

فهرست

فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر ۷

فصل دوم: هندسه ۷۹

فصل سوم: تابع ۱۱۶

فصل چهارم: مثلثات ۱۷۸

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی ۲۲۵

فصل ششم: حد و پیوستگی ۲۶۹

فصل هفتم: آمار و احتمال ۳۲۱



حل معادله درجه دو

در سال قبل با معادله درجه دوم و روش‌های حل آن آشنا شدید. روش‌هایی که بیشتر از بقیه به کار ما می‌آیند، «حل معادله درجه دوم به روش تجزیه» و «حل معادله درجه دوم به روش کلی» هستند.

معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) است.

ریشه‌های این معادله در حالت کلی از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ محاسبه می‌شوند که دلتای معادله از رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست می‌آید.

با توجه به این که مقدار عددی دلتا، باید زیر رادیکال قرار گیرد، تعداد ریشه‌های معادله درجه دوم بستگی به علامت دلتا دارد:

۱ اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است:
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

۲ اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه مضاعف است: $x = -\frac{b}{2a}$

۳ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

دو حالت از معادله درجه دوم کاربرد زیادی دارند و خوب است آن‌ها را بلد باشیم:

۱ اگر $a + b + c = 0$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله ۱ و $-\frac{c}{a}$ هستند.

۲ اگر $a - b + c = 0$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله -1 و $-\frac{c}{a}$ هستند.

دست مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشه معادله $(3x^2 - 17x + 14)(5x^2 + 27x + 22) = 0$ کدام است؟

$\frac{17}{3}$ (۴) $\frac{11}{3}$ (۳) $\frac{4}{15}$ (۲) $-\frac{17}{5}$ (۱)

پاسخ گزینه «۳» جواب‌های معادله $(3x^2 - 17x + 14)(5x^2 + 27x + 22) = 0$ از حل دو معادله زیر به دست می‌آیند:

$$5x^2 + 27x + 22 = 0, \quad 3x^2 - 17x + 14 = 0$$

در معادله $3x^2 - 17x + 14 = 0$ رابطه $a + b + c = 0$ برقرار است، پس ریشه‌ها برابر با ۱ و $\frac{14}{3}$ هستند.

در معادله $5x^2 + 27x + 22 = 0$ هم رابطه $a - b + c = 0$ برقرار است، پس ریشه‌ها -1 و $-\frac{22}{5}$ هستند. بزرگ‌ترین ریشه $\frac{14}{3}$ و کوچک‌ترین

ریشه $-\frac{22}{5}$ است که مجموعشان برابر است با: $\frac{14}{3} + \frac{-22}{5} = \frac{4}{15}$

دست در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۶ واحد کوچک‌تر است اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۳ واحد کوچک‌تر می‌شود.

برای آزمایش، حاصل ضرب را بر عدد کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت ۲۹ و باقی‌مانده ۲۰ می‌شود. مجموع این دو عدد کدام است؟

59 (۴) 58 (۳) 57 (۲) 56 (۱)

پاسخ گزینه «۱» دو عدد را x و $x + 6$ می‌گیریم. ضرب صحیح آن‌ها $x^2 + 6x$ است.

در ضرب اشتباهشان، رقم دهگان، ۳ واحد کوچک‌تر حساب شده، پس عدد از مقدار واقعی‌اش ۳ واحد کم‌تر شده است: $x^2 + 6x - 30$

برای آزمایش، حاصل ضرب اشتباه (یعنی $x^2 + 6x - 30$) را بر عدد کوچک‌تر (یعنی x) تقسیم کرده‌ایم؛ خارج قسمت ۲۹ و باقی‌مانده ۲۰ شده است:

$$\begin{array}{r} x^2 + 6x - 30 \quad | \quad x \\ \underline{ } \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

۲۰

$$x^2 + 6x - 30 = 29(x) + 20$$

رابطه تقسیم را برای تقسیم بالا می‌نویسیم:

معادله صفحه قبل را حل می‌کنیم تا عدد کوچک‌تر (یعنی x) به دست آید:

$$x^2 + 6x - 30 = 29x + 20 \Rightarrow x^2 - 23x - 50 = 0 \Rightarrow (x - 25)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \checkmark \\ x = -2 \times \end{cases}$$

چون در سؤال گفته هر دو عدد، طبیعی هستند پس فقط $x - 25$ قابل قبول است. در این حالت عدد بزرگ‌تر برابر با $25 + 6 = 31$ است و در نتیجه مجموع دو عدد برابر است با: $25 + 31 = 56$.

سست اگر معادله $(3x + 4)((m + 1)x^2 + 4x + m - 2) = 0$ دارای ۳ ریشه متمایز باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

$$\Delta (4) \qquad 4 (3) \qquad 2 (2) \qquad 2 (1)$$

پاسخ گزینه «۲». برای آن که معادله فوق دارای ۳ ریشه متمایز باشد، باید معادله $(m + 1)x^2 + 4x + m - 2 = 0$ دارای ۲ ریشه متمایز

باشد که هیچ‌کدام از آن‌ها $x = -\frac{4}{3}$ نباشند؛ پس دو شرط زیر را باید لحاظ کنیم:

(۱) دلتای معادله $(m + 1)x^2 + 4x + m - 2 = 0$ باید مثبت باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4^2 - 4(m + 1)(m - 2) > 0 \xrightarrow{-4} 4 - (m + 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow 4 - m^2 + m + 2 > 0 \Rightarrow m^2 - m - 6 < 0$$

$$\Rightarrow (m - 3)(m + 2) < 0 \Rightarrow -2 < m < 3$$

(۲) معادله $(m + 1)x^2 + 4x + m - 2 = 0$ نباید ریشه $x = -\frac{4}{3}$ داشته باشد (زیرا در این صورت با ریشه عبارت $(3x + 4)$ مشترک شده و

معادله در مجموع دارای ۲ ریشه می‌شود). پس:

$$(m + 1)x^2 + 4x + m - 2 = 0 \xrightarrow{x = -\frac{4}{3}} (m + 1)\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{4}{3}\right) + m - 2 = 0 \Rightarrow \frac{16}{9}(m + 1) - \frac{16}{3} + m - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 16m + 16 - 48 + 9m - 18 = 0 \Rightarrow 25m - 50 = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow m \text{ نباید } 2 \text{ باشد}$$

حالا بین دو شرط بالا اشتراک می‌گیریم:

$$(1) \cap (2) = (-2 < m < 3) \cap (m \neq 2) \Rightarrow m \in (-2, 3) - \{2\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{-1, 0, 1\}$$

پس m ، سه مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

مجموع، تفاضل و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دو

ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ است. می‌خواهیم «مجموع

ریشه‌ها $(\alpha + \beta)$ »، «قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها $(|\alpha - \beta|)$ » و «حاصل ضرب ریشه‌ها $(\alpha\beta)$ » را برحسب ضرایب معادله درجه دو (یعنی a ، b و

c) به دست آوریم. اگر فرض کنیم $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ است، آن‌گاه داریم:

$$\text{۱} \quad \text{مجموع ریشه‌ها: } S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\text{۲} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = \alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{۳} \quad \text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها: } M = |\alpha - \beta| = \left|\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow M = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

تست اگر یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 + kx + 32 = 0$ ، مکعب ریشه دیگر باشد، مقدار مثبت k کدام است؟

۴۰ (۴)

۳۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ گزینه «۲» ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم. یکی از آن‌ها مکعب دیگری است. پس $\beta = \alpha^3$. حال S و P را به دست

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{k}{2} \Rightarrow \alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{2}$$

می‌آوریم:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{32}{2} \Rightarrow \alpha\alpha^3 = 16 \Rightarrow \alpha^4 = 16$$

با حل معادله دوم مقدار α را به دست می‌آوریم و در معادله اول قرار می‌دهیم:

$$\alpha^4 = 16 \Rightarrow \alpha = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2: \alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{2} \Rightarrow 2 + 8 = -\frac{k}{2} \Rightarrow k = -20 \quad \times \\ \alpha = -2: \alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{2} \Rightarrow -2 - 8 = -\frac{k}{2} \Rightarrow k = 20 \quad \checkmark \end{cases}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید. ($\alpha > \beta$)

۱ $\alpha + \beta$

۲ $\alpha\beta$

۳ $\beta - \alpha$

۴ $\alpha^2 + \beta^2$

۵ $\alpha^2 + \beta^2$

۶ $\alpha^4 + \beta^4$

۷ $\alpha^5 + \beta^5$

۸ $\alpha^7 + \beta^7$

۹ $\alpha^2 - \beta^2$

۱۰ $\alpha^4 - \beta^4$

۱۱ $\frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha}$

۱۲ $2\alpha^2 - 4\alpha$

۱۳ $2\alpha^2 + 4\beta$

۱۴ $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$

پاسخ در معادله $2x^2 - 4x + 1 = 0$ با ضرایب $a = 2$ ، $b = -4$ و $c = 1$ ، ابتدا جمع، تفریق و ضرب ریشه‌ها را در سه قسمت اول به دست

می‌آوریم و در قسمت‌های بعدی از آن‌ها کمک می‌گیریم. برای بعضی از قسمت‌ها که کاربرد زیادی دارند، رابطه‌شان را هم بیان می‌کنیم.

۱ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow S = 2$

۲ $\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$

۳ $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4(2)(1)}}{|2|} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ $\xrightarrow{\alpha > \beta} \alpha - \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \beta - \alpha = -\sqrt{2}$

۴ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 2^2 - 2(\frac{1}{2}) = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 3$

$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

دکته مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دو زیاد استفاده می‌شود، پس رابطه آن را بلد باشید:

۵ $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^2 - 2PS = 2^2 - 2(\frac{1}{2})(2) = 4 - 2 = 2$ $\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 2$

$\alpha^2 - \beta^2 = S^2 - 2PS$

دکته مجموع مکعبات ریشه‌های معادله درجه دو هم زیاد استفاده می‌شود! آن را هم بلد باشید:

۶ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha\beta)(\alpha + \beta) = (2)^3 - 3(\frac{1}{2})(2) = 8 - 3 = 5 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = 5$

۷ برای به دست آوردن $\alpha^5 + \beta^5$ ، از دو تساوی $\alpha^3 + \beta^3 = 3$ و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ کمک می‌گیریم. آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و امیدواریم

$$\left. \begin{aligned} (\alpha^3 + \beta^3) &= 3 \\ (\alpha^2 + \beta^2) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^2 + \beta^2) = (3)(5) \Rightarrow \alpha^5 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2 + \beta^5 = 15$$

بعدش اتفاق‌های خوبی بیفتند!

$$\Rightarrow \alpha^5 + \beta^5 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2 = 15 \Rightarrow \alpha^5 + \beta^5 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2(3) = \alpha^5 + \beta^5 + \frac{1}{\alpha} = 15 \Rightarrow \alpha^5 + \beta^5 = \frac{29}{\alpha}$$

۸ از تساوی $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2\alpha^3\beta^3 = (\alpha^3 + \beta^3)^2 - 2(\alpha\beta)^3 = 5^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = 25 - \frac{1}{\alpha} = \frac{99}{\alpha} \Rightarrow \alpha^6 + \beta^6 = \frac{99}{\alpha}$$

۹ عبارت داده‌شده را با کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و با استفاده از قسمت‌های قبل، حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\alpha^3 - \beta^3 = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\sqrt{2}} \underbrace{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}_{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2} \Rightarrow \alpha^3 - \beta^3 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{2}$$

۱۰ عبارت داده‌شده را با اتحاد مزدوج در دو مرحله تجزیه می‌کنیم:

$$\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3) = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\sqrt{2}} \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\frac{1}{\alpha}} \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2)}_{\frac{1}{\alpha}} = (\sqrt{2})(3)\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{6}{\alpha} \Rightarrow \alpha^6 - \beta^6 = \frac{6}{\alpha}$$

$$\text{۱۱} \quad \frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha+1) - \beta(\beta+1)}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \alpha - \beta^2 - \beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha - \beta)}{\alpha\beta} = \frac{\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\sqrt{2}} \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\frac{1}{\alpha}} + \underbrace{(\alpha - \beta)}_{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{\alpha}} = 3 \times 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\alpha+1}{\beta} - \frac{\beta+1}{\alpha} = 6\sqrt{2}$$

۱۲ α جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند و می‌توانیم آن را جای x قرار دهیم:

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} 2\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 4\alpha = -1$$

$$2\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 = 4\alpha - 1$$

۱۳ مشابه قسمت (۱۲) داریم:

پس می‌توانیم جای $2\alpha^2$ ، عبارت $4\alpha - 1$ را جای‌گذاری کنیم:

$$2\alpha^2 + 4\beta = 4\alpha - 1 + 4\beta = 4(\alpha + \beta) - 1 = 8 - 1 = 7 \Rightarrow 2\alpha^2 + 4\beta = 7$$

۱۴ برای محاسبه $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ آن را برابر با یک حرف (مثلاً A) قرار می‌دهیم و با توان دو رساندن دو طرف، حاصل عبارت خواسته‌شده را به

دست می‌آوریم، در این‌جا چون $\alpha > \beta$ است، پس $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$ عددی منفی است. ما حاصل $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ را به دست می‌آوریم و سپس آن را قرینه می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان } 2} A^2 = \underbrace{\alpha + \beta}_2 - 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A^2 = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow A^2 = 2 - \sqrt{\frac{4}{\alpha}} = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow A = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\boxed{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}}$$

نکته اگر $\alpha > \beta > 0$ باشد، آن‌گاه:



دست مجموعه مقادیر m که به ازای آن‌ها معادله $(m+2)x^2 + 4x + m = 1$ دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، کدام است؟

(۱) $-2 < m < 1$ (۲) $-3 < m < 2$ (۳) $2 < m < 3$ (۴) $1 < m < 2$

پاسخ گزینه «۴» معادله را به شکل $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ می‌نویسیم.

برای آن که معادله درجه دو، دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، باید سه شرط $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ را داشته باشد:

(۱) چون معادله دارای دو جواب حقیقی است، دلتا باید مثبت باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(m+2)(m-1) > 0 \xrightarrow{+4} 4 - (m+2)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 - m^2 - m + 2 > 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 < 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-2) < 0 \Rightarrow -3 < m < 2$$

(۲) چون هر دو ریشه منفی هستند، باید جمع ریشه‌ها منفی باشد:

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{m+2} > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{m+2} > 0 \Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

(۳) چون هر دو ریشه منفی هستند، باید ضرب ریشه‌ها مثبت باشد:

حالا باید بین سه شرط بالا اشتراک بگیریم: $(1) \cap (2) \cap (3) = (-3 < m < 2) \cap (m > -2) \cap (m > 1 \text{ یا } m < -2) = 1 < m < 2$

دست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + \lambda\alpha^{-3}$ کدام است؟

(۱) -48 (۲) -44 (۳) -40 (۴) -36

پاسخ گزینه «۳» حاصل ضرب ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\alpha\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{\alpha}$$

بر حسب α به دست می‌آوریم:

پس می‌توانیم به جای $\frac{2}{\alpha}$ ، β را قرار دهیم. حالا عبارت خواسته‌شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\alpha^3 + \lambda\alpha^{-3} = \alpha^3 + \frac{\lambda}{\alpha^3} = \alpha^3 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \beta^3$$

می‌دانیم مجموع مکعبات ریشه‌ها از رابطه $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$ به دست می‌آید، پس:

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = (-4)^3 - 3(2)(-4) = -64 + 24 = -40$$

دست اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta - 3\beta^3$ کدام است؟

(۱) -30 (۲) 30 (۳) -66 (۴) 66

پاسخ گزینه «۳» در معادله $x^2 - 4x - 3 = 0$ با ریشه‌های α و β داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \Rightarrow S = 4$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -3 \Rightarrow P = -3$$

عبارت داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم و از تساوی‌های بالا در آن استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^3\beta - 3\beta^3 = (\alpha\beta)\alpha^2 - 3\beta^3 = -3\alpha^2 - 3\beta^3 = -3(\alpha^2 + \beta^2) = -3(S^2 - 2P) = -3(4^2 - 2(-3)) = -3(16 + 6) = -66$$

حل معادله به روش تغییر متغیر

برخی معادلات هستند که شاید قیافه ترسناکی داشته باشند ولی قلب کوچکی دارند و فیلی راحت، ام می‌شن و آن‌ها را حل می‌کنیم! در این معادلات با جای گذاری t به جای یک عبارت بر حسب x ، می‌توان معادله را به شکل یک معادله ساده‌تر درآورد؛ پس معادله را بر حسب t حل کرده و مقادیر t را به دست می‌آوریم. در نهایت باید عبارتی که جای آن t قرار داده‌ایم را مساوی با جواب‌های t قرار دهیم و آن‌ها را حل کنیم و مجهول اصلی یعنی x را به دست آوریم. قسمتی از سؤالات «حل معادله به روش تغییر متغیر» را در قسمت «معادلات گویا و گنگ» بررسی خواهیم کرد.

مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$

ب) $(x^2 - 3x - 2)^2 - 10(x^2 - 3x) + 36 = 0$

$t = (x^2 - 1)^2$

پاسخ الف) بهترین انتخاب برای تغییر متغیر این است که $(x^2 - 1)^2$ را t بگیریم:

پس معادله به شکل مقابل درمی‌آید: $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0 \xrightarrow{(x^2 - 1)^2 = t} t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$

حالا با جای‌گذاری $t = 1$ و $t = -2$ ، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$t = 1 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

$t = -2 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = -2$ (جواب ندارد.)
همواره نامنفی

پس معادله دارای سه جواب $x = \sqrt{2}$ ، $x = -\sqrt{2}$ و $x = 0$ است.

ب) در معادله فوق تغییر متغیر روبه‌رو را اعمال می‌کنیم:

$x^2 - 3x - 2 = t$

پس $x^2 - 3x$ برابر است با:

$x^2 - 3x - 2 = t \Rightarrow x^2 - 3x = t + 2$

با جای‌گذاری تساوی‌های بالا، معادله را بر حسب t حل می‌کنیم:

$(x^2 - 3x - 2)^2 - 10(x^2 - 3x) + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 10(t + 2) + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 8 \end{cases}$

با جای‌گذاری $t = 2$ و $t = 8$ در رابطه $x^2 - 3x - 2 = t$ ، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$x^2 - 3x - 2 = t \xrightarrow{t=2} x^2 - 3x - 2 = 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$

$x^2 - 3x - 2 = t \xrightarrow{t=8} x^2 - 3x - 2 = 8 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$

پس این معادله دارای چهار ریشه $x = 4$ ، $x = -1$ ، $x = 5$ و $x = -2$ است.

تست به ازای کدام مجموعه‌مقادیر m ، معادله $mx^2 - 2(m - 3)x^2 + m + 2 = 0$ دارای ۴ جواب حقیقی متمایز است؟

$m < -2$ (۴)

$-2 < m < 3$ (۳)

$m > 3$ یا $m < -2$ (۲)

$-2 < m < \frac{9}{8}$ (۱)

پاسخ گزینه «۴» معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ با تغییر متغیر $t = x^2$ به معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود. فقط جواب‌های

مثبت (یا صفر) t به درد ما می‌خورند. به ازای هر جواب مثبت برای t ، معادله اولیه دارای دو جواب $x = \pm\sqrt{t}$ است، پس اگر بخواهیم معادله

$ax^2 + bx^2 + c = 0$ دارای چهار جواب متمایز باشد، باید معادله $at^2 + bt + c = 0$ دارای دو جواب مثبت باشد.

معادله $mx^2 - 2(m - 3)x^2 + (m + 2) = 0$ با تغییر متغیر $x^2 = t$ به معادله $mt^2 - 2(m - 3)t + (m + 2) = 0$ تبدیل می‌شود. برای

آن‌که این معادله دارای دو ریشه مثبت باشد، باید هر سه شرط زیر را داشته باشد:

۱) $\Delta > 0 \Rightarrow 4(m - 3)^2 - 4m(m + 2) > 0 \xrightarrow{\neq 4} m^2 - 6m + 9 - m^2 - 2m > 0 \Rightarrow m < \frac{9}{8}$

۲) $S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2(m - 3)}{m} > 0 \Rightarrow m > 3$ یا $m < 0$

۳) $P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m + 2}{m} > 0 \Rightarrow m > 0$ یا $m < -2$

$m < -2$

حالا بین سه شرط بالا اشتراک می‌گیریم تا محدوده m به دست آید:

تست به ازای کدام محدوده برای m ، معادله $mx - (2m+1)\sqrt{x} + m + 2 = 0$ دارای یک جواب حقیقی است؟

(۱) $(0, \frac{1}{4})$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-2, \frac{1}{4})$ (۴) $(-2, 0) \cup \{\frac{1}{4}\}$

پاسخ گزینه «۴» معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ ، به معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود. فقط جواب‌های مثبت (یا صفر) t به درد ما می‌خورند. به ازای هر جواب مثبت برای t ، معادله اولیه دارای یک جواب $x = t^2$ است. پس اگر بخواهیم معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ دارای یک جواب باشد، باید معادله $at^2 + bt + c = 0$ دارای یک جواب مثبت باشد ($c \neq 0$).

معادله $mx - (2m+1)\sqrt{x} + (m+2) = 0$ با تغییر متغیر $t = \sqrt{x}$ به معادله $mt^2 - (2m+1)t + (m+2) = 0$ تبدیل می‌شود. برای آن که این معادله دارای یک جواب باشد، باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

(۱) معادله یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد: $\Delta > 0$ و $P < 0$.

$$\left. \begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+2) > 0 \Rightarrow -4m+1 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{4} \\ P < 0 &\Rightarrow \frac{m+2}{m} < 0 \Rightarrow -2 < m < 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2 < m < 0$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta = 0 &\Rightarrow -4m+1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \\ S > 0 &\Rightarrow \frac{2m+1}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ یا } m < -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m = \frac{1}{4}$$

(۲) معادله دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد: $\Delta = 0$ و $S > 0$.

پس m می‌تواند در محدوده $(-2, 0) \cup \{\frac{1}{4}\}$ باشد.

تست اگر ریشه‌های معادله $x^2 + kx^2 + 9 = 0$ ، چهار جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، ریشه کوچک‌تر کدام است؟

(۱) -1 (۲) -2 (۳) -3 (۴) -9

پاسخ گزینه «۳» ریشه‌های معادله $x^2 + kx^2 + 9 = 0$ حتماً به صورت $\pm\alpha$ و $\pm\beta$ هستند. (چون اگر $x = \alpha$ در این معادله صدق کند، حتماً $x = -\alpha$ هم صدق می‌کند). اگر فرض کنیم $\alpha > \beta > 0$ باشد، آن‌گاه ترتیب ریشه‌ها از کوچک به بزرگ به صورت زیر است: $-\alpha, -\beta, \beta, \alpha$

چون این ۴ عدد، جملات متوالی یک دنباله حسابی‌اند، پس تفاضل هر دو جمله متوالی آن برابر قدرنسبت است:

$$\left. \begin{aligned} d = \alpha - \beta \\ d = \beta - (-\beta) = 2\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha - \beta = 2\beta \Rightarrow \alpha = 3\beta$$

با تغییر متغیر $x^2 = t$ ، معادله به شکل $t^2 + kt + 9 = 0$ درمی‌آید که ریشه‌های آن هم α^2 و β^2 هستند؛ بنابراین حاصل ضرب آن‌ها را

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^2 \beta^2 = 9 \xrightarrow{\alpha=3\beta} 9\beta^4 = 9 \Rightarrow \beta^4 = 1 \xrightarrow{\beta>0} \beta = 1$$

می‌نویسیم:

پس $\alpha = 3\beta = 3$ است و ریشه‌های معادله اولیه به صورت $3, -1, -1, 3$ هستند که کوچک‌ترین آن‌ها -3 است.

نوشتن معادله درجه دوم با داشتن P و S

فرض کنید می‌خواهیم یک معادله درجه دو بنویسیم که ریشه‌هایش α و β باشند. این معادله به صورت $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ است که اگر آن

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

را باز کنیم، خواهیم داشت:

$$x^2 - \underbrace{(\alpha + \beta)}_S x + \underbrace{\alpha\beta}_P = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

با جای گذاری $\alpha + \beta = S$ و $\alpha\beta = P$ ، معادله بالا به شکل روبه‌رو درمی‌آید:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

پس یک معادله درجه دو که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل ضرب آن‌ها P باشد به این صورت است:

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $3 \pm \sqrt{5}$ باشند.

پاسخ با فرض $\alpha = 3 + \sqrt{5}$ و $\beta = 3 - \sqrt{5}$ ، مقدار S و P را به دست می‌آوریم:

$$S = \alpha + \beta = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6$$

$$P = \alpha\beta = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4$$

الان که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را داریم، آن‌ها را در معادله $x^2 - Sx + P = 0$ جای‌گذاری می‌کنیم تا معادله موردنظر به دست آید:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

تست در مستطیلی به محیط 13 cm و مساحت 10 cm^2 ، تفاضل طول و عرض چند سانتی‌متر است؟

$$2/5 (4)$$

$$2 (3)$$

$$1/5 (2)$$

$$1 (1)$$

پاسخ گزینه «۲» طول و عرض مستطیل را به ترتیب α و β در نظر می‌گیریم، پس:

$$\alpha\beta = 10 \Rightarrow P = 10$$

$$2(\alpha + \beta) = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 6/5$$

پس اگر α و β را ریشه‌های یک معادله درجه دو در نظر بگیریم، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های این معادله را داریم:

$$\alpha\beta = 10 \Rightarrow P = 10$$

$$\alpha + \beta = 6/5 \Rightarrow S = 6/5$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6/5x + 10 = 0$$

معادله درجه دو موردنظر را با داشتن S و P می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم:

$$\Delta = (-6/5)^2 - 4(1)(10) = 42/25 - 40 = 2/25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6/5 \pm \sqrt{2/25}}{2} = \frac{6/5 \pm 1/5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{6/5 + 1/5}{2} = 4 \\ \beta = \frac{6/5 - 1/5}{2} = 2/5 \end{cases}$$

$$\alpha - \beta = 4 - 2/5 = 18/5$$

پس تفاضل طول و عرض این مستطیل برابر است با:

البته می‌توانستیم معادله را حل نکنیم. چون سؤال تفاضل α و β را می‌خواهد، از رابطه $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ استفاده می‌کنیم:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{2/25}}{1} = 1/5$$

ساختن معادله درجه دوم جدید از روی معادله موجود

فرض کنید یک معادله درجه دو به ما می‌دهند و از ما معادله‌ای می‌خواهند که ریشه‌هایش، با ریشه‌های معادله اولیه رابطه‌ای خاص را داشته باشد. برای به دست آوردن معادله درجه دو جدید باید با استفاده از روابط بین ریشه‌ها S و P معادله جدید را به دست آوریم و در نهایت با جای‌گذاری در معادله $x^2 - S'x + P' = 0$ به معادله موردنظر برسیم. به تست زیر دقت کنید:

تست معادله درجه دومی که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 6 = 0$ یک واحد کم‌تر باشند، کدام است؟

$$x^2 + 8x - 33 = 0 (4)$$

$$x^2 - 8x - 33 = 0 (3)$$

$$x^2 + 6x - 31 = 0 (2)$$

$$x^2 - 6x - 31 = 0 (1)$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4$$

پاسخ گزینه «۱» **راه‌حل اول** ریشه‌های معادله اول را α و β می‌گیریم، پس داریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -6$$

ریشه‌های معادله جدید از دو برابر ریشه‌های معادله اول یک واحد کم‌ترند، پس آن‌ها را $2\alpha - 1$ و $2\beta - 1$ می‌گیریم. S و P جدید را حساب

$$S' = (2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2(4) - 2 = 6$$

می‌کنیم:

$$P' = (2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1 = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = 4(-6) - 2(4) + 1 = -31$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 31 = 0$$

حالا S' و P' را در معادله $x^2 - S'x + P' = 0$ جای‌گذاری می‌کنیم:

راه حل دوم اگر x را ریشه معادله اول و در نظر بگیریم که ریشه معادله جدید باید از دو برابر آن یک واحد کم تر باشد، یعنی باید به صورت

$$x = \frac{x' + 1}{2} \quad x' = 2x - 1 \text{ باشد. کافی است } x \text{ را بر حسب } x' \text{ بنویسیم و در معادله اول جای گذاری کنیم:}$$

$$x^2 - 4x - 6 = 0 \xrightarrow{x = \frac{x'+1}{2}} \left(\frac{x'+1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x'+1}{2}\right) - 6 = 0 \xrightarrow{\times 4} x'^2 + 2x' + 1 - 8x' - 8 - 24 = 0 \Rightarrow x'^2 - 6x' - 31 = 0$$

پس معادله جدید به صورت $x'^2 - 6x' - 31 = 0$ یا $x^2 - 6x - 31 = 0$ است.

دست اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند و $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}$ و $\beta^2 + \frac{1}{\alpha}$ ریشه های معادله $2x^2 + mx + n = 0$ باشند، مقدار $m - n$ کدام است؟

پاسخ گزینه «۴» در معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ مقدار S و P را حساب می کنیم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{2} \quad \begin{matrix} -21 (4) & 21 (3) & -1 (2) & 1 (1) \end{matrix}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2$$

S و P معادله جدید را به دست می آوریم:

$$S' = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = ((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) + \left(\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}\right) = S^2 - 2P + \frac{S}{P} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-2) + \frac{\frac{3}{2}}{-2}$$

$$= \frac{9}{4} + 4 - \frac{3}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$P' = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2\beta^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = P^2 + S + \frac{1}{P} = (-2)^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{-2} = 4 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 5$$

با داشتن $S' = \frac{11}{2}$ و $P' = 5$ ، معادله جدید را می نویسیم: $x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{11}{2}x + 5 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 11x + 10 = 0$

پس $m = -11$ و $n = 10$ است و در نتیجه: $m - n = -21$.

دست اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - x = 3$ باشند، ریشه کدام یک از معادله های زیر $(3\alpha + 2)^2$ و $(3\beta + 2)^2$ است؟

$$9x^2 - 49x + 43 = 0 \quad (4) \quad 9x^2 - 43x + 49 = 0 \quad (3) \quad 9x^2 - 48x + 43 = 0 \quad (2) \quad 9x^2 - 43x + 48 = 0 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۳» چون α و β ریشه های معادله $x^2 - x = 3$ هستند؛ پس در معادله صدق می کنند:

$$(3\beta + 2)^2 - \beta = 3 \Rightarrow (3\beta + 2)^2 = \beta + 3 \quad (3\alpha + 2)^2 - \alpha = 3 \Rightarrow (3\alpha + 2)^2 = \alpha + 3$$

پس معادله ای که ریشه هایش $(3\alpha + 2)^2$ و $(3\beta + 2)^2$ باشند، با معادله ای که ریشه هایش $\alpha + 3$ و $\beta + 3$ باشند، یکسان است.

$$(3x + 2)^2 - x = 3 \Rightarrow 9x^2 + 11x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{11}{9} \\ P = \alpha\beta = \frac{1}{9} \end{cases} \quad \text{ابتدا } S \text{ و } P \text{ معادله اولیه را حساب می کنیم:}$$

حالا S و P جدید را حساب می کنیم:

$$S' = (\alpha + 3) + (\beta + 3) = (\alpha + \beta) + 6 = -\frac{11}{9} + 6 = \frac{43}{9}$$

$$P' = (\alpha + 3)(\beta + 3) = \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 = \frac{1}{9} + 3\left(-\frac{11}{9}\right) + 9 = \frac{1 - 33 + 81}{9} = \frac{49}{9}$$

با داشتن S' و P' معادله جدید را می نویسیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{43}{9}x + \frac{49}{9} = 0 \xrightarrow{\times 9} 9x^2 - 43x + 49 = 0$$

ماکسیمم بامینیمم تابع درجه دو (سهمی)

ضابطه کلی تابع درجه دو به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $a \neq 0$ است.

مختصات رأس سهمی به صورت $S = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ است.

مقدار $f(-\frac{b}{2a})$ برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ می‌شود، پس مختصات رأس سهمی را به صورت $S = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ نیز می‌توانیم نشان دهیم.

اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهمی روبه بالا است و سهمی در $x = -\frac{b}{2a}$ دارای

کم‌ترین (مینیمم) مقدار خود است که برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ است:

اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی روبه پایین است و سهمی در $x = -\frac{b}{2a}$ دارای

بیشترین (ماکسیمم) مقدار خود است که برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ است:

پس اگر $a > 0$ ، سهمی دارای **Min** و اگر $a < 0$ ، سهمی دارای **Max** است و هر دو مقدار برابر با $f(-\frac{b}{2a})$ یا $-\frac{\Delta}{4a}$ هستند.



تست اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = x(4-x) + k$ برابر با ۳ باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ گزینه «۲» **را حل اول** اول معادله سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$f(x) = x(4-x) + k = 4x - x^2 + k \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x + k$$

چون ضریب x^2 منفی است، پس سهمی دارای ماکسیمم است (البته اینو فور سوال هم گفته).

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

ماکسیمم و مینیمم تابع درجه دو در رأس آن رخ می‌دهد. اول طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:

حالا با جای گذاری $x = 2$ در $f(x)$ ، مقدار ماکسیمم را به دست می‌آوریم و آن را با ۳ برابر قرار می‌دهیم:

$$\text{Max}(f) = f(2) = -(2)^2 + 4(2) + k = k + 4 \Rightarrow k + 4 = 3 \Rightarrow k = -1$$

را حل دوم ماکسیمم تابع درجه دو برابر با $-\frac{\Delta}{4a}$ است، پس آن را با ۳ برابر قرار می‌دهیم:

$$-\frac{\Delta}{4a} = 3 \Rightarrow \Delta = -12a \Rightarrow b^2 - 4ac = -12a \Rightarrow 4^2 - 4(-1)(k) = -12(-1) \Rightarrow 16 + 4k = 12 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow k = -1$$

در برخی از سوالات، تابع درجه دو را مستقیماً سؤال به ما نمی‌دهد و باید با اطلاعاتی که در اختیارمان قرار می‌دهد تابع درجه دو موردنظر را بنویسیم و ماکسیمم یا مینیمم آن را به دست آوریم. به تست‌های بعدی دقت کنید.

تست مینیمم مجموع مربعات ریشه‌های معادله $x^2 + (k-3)x - (2k-1) = 0$ چه قدر است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

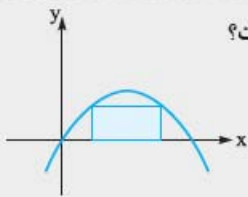
پاسخ گزینه «۴» می‌دانیم مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دو از رابطه $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$ به دست می‌آید، پس در این جا داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{-(k-3)}{1}\right)^2 - 2\left(\frac{-(2k-1)}{1}\right) = (k-3)^2 + 2(2k-1) = k^2 - 6k + 9 + 4k - 2 = k^2 - 2k + 7$$

$$\text{Min}(f) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(4-4(1)(7))}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

پس باید مینیمم تابع $f(k) = k^2 - 2k + 7$ را به دست آوریم:

توجه کنید که در معادله اولیه به ازای هر مقدار k ، حاصل Δ مثبت است یعنی معادله همواره دارای ۲ ریشه متمایز است.



دست بیشترین محیط مستطیلی که بین سهمی $f(x) = -x^2 + 6x$ و محور x ها مطابق شکل قرار دارد، کدام است؟

۱۸ (۲)

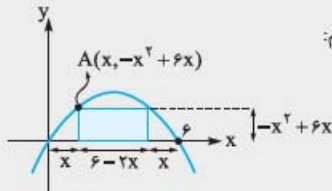
۱۶ (۱)

۲۴ (۴)

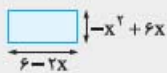
۲۰ (۳)

پاسخ گزینه «۳» سهمی $f(x) = -x^2 + 6x$ محور x ها را در نقاطی به طول $x = 0$ و $x = 6$ قطع می‌کند:

$$-x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0, 6$$



چون نقطه A روی سهمی است، پس مختصات آن را می‌توانیم به صورت $A(x, -x^2 + 6x)$ بنویسیم:



طول و عرض مستطیل رنگی را برحسب x می‌نویسیم:

محیط این مستطیل را می‌نویسیم: $\text{محیط} = 2((-x^2 + 6x) + (6 - 2x)) = -2x^2 + 8x + 12$

می‌خواهیم ماکسیمم تابع $g(x) = -2x^2 + 8x + 12$ را حساب کنیم: $\text{Max}(g) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(-64 - 4(-2)(12))}{-8} = \frac{64 + 96}{-8} = \frac{160}{-8} = 20$

دست کم‌ترین فاصله نقاط منحنی $y = x^2$ از خط $y = 2x - 6$ کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{6}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۱)

پاسخ گزینه «۲» مختصات پارامتری هر نقطه روی منحنی $y = x^2$ را می‌توانیم به صورت $A(\alpha, \alpha^2)$ در نظر بگیریم.

می‌دانیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید، پس فاصله نقطه $A(\alpha, \alpha^2)$ از

$$\frac{|2\alpha - \alpha^2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha^2 - 2\alpha + 6|}{\sqrt{5}}$$

خط $2x - y - 6 = 0$ برابر است با:

برای به دست آوردن Min عبارت بالا، کافی است Min عبارت داخل قدرمطلق را حساب کنیم (زیرا مخرج عددی ثابت است).

$$\text{مینیوم عبارت داخل قدرمطلق} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4(1)(6)}{4(1)} = \frac{20}{4} = 5$$

پس Min کل عبارت برابر با $\frac{5}{\sqrt{5}}$ یعنی $\sqrt{5}$ است.

صفرهای تابع درجه دو

نقاط برخورد یک تابع با محور x ها، نقاط با اهمیتی برای ما هستند. طول این نقاط را «صفرهای تابع» می‌نامیم.

همچنین محل برخورد یک تابع با محور y ها هم برای ما مهم است. عرض این نقطه برابر با $f(0)$ است. در تابع درجه دو $f(0) = c$ است و نقطه برخورد آن با محور y ها، نقطه $(0, c)$ است.

تعداد صفرهای یک تابع درجه دو را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد:

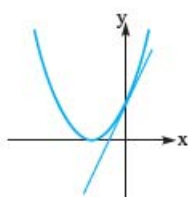
تابع، صفر ندارد! $\Delta < 0 \Rightarrow$ تابع دارای یک صفر است $\Delta = 0 \Rightarrow$ تابع دارای ۲ صفر متمایز است $\Delta > 0 \Rightarrow$

اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را داشته باشیم، می‌توانیم علامت ضرایب a ، b و c را تعیین کنیم:

علامت a : اگر دهانه سهمی روبه‌بالا باشد، $a > 0$ و اگر دهانه سهمی روبه‌پایین باشد، $a < 0$ است.

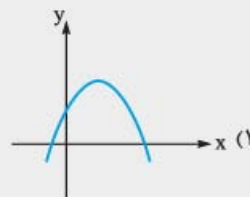
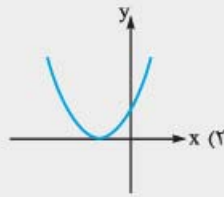
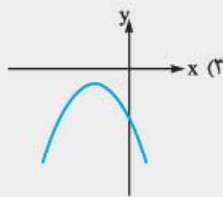
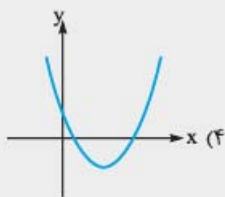
علامت c : عرض نقطه برخورد تابع با محور y ها است! خیلی راحت مثبت یا منفی بودن آن را تشخیص می‌دهیم.

◀ علامت b : طول رأس سهمی از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. چون علامت a و x_S را می‌دانیم، می‌توانیم علامت b را هم تعیین کنیم.



نکته برای تشخیص علامت b می‌توانیم از علامت شیب خط مماس بر سهمی در محل نقطه تقاطع سهمی با محور y ها هم استفاده کنیم. مثلاً در نمودار زیر، چون شیب خط مماس بر سهمی در نقطه برخورد آن با محور y ها عددی مثبت است، پس $b > 0$ است.

تست در هر گزینه نمودار یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. در کدام نمودار حاصل Δabc عددی مثبت است؟



پاسخ گزینه «۳» تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① دهانه سهمی روبه پایین است، پس $a < 0$.

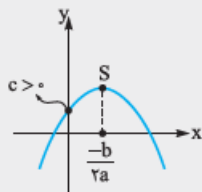
سهمی محور y ها را در بالای محور x ها قطع کرده، پس $c > 0$.

طول رأس سهمی مثبت است، پس:

سهمی در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کند، پس دارای دو ریشه متمایز است و $\Delta > 0$.

پس داریم:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$$



$$\begin{array}{cc} - & + \\ \uparrow & \uparrow \\ abc\Delta & < 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ + & + \end{array}$$

② دهانه سهمی روبه بالا است، پس $a > 0$.

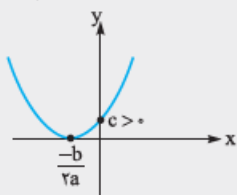
سهمی محور y ها را در بالای محور x ها قطع کرده، پس $c > 0$.

طول رأس سهمی عددی منفی است، پس:

سهمی در یک نقطه با طول مماس بر محور x ها مماس شده است، پس $\Delta = 0$.

پس داریم:

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$



$$\begin{array}{cc} + & + \\ \uparrow & \uparrow \\ abc\Delta & = 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ + & + \end{array}$$

③ دهانه سهمی روبه پایین است، پس $a < 0$.

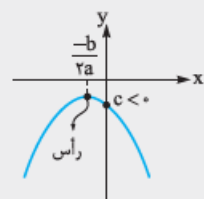
سهمی محور y ها را در پایین محور x ها قطع کرده، پس $c < 0$.

طول رأس سهمی عددی منفی است، پس:

سهمی محور x ها را قطع نکرده، پس $\Delta < 0$ و سهمی ریشه ندارد.

پس داریم:

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$



$$\begin{array}{cc} - & - \\ \uparrow & \uparrow \\ abc\Delta & > 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ - & - \end{array}$$

④ دهانه سهمی روبه بالا است، پس $a > 0$.

سهمی محور y ها را در بالای محور x ها قطع کرده، پس $c > 0$.

طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس:

$$-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$




سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است، پس $\Delta > 0$.

پس داریم:



$$\begin{matrix} + & + \\ \uparrow & \uparrow \\ abc\Delta < 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ + & + \end{matrix}$$

تست شکل مقابل نمودار سهمی $f(x) = (m-2)x^2 + (m+1)x + m+3$ است. چند مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

پاسخ گزینه «۱» (۱) دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ ؛
 (۲) عرض از مبدأ سهمی مثبت است، پس $c > 0$ ؛
 (۳) سهمی دارای دو ریشه ناهم‌علامت است، پس حاصل ضرب آن‌ها منفی است؛
 (۴) مجموع ریشه‌های ناهم‌علامت این سهمی، عددی مثبت است، پس:

حالا بین چهار شرط بالا اشتراک می‌گیریم:

پس m می‌تواند دو مقدار صحیح $m = 0$ و $m = 1$ را اختیار کند.

$$m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$m+3 > 0 \Rightarrow m > -3$$

$$P < 0 \Rightarrow \frac{m+3}{m-2} < 0 \Rightarrow -3 < m < 2$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-(m+1)}{m-2} > 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \cap (4) = -1 < m < 2$$

گزینه «۱» (۱) دهانه سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ ؛

(۲) عرض از مبدأ سهمی مثبت است، پس $c > 0$ ؛

(۳) سهمی دارای دو ریشه ناهم‌علامت است، پس حاصل ضرب آن‌ها منفی است؛

(۴) مجموع ریشه‌های ناهم‌علامت این سهمی، عددی مثبت است، پس:

حالا بین چهار شرط بالا اشتراک می‌گیریم:

پس m می‌تواند دو مقدار صحیح $m = 0$ و $m = 1$ را اختیار کند.

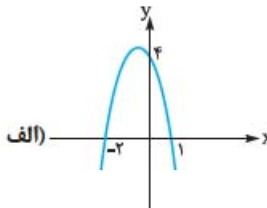
نوشتن معادله سهمی

برای نوشتن معادله سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ از روی نمودار آن نیاز به داشتن ۳ معادله داریم تا به کمک آن‌ها سه مجهول a ، b و c را به دست آوریم.

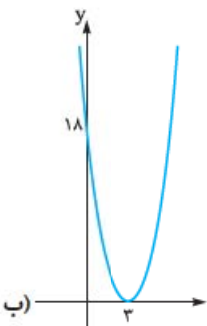
بد نیست حواسمان به موارد زیر باشد:

- ◀ عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها، همان c است.
- ◀ اگر مختصات رأس سهمی را داشتیم، یعنی دو معادله داریم؛ مثلاً اگر نقطه $(2, 5)$ رأس سهمی باشد، آن‌گاه دو معادله $2 = -\frac{b}{2a}$ و $f(2) = 5$ را داریم.
- ◀ مقدار تابع در ریشه‌ها برابر صفر است، یعنی اگر f محور طول‌ها را در α قطع کند، آن‌گاه $f(\alpha) = 0$.

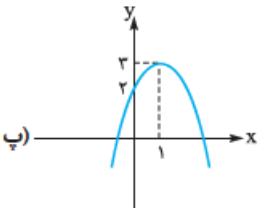
مثال معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



(الف)



(ب)



(پ)

پاسخ الف (راه حل اول) سهمی از سه نقطه $(-2, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 4)$ می‌گذرد، پس برای $f(x) = ax^2 + bx + c$ سه معادله زیر را داریم:

$$(-2, 0) \in f \Rightarrow f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 0$$

$$(1, 0) \in f \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$(0, 4) \in f \Rightarrow f(0) = 4 \Rightarrow 0 + 0 + c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + 4 = 0 & \xrightarrow{+2} \\ a + b + 4 = 0 & \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -2 \\ a + b = -4 \end{cases} \quad \text{با جای گذاری } c = 4 \text{ در دو معادله اول، مقدار } a \text{ و } b \text{ را حساب می‌کنیم:}$$

$$\begin{array}{r} 2a - b = -2 \\ a + b = -4 \\ \hline 3a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -2} \end{array}$$

$$a + b = -4 \xrightarrow{a = -2} -2 + b = -4 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

حالا با جای گذاری $a = -2$ ، مقدار b را به دست می‌آوریم:

پس معادله سهمی به شکل $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$ در می‌آید.

نکته معادله سهمی که دارای ریشه‌های α و β باشد، به صورت $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است.

راه حل دوم با استفاده از نکته بالا، معادله این سهمی که محور x ها را در نقاطی به طول -2 و 1 قطع کرده به صورت $f(x) = a(x - (-2))(x - (1))$ است. حالا فقط کافی است نقطه $(0, 4)$ را روی آن قرار دهیم تا a به دست آید:

$$f(x) = a(x - (-2))(x - (1)) \xrightarrow{(0, 4) \in f} 4 = a(0 - (-2))(0 - (1)) \Rightarrow -2a = 4 \Rightarrow a = -2$$

پس معادله f به صورت $f(x) = -2(x - (-2))(x - (1))$ است.

(ب) سهمی بر محور x ها در نقطه $x = 3$ مماس شده است، پس دارای ریشه مضاعف $x = 3$ است و معادله آن به صورت $f(x) = a(x - 3)^2$ است. از نقطه $(0, 18)$ کمک می‌گیریم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = a(x - 3)^2 \xrightarrow{(0, 18) \in f} 18 = a(0 - 3)^2 \Rightarrow 9a = 18 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله سهمی به صورت $f(x) = 2(x - 3)^2$ است.

نکته اگر سهمی در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ بر محور x ها مماس شود، معادله آن به صورت $f(x) = a(x - \alpha)^2$ خواهد بود.

(پ) **راه حل اول** اولاً سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 2 قطع کرده، پس $\boxed{c = 2}$.

حالا از رأس سهمی دو معادله خواهیم داشت:

$$-\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow -b = 2a \Rightarrow 2a + b = 0$$

اولاً طول رأس آن 1 است:

$$f(x) = ax^2 + bx + 2 \xrightarrow{f(1) = 2} 2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = 0$$

ثانیاً سهمی از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1}, \boxed{b = 2}$$

حالا دو معادله به دست آمده را حل می‌کنیم:

پس معادله سهمی به شکل $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ است.

نکته معادله سهمی با رأس $S(\alpha, \beta)$ به صورت $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ است.

راه حل دوم با استفاده از نکته بالا چون رأس سهمی $S(1, 2)$ است، پس معادله آن به صورت $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$ است. حالا با جای گذاری نقطه

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 2 \xrightarrow{(0, 2) \in f} 2 = a(0 - 1)^2 + 2 \Rightarrow a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

در f ، مقدار a را به دست می‌آوریم:

پس معادله سهمی به صورت $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ است.

تست سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 5 و محور x ها را در نقطه‌ای به طول -1 قطع می‌کند. اگر خط $y = 9$ بر این سهمی مماس باشد، معادله محور تقارن آن کدام است؟ ($a < -5$)

$$x = -2 \quad (4)$$

$$x = 2 \quad (3)$$

$$x = -\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$x = \frac{2}{5} \quad (1)$$



پاسخ گزینه «۲» سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض Δ قطع کرده است، پس $c = -5$. این سهمی محور x ها را در نقطه‌ای به طول -1 قطع کرده است، پس $f(-1) = 0$:

$$f(x) = ax^2 + bx + \Delta \Rightarrow a - b + \Delta = 0 \Rightarrow b = a + \Delta$$

هم‌چنین خط $y = 9$ بر این سهمی مماس است، پس عرض رأس سهمی برابر با 9 است:

$$y_S = 9 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 9 \Rightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 9 \Rightarrow -\frac{b^2 - 20a}{4a} = 9 \Rightarrow b^2 + 16a = 0$$

حالا کافی است $b = a + \Delta$ را در معادله بالا جای‌گذاری کنیم تا a به دست آید:

$$b^2 + 16a = 0 \Rightarrow (a + \Delta)^2 + 16a = 0 \Rightarrow a^2 + 26a + 25 = 0 \Rightarrow (a + 25)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 & \times \\ a = -25 & \checkmark \end{cases}$$

با شرط $a < -5$ ، فقط $a = -25$ قابل‌قبول است. مقدار b هم برابر است با:

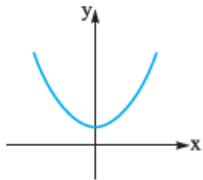
پس معادله سهمی به صورت $f(x) = -25x^2 - 20x + 5$ است.

معادله محور تقارن هر سهمی به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ است که در این‌جا به صورت $x = -\frac{-20}{2 \times (-25)} = -\frac{2}{5}$ خواهد بود.

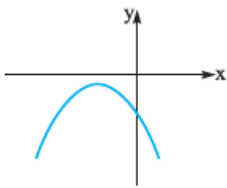
سهمی در نواحی مختصات

یک وقت‌هایی از ما می‌خواهند که یک پارامتر را طوری تعیین کنیم تا «سهمی از ناحیه‌ای خاص عبور نکند» یا «سهمی از نواحی خاصی عبور کند». در این گونه سؤال‌ها باید حواسمان به همه چیز باشد، علامت a ، علامت Δ ، علامت S ، علامت P ، مختصات رأس سهمی و ... در کل، سهمی می‌تواند از ۲ یا ۳ یا ۴ ناحیه دستگاه مختصات عبور کند. آن‌ها را با هم بررسی می‌کنیم:

۱ سهمی فقط از دو ناحیه عبور کند: در این حالت سهمی یا فقط از نواحی ۱ و ۲ یا فقط از نواحی ۳ و ۴ عبور می‌کند و در هر دو حالت محور x ها را قطع نمی‌کند و باید دلتای آن منفی یا صفر باشد.



$$\left. \begin{matrix} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{matrix} \right\} \text{ فقط از ناحیه ۱ و ۲ عبور می‌کند}$$

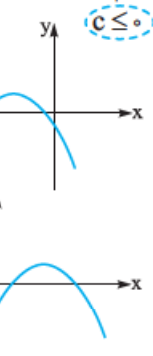


$$\left. \begin{matrix} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{matrix} \right\} \text{ فقط از ناحیه ۳ و ۴ عبور می‌کند}$$

۲ سهمی دقیقاً از سه ناحیه عبور کند (یعنی فقط از یکی از نواحی عبور نکند) این قسمت شامل ۴ حالت است:

چون محور y ها را در نقطه‌ای با عرض نامثبت قطع کرده است

چون دهانه رو به پایین است



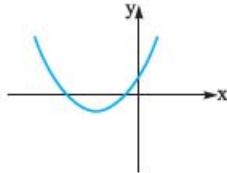
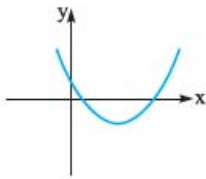
چون شیب خط مماس در محل برخورد با محور y ها منفی است

چون دو ریشه دارد

سهمی فقط از ناحیه ۱ عبور نکند: $\Delta > 0$

$$a < 0$$

سهمی فقط از ناحیه ۲ عبور نکند: $\Delta > 0, a < 0, b > 0, c \leq 0$



◀ سهمی فقط از ناحیه ۳ عبور نکند: $c \geq 0, b < 0, a > 0, \Delta > 0$.

◀ سهمی فقط از ناحیه ۴ عبور نکند: $c \geq 0, b > 0, a > 0, \Delta > 0$.

۳ سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند:

اگر سهمی دارای دو ریشه ناهم‌علامت باشد، حتماً از هر ۴ ناحیه عبور می‌کند، پس شرط آن که سهمی از ۴ ناحیه عبور کند آن است که $P < 0$ یا این که بگوییم a و c ناهم‌علامت باشند ($ac < 0$).

تست به ازای چه مقادیری از k ، سهمی $f(x) = (k-2)x^2 + 2kx + k+1$ فقط از ناحیه اول محور مختصات عبور نمی‌کند؟

۴) $-2 < k \leq 0$

۳) $-2 < k \leq -1$

۲) $-1 \leq k < 2$

۱) $0 < k < 2$

پاسخ گزینه «۳» همان‌طور که گفتیم برای آن که سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ فقط از ناحیه اول عبور نکند، باید هر ۴ شرط زیر را

۱) $\Delta > 0 \Rightarrow (2k)^2 - 4(k-2)(k+1) > 0 \Rightarrow 4k+8 > 0 \Rightarrow k > -2$

داشته باشد:

۲) $a < 0 \Rightarrow k-2 < 0 \Rightarrow k < 2$

۳) $b < 0 \Rightarrow 2k < 0 \Rightarrow k < 0$

۴) $c \leq 0 \Rightarrow k+1 \leq 0 \Rightarrow k \leq -1$

$-2 < k \leq -1$

با اشتراک‌گرفتن بین ۴ شرط بالا، محدوده k به دست می‌آید:



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$ کدام است؟

(۱) -3 (۲) 3 (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۵۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) 2

۵۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند ($\alpha > \beta$)، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}$

۵۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x(x-3) = 1$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_1^2-1} + \frac{x_2}{x_2^2-1}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{11}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{13}{6}$ (۴) $-\frac{17}{6}$

۵۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = x$ باشند ($\alpha > \beta$)، حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{(\beta+1)^2}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) 1 (۳) $1\frac{1}{3}$ (۴) $1\frac{2}{3}$

۵۹- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند ($x_1 > x_2$)، حاصل $x_1^2 - x_2^2$ کدام است؟

(۱) 88 (۲) 44 (۳) $22\sqrt{13}$ (۴) $11\sqrt{13}$

۶۰- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل $3\alpha^2 - \beta^2$ کدام است؟ ($\alpha > \beta$)

(۱) $12 + 16\sqrt{2}$ (۲) $12 - 16\sqrt{2}$ (۳) $20 + 16\sqrt{6}$ (۴) $20 - 16\sqrt{6}$

۶۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^y + \beta^y$ کدام است؟

(۱) 843 (۲) 846 (۳) 854 (۴) 858

۶۲- در معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 1 = 0$ ، حاصل $x_1^2 + (2x_2 - 1)^2$ چه قدر است؟

(۱) 32 (۲) 33 (۳) 31 (۴) 34

۶۳- به ازای کدام مقدار m ، بین ریشه‌های معادله $x^2 - mx - 2 = 0$ رابطه $x_1 x_2^2 + 2x_1^2 x_2 = 4$ برقرار است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ (۴) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

۶۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + 2\beta^2$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) 3 (۳) 5 (۴) 7

۶۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^4 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2}$ کدام است؟

(۱) 325 (۲) 334 (۳) 344 (۴) 353

۶۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{(\alpha+2)^2} + \frac{\beta}{(\beta+2)^2}$ کدام است؟

(۱) $-1/52$ (۲) $1/52$ (۳) $-0/88$ (۴) $0/88$



۶۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{(\alpha-1)(\alpha+3)}{(\beta+1)^2}$ کدام است؟

(۱) -2 (۲) -3 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۸- به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادله $x(x-m) = m^2 + 1$ رابطه $||\alpha| - |\beta|| = 4$ برقرار است؟

(۱) 3 (۲) -4 (۳) 8 (۴) -6

۶۹- اگر شیب خط‌های L_1 و L_2 جواب‌های معادله $m^2 x^2 - m(x-1) = 6$ باشند، به ازای کدام مجموعه مقادیر m دو خط بر هم عمودند؟

(۱) $\{-2, 3\}$ (۲) $\{2, -3\}$ (۳) فقط -3 (۴) هیچ مقدار m

۷۰- به ازای کدام مقدار m معادله $mx^2 + 5x + m^2 - 6 = 0$ دو ریشه حقیقی و معکوس هم دارد؟

(۱) -3 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 3

۷۱- به ازای کدام مقدار m عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟ (ریاضی تارخ ۸۳)

(۱) 1 (۲) -1 (۳) 3 (۴) -3

۷۲- به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟ (تپری ۹۳)

(۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) 1 (۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$ و -1

۷۳- مجموع معکوس مربع سه ریشه معادله $(x+2)(x^2 + ax + 2) = 0$ برابر $-\frac{a}{4}$ است. a کدام است؟

(۱) 2 (۲) -3 (۳) 4 (۴) -6

۷۴- به ازای چه حدودی از m عددهای 2 بین ریشه‌های معادله $mx^2 - x - 2 = 0$ قرار دارد؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $\mathbb{R} - [0, 1]$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) \emptyset

۷۵- اگر α و β ریشه‌های معادله $m(x^2 - 1) = x + 1$ باشند و $1 < \beta < -2 < \alpha$ ، حدود m کدام است؟

(۱) $(-\frac{1}{3}, 0)$ (۲) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (۳) $(-\infty, \frac{1}{3})$ (۴) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$

۷۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، ریشه‌های معادله $2x^2 + ax + 4 = 0$ ، $\sqrt{\sin \alpha}$ و $\sqrt{\cos \alpha}$ است؟

(۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $-2\sqrt{5}$ (۳) $\pm 2\sqrt{5}$ (۴) هیچ مقدار a

۷۷- اگر یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 - 2ax + k = 0$ از مجذور ریشه دیگر ۴ واحد کم‌تر باشد، کوچک‌ترین ریشه معادله کدام می‌تواند باشد؟

(۱) -3 (۲) -2 (۳) -1 (۴) -4

۷۸- اگر α و β ریشه‌های معادله $(\frac{x}{\cos a})^2 - x - \tan^2 a = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta$ کدام است؟ ($\alpha > \beta$)

(۱) $\sin^2 \alpha$ (۲) $\cos^2 \alpha$ (۳) $\tan^2 \alpha$ (۴) $\cot^2 \alpha$

۷۹- در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه $\frac{a+fc}{b} = 2$ بین ضرایب برقرار است. کدام یک از گزینه‌های زیر یک ریشه معادله است؟

(۱) $\frac{2b}{c}$ (۲) $-\frac{2b}{c}$ (۳) $\frac{2c}{a}$ (۴) $-\frac{2c}{a}$

۸۰- معادله درجه دومی که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشد، کدام است؟

(۱) $x^2 - 21x + 4 = 0$ (۲) $x^2 - 21x - 4 = 0$ (۳) $x^2 + 21x + 4 = 0$ (۴) $x^2 + 21x - 4 = 0$

۸۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x = 6$ باشند، به ازای کدام مقدار k معادله‌ای که ریشه‌های آن به صورت α^2 و $\beta + 2$ است، به صورت

$x^2 - kx + b = 0$ است؟ ($\alpha < \beta$)

(۱) $42 + \sqrt{297}$ (۲) $14 + \sqrt{33}$ (۳) $42 - \sqrt{297}$ (۴) $14 - \sqrt{33}$



۸۲- اگر ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + m = 0$ از k برابر مکعب ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ ، 2 واحد کم‌تر باشد، m کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) -۴۱ (۴) -۳۹

۸۳- اگر مجموع مجذور ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + (x^2 - x)(x + 1 - m) = 0$ برابر ۴ باشد، m کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۶

۸۴- اگر α, β, γ ریشه‌های معادله $x^3 - 5x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{25}{9}$ (۲) $\frac{16}{9}$ (۳) $\frac{25}{16}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۸۵- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x(x+1)(x+2)(x+3) = 3$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۳ (۴) ۳

۸۶- مجموع ریشه‌های معادله $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۳ (۴) ۱

۸۷- مجموع مکعبات ریشه‌های معادله $(x^2 - x)^2 - 2x^2 + 2x - 8 = 0$ کدام است؟

- (۱) -۱۱ (۲) ۱۳ (۳) -۱۳ (۴) ۱۱

۸۸- در معادله $x^6 - 3x^3 + 1 = 0$ مجموع توان چهارم ریشه‌ها چه قدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۸۹- معادله $x^6 - 6x^3 - 4 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۰- معادله $x^6 - 3x^3 + 1 = 0$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها چه قدر است؟

- (۱) دو ریشه و سه (۲) دو ریشه و شش (۳) چهار ریشه و سه (۴) چهار ریشه و شش

۹۱- یکی از ریشه‌های معادله $x^4 - mx^2 - m^2 = 1$ ، چهار واحد از ریشه دیگر بیشتر است. مجموع تمام مقادیر m کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) -۱۵ (۳) ۴ (۴) -۴

۹۲- اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ (تجربی ۸۵)

- (۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$ (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$

۹۳- کوچک‌ترین ریشه معادله $(x-2)^2 + 12x = 3x^2 + 10$ کدام است؟

- (۱) $-1 - \sqrt{2}$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) -۱ (۴) ۱

۹۴- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $ab < 0$

(۲) $ac < 0$

(۳) $a - b > 0$

(۴) $b + c < 0$

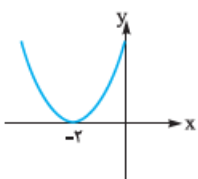
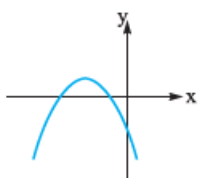
۹۵- اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + 4x + b$ به صورت مقابل باشد، مقدار b کدام است؟

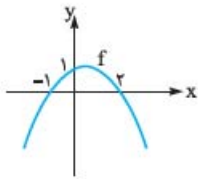
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

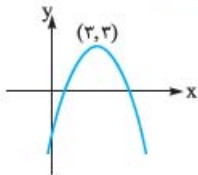




۹۶- با توجه به نمودار تابع درجه دوم زیر، قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $2 + f(x) = 0$ کدام است؟

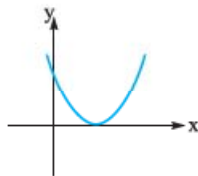
- (۱) ۵
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۳

۹۷- نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a^2 = 1$ است، به صورت زیر می‌باشد. عرض از مبدأ منحنی کدام است؟



- (۱) -۳
- (۲) -۴
- (۳) -۵
- (۴) -۶

۹۸- اگر نمودار تابع $f(x) = a(x^2 + x) - 3x + 1$ به صورت مقابل باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟



- (۱) فقط ۱
- (۲) فقط ۹
- (۳) $\{1, 9\}$
- (۴) \emptyset

۹۹- به ازای کدام مقدار a حداقل فاصله نقاط منحنی $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ از خط $y = 4$ برابر ۳ است؟

- (۱) -۱
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) ۲

۱۰۰- فقط سه نقطه روی منحنی $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ وجود دارد که فاصله آن‌ها از خط $y = L$ برابر ۲ باشد. اگر خط، منحنی را در نقاطی به

طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، حاصل $(x_1 + \frac{1}{x_1})(x_2 + \frac{1}{x_2})$ کدام است؟

- (۱) ۷
- (۲) $7/5$
- (۳) ۸
- (۴) $8/5$

۱۰۱- مجموع طول نقاط برخورد خط $y = 5$ با منحنی $f(x) = ax^2 + bx + 2$ برابر ۲ است. اگر فاصله رأس سهمی از این خط برابر ۲ باشد،

مجموع معکوس ریشه‌های معادله $f(x) = 6$ برابر کدام است؟

- (۱) $2/5$
- (۲) $-2/5$
- (۳) $1/5$
- (۴) $-1/5$

۱۰۲- در یک زمین گل‌خانه‌ای، اگر با فاصله یکسان ۴۰ بوته گوجه‌فرنگی کاشته شود، به طور متوسط از هر بوته ۸ کیلو محصول به دست می‌آید.

به ازای هر بوته اضافی که کاشته می‌شود، به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلو از میانگین کل محصول کاسته می‌شود. در این صورت بیشترین محصول برداشتی

چند کیلوگرم است؟

- (۱) ۳۳۶
- (۲) ۳۳۸
- (۳) ۳۴۰
- (۴) ۳۴۲

۱۰۳- در بین تمام مستطیل‌های محاط در نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱، بیشترین مساحت ممکن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) ۱
- (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۴- کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(4, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 9}$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۸۷)

- (۱) $\sqrt{5}$
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۰۵- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور

کرد، چند متر مربع است؟

(ریاضی خارج ۹۱)

- (۱) ۹۵۸
- (۲) ۹۶۸
- (۳) ۹۷۸
- (۴) ۹۸۸



۱۰۶- بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می توان توسط یک طناب از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟

(ریاضی خارج ۸۴)

۶۸ (۱) ۷۰ (۲) ۷۱ (۳) ۷۲ (۴)

۱۰۷- کمترین فاصله نقاط منحنی $y = x^2 + 2x$ از خط $y = 2x - 3$ کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۱) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴)

۱۰۸- منحنی به معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

(ریاضی ۸۸)

$9 < m < 25$ (۱) $15 < m < 23$ (۲) $7 < m < 15$ (۳) $5 < m < 13$ (۴)

۱۰۹- خطی که از نقطه $A(0,1)$ می گذرد، منحنی $f(x) = x^2 - 4x + 2$ را در دو نقطه با طول های α و β قطع می کند. اگر $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = 2$ ، آن گاه خط، محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

-2 (۱) 2 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۱۱۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

(ریاضی ۹۵)

$m > 2$ (۱) $-1 < m < 2$ (۲) هر مقدار m (۳) هیچ مقدار m (۴)

۱۱۱- حدود m کدام باشد تا منحنی $y = mx^2 + (2m-8)x + 2$ فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نگذرد؟

\mathbb{R} (۱) $\mathbb{R} - [0, 2]$ (۲) $(0, 2)$ (۳) \emptyset (۴)

۱۱۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی گذرد؟

(ریاضی ۹۲)

$a \leq 2$ (۱) $0 < a \leq 2$ (۲) $2 < a < 3$ (۳) $0 < a < 3$ (۴)

۱۱۳- برد تابع $f(x) = -2x^2 + ax + b$ با دامنه $\mathbb{R} - \{a-3\}$ برابر $(-\infty, a-1)$ است. $f(a-b)$ کدام است؟

-3 (۱) -5 (۲) 1 (۳) 4 (۴)

۱۱۴- نمودار دو تابع $f(x) = -x^2 + ax + 4$ و $g(x) = x^2 - 2x + b$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم. اگر خط $y = 1$ محور تقارن شکل حاصل باشد، حاصل $f(2) + g(-2)$ کدام است؟

-1 (۱) 3 (۲) 7 (۳) 10 (۴)

۱۱۵- خط $y = k$ نمودار تابع $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ را در دو نقطه A و B قطع می کند. اگر مثلث OAB قائم الزاویه باشد، مساحت آن کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

۱۱۶- برد تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 4x^2 + bx}{|x|}$ ، $(b \in \mathbb{Z})$ ، چهار عدد صحیح را شامل نمی شود. $f(b)$ کدام است؟

3 (۱) 6 (۲) 9 (۳) 12 (۴)

۵۴- گزینه ۱ با استفاده از معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$.

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را داریم:

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

حالا عبارت موردنظر:

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = PS = -2 \times \frac{3}{2} = -3$$

۵۵- گزینه ۲ عبارت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را بر حسب مجموع و

حاصل ضرب دو ریشه می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \\ &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \end{aligned}$$



۵۸- گزینه ۳ معادله را به صورت

$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

استاندارد می‌نویسیم.

با کمی دقت، مجموع ضرایب صفر است؛ پس ریشه‌ها $\alpha = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$

و $\beta = 1$ هستند (دقت کردیم که $\alpha > \beta$ است): پس:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4}{(\beta+1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} + \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{4} = 1\frac{1}{3}$$

۵۹- گزینه ۳ با استفاده از اتحاد $a^2 - b^2$ داریم:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

در معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ داریم:

$$P = x_1x_2 = 3 \text{ و } S = x_1 + x_2 = 5$$

یادآوری: اختلاف دو ریشه در معادله درجه دوم برابر است با:

$$x_1 - x_2 = \frac{x_1 > x_2}{\sqrt{S^2 - 4P}}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها هم برابر است با: $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

پس داریم:

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \sqrt{S^2 - 4P} (S^2 - 2P - P)$$

$$= \sqrt{5^2 - 4 \times 3} (5^2 - 2 \times 3 - 3) = 22\sqrt{13}$$

۶۰- گزینه ۱ راه حل اول با توجه به این که عبارت $3\alpha^2 - \beta^2$

نسبت به α و β متقارن نیست و نیز ظاهر گزینه‌ها، به نظر می‌رسد

استفاده از خود جواب‌ها مفید باشد:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + \sqrt{6} \\ \beta = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

و بنابراین:

$$3\alpha^2 - \beta^2 = 3(2 + \sqrt{6})^2 - (2 - \sqrt{6})^2$$

راه حل دوم با کمی خلاقیت می‌نویسیم:

$$3\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha^2 - \beta^2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \quad \text{حالا:}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = S\sqrt{S^2 - 4P}$$

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 4 \\ P = \alpha\beta = -2 \end{cases} \quad \text{پس داریم:}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4^2 - 2(-2) = 20$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = S\sqrt{S^2 - 4P} = 4\sqrt{4^2 - 4(-2)} = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$$

$$20 + 2(8\sqrt{6}) = 20 + 16\sqrt{6} \quad \text{و جواب می‌شود:}$$

با توجه به معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ مقادیر S و P عبارت‌اند از:

$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 \text{ و } P = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

و بنابراین: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{1}} = \sqrt{5}$

۵۶- گزینه ۱ عبارت $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را به صورت مجموع و

حاصل ضرب ریشه‌ها بیان کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{P}}$$

برای عبارت $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$ دقت کنید که $\alpha > \beta$ است و این عبارت

منفی خواهد بود. پس می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} &= -(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}) = -\sqrt{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2} \\ &= -\sqrt{\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}} = -\sqrt{S - 2\sqrt{P}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{-\sqrt{S - 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} \quad \text{پس داریم:}$$

حالا در معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ داریم: $S = 4, P = 2$

و بنابراین:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{-\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

۵۷- گزینه ۱ معادله را به صورت استاندارد

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ درمی‌آوریم.}$$

چون مخارج $x_1^2 - 1$ و $x_2^2 - 1$ هستند و در معادله $x^2 - 1$

می‌بینیم، از صدق کردن ریشه‌ها در معادله استفاده می‌کنیم:

$$x_1^2 - 3x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 3x_1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 1 = 3x_1$$

$$x_2^2 - 3x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2^2 - 3x_2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2^2 - 1 = 3x_2$$

حالا در عبارت مورد نظر سؤال قرار می‌دهیم:

$$\frac{x_1}{x_2^2 - 1} + \frac{x_2}{x_1^2 - 1} = \frac{x_1}{3x_2} + \frac{x_2}{3x_1} = \frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{S^2 - 2P}{P} \right)$$

با توجه به معادله $P = -1$ و $S = 3$ داریم:

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3^2 - 2 \times (-1)}{-1} \right) = -\frac{11}{3}$$

۶۴- گزینه ۳ α و β ریشه‌های معادله‌اند، پس داریم:

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$$

$$\xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 = \underbrace{\alpha^2}_{\alpha+1} + \alpha = \alpha + 1 + \alpha$$

پس: $\alpha^3 = 2\alpha + 1$

هم‌چنین: $2\beta^3 = 2(\beta + 1) = 2\beta + 2$

بنابراین:

$$\alpha^3 + 2\beta^3 = 2\alpha + 1 + 2\beta + 2 = 2(\alpha + \beta) + 3 = 2S + 3$$

$$\xrightarrow{\frac{S-b}{a}=1} \rightarrow = 2 \times 1 + 3 = 5$$

۶۵- گزینه ۳ ابتدا عبارت $\frac{\alpha^8 + \alpha^6 + 11}{\alpha^6}$ را ساده‌تر کنیم:

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{\alpha^8}{\alpha^6} + \frac{\alpha^6}{\alpha^6} + \frac{11}{\alpha^6} = \alpha^2 + 1 + \frac{11}{\alpha^6}$$

$$= \underbrace{\left(\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2}\right)^2}_{\alpha^6 + \frac{11}{\alpha^6}} - 18 + 1 = \left(\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2}\right)^2 - 17$$

حالا $\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2}$ را هم به صورت اتحاد درمی‌آوریم:

$$\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)^2 - 2 \times \alpha \times \frac{3}{\alpha} = \left(\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)^2 - 6$$

از معادله صورت سؤال داریم: $\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0$

در معادله صدق می‌کند. $\xrightarrow{\div \alpha} \alpha - 5 + \frac{3}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{3}{\alpha} = 5$

بنابراین: $\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)^2 - 6 = 5^2 - 6 = 19$

و در نتیجه: $\left(\alpha^2 + \frac{9}{\alpha^2}\right)^2 - 17 = 19^2 - 17 = 361 - 17 = 344$

۶۶- گزینه ۱ معادله را به صورت $x(x+2) = 5$ می‌نویسیم.

پس داریم: $x + 2 = \frac{5}{x}$

بنابراین: $\beta + 2 = \frac{5}{\beta}$ و $\alpha + 2 = \frac{5}{\alpha}$

حالا در عبارت صورت سؤال قرار می‌دهیم:

$$\frac{\alpha}{(\alpha+2)^2} + \frac{\beta}{(\beta+2)^2} = \frac{\alpha}{\left(\frac{5}{\alpha}\right)^2} + \frac{\beta}{\left(\frac{5}{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{25}$$

مجموع مکعبات ریشه‌ها در معادله درجه دوم برابر است با:

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

۶۱- گزینه ۱
$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3 \\ P = \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

$\alpha^4 + \beta^4$ و $\alpha^3 + \beta^3$ را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$= (3^2 - 2(1))^2 - 2(1)^2 = 47$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 3^3 - 3(1)(3) = 18$$

$$\Rightarrow (\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^3 + \beta^3) = \alpha^7 + \beta^7 + \alpha^3\beta^4 + \beta^3\alpha^4$$

$$\Rightarrow 47 \times 18 = \alpha^7 + \beta^7 + \alpha^3\beta^4 + \beta^3\alpha^4$$

$$\Rightarrow 846 = \alpha^7 + \beta^7 + P^3(S)$$

$$\Rightarrow 846 = \alpha^7 + \beta^7 + (1)(3) \Rightarrow \alpha^7 + \beta^7 = 843$$

۶۲- گزینه ۲ $2x_1 - 1$ شبیه خود معادله است، پس سراغ

صدق کردن ریشه در خود معادله می‌رویم:

x_1 در معادله صدق می‌کند. $\Rightarrow x_1$ ریشه معادله است.

$$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 1 = -x_1^2$$

بنابراین: $x_1^4 + (2x_1 - 1)^2 = x_1^4 + (-x_1^2)^2 = x_1^4 + x_1^4$

حاصل مجموع توان چهارم ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

در این معادله $S = -2$ و $P = -1$ است و داریم:

$$x_1^4 + x_2^4 = ((-2)^2 - 2(-1))^2 - 2(-1)^2 = 6^2 - 2 = 34$$

۶۳- گزینه ۳ اول ظاهر $4 = x_1x_2 + 2x_1^2x_2$ را تغییر دهیم:

$$\frac{x_1x_2(x_1 + 2x_1)}{P} = 4 \xrightarrow{\frac{P=c}{a}=-2} x_2 + 2x_1 = \frac{4}{-2} = -2$$

پس داریم: $2x_1 + x_2 = -2$

هم‌چنین: $x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a} = m$

پس داریم: $x_1 + \underbrace{x_1 + x_2}_m = -2$

یعنی: $x_1 = -m - 2$

پس باید $-m - 2$ در معادله صدق کند:

$$\xrightarrow{x_1 = -m-2} (-m-2)^2 - m(-m-2) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 + m^2 + 2m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 6m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$



که دلتای آن منفی است و ریشه ندارد؛ پس $m = 3$ قابل قبول نیست. برای $m = -2$ ، معادله $-2x^2 + 5x - 2 = 0$ دو ریشه دارد و آن را می‌پذیریم.

۷۱- گزینه ۲ عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی x_1 و x_2 است

$$B^2 = AC \Rightarrow \sqrt{2}^2 = x_1 x_2 \quad \text{یعنی:}$$

۷۲- واسطه هندسی دو عدد هم‌علامت A و C ، از شرط $B^2 = AC$ به دست می‌آید. پس داریم: $P = x_1 x_2 = 2$ یعنی ضرب دو ریشه حقیقی معادله، ۲ است:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 3}{m} = 2 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m = -1 \text{ یا } 3$$

اما برای $m = 3$ معادله $3x^2 - 5x + 6 = 0$ ریشه حقیقی ندارد پس فقط $m = -1$ را می‌پذیریم (معادله به صورت $-x^2 - 5x - 2 = 0$ ریشه حقیقی دارد!)

۷۲- گزینه ۱ مجموع مربعات ریشه‌های معادله برابر است با:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

پس در معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ داریم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{m+3}{m}, P = \frac{5}{m}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} (m+3)^2 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} m = +1 \text{ یا } -\frac{9}{5}$$

اما واضح است که به ازای $m = 1$ معادله $x^2 - 4x + 5 = 0$ ریشه حقیقی ندارد، پس فقط مقدار $m = -\frac{9}{5}$ را می‌پذیریم.

۷۲- گزینه ۲ ریشه پرنانز اول $x = -2$ است؛ پس داریم:

$$\text{مجموع معکوس مربع سه ریشه} = \frac{1}{(-2)^2} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2}$$

x_1 و x_2 ریشه‌های پرنانز دوم یعنی ریشه‌های معادله $x^2 + ax + 2 = 0$ هستند؛ پس داریم:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{(-a)^2 - 2\left(\frac{2}{1}\right)}{\left(\frac{2}{1}\right)^2} = \frac{a^2 - 4}{4} = \frac{a^2}{4} - 1$$

در معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ داریم: $S = \frac{-b}{a} = -2, P = \frac{c}{a} = -5$

$$\text{و جواب می‌شود: } \frac{\alpha^2 + \beta^2}{25} = \frac{S^2 - 2PS}{25} = \frac{(-2)^2 - 2(-2)(-5)}{25}$$

$$= \frac{-8 - 30}{25} = \frac{-38}{25} \xrightarrow{\times 4}{\times 4} \rightarrow -1/52$$

۶۷- گزینه ۲

$$\text{عبارت} = \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{(\beta+1)^2} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 2}{\beta^2 + 2\beta + 1} (*)$$

α و β در معادله صدق می‌کنند:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2(\alpha^2 + 2\alpha) = -1 \\ \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = -\frac{1}{2} \\ 2\beta^2 + 4\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 2\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} \text{عبارت} = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = -5$$

۶۸- گزینه ۲ معادله را به صورت $x^2 - mx - (m^2 + 1) = 0$

می‌نویسیم. ضرب دو ریشه $P = \frac{c}{a} = -m^2 - 1$ عددی منفی است.

پس دو ریشه هم‌علامت نیستند و داریم:

$$||\alpha| - |\beta|| = |\alpha - (-\beta)| = |\alpha + \beta| = |S|$$

$$|S| = |m| = 4 \Rightarrow m = \pm 4$$

بنابراین:

۶۹- گزینه ۲ دو خط بر هم عمودند یعنی حاصل ضرب

شیبها -1 است، پس باید ضرب ریشه‌ها -1 باشد:

$$m^2 x^2 - m(x-1) - 6 = 0 \Rightarrow m^2 x^2 - mx + m - 6 = 0$$

$$P = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{m-6}{m^2} = -1 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-2) = 0 \Rightarrow m = -3 \text{ یا } 2$$

دقت کنید که در این شرایط حتماً $\Delta > 0$ است و از وجود دو ریشه متمایز مطمئن هستیم.

۷۰- گزینه ۲ برای دو ریشه معکوس هم باید ضرب ریشه‌ها

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow P = x_1 x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 6}{m} = 1$$

$$m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 3 \text{ یا } -2$$

اما به ازای $m = 3$ معادله به صورت $3x^2 + 5x + 3 = 0$ درمی‌آید

باشد و شرط $x_1^2 + x_2^2 = 1$ برقرار شود:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = 1$$

$$\frac{S = \frac{a}{2}}{P = \frac{a}{2}} \rightarrow \left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{a^2}{4} - a\right)^2 - a = 1 \Rightarrow \left(\frac{a^2}{4} - a\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{a^2}{4} - a = \pm 3$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = 7 \text{ یا } 1 \Rightarrow a^2 = 28 \text{ یا } 4 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{7} \text{ یا } \pm 2$$

برای وجود دو ریشه حقیقی مثبت باید $\Delta > 0$ ، $S > 0$ و $P > 0$ باشند پس $\Delta = a^2 - 32 > 0$ و در نتیجه $a^2 > 32$ که در هیچ یک از جوابها صدق نمی‌کند.

شرط صورت سؤال به شکل **گزینه ۱**

$x_1 = x_2^2 - 4$ قابل بیان است. چون جمع ریشه‌های معادله

$$x_1 + x_2 = \frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } x^2} = -\frac{2a}{a} = -2 \text{ است، سعی می‌کنیم } x_1 = x_2^2 - 4$$

$$x_1 = x_2^2 - 4 \xrightarrow{+x_2} \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{این می‌شود ۲}} = x_2^2 + x_2 - 4$$

$$\Rightarrow x_2^2 + x_2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2^2 - 4 = \begin{cases} 9 - 4 = 5 \\ 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

ریشه کوچک‌تر معادله در حالت اول -3 و در حالت دوم صفر است.

ضرایب این معادله 1 ، $-\tan^2 a$ و $-\frac{1}{\cos^2 a}$ **گزینه ۲**

هستند. با توجه به رابطه $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ ، جمع ضرایب

صفر است: پس یک ریشه $\alpha = 1 = x_1$ و دیگری $x_2 = \frac{c}{a}$ یعنی

$$x_2 = \frac{-\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \beta \text{ است. بنابراین } \alpha + \beta \text{ برابر است با:}$$

$$1 + \frac{-\tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{1 + \tan^2 a} = \cos^2 a$$

از شرط صورت سؤال داریم: **گزینه ۳**

$$\frac{a + fc}{b} = 2 \Rightarrow a + fc - 2b = 0$$

$$\xrightarrow{+f} a\left(\frac{1}{f}\right) + b\left(-\frac{1}{f}\right) + c = 0$$

بنابراین: $\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} - 1 = -\frac{a}{2}$

$$\xrightarrow{\times 4} 1 + a^2 - 4 = -2a$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases} \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ غ ق ق}$$

گزینه ۱ از بحث تعیین علامت در ریاضیات دهم، جدول زیر را به یاد داریم:

x	x_1	x_2
عبارت درجه دوم	موافق a	مخالف علامت a

پس وقتی عددی بین دو ریشه قرار دارد، علامت عبارت درجه دوم، مخالف علامت a است. یعنی اگر عدد k بین دو ریشه معادله $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آن‌گاه $a \times f(k) < 0$ است.

$$f(x) = mx^2 - x - 2 \Rightarrow f(2) = 4m - 2 - 2 = 4m - 4$$

$$f(2) < 0 \Rightarrow (x^2) \times f(2) < 0 \Rightarrow \text{بین دو ریشه است.}$$

$$\Rightarrow m(4m - 4) < 0 \Rightarrow m \in (0, 1)$$

جدول را ببینید:

	0	1
$m(4m - 4)$	+	-
		ج

ریشه‌های این معادله را می‌توانیم پیدا کنیم: **گزینه ۱**

$(x+1)$ را به طرف چپ می‌آوریم و برای $x^2 - 1$ مزدوج می‌نویسیم.

$$m(x^2 - 1) = x + 1 \Rightarrow m(x-1)(x+1) - (x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(mx - m - 1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = \frac{m+1}{m}$$

پس خواسته سؤال به صورت زیر قابل بیان است:

دقت کنید که α از -2 کم‌تر است پس حتماً $\alpha = \frac{m+1}{m}$ است.

$$\frac{m+1}{m} < -2 < -1 < 1 \Rightarrow \frac{m+1}{m} < -2$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{m} + 2 < 0 \Rightarrow \frac{m+1+2m}{m} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3m+1}{m} < 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} m \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

گزینه ۳ $\sqrt{\cos \alpha}$ و $\sqrt{\sin \alpha}$ اعداد مثبت‌اند و

مجموع توان چهارم آن‌ها ۱ است:

$$x_1^4 + x_2^4 = \sqrt{\sin \alpha}^4 + \sqrt{\cos \alpha}^4 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

پس باید معادله $2x^2 + ax + 4 = 0$ دو ریشه حقیقی مثبت داشته

۸۲- گزینه ۳ ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را α و β

می‌نامیم، پس ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + m = 0$ اعداد $k\alpha^2 - 2$ و $k\beta^2 - 2$ هستند. به جمع و ضرب ریشه‌های هر دو

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = S = 2 \\ \alpha\beta = P = -1 \end{cases} \quad \text{معادله نگاه کنید:}$$

$$4x^2 - 12x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} k\alpha^2 - 2 + k\beta^2 - 2 = -\frac{12}{4} = 3 \\ (k\alpha^2 - 2)(k\beta^2 - 2) = \frac{m}{4} \end{cases}$$

خب! عبارت مجموع ریشه‌ها را مرتب‌تر کنیم: $k(\alpha^2 + \beta^2) - 4 = 3$

$$k(\alpha^2 + \beta^2) = 7 \Rightarrow k(S^2 - 2PS) = k(2^2 - 2(-1)(2)) = 7$$

$$\Rightarrow k = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{k=\frac{1}{2}} \frac{m}{4} = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\right)\left(\frac{1}{2}\beta^2 - 2\right) \quad \text{حالا مقدار } m$$

$$\xrightarrow{\times 4} m = 4\left(\frac{\alpha^2}{2} - 2\right)\left(\frac{\beta^2}{2} - 2\right) = (\alpha^2 - 4)(\beta^2 - 4)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) + 16 = P^2 - 4(S^2 - 2PS) + 16$$

$$= (-1)^2 - 4(2^2 - 2(-1)(2)) + 16$$

$$= -1 - 4(14) + 16 = -41$$

۸۳- گزینه ۱ معادله را کمی مرتب‌تر کنیم:

$$x^2 + (x^2 - x)(x + 1 - m) = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + (x-1)(x+1-m)) = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + x^2 - 1 - mx + m) = 0$$

$$\Rightarrow x(2x^2 - mx + (m-1)) = 0$$

پس یک ریشه $x_3 = 0$ و مجموع مجذورات دو ریشه دیگر برابر است

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \left(-\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4 \quad \text{با:}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{4} - (m-1) = 4$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2 - 4m + 4 = 16 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow m = 6 \text{ یا } -2$$

اما به ازای $m = 6$ معادله به صورت $2x^2 - 6x + 5 = 0$ ریشه ندارد

و مجموع مجذورات ریشه‌های عبارت می‌شود $= 0$ که قابل قبول

نیست پس فقط $m = -2$ را می‌پذیریم.

این همان معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن

$x = \frac{-1}{2}$ قرار داده شده؛ پس $x_1 = \frac{-1}{2}$ یک ریشه معادله است

$$P = \frac{c}{a} = x_1 x_2 = -\frac{1}{2} x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{-2c}{a} \quad \text{و داریم:}$$

۸۰- گزینه ۱ راه حل اول اگر ریشه‌های معادله

$x^2 - 5x + 2 = 0$ را α و β بنامیم، معادله‌ای با ریشه‌های α^2 و β^2

می‌خواهیم. از معادله اولیه می‌دانیم $\alpha + \beta = 5$ و $\alpha\beta = 2$. حالا

جمع و ضرب ریشه‌های جدید:

$$S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 5^2 - 2 \times 2 = 21$$

$$P = \alpha^2 \times \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 2^2 = 4$$

پس معادله جدید با مجموع و حاصل ضرب ۲۱ و ۴، به صورت

$$x^2 - 21x + 4 = 0 \quad \text{است.}$$

راه حل دوم ریشه‌های جدید $X = x^2$ هستند، پس $x = \sqrt{X}$ را در

معادله اولیه قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \xrightarrow{x=\sqrt{X}} (\sqrt{X})^2 - 5\sqrt{X} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow X + 2 = 5\sqrt{X} \xrightarrow{\text{به توان } 2} X^2 + 4X + 4 = 25X$$

$$\Rightarrow X^2 - 21X + 4 = 0$$

۸۱- گزینه ۲ ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 6 = 0$ اعداد

α و β هستند پس داریم:

$$\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha + 6 = 3(\alpha + 2)$$

پس معادله جدید با ریشه‌های α^2 و β^2 ، در واقع با ریشه‌های

$3(\alpha + 2)$ و $3(\beta + 2)$ نوشته می‌شود. مجموع ریشه‌های جدید برابر است با:

$$x_1 + x_2 = 3(\alpha + 2) + 3(\beta + 2) = 3\alpha + 3\beta + 12$$

$$= 3(\alpha + \beta) + 12 = 3 \times 3 + (\alpha - \beta) + 12$$

اختلاف ریشه‌های جمع ریشه‌های

$$S = 3 \quad \text{اولیه}$$

$$k = 14 + (\alpha - \beta)$$

بنابراین:

فقط دقت کنید که چون $\alpha < \beta$ است، حاصل $\alpha - \beta$ ، قرینه

اختلاف دو ریشه است:

$$\alpha - \beta = -\sqrt{S^2 - 4P} = -\sqrt{3^2 - 4(-6)} = -\sqrt{9 + 24} = -\sqrt{33}$$

$$k = 14 - \sqrt{33}$$

و جواب می‌شود:

پادآوری اختلاف دو ریشه معادله درجه دوم $\sqrt{S^2 - 4P}$ است.

پس مجموع مکعبات ریشه‌های معادله، همان مجموع مکعبات ریشه‌های معادله $x^3 - x - 4 = 0$ است:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = S^3 - 3PS \quad \begin{matrix} S = \frac{-b}{a} = 1 \\ P = \frac{c}{a} = -4 \end{matrix} \rightarrow 1^3 - 3(1)(-4) = 13$$

۸۸- **گزینه ۴** با انتخاب $x^2 = t$ داریم: $t^2 - 3t + 1 = 0$

این معادله دو ریشه t_1 و t_2 دارد که هر دو مثبت‌اند (چون $S > 0$ و $P > 0$ و $\Delta > 0$) پس داریم: $x^2 = t_1, x^2 = t_2$

یعنی جواب‌ها $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ هستند. سؤال از ما مجموع توان چهارم ریشه‌ها را خواسته:

$$\begin{aligned} & (+\sqrt{t_1})^4 + (-\sqrt{t_1})^4 + (+\sqrt{t_2})^4 + (-\sqrt{t_2})^4 \\ & = t_1^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_2^2 = 2(t_1^2 + t_2^2) \end{aligned}$$

مجموع مربعات
ریشه‌های معادله
بر حسب t

$$= 2(S^2 - 2P) \quad \begin{matrix} S = \frac{-b}{a} = 2 \\ P = \frac{c}{a} = 1 \end{matrix} \rightarrow 2(2^2 - 2 \times 1) = 2 \times 2 = 4$$

۸۹- **گزینه ۲** اگر $x^2 = t$ باشد معادله به صورت

$t^2 - 6t - 4 = 0$ درمی‌آید که دو ریشه حقیقی مختلف‌العلامه (یکی مثبت و یکی منفی) دارد (چون $P < 0$ است) پس $x^2 = t_1 > 0$ و $x^2 = t_2 < 0$: بنابراین فقط دو ریشه $\pm\sqrt{t_1}$ داریم.

۹۰- **گزینه ۴** با انتخاب $x^2 = t$ داریم: $t^2 - 3t + 1 = 0$

از این معادله دو مقدار مثبت t_1 و t_2 به دست می‌آیند، پس:

$$x^2 = t_1, x^2 = t_2$$

و جواب‌های معادله صورت سؤال $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ هستند (یعنی ۴ جواب دارد). مجموع مجذور جواب‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 \\ & = t_1 + t_1 + t_2 + t_2 = 2(t_1 + t_2) = 2S = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

جمع ریشه‌های معادله
 $t^2 - 3t + 1 = 0$

۹۱- **گزینه ۴** با تغییر متغیر $x^2 = t$ این معادله به

صورت $t^2 - mt - (m^2 + 1) = 0$ درمی‌آید که برای t دو جواب مختلف‌العلامه دارد ($\frac{c}{a} < 0$ است).

پس فقط جواب مثبت قابل قبول است و داریم: $x = \pm\sqrt{t_1}$
اختلاف دو ریشه می‌شود $2\sqrt{t_1}$ که باید ۴ باشد؛ پس داریم:

$$2\sqrt{t_1} = 4 \Rightarrow \sqrt{t_1} = 2 \Rightarrow t_1 = 4$$

۸۴- **گزینه ۳** $x = 1$ در این معادله صدق می‌کند، پس می‌توانیم

آن را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4) = 0$$

ریشه‌های این
 α و β هستند.
ریشه این
است. $\gamma = 1$

حالا $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ را حساب کنیم:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{1}{1^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} + 1$$

$$\begin{matrix} S = \frac{-b}{a} = -1 \\ P = \frac{c}{a} = -4 \end{matrix} \rightarrow \frac{(-1)^2 - 2(-4)}{(-4)^2} + 1 = \frac{1 + 8}{16} + 1 = \frac{25}{16}$$

۸۵- **گزینه ۲** معادله را با کمی تغییر حل می‌کنیم:

در هم ضرب می‌کنیم.

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - 3 = 0$$

در هم ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + 3x = t} t(t+2) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = 1 \\ x^2 + 3x = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases}$$

در معادله اول $P = -1$ است و در معادله دوم ریشه حقیقی نداریم ($\Delta < 0$ است) پس ضرب ریشه‌ها می‌شود -۱.

۸۶- **گزینه ۳** اگر $x^2 = t$ در نظر بگیریم داریم:

$$t^2 - 9t + 8 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } 8 \Rightarrow x^2 = 1 \text{ یا } 8 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 2$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 = 3$$

۸۷- **گزینه ۲** می‌خواهیم $x - x^2$ را t بگیریم. پس در

$2x - 2x^2$ از -2 فاکتور می‌گیریم تا $x - x^2$ دیده شود:

$$(x^2 - x)^2 - 2x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 - x = t} t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ یا } -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 4 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \\ x^2 - x = -2 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

۹۶- گزینه ۱ نمودار f محور x ها را در طولهای ۲ و -۱

قطع کرده: پس: $f(x) = a(x-2)(x+1)$

چون عرض از مبدأ نمودار ۱ است، باید $f(0) = 1$ باشد:

$$f(0) = a(-2)(1) = -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

پس $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+1)$ و معادله $2+f(x) = 0$ را

می‌توانیم تشکیل دهیم:

$$2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{1^2 - 4(-6)} = 5$$

۹۷- گزینه ۱ با داشتن رأس سهمی، معادله‌اش به صورت

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

$$y = a(x-3)^2 + 3 \quad S(3, 3) \text{ داریم:}$$

حالا سؤال می‌گوید $a^2 = 1$ و چون سهمی ماکسیمم دارد $a < 0$

است. پس $a = -1$ و معادله سهمی به صورت $y = -(x-3)^2 + 3$

است و عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$\xrightarrow{x=0} y = -(0-3)^2 + 3 = -9 + 3 = -6$$

۹۸- گزینه ۱ منحنی بر سمت راست محور x ها مماس است

و مینیمم دارد پس باید $\Delta = 0$ بوده، ضریب x^2 مثبت باشد و مقدار

ریشه مضاعف نیز مثبت باشد.

$$y = a(x^2 + x) - 3x + 1 = ax^2 + (a-3)x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (a-3)^2 - 4a = a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 9$$

$$\text{ضریب } x > 0 \Rightarrow \frac{a-3}{2a} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a-3}{2a} < 0$$

پس فقط $a = 1$ قابل قبول است (به ازای $a = 9$ ، شرط $\frac{a-3}{2a} < 0$)

برقرار نیست).

۹۹- گزینه ۱ شکل را ببینید:

دو حالت داریم:

یا سهمی رو به بالا است ($a > 0$) و $y = 4$

عرض نقطه رأس برابر $3 + 4 = 7$ است.

یا سهمی رو به پایین است ($a < 0$) و

عرض نقطه رأس برابر $4 - 3 = 1$ است.

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1-4a^2}{4a} = 7 \Rightarrow \frac{a^2-2}{a} = 7 \quad a > 0 \text{ (الف)}$$

یعنی ریشه مثبت معادله بر حسب t ، باید ۴ باشد:

$$t^2 - mt - (m^2 + 1) = 0 \xrightarrow{t=4} 16 - 4m - (m^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m - 15 = 0 \Rightarrow m \text{ جمع مقادیر } S = \frac{-b}{a} = -4$$

۹۲- گزینه ۲ با قراردادن $x^2 = t$ به معادله

$$t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0 \text{ می‌رسیم. این معادله باید برای } t \text{ دو}$$

جواب مثبت بدهد تا برای x چهار جواب داشته باشیم.

شرایط دو جواب مثبت عبارت‌اند از: $S > 0, P > 0, \Delta > 0$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{m+2}{1} > 0 \Rightarrow m > -2$$

پس:

$$P = \frac{c}{a} = m + 5 > 0 \Rightarrow m > -5$$

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+5) = m^2 - 16 > 0 \Rightarrow |m| > 4$$

و از اشتراک این شرایط $m > 4$ قبول است.

۹۳- گزینه ۲ برای تغییر متغیر باید عبارات یکسانی ببینیم

تا بتوانیم آن‌ها را t بگیریم و به معادله درجه دوم برسیم. پس سعی

می‌کنیم عبارت‌های شبیه هم بسازیم!

$$(x-2)^4 + 12x = 3x^2 + 10 \Rightarrow (x-2)^4 = 3x^2 - 12x + 10$$

$$= 3(x^2 - 4x) + 10 = 3((x-2)^2 - 4) + 10 = 3(x-2)^2 - 2$$

حالا خوب شد. اگر $(x-2)^2 = t$ را بنامیم داریم:

$$t^2 = 3t - 2 \quad \text{پس: } t^2 - 3t + 2 = 0 \text{ و در نتیجه: } t = 1 \text{ یا } 2$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } 3 \\ (x-2)^2 = 2 \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

پس کوچک‌ترین ریشه معادله $2 - \sqrt{2}$ است.

۹۴- گزینه ۲ سهمی رو به پایین است پس $a < 0$.

جمع ریشه‌ها منفی است پس $\frac{-b}{a} < 0$ و با توجه به منفی بودن a

باید $b < 0$ باشد.

ضرب ریشه‌ها مثبت است پس $\frac{c}{a} > 0$ و در نتیجه $c < 0$. بنابراین

$$b + c < 0 \quad \text{مجموع } 2 \text{ عدد منفی است:}$$

۹۵- گزینه ۲ ریشه مضاعف معادله $f(x) = 0$ ، در شکل،

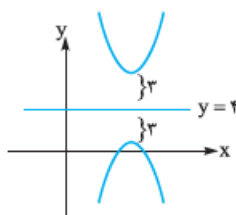
$x = -2$ داده شده: پس داریم:

$$ax^2 + 4x + b = 0 \Rightarrow a(x+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a(x^2 + 4x + 4) = 0$$

حالا چون ضریب x باید ۴ بشود حتماً $a = 1$ بوده و داریم:

$$b = 4a = 4$$



$$\Rightarrow f(x) = -\Delta(x-1)^2 + \gamma \Rightarrow f(x) = -\Delta x^2 + 10x + 2$$

حالا معادله $f(x) = 6$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = 6 \Rightarrow -\Delta x^2 + 10x + 2 = 6$$

$$\Rightarrow -\Delta x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{4}{\Delta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع معکوس ریشه‌ها} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{2}{\frac{4}{\Delta}} = \frac{2}{5}$$

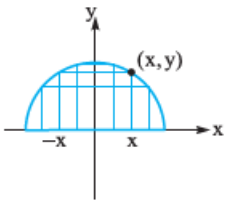
گزینه ۱۰۲ اگر $40 + x$ بوته بکاریم از میانگین کل

محصول (یعنی از ۸ کیلوگرم) کم می‌شود یعنی میانگین تولید $8 - \frac{x}{\lambda}$ است؛ پس مقدار محصول برابر است با:

$$\text{مقدار محصول} = (40 + x) \left(8 - \frac{x}{\lambda}\right) = 320 + 8x - \frac{x^2}{\lambda} = -\frac{x^2}{\lambda} + 8x + 320$$

ماکسیم این عبارت به ازای $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{3}{2(-\frac{1}{\lambda})} = 12$ می‌آید و برابر است با:

$$-\frac{12^2}{\lambda} + 3 \times 12 + 320 = \frac{-144}{\lambda} + 36 + 320 = 338$$



گزینه ۱۰۳ مستطیل‌های مختلفی

را در شکل آوردیم اگر مرکز دایره مبدأ مختصات باشد، مختصات نقطه رأس مستطیل روی دایره (در ربع اول) (x, y) است. فاصله این نقطه تا مبدأ

برابر شعاع دایره است، پس داریم: $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
مساحت مستطیل xy ثابت و برابر ۱ است و باید به بیشترین مقدار برسد. چون جمع x^2 و y^2 ثابت و برابر ۱ است، $x^2 y^2$ زمانی حداکثر می‌شود که $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$ باشد و حداکثر مساحت $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ یعنی ۱ است.

دقت کنید که x و y اعداد مثبت‌اند و اگر $x^2 y^2$ ماکسیم شود، xy نیز ماکسیم می‌شود.

گزینه ۱۰۴ فاصله نقاط $M(x, \sqrt{2x+9})$ از نقطه

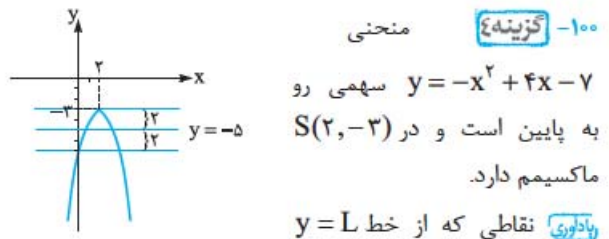
$A(4, 0)$ برابر است با:

$$AM = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{2x+9}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 2x + 9} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

$$\Rightarrow a^2 - \gamma a - 2 = 0 \xrightarrow{a > 0} a = \frac{\gamma + \sqrt{\Delta \gamma}}{2}$$

$$y_S = \frac{-\Delta}{2a} = -\frac{\lambda - 4a^2}{2a} = 1 \Rightarrow \frac{a^2 - 2}{a} = 1 \quad a < 0 \text{ (ب)}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \xrightarrow{a < 0} a = -1$$



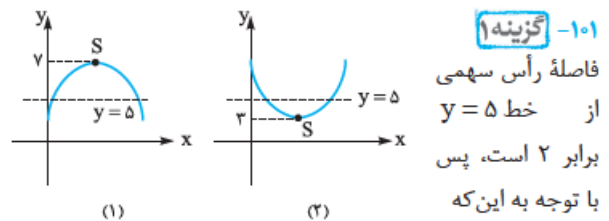
به فاصله ۲ باشند روی خط‌های $y = L + 2$ و $y = L - 2$ (یعنی روی دو خط افقی موازی آن) قرار دارند. سؤال می‌گوید این دو خط افقی، یک سهمی را در ۳ نقطه قطع کرده‌اند پس حتماً یکی از رأس سهمی گذشته است؛ پس خط $y = L$ در واقع $y = -5$ بوده و دو خط بالا و پایین $y = -3$ و $y = -7$ هستند. حالا دنبال نقاط تلاقی خط $y = -5$ با منحنی هستیم:

$$-x^2 + 4x - 7 = -5 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow S = 4, P = 2$$

پس داریم: $(x_1 + \frac{1}{x_1})(x_2 + \frac{1}{x_2}) = x_1 x_2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2}$

$$= P + \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + \frac{1}{P} = P + \frac{1}{P} + \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{4^2 - 2 \times 2}{2} = 8 \frac{1}{2}$$



خط $y = 5$ نمودار تابع درجه دوم را قطع می‌کند دو حالت فوق را خواهیم داشت:

با توجه به این که عرض از مبدأ سهمی ۲ است، حالت (۲) صحیح نیست و فقط حالت (۱) می‌تواند درست باشد. مجموع طول نقاط تلاقی خط $y = 5$ با منحنی،

$$\text{برابر ۲ است.} \Rightarrow \text{طول رأس سهمی} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 1$$

$$\Rightarrow S(1, \gamma) \Rightarrow \text{معادله سهمی: } f(x) = a(x-1)^2 + \gamma$$

$$\xrightarrow{f(0)=2} a + \gamma = 2 \Rightarrow a = -5$$



۱۰۹- **گزینه ۳** معادله خطی که از نقطه $A(0, 1)$ می‌گذرد $y - 1 = m(x - 0)$ یا $y = mx + 1$ است. پس تلاقی آن با سهمی $x^2 - 4x + 2$ به معادله $x^2 - (4+m)x + 1 = 0$ می‌رسد که ریشه‌هایش α و β هستند. صورت سؤال می‌گوید $\alpha\beta + \beta\alpha = 2$ پس داریم:

$$\frac{P=c}{a}=1 \rightarrow (4+m)=2 \Rightarrow m=-2$$

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-4}{1}=4+m$$

پس داریم: $y = -2x + 1$ که محور x ها را در $x = \frac{1}{2}$ قطع می‌کند.

۱۱۰- **گزینه ۸** محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند یعنی معادله $y = 0$ دو ریشه منفی دارد:

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} S < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \\ \Delta > 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 4(12)(m-2) > 0 \\ P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m > 2 \end{cases}$$

شرط دلتا را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\div 4} (m+1)^2 - 12(m-2) &= m^2 + 2m + 1 - 12m + 24 \\ &= m^2 - 10m + 25 = (m-5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5 \end{aligned}$$

پس هیچ مقداری برای m نداریم. (اشتراکی بین $-1 < m < 2$ و $m > 2$ نیست.)

۱۱۱- **گزینه ۳** برای این که سهمی فقط از ناحیه سوم نگذرد باید شبیه شکل روبه‌رو باشد: پس این سهمی رو به بالا است و دو ریشه در سمت

راست محور x ها دارد. بنابراین ضریب x^2 یعنی $m > 0$ است و داریم: $S > 0, P \geq 0, \Delta > 0$

$$mx^2 + (2m-8)x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} S = -\frac{2m-8}{m} > 0 \Rightarrow \frac{2m-8}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 4 \\ P = \frac{2}{m} \geq 0 \Rightarrow m \geq 0 \\ \Delta = (2m-8)^2 - 4(m)(2) = 4m^2 - 32m + 64 - 8m \\ = 4m^2 - 40m + 64 = 4(m^2 - 10m + 16) \\ = 4(m-2)(m-8) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 8 \\ m < 2 \end{cases} \end{cases}$$

از اشتراک این شرطها $0 < m < 2$ است.

عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است، پس وقتی زیر رادیکال مینیمم باشد جواب هم مینیمم است:

$$y = x^2 - 6x + 25$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3 \Rightarrow y_{\min} = 3^2 - 6(3) + 25 = 16$$

$$\Rightarrow \min(AM) = \sqrt{16} = 4$$

۱۰۵- **گزینه ۲**

به شکل توجه کنید: مساحت مستطیل مقابل $(88-2x)x$ است و باید ماکسیمم شود:

$$y = -2x^2 + 88x$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{88}{2(-2)} = 22 \Rightarrow y_{\max} = -2(22)^2 + 88(22)$$

$$= -2(22)^2 + 4(22)^2 = 2(22)^2 = 2(484) = 968$$

۱۰۶- **گزینه ۸**

اگر طول طناب l باشد داریم: مساحت $= x(1-2x)$

$$y = -2x^2 + lx$$

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{l^2 - 4(-2)(0)}{4(-2)} \Rightarrow 648 = \frac{l^2}{8}$$

$$\Rightarrow l^2 = 8 \times 648 \Rightarrow l^2 = 8^2 \times 9^2 \Rightarrow l = 8 \times 9 = 72$$

۱۰۷- **گزینه ۳** فاصله نقاط $A(x, x^2 + 2x)$ از خط

$$y = 2x - 3 \text{ برابر است با:}$$

$$A(x, x^2 + 2x) \left\{ \begin{aligned} d &= \frac{|2x - (x^2 + 2x) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ 2x - y - 3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{|-x^2 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|x^2 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{5}}$$

کمترین مقدار آن به ازای $x = 0$ برابر است با $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

۱۰۸- **گزینه ۱** سؤال می‌گوید معادله $y_1 = y_2$ یعنی

$$(2x+1)(x+8) = mx$$

$$2x^2 + 17x + 8 = mx \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

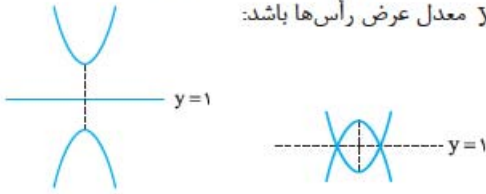
$$\xrightarrow{\Delta < 0} (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0 \Rightarrow (17-m)^2 < 64$$

$$\Rightarrow -8 < 17-m < 8 \Rightarrow -25 < -m < -9$$

$$\Rightarrow 9 < m < 25$$

۱۱۴- گزینه ۱

نمودار دو سهمی رو به بالا و پایین، وقتی نسبت به خط افقی $y=1$ تقارن دارد که طول رأس‌های آن‌ها برابر باشد و $y=1$ معدل عرض رأس‌ها باشد:



$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + ax + 4 \Rightarrow x_{S_1} = \frac{a}{2} \\ g(x) &= x^2 - 2x + b \Rightarrow x_{S_2} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{طول رأس‌ها} \\ \text{برابر است.} \end{array} \rightarrow \frac{a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow a = 2$$

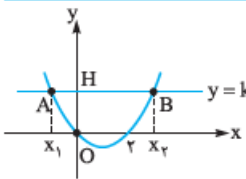
حالا عرض رأس‌ها را حساب کنیم: $y_{S_1} = f(1) = -1 + \frac{a}{2} + 4 = 5$

$$y_{S_2} = g(1) = 1 - 2 + b = b - 1$$

گفتیم $y=1$ باید معدل y_{S_1} و y_{S_2} باشد:

$$\frac{5 + b - 1}{2} = 1 \Rightarrow 4 + b = 2 \Rightarrow b = -2$$

و در پایان: $f(2) + g(-2) = -4 + 2a + 4 + 4 + 4 + \frac{b}{-2} = 10$



۱۱۵- گزینه ۲ نمودار سهمی

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{و} \quad \text{خط } y = k$$

را ببینید:

x_1 و x_2 طول نقاط تلاقی دو نمودار یعنی ریشه‌های معادله

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x - k = 0 \quad \text{است. مختصات نقاط برخورد } A(x_1, k) \text{ و}$$

$B(x_2, k)$ است. با توجه به شکل، مثلث OAB می‌تواند در رأس

O قائمه باشد: $\text{شیب } OA = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{k}{x_1}$

$$\text{شیب } OB = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{k}{x_2}$$

$$OA \perp OB \Rightarrow \text{ضرب شیب‌ها} = -1 \Rightarrow \frac{k}{x_1} \times \frac{k}{x_2} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{x_1 x_2} = -1 \xrightarrow{x_1 x_2 = P = -2k} \frac{k^2}{-2k} = -1 \Rightarrow k = 2$$

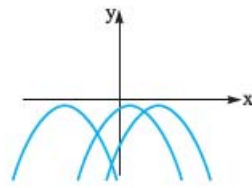
$$\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \text{پس داریم:}$$

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{2^2 - 4(-4)} = \sqrt{20}$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{AB \times OH}{2} = \frac{\sqrt{20} \times 2}{2} = 2\sqrt{5}$$

۱۱۲- گزینه ۱

دو حالت وجود دارد:



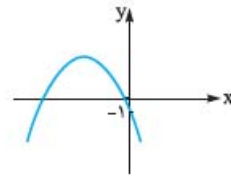
الف) سهمی فقط در نواحی سوم و چهارم است و مقادیر نامثبت دارد:

$$(a-3)x^2 + ax - 1 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a-3 < 0 \end{cases}$$

$$1) a^2 - 4(a-3)(-1) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-2) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} -6 \leq a \leq 2$$

$$2) a-3 < 0 \Rightarrow a < 3$$



ب) سهمی فقط از ناحیه اول نگذشته و در ناحیه دوم می‌آید: پس باید دو ریشه منفی یا صفر داشته باشد: بنابراین:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\xrightarrow{\text{بیرون دو ریشه}} a < -6 \text{ یا } a > 2$$

$$S < 0 \Rightarrow S = -\frac{a}{a-3} < 0 \Rightarrow \frac{a}{a-3} > 0 \Rightarrow a > 3 \text{ یا } a < 0$$

$$P \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} \geq 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

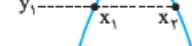
از اشتراک این شرط‌ها $a < -6$ است.



پس در کل $a \leq 2$ جواب است.

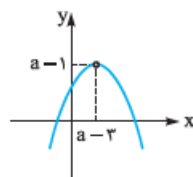
۱۱۳- گزینه ۲

در سهمی به خاطر تقارن،



هر مقدار از y ، دو بار به دست می‌آید.

مثلاً در شکل بالا اگر x_1 از دامنه برداشته شود برد تغییر نمی‌کند چون بالآخره در طول x_2 همان عرض به دست می‌آید.



پس حتماً نقطه‌ای با طول $a-3$ رأس سهمی بوده که برداشتن آن، برد را به صورت بازه باز درآورده:

یعنی رأس $S(a-3, a-1)$ سهمی است.

$$y = -2x^2 + ax + b \Rightarrow x_S = -\frac{a}{2(-2)} = \frac{a}{4} = a-3$$

$$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow x_S = 1, y_S = 3$$

$$y_S = f(1) = 3 \Rightarrow -2 + \frac{a}{4} + b = 3 \Rightarrow b = 1$$

و در پایان:

$$f(a-b) = f(4-1) = f(3) = -2(3)^2 + \frac{a}{4}(3) + \frac{b}{1}$$

$$= -18 + 12 + 1 = -5$$

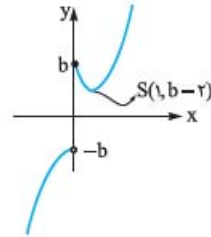


۱۱۶ - گزینه ۳ این تابع برای $x > 0$ و $x < 0$ به صورت‌های

زیر است:

$$x > 0 \rightarrow f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + bx}{x} = 2x^2 - 4x + b$$

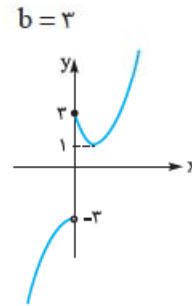
$$x < 0 \rightarrow f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + bx}{-x} = -2x^2 + 4x - b$$



رأس این سهمی‌ها در $x = 1$ و عرض رأس‌ها به ترتیب $b - 2$ و $2 - b$ است. شکل را ببینید:

برد تابع شامل اعداد $-b$ ، $-b + 1$ ، $-b - 3$ نیست. تعداد این اعداد $(b - 2) - (-b) + 1$ یعنی $2b - 2$ است؛ پس داریم:

شکل را ببینید:



$$\text{برد} = \mathbb{R} - [-3, 1)$$

برد شامل اعداد -3 ، -2 ، -1 و 0 نیست؛ پس داریم:

$$f(b) = f(3) = 2(3)^2 - 4(3) + \underset{b}{3} \\ = 18 - 12 + 3 = 9$$