightarrow \text{d عمودمنصف AB است}$$



هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس. $M \in \text{عمودمنصف AB} \Leftrightarrow MA = MB$

رسم عمودمنصف: چون با داشتن دو نقطه از خط، آن خط به‌طور کامل مشخص می‌شود، پس برای رسم عمودمنصف، کافی است دو نقطه از آن را به‌دست آوریم. می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم و به مراکز A و B کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند (شکل (۱)). خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است (شکل (۲)).



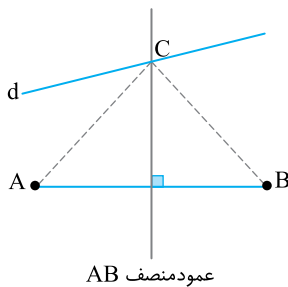
• اکنون توانایی پیدا کردن وسط یک پاره‌خط را داریم.

دو نقطه A و B و خط d در صفحه قرار دارند. برای رسم مثلث متساوی‌الساقین به رأس C به طوری که C روی خط d و AB قاعدهٔ آن باشد، کدام حالت ایجاد نمی‌شود؟

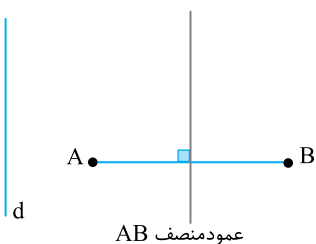
- ۱) یک مثلث منحصر به فرد ۲) مسئله جواب ندارد. ۳) دو مثلث متمایز ۴) نامتناهی مثلث

می‌دانیم نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله است، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند، آنگاه ABC مثلث متساوی‌الساقین مورد نظر است. تعداد جواب‌های این مسئله را در حالت‌های زیر بررسی می‌کنیم.

حالت اول اگر عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند، مسئله یک جواب دارد.



حالت دوم اگر عمودمنصف AB موازی خط d باشد مسئله جواب ندارد.



حالت سوم اگر عمودمنصف AB همان خط d باشد، آنگاه مسئله نامتناهی جواب دارد. در واقع هر نقطه از خط d (به‌جز محل برخورد آن با AB) می‌تواند رأس C باشد. بنابراین حالتی که مسئله دو جواب داشته باشد ایجاد نمی‌شود.

تست

۶

راه‌حل

در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $AB=AC$ و $\hat{A}=70^\circ$. اگر عمودمنصف‌های دو ساق یکدیگر را در نقطه O قطع کنند، اندازه زاویه BOC چند برابر اندازه زاویه OBC است؟

تست
۷

- ۳ (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴)

راه‌حل

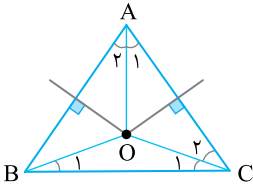
از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. چون مثلث‌های OAC و OAB با یکدیگر هم‌نهشت هستند، پس

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{1}{2} \hat{A} = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$$

همچنین چون مثلث OAC متساوی‌الساقین است، $\hat{C}_2 = \hat{A}_1 = 35^\circ$. اکنون به‌دست می‌آید

$$\hat{C}_1 = 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ$$

به‌طور مشابه $\hat{B}_1 = 20^\circ$ و در نهایت $\hat{BOC} = 140^\circ$. بنابراین $\frac{\hat{BOC}}{\hat{OBC}} = \frac{140^\circ}{20^\circ} = 7$



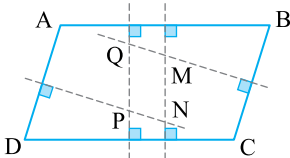
متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است ($\hat{A} > \hat{B}$). چند نقطه در صفحه وجود دارد که از رأس‌های این متوازی‌الاضلاع به یک فاصله است؟

تست
۸

- صفر (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۴ نامتناهی (۴)

راه‌حل

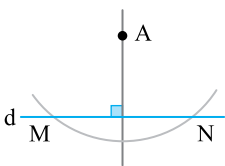
نقطه‌ای که از چهار رأس متوازی‌الاضلاع به یک فاصله است، محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های متوازی‌الاضلاع است. در متوازی‌الاضلاع، چون ضلع‌ها با هم موازی هستند، پس عمودمنصف‌ها دوجه‌دو با هم موازی‌اند و هم‌مرس نیستند. پس چنین نقطه‌ای وجود ندارد.



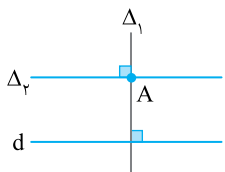
شکل حاصل از برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های متوازی‌الاضلاع در حالت کلی یک متوازی‌الاضلاع است. در صورت این سؤال ذکر شده است $\hat{A} > \hat{B}$ ، پس متوازی‌الاضلاع مورد نظر نمی‌تواند مستطیل باشد. اگر این متوازی‌الاضلاع مستطیل بود، آن‌گاه عمودمنصف ضلع‌های روبه‌رو بر هم منطبق بودند و در این حالت یک نقطه به‌دست می‌آمد.



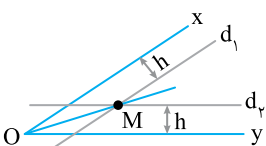
از رسم عمودمنصف AB می‌توان ایده‌ای برای رسم بسیاری از مسائل ترسیم به‌دست آورد. به عنوان مثال:
۱) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن: از A کمانی دلخواه رسم می‌کنیم تا d را در M و N قطع کند. عمودمنصف MN از A می‌گذرد و بر d عمود است.



۲) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن: از نقطه A کمانی چنان رسم می‌کنیم تا خط را در نقطه‌های M و N قطع کند. عمودمنصف MN از A می‌گذرد و بر d عمود است.

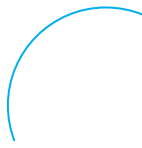


• از دو روش رسم بالا ایده رسم خط گذرنده از یک نقطه و موازی با یک خط دلخواه به‌دست می‌آید. ابتدا خط Δ_1 را که از A می‌گذرد و بر d_2 عمود است رسم می‌کنیم. سپس خط Δ_2 را که از A می‌گذرد و بر Δ_1 عمود است رسم می‌کنیم. خط Δ_2 با d_1 موازی است و از A می‌گذرد.

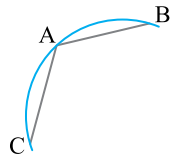


رسم نیمساز: روش دوم مطابق شکل دو خط d_1 و d_2 را به ترتیب موازی Ox و Oy رسم می‌کنیم به‌طوری که d_1 از Ox و همچنین d_2 از Oy به فاصله h هستند. محل برخورد این دو خط را M می‌نامیم. OM نیمساز زاویه xOy است.

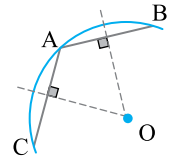
(۳) پیدا کردن مرکز دایره: فرض کنید بخشی از دایره در شکل داده شده و می‌خواهیم مرکز این دایره را به دست آوریم (شکل (۱)). سه نقطه متمایز دلخواه روی این کمان در نظر می‌گیریم (A, B, C در شکل (۲)). محل برخورد عمودمنصف‌های AB و AC مرکز دایره است (شکل (۳)).



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی که از A به فاصله ۳ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر هستند،

کدام است؟

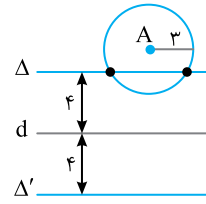
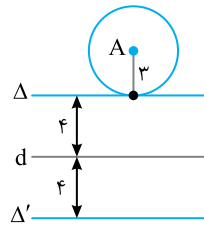
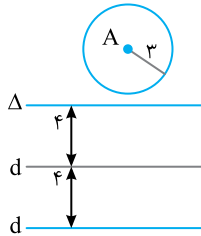
(۴) حداکثر ۴

(۳) حداکثر ۲

(۲) فقط ۱ یا ۲

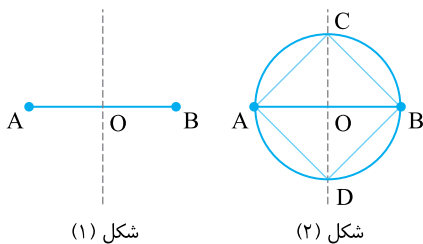
(۱) ۱ یا ۲ یا ۴

نقطه‌هایی که از نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر قرار دارند و نقطه‌هایی که از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر هستند روی دو خط موازی d و به فاصله ۴ سانتی‌متر از آن قرار دارند. جواب‌های مسئله نقاط مشترک دایره و این دو خط موازی هستند. با توجه به عددهای داده شده تعداد جواب‌ها صفر، ۱ یا ۲ است (شکل‌های زیر را ببینید). بنابراین گزینه (۳) درست است.

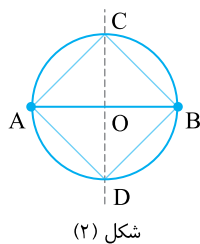


رسم چهارضلعی‌های خاص: برای رسم چهارضلعی‌ها بهتر است ویژگی‌های آن‌ها را در خاطر داشته باشیم.

مستطیل	متوازی‌الاضلاع
(۱) تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد. (۲) قطرهای آن با هم برابرند.	(۱) ضلع‌های مقابل موازی و مساوی‌اند. (۲) قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.
مربع	لوزی
تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی را دارد.	(۱) تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد. (۲) قطرهای عمودمنصف هم هستند و نیمساز زاویه‌های لوزی‌اند.



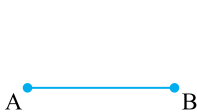
شکل (۱)



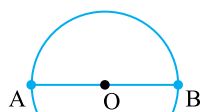
شکل (۲)

(۱) رسم مربع با معلوم بودن طول قطر آن: پاره‌خط AB را به طول قطر مربع رسم می‌کنیم. عمودمنصف آن را رسم و محل برخورد آن با AB را O می‌نامیم (شکل (۱)). به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند (شکل (۲)). ACBD مربع مورد نظر است. این مربع منحصر به فرد است.

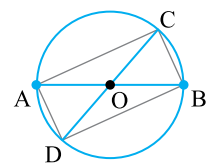
(۲) رسم مستطیل با معلوم بودن طول قطر آن: پاره‌خط AB را به طول قطر مستطیل رسم می‌کنیم (شکل (۱)). به مرکز O (وسط AB) و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل (۲)). قطر دلخواه CD (به جز AB) از این دایره را رسم می‌کنیم (شکل (۳)). ACBD مستطیل مورد نظر است.



شکل (۱)

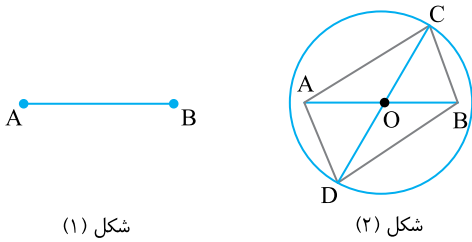


شکل (۲)



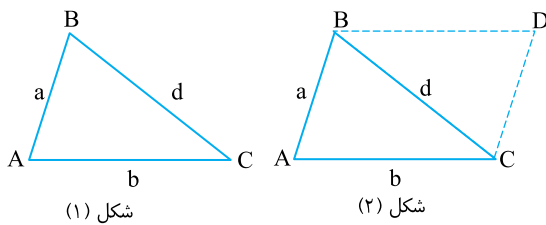
شکل (۳)

این مستطیل منحصر به فرد نیست. واضح است که اگر زاویه بین دو قطر هم معلوم بود، آن وقت مستطیل منحصر به فرد می‌شد.



۳) رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن دو قطر: ابتدا پاره‌خط AB را به طول یکی از قطرهای رسم می‌کنیم (شکل (۱)). سپس به مرکز O (وسط AB) و شعاع نصف قطر دیگر دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل (۲)). قطر دلخواه CD از این دایره را طوری که AB روی آن منطبق نشود رسم می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

• واضح است که نامتناهی متوازی‌الاضلاع با این ویژگی می‌توان رسم کرد.

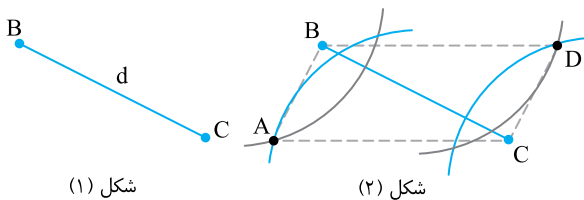


۴) رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن طول دو ضلع و طول یکی از قطرها: **روش اول:** فرض کنید a و b طول دو ضلع و d طول یکی از قطرها باشد. ابتدا مثلث ABC را با طول ضلع‌های a، b و d رسم می‌کنیم (شکل (۱)). از نقطه B خطی موازی AC و از نقطه C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند (شکل (۲)). ABDC متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

• این متوازی‌الاضلاع زمانی قابل رسم است که

$$a < b + d, \quad b < a + d, \quad d < a + b$$

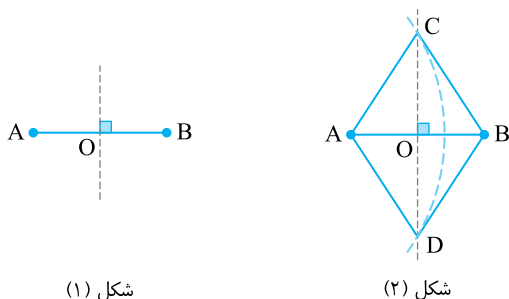
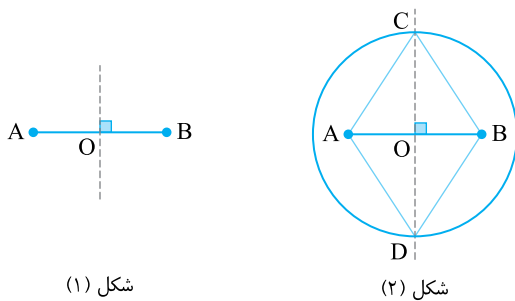
همچنین در صورت قابل رسم بودن، منحصر به فرد است.



روش دوم: ابتدا پاره‌خط BC را به طول d رسم می‌کنیم (شکل (۱)). دهانه‌ی پرگار را یک بار به طول a و یک بار به طول b باز می‌کنیم و از نقطه‌های B و C دو کمان می‌زنیم (شکل (۲)). مطابق شکل، دو نقطه از نقطه‌های برخورد کمان‌ها را A و D می‌نامیم. ABDC متوازی‌الاضلاع مطلوب است. (دلیل: از هم‌نهشتی دو مثلث CAB و BDC به حالت برابری سه ضلع ثابت می‌شود که ABDC متوازی‌الاضلاع است.)

۵) رسم لوزی با معلوم بودن طول دو قطر: فرض کنید d_1 و d_2 طول دو قطر لوزی هستند. ابتدا پاره‌خط AB به طول d_1 و سپس عمود منصف آن را رسم می‌کنیم (شکل (۱)). به مرکز O و شعاع $\frac{d_2}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود منصف را در دو نقطه C و D قطع کند (شکل (۲)). ACBD لوزی مورد نظر است.

• این لوزی منحصر به فرد است.



۶) رسم لوزی با معلوم بودن طول ضلع و طول یک قطر: فرض کنید a طول ضلع و d طول قطر لوزی است. ابتدا پاره‌خط AB به طول d و سپس عمود منصف آن را رسم می‌کنیم (شکل (۱)). به مرکز A و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم تا عمود منصف AB را در C و D قطع کند (شکل (۲)). ACBD لوزی مورد نظر است.

• واضح است که با فرض $a > \frac{d}{2}$ این لوزی منحصر به فرد است.

به ازای کدام یک از اطلاعات داده شده، چهارضلعی به صورت منحصر به فرد قابل رسم نیست؟

(۲) داشتن طول و عرض مستطیل

(۴) داشتن طول قطر مربع

(۱) داشتن طول دو قطر لوزی

(۳) داشتن طول دو قطر متوازی‌الاضلاع

چون زاویه بین دو قطر متوازی‌الاضلاع معلوم نیست، با تغییر این زاویه، نامتناهی متوازی‌الاضلاع قابل ترسیم است.

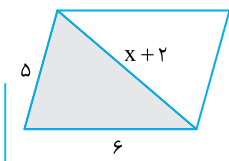
تست

۱۰

راه‌حل

در یک متوازی‌الاضلاع، طول دو ضلع ۵ و ۶ و طول یک قطر $x+2$ است. به ازای چند مقدار صحیح برای x می‌توان این متوازی‌الاضلاع را رسم کرد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) نامتناهی



فرض کنیم متوازی‌الاضلاع مورد نظر به صورت شکل روبه‌رو است. برای این که این متوازی‌الاضلاع قابل رسم باشد باید مثلث رنگی را بتوانیم رسم کنیم و برای رسم این مثلث باید

$$x+2 < 5+6, \quad 5 < 6+x+2, \quad 6 < x+2+5$$

به دست می‌آید $-1 < x < 9$. پس برای x ، ۹ مقدار صحیح صفر، ۱، ۲، ... و ۸ به دست می‌آید.

استدلال

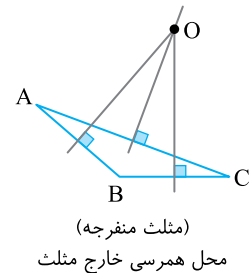
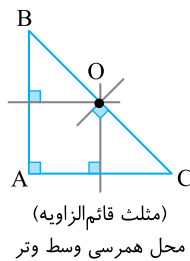
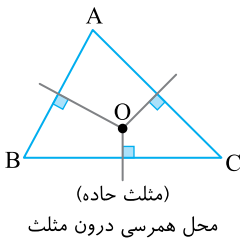
اگر از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت محدود، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع بگیریم یا به اصطلاح «از جزء به کل برسیم»، این روش را «استدلال استقرایی» می‌نامیم.

در استدلال استقرایی، نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود.

اگر براساس واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم نتیجه‌ای کلی بگیریم، این روش استدلال را «استدلال استنتاجی» می‌نامیم.

برخی از نتایج که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند:

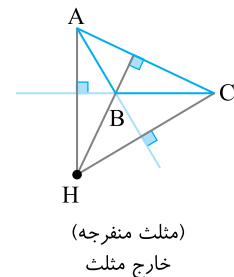
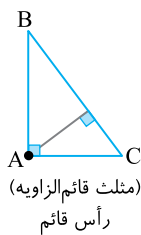
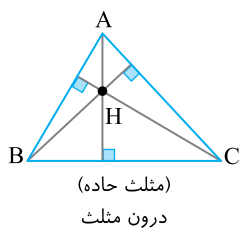
(۱) عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث هم‌مرس هستند (در یک نقطه به هم می‌رسند).



● محل هم‌مرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

$$O \Rightarrow OA = OB = OC$$

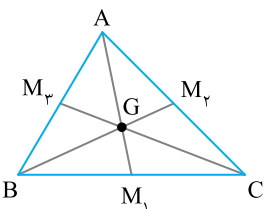
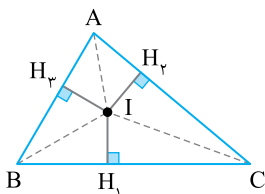
(۲) ارتفاع‌های مثلث (یا امتداد آنها) هم‌مرس‌اند.



(۳) سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث، درون مثلث هم‌مرس هستند.

● محل هم‌مرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

$$I \Rightarrow IH_1 = IH_2 = IH_3$$



(۴) میانه‌های ضلع‌های هر مثلث در نقطه‌ای درون آن هم‌مرس هستند.

● محل هم‌مرسی میانه‌های مثلث را «مرکز ثقل» مثلث می‌نامیم و معمولاً آن را با G نشان می‌دهیم.

تست

۱۲

اگر در مثلث ABC ، $\hat{A} + \hat{B} = 5\hat{C}$ و $\hat{B} - 2\hat{C} = \frac{4}{5}\hat{A}$ ، آن‌گاه نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های ضلع‌های این مثلث کجا قرار دارد؟

- (۱) درون مثلث (۲) بیرون مثلث (۳) وسط یک ضلع (۴) روی رأس زاویه بزرگ‌تر

راه‌حل

از برابری‌های $\hat{A} + \hat{B} = 5\hat{C}$ و $\hat{B} - 2\hat{C} = \frac{4}{5}\hat{A}$ و توجه به این مطلب که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ به دست می‌آید $\hat{A} = 5^\circ$ ، $\hat{B} = 10^\circ$ و $\hat{C} = 3^\circ$.

در نتیجه مثلث منفرجه است و محل برخورد عمودمنصف‌ها خارج مثلث است.

تست

۱۳

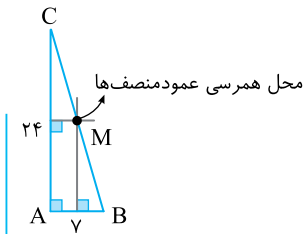
در مثلث ABC اگر $AB = 7$ ، $AC = 24$ و عمودمنصف‌های این دو ضلع بر هم عمود باشند، مجموع فاصله‌های محل برخورد این عمودمنصف‌ها از دو رأس B و C کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) $\frac{25}{2}$ (۳) $\sqrt{527}$ (۴) ۳۱

راه‌حل

با توجه به شکل چون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند، پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است و عمودمنصف‌های آن در وسط وتر BC هم‌رس هستند (نقطه M را در شکل ببینید). اکنون به دست می‌آید

$$MB + MC = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$$



تست

۱۴

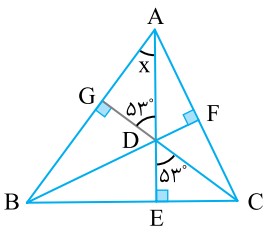
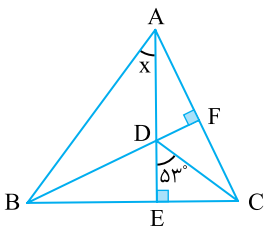
در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

- (۱) 37°
(۲) 53°
(۳) 36°
(۴) 23°

راه‌حل

CD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در G قطع کند (شکل را ببینید). چون ارتفاع‌های مثلث هم‌رس هستند، پس CG ارتفاع وارد بر ضلع AB است. اکنون به دست می‌آید

$$x = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$



گزاره: جمله‌ای است خبری که حتماً درست یا نادرست است (اگرچه درست یا نادرست بودن آن برای ما معلوم نباشد). به عنوان مثال

- (۱) در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند (گزاره درست).
- (۲) مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° نیست (گزاره نادرست).
- (۳) اندازه هر زاویه خارجی مثلث برابر مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش است (گزاره درست).
- (۴) هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است (گزاره درست).

گزاره ساده: گزاره‌ای است که فقط یک خبر را اعلام می‌کند و **گزاره مرکب:** گزاره‌ای است که ترکیبی از چند گزاره ساده است.

نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، گزاره «چنین نیست که p » را نقیض گزاره p می‌گوییم.

- ارزش نقیض یک گزاره مخالف ارزش خود گزاره است.

❖ **نکاتی در مورد نقیض گزاره‌ها:** علاوه بر قرار دادن «چنین نیست که» در ابتدای گزاره می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

(۱) اگر در گزاره «هر»، «به ازای هر» یا «همه» وجود داشته باشد، آن را به «وجود دارد» تغییر دهید و فعل جمله را نقیض کنید (یعنی است بشود نیست، می‌خواهد بشود نمی‌خواهد و ...). به عنوان مثال:

الف) گزاره: مجموع زوایای هر مثلث 180° است. (درست)

نقیض گزاره: مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای آن 180° نیست. (نادرست)

ب) گزاره: هر لوزی یک مربع است. (نادرست)

نقیض گزاره: لوزی‌ای وجود دارد که مربع نیست. (درست)

پ) گزاره: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است. (درست)

نقیض گزاره: چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 360° نیست. (نادرست)

(۲) اگر در گزاره «وجود دارد» باشد، آن را به «هر»، «به ازای هر» یا «همه» تغییر دهید و فعل جمله را نقیض کنید. مثلاً

الف) گزاره: مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. (درست)

نقیض گزاره: همه مستطیل‌ها مربع هستند. (نادرست)

ب) گزاره: چهارضلعی‌ای وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 360° نیست. (نادرست)

نقیض گزاره: در هر چهارضلعی، مجموع زاویه‌های داخلی 360° است. (درست)

(۳) اگر در گزاره‌ای «هیچ» یا «وجود ندارد» باشد، آن را به «وجود دارد» تغییر دهید و فعل جمله را نقیض کنید. برای مثال:

گزاره: هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد. (درست)

نقیض گزاره: مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه داشته باشد. (نادرست)

❖ **گزاره شرطی:** گزاره‌ای است که خبری را با یک جمله شرطی بیان می‌کند.

❖ **قضیه:** نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند قضیه نامیده می‌شوند.

به عبارت دقیق‌تر، قضیه گزاره‌ای است درست که بتوان درستی آن را با استدلال استنتاجی معلوم کرد.

● قضیه ممکن است گزاره‌ای معمولی یا گزاره‌ای شرطی باشد.

❖ هر قضیه دو قسمت دارد:

قسمت اول گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را قبول داریم. این قسمت را **فرض قضیه** می‌نامیم.

قسمت دوم گزاره‌ای است که درست بودن آن را باید از فرض نتیجه گرفت. این قسمت را **حکم قضیه** می‌نامیم. مثلاً

مثلثی که دو زاویه برابر دارد، متساوی‌الساقین است.

فرض قضیه حکم قضیه

❖ اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای به دست می‌آید که آن را **عکس قضیه** مورد نظر می‌نامیم.

● عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

❖ اگر عکس یک قضیه درست باشد، این قضیه و عکس آن را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای را «**قضیه دو شرطی**» می‌نامیم.

● می‌توان قضیه دو شرطی را با استفاده از «اگر و تنها اگر» بیان کرد که نماد آن « \Leftrightarrow » است.

❖ به مثالی که برای رد درستی یک ادعا بیان می‌شود **مثال نقض** می‌گوییم.

❖ **برهان خلف (برهان غیرمستقیم):** نوعی استدلال است که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد. در روش برهان خلف به صورت زیر عمل می‌کنیم

گام (۱): فرض می‌کنیم نقیض حکم درست است.

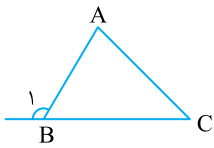
گام (۲): نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه تناقض دارد.

گام (۳): با نادرست بودن نقیض حکم نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

برخی از نکات قضایای مهم:

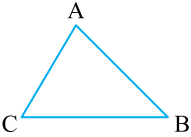
(۱) هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

$$\hat{B}_1 > \hat{A}, \quad \hat{B}_1 > \hat{C}$$



(۲) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر و برعکس.

$$AB > AC \Leftrightarrow \hat{C} > \hat{B}$$



در مثلث ABC، $\hat{BAC} = 50^\circ$ و $AB > AC$ ، بزرگ‌ترین مقدار صحیح زاویه B برحسب درجه کدام است؟

۶۵° (۴)

۶۴° (۳)

۶۳° (۲)

۶۲° (۱)

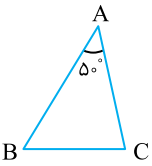
تست
۱۵

چون $\hat{A} = 50^\circ$ ، پس $\hat{B} + \hat{C} = 130^\circ$. از $AB > AC$ نتیجه می‌گیریم $\hat{C} > \hat{B}$. بنابراین

$$\hat{B} + \hat{C} > \hat{B} + \hat{B} \Rightarrow 130^\circ > 2\hat{B}$$

یعنی $65^\circ < \hat{B}$. در نتیجه بزرگ‌ترین مقدار صحیح برای زاویه B برابر ۶۴° است.

راه‌حل



در شکل مقابل M روی نیمساز خارجی زاویه A قرار دارد. نسبت محیط مثلث MBC به محیط مثلث ABC کدام است؟

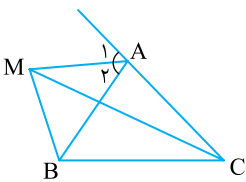
(۲) کمتر از ۱

(۱) بزرگ‌تر از ۱

(۴) غیرمشخص

(۳) مساوی ۱

تست
۱۶



نقطه M روی نیمساز خارجی \hat{A} قرار دارد، پس فاصله M از دو ضلع زاویه خارجی A برابر است. پس $MH = MH'$.

$$\triangle MH'C: \hat{H}' > \hat{M} \Rightarrow MC > H'C \Rightarrow MC > AC + AH' \quad (1)$$

چون دو مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AMH$ و $\triangle AMH'$ به حالت وتر و یک ضلع مساوی همنهشت هستند، پس $AH = AH'$. از نابرابری (۱) نتیجه می‌گیریم

$$MC > AC + AH \quad (2)$$

از طرف دیگر،

$$\triangle MBH: \hat{H} > \hat{M} \Rightarrow MB > BH \quad (3)$$

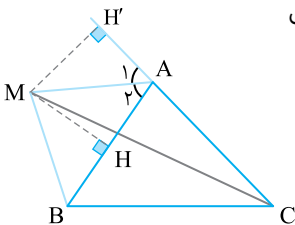
از جمع کردن نابرابری‌های (۲) و (۳) به دست می‌آید

$$MC + MB > AC + AH + BH \Rightarrow MC + MB > AC + AB$$

$$MC + MB + BC > AC + AB + BC \Rightarrow \text{محیط } MBC > \text{محیط } ABC$$

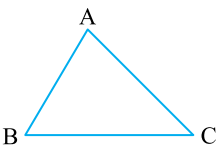
بنابراین نسبت محیط مثلث MBC به محیط مثلث ABC عددی بزرگ‌تر از ۱ است.

راه‌حل



(۳) در هر مثلث، طول هر ضلع بین مجموع و قدرمطلق تفاضل طول‌های دو ضلع دیگر قرار دارد.

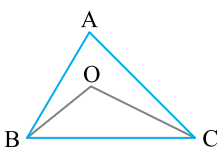
$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$



(۴) در شکل مقابل، نقطه دلخواه O درون مثلث است. در این صورت

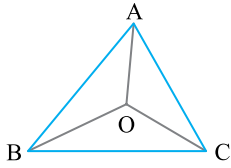
$$\hat{BOC} > \hat{BAC} \quad \text{الف)}$$

$$AB + AC > BO + OC \quad \text{ب)}$$



اگر O نقطه دلخواه درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$\text{محیط } (\triangle ABC) > OA + OB + OC > \text{نصف محیط } (\triangle ABC)$$



در مثلث ABC ، $AB=3$ ، $AC=3-\sqrt{2}$ ، $BC=2+\sqrt{2}$ و O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC است. مجموع محیط‌های سه مثلث OAC ، OBC و OAB کدام می‌تواند باشد؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۲ (۱) | ۱۵ (۲) |
| ۲۲ (۳) | ۲۴ (۴) |

اگر O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$4 < OA + OB + OC < 8 \Rightarrow \text{محیط } (\triangle ABC) < OA + OB + OC < \text{نصف محیط } (\triangle ABC) \quad (1)$$

از طرف دیگر،

$$2(OA + OB + OC) + \text{محیط } (\triangle ABC) = \text{محیط } (\triangle OAB) + \text{محیط } (\triangle OBC) + \text{محیط } (\triangle OAC) + 8$$

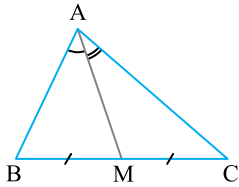
اکنون از نابرابری (۱) به دست می‌آید

$$16 < 2(OA + OB + OC) + 8 < 24$$

(۵) الف) در مثلث ABC ، اگر BC بزرگ‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه $\hat{A} > 60^\circ$.

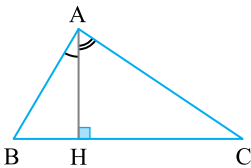
(ب) در مثلث ABC ، اگر BC کوچک‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه $\hat{A} < 60^\circ$.

(۶) الف) در مثلث ABC اگر AM میانه وارد بر ضلع BC باشد و $AB < AC$ ، آن‌گاه $\hat{C}AM < \hat{B}AM$



(ب) در مثلث ABC اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد و $AB < AC$ ، آن‌گاه

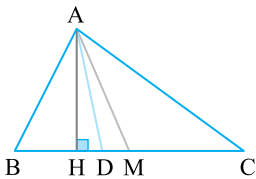
$$\hat{B}AH < \hat{C}AH$$



در مثلث ABC ($AB \neq AC$) همواره نیمساز زاویه A بین میانه و ارتفاع وارد بر ضلع BC است. همچنین

$$AH < AD < AM$$

میانه نیمساز ارتفاع



در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC میانه AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام نابرابری همواره درست است؟

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| ۱) $AM < BC$ | ۲) $AM < AB$ | ۳) $AD < AB$ | ۴) $AD < AM$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|

در هر مثلث (به جز مثلث متساوی‌الساقین) اگر AH ارتفاع، AD نیمساز و AM میانه باشد، آن‌گاه $AH < AD < AM$. توجه کنید در مثلث متساوی‌الساقین ($AB = AC$)، AH ، AD و AM بر هم منطبق می‌شوند.

ترسیم‌های هندسی

آزمون ۱

راه‌حل: ۱۲۰ تا ۱۲۱

محاسبات

۱- نقطه A به فاصله $2m+3$ از خط d قرار دارد. به ازای چند مقدار صحیح m دقیقاً دو نقطه روی خط d به فاصله ۶ از نقطه A وجود دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲- دو نقطه A و B به فاصله $4x-5$ واحد از یکدیگر قرار دارند و دو نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصله $x+1$ و از B به فاصله $2x-1$ هستند. به ازای چند مقدار صحیح برای x این اتفاق می‌افتد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳- حداکثر چند نقطه روی دایره به قطر ۵ واحد وجود دارد که از خط d به فاصله $2/5$ واحد هستند؟
 (۱) دو نقطه (۲) سه نقطه (۳) یک نقطه (۴) چهار نقطه

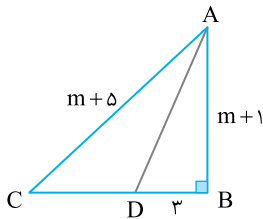
۴- خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر قرار دارد. روی این دایره چند نقطه وجود دارد که از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر هستند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵- نقطه A و خط d در یک صفحه قرار دارند. فاصله نقطه A از خط d برابر ۱۲ سانتی‌متر است. چند نقطه در این صفحه وجود دارند که از نقطه A و خط d به فاصله ۹ سانتی‌متر هستند؟

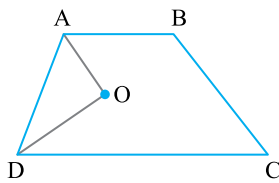
۱) حداکثر ۴ ۲) حداکثر ۲ ۳) دقیقاً ۳ ۴) دقیقاً ۲

۶- در شکل مقابل AD نیمساز زاویه A است. طول DC برابر کدام است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۷- در دوزنقه ABCD نقطه O محل تقاطع دو نیمساز زاویه‌های A و D است. اگر فاصله رأس B از قاعده DC برابر ۶ باشد، مجموع فاصله‌های نقطه O از دو قاعده و ساق AD برابر کدام است؟



۱) ۴
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۲

۸- در رسم مثلث ABC با خط‌کش و پرگار با معلوم بودن دو ضلع $b=7$ و $c=5$ و میانه $m_a=4$ کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

۹- در چهارضلعی ABCD نقطه M از دو سر ضلع CD به یک فاصله و همچنین از دو ضلع AD و CD به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام دو جزء است؟

۱) عمودمنصف‌های AC و CD ۲) نیمسازهای دو زاویه C و D
۳) عمودمنصف CD و نیمساز زاویه D ۴) خط موازی CD و عمودمنصف CD

۱۰- کدام یک از چهارضلعی‌های زیر را نمی‌توان به صورت منحصر به فرد رسم کرد؟

۱) مربعی که طول قطر آن ۱ سانتی‌متر است.
۲) لوزی که طول قطرهای آن ۱ و ۲ سانتی‌متر است.
۳) متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۲ و ۳ سانتی‌متر است.
۴) مربعی که طول ضلع آن $\sqrt{2}$ سانتی‌متر است.

استدلال

محاسبات

- ۱- کدام گزینه بیانگر استدلال استقرایی است؟
 (۱) نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
 (۲) بررسی و مشاهده درستی موضوعی در چند حالت و رسیدن به نتیجه‌ای کلی در آن موضوع.
 (۳) بررسی چگونگی انطباق یک دستور کلی در مورد یک عضو از یک مجموعه.
 (۴) مطابقت یک حکم کلی با یک یا چند حکم دیگر.
- ۲- کدام قضیه به صورت قضیه دو شرطی بیان نمی‌شود؟
 (۱) در مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه یک ضلع یکی هستند.
 (۲) در مثلث قائم الزاویه نقطه هم‌مرسی عمود منصف اضلاع روی وتر است.
 (۳) در مثلث متساوی الاضلاع زاویه‌ها برابر 60° هستند.
 (۴) در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه 90° بزرگ‌ترین ضلع است.
- ۳- برای اثبات قضیه «در مثلث ABC ، $BC > AC$ هرگاه $\hat{A} > \hat{B}$ » به روش برهان خلف، با کدام فرض اثبات را آغاز می‌کنیم؟
 (۱) $\hat{A} < \hat{B}$ یا $\hat{A} = \hat{B}$
 (۲) $\hat{A} < \hat{B}$
 (۳) $BC < AC$
 (۴) $BC = AC$ یا $BC < AC$
- ۴- حکم کلی «نقطه هم‌مرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث یا در داخل آن است یا در خارج آن» با کدام مثال نقض رد می‌شود؟
 (۱) مثلث متساوی الساقین (۲) مثلث متساوی الاضلاع (۳) مثلث قائم الزاویه (۴) مثلث منفرجه
- ۵- نقیض گزاره «مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است» کدام است؟
 (۱) چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° نباشد.
 (۲) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث کمتر از 180° است.
 (۳) مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° نیست.
 (۴) مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° است.
- ۶- در مثلث ABC کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) زاویه بین دو نیمساز زاویه‌های داخلی B و C برابر $\frac{\hat{A}}{2} + 90^\circ$ است.
 (۲) زاویه بین دو نیمساز زاویه‌های خارجی B و C برابر $\frac{\hat{A}}{2} - 90^\circ$ است.
 (۳) زاویه بین نیمساز زاویه داخلی B و نیمساز زاویه خارجی C برابر $\frac{\hat{A}}{2}$ است.
 (۴) زاویه بین نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی \hat{A} برابر 60° است.
- ۷- مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ مقروض است. اگر فاصله نقطه هم‌مرسی نیمسازهای این مثلث از ضلع به طول ۶ برابر $m - 4$ و از ضلع به طول ۸ برابر $2m - 10$ باشد، فاصله آن از ضلع بزرگ‌تر کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸
- ۸- اگر $AB = 2x - 1$ ، $AC = x + 4$ و $BC = 5x + 1$ ، به ازای کدام مقدار x مثلث ABC قابل رسم است؟
 (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- ۹- اگر در مثلث ABC ، $\hat{B} = 55^\circ$ ، $\hat{A} = 67^\circ$ ، $BC = m$ ، $AC = 2$ و $AB = n$ ، کدام گزینه درست است؟
 (۱) $m < 2 < n$ (۲) $n > m > 2$ (۳) $m < n < 2$ (۴) $2 < n < m$
- ۱۰- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، ساق AB را از طرف B به اندازه $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، نقطه تلاقی عمود منصف‌های مثلث ADC کجا واقع است؟
 (۱) درون مثلث (۲) بیرون مثلث (۳) رأس C (۴) وسط AD

آزمون جامع

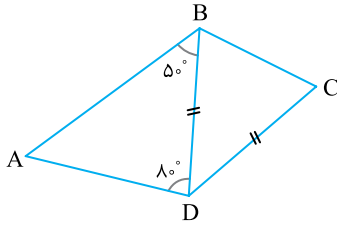
آزمون ۳

راه حل: ۱۲۲ تا ۱۲۳

محاسبات

۱- در مثلث حاده ABC نقطه O محل برخورد عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC است. اندازه زاویه BOC کدام است؟

- (۱) $2\hat{A}$ (۲) $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ (۳) $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ (۴) $180^\circ - 2\hat{A}$



۲- در شکل مقابل کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) رأس B روی نیمساز زاویه ADC است.
 (۲) خط AC عمودمنصف پاره خط BD است.
 (۳) خط BD عمودمنصف پاره خط AC است.
 (۴) رأس D روی عمودمنصف پاره خط AC است.

۳- مثلث ABC مفروض است. نیمسازهای دو زاویه B و C یکدیگر را در نقطه I قطع می‌کنند. نقطه I حتماً:

- (۱) روی عمودمنصف ضلع BC است.
 (۲) روی میانه نظیر ضلع BC است.
 (۳) روی محیط مثلث است.
 (۴) روی نیمساز زاویه A است.

۴- خط موربی دو خط موازی d و d' را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. اگر نقطه O از هر سه خط به یک فاصله باشد، زاویه BOC چند درجه است؟

- (۱) 105° (۲) 95° (۳) 90° (۴) 75°

۵- چند مورد از گزاره‌های زیر با مثال نقض رد می‌شوند؟

- (الف) هر چهارضلعی که اضلاع برابر دارد، مربع است.
 (ب) ارتفاع مثلث با ضلع کوچک‌تر، زاویه کوچک‌تری می‌سازد.
 (پ) نقطه‌ای که از اضلاع مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد، داخل مثلث است.
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

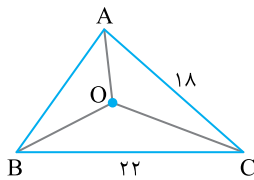
۶- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) فاصله نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها از دو ضلع مثلث ۲ و $\sqrt{5}$ است. طول وتر مثلث کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۷- در چهارضلعی $ABCD$ ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$) رأس C محل تلاقی نیمساز زاویه داخلی A و عمودمنصف ضلع AD است.

اگر $AB = 4$ ، محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر کدام است؟

- (۱) $16 + 2\sqrt{2}$ (۲) $12 + 4\sqrt{2}$ (۳) $8 + 2\sqrt{2}$ (۴) $16 + 4\sqrt{2}$



۸- در شکل روبه‌رو، O نقطه برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است.

اگر مساحت مثلث AOC برابر ۸۱ باشد، مساحت مثلث BOC برابر کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۹۰ (۳) ۹۹ (۴) ۹۲

۹- مثلث دلخواه ABC مفروض است. از رأس‌های این مثلث خط‌هایی موازی ضلع مقابل به آن رأس رسم می‌کنیم تا مثلث

$A'B'C'$ به دست آید. نقطه برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC برای مثلث $A'B'C'$ چه نقطه‌ای است؟

- (۱) نقطه برخورد نیمسازها (۲) نقطه برخورد ارتفاع‌ها
 (۳) نقطه برخورد میان‌ها (۴) نقطه برخورد عمودمنصف‌ها

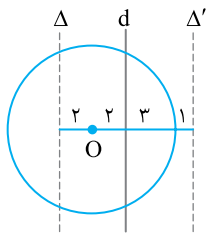
۱۰- در مثلث ABC بین زاویه‌ها رابطه $\hat{B} - \hat{C} = \hat{A}$ برقرار است. نقطه تلاقی ارتفاع‌های این مثلث کجا قرار دارد؟

- (۱) درون مثلث (۲) بیرون مثلث (۳) روی ضلع AC (۴) روی رأس B

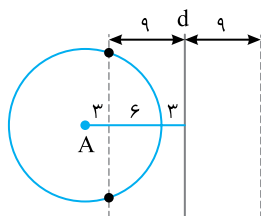
آزمون ۱

فصل ۱

۴- گزینه ۲ بنابر داده‌های سؤال خط d از مرکز O به فاصله ۲ سانتی‌متر است. در ضمن نقطه‌هایی که از خط d به فاصله ۴ سانتی‌متر هستند دو خط موازی در طرفین آن هستند. با توجه به شکل فقط یکی از این دو خط موازی دایره را در دو نقطه قطع می‌کند و این دو نقطه جواب این سؤال هستند.



۵- گزینه ۴ مجموعه نقطه‌هایی که از A به فاصله ۹ هستند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۹ است و مجموعه نقطه‌هایی که از d به فاصله ۹ هستند دو خط موازی در طرفین آن به فاصله ۹ از آن هستند. با توجه به شکل، محل تلاقی این دو خط با دایره جواب این سؤال است که دقیقاً دو نقطه است.



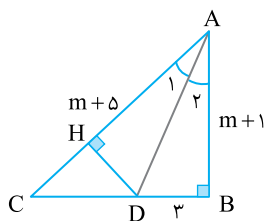
۶- گزینه ۱ می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه یکسان است. پس اگر عمود DH را بر ضلع AC رسم کنیم، آن‌گاه $DH = DB = 3$ بنابراین

$$\begin{cases} AD=AD \\ DB=DH \\ \hat{B}=\hat{H}=90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle ABD \cong \triangle ADH$$

$$AH=AB=m+1$$

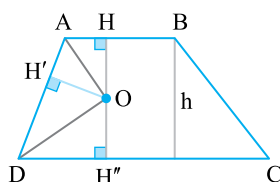
پس $CH = AC - AH = (m+5) - (m+1) = 4$ در نتیجه

$$\triangle CDH: CD^2 = CH^2 + DH^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow CD = 5$$



۷- گزینه ۳ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین عمودهای OH ، OH' و OH'' برابرند. اگر h فاصله B از قاعده DC باشد، آن‌گاه

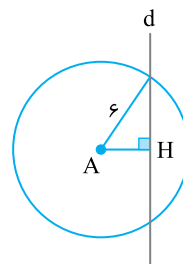
$$OH = OH' = OH'' = \frac{h}{2} \Rightarrow OH + OH' + OH'' = 3 \frac{h}{2} = 3 \left(\frac{6}{2}\right) = 9$$



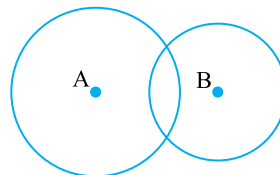
۱- گزینه ۳ می‌دانیم نقطه‌هایی که از A به فاصله ۶ قرار دارند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ تشکیل می‌دهند. از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم این دایره خط d را باید در دو نقطه قطع کند. پس فاصله A از خط d کوچک‌تر از ۶ و مسلماً عددی مثبت است.

$$0 \leq AH < 6 \Rightarrow 0 \leq 2m + 3 < 6 \Rightarrow -3 \leq 2m < 3 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq m < \frac{3}{2}$$

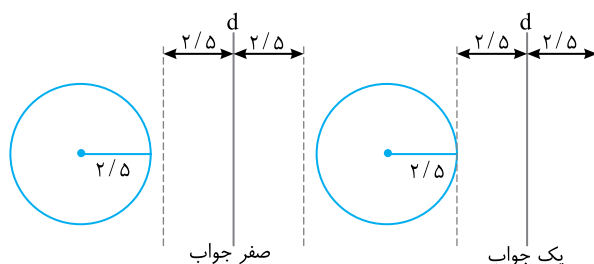
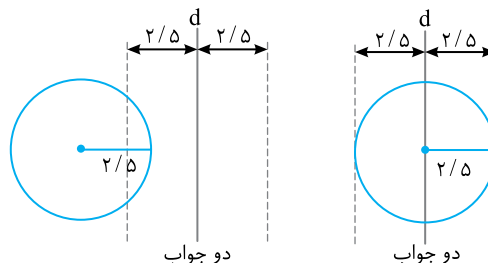
در این فاصله m مقادیر صحیح -1 ، 0 و 1 را می‌تواند بگیرد.



۲- گزینه ۱ برای این منظور، باید دایره به مرکز A و شعاع $x+1$ و دایره به مرکز B و شعاع $2x-1$ متقاطع باشند. یعنی $(2x-1) - (x+1) < AB < x+1 + 2x-1 \Rightarrow x-2 < 4x-5 < 3x$ یعنی $1 < x < 5$. چون x عدد صحیح است، پس $x \in \{2, 3, 4\}$.

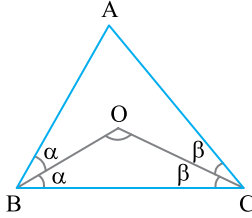


۳- گزینه ۱ مجموعه نقاطی که از خط d به فاصله $2/5$ واحد باشند دو خط موازی در طرفین آن است. چون قطر دایره برابر ۵ است و فاصله این دو خط موازی هم برابر ۵ است، پس نقاط تلاقی دو خط موازی با دایره حداکثر ۲ نقطه است (شکل‌ها را ببینید). به عبارت دیگر با توجه به داده‌های سؤال حالتی که هر دو خط موازی دایره را در دو نقطه قطع کند به وجود نمی‌آید.



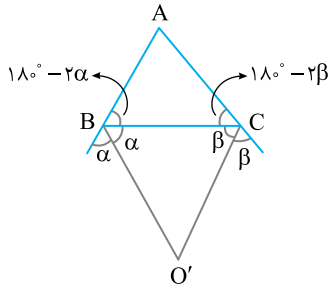
۶- گزینه ۴ اگر نقطه تلاقی دو نیمساز \hat{B} و \hat{C} باشد، با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \hat{A} = 18^\circ - 2(\alpha + \beta) \\ \hat{O} = 18^\circ - (\alpha + \beta) \end{cases} \Rightarrow \hat{O} = 9^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$



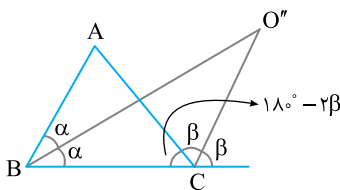
در ضمن اگر O' نقطه تلاقی دو نیمساز زاویه‌های خارجی B و C باشد، آن‌گاه با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \hat{A} + 18^\circ - 2\alpha + 18^\circ - 2\beta = 18^\circ \\ \hat{A} = 2(\alpha + \beta) - 18^\circ \\ \hat{O}' = 18^\circ - (\alpha + \beta) \end{cases} \Rightarrow \hat{O}' = 9^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$



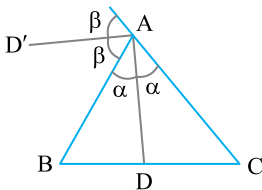
از طرف دیگر اگر O'' نقطه تلاقی نیمساز زاویه B و نیمساز زاویه خارجی C باشد، آن‌گاه با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \hat{O}'' + \alpha + \beta + 18^\circ - 2\beta = 18^\circ \Rightarrow \hat{O}'' = \beta - \alpha \\ \hat{C} = 2\beta = \hat{A} + 2\alpha \Rightarrow \hat{A} = 2(\beta - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \hat{O}'' = \frac{\hat{A}}{2}$$



در صورتی که AD نیمساز زاویه داخلی A و AD' نیمساز زاویه خارجی A باشد با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$2\alpha + 2\beta = 18^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 9^\circ \Rightarrow \hat{DAD}' = 9^\circ$$

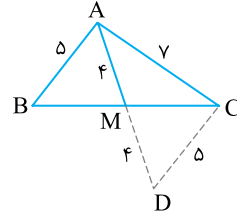


۷- گزینه ۱ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است. پس نقطه هم‌رسی نیمسازهای هر مثلث از سه ضلع به یک فاصله است. بنابراین

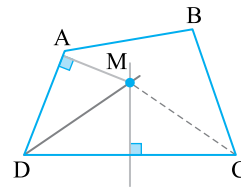
$$m - 4 = 2m - 1 \Rightarrow m = 6$$

در نتیجه فاصله نقطه هم‌رسی نیمسازها از ضلع بزرگ‌تر برابر $m - 4 = 6 - 4 = 2$ است.

۸- گزینه ۲ فرض کنید ABC مثلث مورد نظر باشد. میانه AM را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه D برسیم. در این صورت دو مثلث AMB و MDC هم‌نهشت می‌شوند. بنابراین $DC = AB = 5$ ، در نتیجه سه ضلع مثلث ADC معلوم است (۵ و ۷ و ۸) و با داشتن سه ضلع مثلث فقط یک مثلث ADC در نتیجه یک مثلث ABC قابل رسم است. توجه کنید گزینه‌های (۱) و (۴) با هم متفاوت هستند. در گزینه (۴) مطرح شده است که مثلث با این اطلاعات وجود ندارد ولی در گزینه (۱) مطرح شده است با این اطلاعات نمی‌توان مثلث را با خط کش و پرگار رسم کرد و به اطلاعات دیگری نیز احتیاج داریم.



۹- گزینه ۳ چون M از دو سر پاره خط CD به یک فاصله است روی عمودمنصف ضلع CD است. از طرف دیگر چون M از دو ضلع DA و DC به یک فاصله است، پس روی نیمساز زاویه D قرار دارد. بنابراین M برخورد عمودمنصف CD و نیمساز زاویه D است.



۱۰- گزینه ۳ متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۲ و ۳ سانتی‌متر است جواب است، چون زاویه بین دو قطر مشخص نیست پس با این معلومات نامتناهی متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.

آزمون ۲

فصل ۱

۱- گزینه ۲ در استدلال استقرایی با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت به درستی آن موضوع در حالت کلی می‌رسیم. به عبارت دیگر از جزء به کل می‌رسیم. مسلماً با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود.

۲- گزینه ۴ مسلماً زاویه مقابل به بزرگ‌ترین ضلع در هر مثلث لزوماً قائمه نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه مطرح شده در گزینه (۴) به صورت «اگر یک ضلع مثلثی بزرگ‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه زاویه مقابل آن قائمه است» لزوماً درست نیست.

۳- گزینه ۴ در برهان خلف، فرض را نقیض حکم انتخاب می‌کنیم. صورت شرطی این قضیه به شکل «اگر $\hat{A} > \hat{B}$ ، آن‌گاه $BC > AC$ » است، پس $BC > AC$ حکم این قضیه است و نقیض این حکم $BC \not> AC$ ، یعنی $BC = AC$ یا $BC < AC$ است.

۴- گزینه ۳ در مثلث قائم‌الزاویه نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع وسط وتر است. پس مثلث قائم‌الزاویه مثال نقض برای حکم مورد نظر است.

۵- گزینه ۳ نقیض گزاره «مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است» گزاره «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است» یا «مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° نیست» است.