

درسنامه + پرسش‌های چهارگزینه‌ای + پاسخ‌های کاملاً تشریحی

ریاضیات گسسته

(دوازدهم)

ویراست دوم

علیرضا علی‌پور



انتشارات
گنگو

به نام خدا

این کتاب را بر اساس محتوای ریاضیات گسسته سال دوازدهم و با هدف کسب مهارت در حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است و رویکرد آن آموزش نکات و مطالبی است که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای مفیدند. هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در ابتدای هر درس، ضمن مرور نکات مربوط به آن، روش‌های اصلی حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای را با آوردن نمونه‌هایی از این پرسش‌ها آموزش داده‌ایم. پس از آن، تعداد زیادی پرسش چهارگزینه‌ای آورده‌ایم و راه‌حل آن‌ها را در انتهای کتاب گنجانده‌ایم. در انتخاب این پرسش‌ها به تنوع و فراوانی اهمیت داده‌ایم. به این ترتیب، با مطالعه این کتاب، تقریباً هر آنچه را که برای حل پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کسب آمادگی برای شرکت در آزمون‌های مختلف به ویژه کنکور سراسری نیاز دارید به دست خواهید آورد.

در این ویراست درسنامه‌ها با تعداد قابل توجهی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای غنی شده‌اند، به طوری که این پرسش‌ها پوشش‌دهنده همه نکات و مفاهیم درس مربوط به آن هستند. همچنین پرسش‌های چهارگزینه‌ای هر مبحث از درس را به دو دسته تقسیم کرده‌ایم. در دسته اول پرسش‌هایی ساده و مفهومی را آورده‌ایم که با حل آن‌ها مفاهیم آن مبحث مرور می‌شود. این پرسش‌ها کمتر در آزمون‌ها دیده می‌شوند ولی برای تسلط بر مفاهیم درس، حل آن‌ها ضروری است. در دسته دوم پرسش‌هایی را آورده‌ایم که سطح دشواری آن‌ها متوسط است و در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری بیشتر این نوع پرسش‌ها مطرح می‌شود. تعداد این پرسش‌ها بسیار بیشتر از پرسش‌های دسته اول است و حل آن‌ها را به تمام خوانندگان توصیه می‌کنیم.

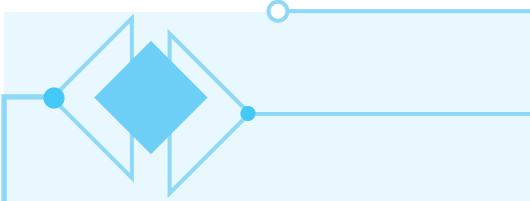
اگر فکر می‌کنید هنوز به مطالب درسی مسلط نیستید، بهتر است پیش از مطالعه هر درس، مطالب مربوط به آن را از کتاب «ریاضیات گسسته سه‌بعدی» از همین انتشارات مطالعه کنید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم مهدیه جمشیدی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم عاطفه نوین برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از خانم زینب آدینه‌وند و آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

فهرست

● فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد

۲	درس اول: استدلال ریاضی
۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۷	خودآزمایی ۱
۹	درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح
۲۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۰	خودآزمایی ۲
۳۱	خودآزمایی ۳
۳۲	خودآزمایی ۴
۳۳	خودآزمایی ۵
۳۳	خودآزمایی ۶
۳۵	درس سوم: هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها
۴۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۰	خودآزمایی ۷
۵۱	خودآزمایی ۸
۵۲	خودآزمایی ۹
۵۳	خودآزمایی ۱۰



● فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

۵۶	درس اول: معرفی گراف
۶۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۷۲	خودآزمایی ۱۱
۷۳	خودآزمایی ۱۲
۷۵	خودآزمایی ۱۳
۷۶	خودآزمایی ۱۴
۷۸	درس دوم: مدل‌سازی با گراف
۸۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۸۴	خودآزمایی ۱۵
۸۵	خودآزمایی ۱۶
۸۷	خودآزمایی ۱۷

● فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

۹۰	درس اول: مباحثی در ترکیبیات
۱۰۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۱۰۸	خودآزمایی ۱۸
۱۰۹	خودآزمایی ۱۹



۱۱۲..... درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

۱۱۷..... پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱۲۲..... خودآزمایی ۲۰

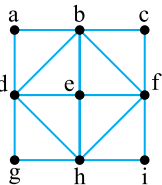
۱۲۳..... خودآزمایی ۲۱

۱۲۶..... ● **فصل چهارم: پاسخ‌های تشریحی**

۱۸۸..... ● **فصل پنجم: پاسخنامهٔ کلیدی**

درس دوم: مدل سازی با گراف

تعریف زیرمجموعه D از رأس های گراف G را **مجموعه احاطه گر** می نامیم. هرگاه هر رأس از گراف که در D نباشد حداقل به یکی از رأس های D وصل باشد.



گراف G در شکل مقابل رسم شده است. کدام مجموعه یک مجموعه احاطه گر گراف G است؟

(۲) $\{b, d, f, h\}$

(۱) $\{a, c, g, i\}$

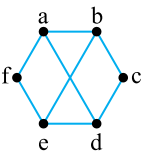
(۴) $\{c, e, g\}$

(۳) $\{b, e, i\}$

تست

راه حل

مجموعه $\{a, c, g, i\}$ مجموعه احاطه گر G نیست، زیرا رأس e در این مجموعه نیست و به هیچ یک از رأس های این مجموعه هم وصل نیست. مجموعه $\{b, d, f, h\}$ یک مجموعه احاطه گر G است، زیرا هر رأس که در این مجموعه نیست، یعنی رأس های a, c, e, g, i حداقل به یکی از رأس های این مجموعه وصل است. مجموعه $\{b, e, i\}$ مجموعه احاطه گر G نیست، زیرا رأس g در این مجموعه قرار ندارد و به هیچ یک از رأس های این مجموعه وصل هم نیست. مجموعه $\{c, e, g\}$ نیز مجموعه احاطه گر G نیست، زیرا رأس a در این مجموعه نیست و به هیچ یک از رأس های این مجموعه وصل هم نیست (از این پس برای سادگی می گوییم رأس a توسط مجموعه $\{c, e, g\}$ احاطه نمی شود).



گراف مقابل چند مجموعه احاطه گر دو عضوی دارد؟

(۲) ۶

(۱) ۵

(۴) ۱۰

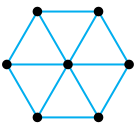
(۳) ۸

تست

راه حل

باتوجه به محدود بودن تعداد حالت ها به سادگی می توانیم احاطه گر بودن یا نبودن هر مجموعه دو عضوی از رئوس را بررسی کنیم. مجموعه های احاطه گر: $\{a, b\}$ ، $\{a, d\}$ ، $\{b, e\}$ ، $\{c, f\}$ و $\{d, e\}$. مثلاً علت احاطه گر نبودن مجموعه های $\{a, c\}$ ، $\{a, e\}$ و $\{b, d\}$ این است که رأس های c, e و f به ترتیب توسط این سه مجموعه احاطه نمی شوند.

تعریف در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G ، به هر مجموعه ای که کمترین تعداد عضو را داشته باشد **مجموعه احاطه گر مینیمم** می گوییم و تعداد اعضای هر چنین مجموعه ای را **عدد احاطه گری گراف G** می نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم. گاهی اوقات برای راحتی، به یک مجموعه احاطه گر مینیمم از گراف G ، یک **γ -مجموعه** می گوییم.



عدد احاطه گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

تست

راه حل

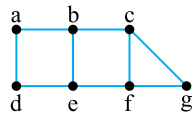
فرض کنید a رأس درجه ۶ (رأس مرکزی) در گراف داده شده باشد، در این صورت $\{a\}$ یک مجموعه احاطه گر این گراف است، زیرا هر رأسی غیر از a به a وصل است. بنابراین $\{a\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم است و عدد احاطه گری گراف برابر ۱ است.

با توجه به آنچه در این تست ملاحظه کردیم به یک نکته کلی پی می بریم.

نکته

اگر در گراف G رأسی مجاور با همه رأس ها وجود داشته باشد، عدد احاطه گری G برابر ۱ است.

تست ۴



- کدام مجموعه یک مجموعه احاطه گر مینیمم گراف شکل مقابل است؟
- (۱) $\{a, c\}$
 (۲) $\{d, e, f\}$
 (۳) $\{c, d\}$
 (۴) $\{a, g\}$

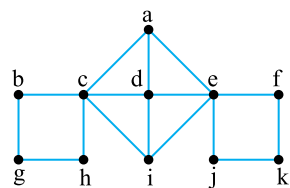
راه حل

در گراف فوق رأسی مجاور با همه رئوس وجود ندارد، پس این گراف مجموعه احاطه گر تک عضوی ندارد. ولی $\{c, d\}$ یک مجموعه احاطه گر این گراف است. پس $\{c, d\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم این گراف است. توجه کنید که مجموعه‌های $\{a, c\}$ و $\{a, g\}$ مجموعه احاطه گر نیستند، زیرا رأس e توسط هیچ‌یک از این دو مجموعه احاطه نمی‌شود و مجموعه $\{d, e, f\}$ علی‌رغم اینکه یک مجموعه احاطه گر است ولی احاطه گر مینیمم نیست.

تعریف

یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه گر نباشد **مجموعه احاطه گر مینیمال** می‌نامیم.

تست ۵



- کدام مجموعه یک مجموعه احاطه گر مینیمال گراف شکل مقابل است؟
- (۱) $\{b, c, d, e, f\}$
 (۲) $\{b, h, a, j, f\}$
 (۳) $\{g, a, i, k\}$
 (۴) $\{g, h, d, j, k\}$

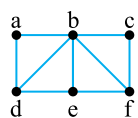
راه حل

مجموعه $\{b, c, d, e, f\}$ احاطه گر است ولی مینیمال نیست، زیرا اگر عضو d را از آن حذف کنیم، یعنی مجموعه $\{b, c, e, f\}$ ، همچنان احاطه گر است. مجموعه $\{b, h, a, j, f\}$ احاطه گر نیست، زیرا رأس i توسط این مجموعه احاطه نمی‌شود. مجموعه $\{g, a, i, k\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال است، زیرا اولاً خود این مجموعه احاطه گر است (بررسی کنید!)، ثانیاً هر رأس از این مجموعه را که حذف کنیم، رأسی وجود دارد که توسط سه رأس دیگر احاطه نمی‌شود (بررسی می‌کنیم!):

- اگر g را حذف کنیم، رأس b توسط $\{a, i, k\}$ احاطه نمی‌شود.
- اگر a را حذف کنیم، خود رأس a توسط $\{g, i, k\}$ احاطه نمی‌شود.
- اگر i را حذف کنیم، خود رأس i توسط $\{g, a, k\}$ احاطه نمی‌شود.
- اگر k را حذف کنیم، رأس j توسط $\{g, a, i\}$ احاطه نمی‌شود.

و در آخر مجموعه $\{g, h, d, j, k\}$ احاطه گر است ولی مینیمال نیست، زیرا اگر عضو h را از آن حذف کنیم، یعنی مجموعه $\{g, d, j, k\}$ ، همچنان احاطه گر است.

تست ۶



- گراف مقابل چند مجموعه احاطه گر مینیمال دو عضوی دارد؟
- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

راه حل

فرض کنید D یک مجموعه احاطه گر مینیمال دو عضوی از گراف فوق باشد. توجه کنید که $b \notin D$ ، زیرا رأس b به تنهایی همه رأس‌های گراف را احاطه می‌کند و نیازی به رأس دیگر در D نیست و می‌توانیم آن را حذف کنیم. با بررسی مجموعه‌های دو عضوی نتیجه می‌گیریم مجموعه‌های $\{a, f\}$ ، $\{c, d\}$ و $\{d, f\}$ مجموعه‌های احاطه گر مینیمال دو عضوی گراف فوق هستند. پس این گراف سه مجموعه احاطه گر مینیمال دو عضوی دارد.

تعریف

فرض کنید X عددی حقیقی باشد. به بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از X یا مساوی با X ، **کف** X و به کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از X یا مساوی با X ، **سقف** X می‌گوییم. کف X را با $\lfloor X \rfloor$ یا $\lceil X \rceil$ و سقف X را با $\lceil X \rceil$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که کف X همان جزء صحیح X است.

قضیه ۱

اگر G یک گراف از مرتبه n با ماکزیمم درجه Δ باشد، آن‌گاه $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$.

تست
□□□□

عدد احاطه‌گری گراف C_{10} برابر کدام است؟

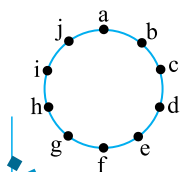
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

راه‌حل

گراف C_{10} گرافی از مرتبه 10 با ماکزیمم درجه 2 است. بنابراین طبق قضیه قبل،

$$\gamma(C_{10}) \geq \left\lfloor \frac{10}{2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$$

در ضمن در C_{10} مجموعه احاطه‌گری با 4 رأس وجود دارد. مثلاً در گراف شکل مقابل $\{a, d, g, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. در نتیجه $\gamma(C_{10}) = 4$.



تست
□□□□

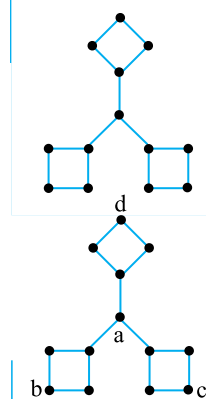
عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

راه‌حل

گراف داده شده از مرتبه 13 با ماکزیمم درجه 3 است. در نتیجه $\gamma \geq \left\lfloor \frac{13}{3+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor = 3$.

از طرف دیگر، این گراف مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی دارد، مثلاً $\{a, b, c, d\}$. پس عدد احاطه‌گری این گراف برابر 4 است.



نکته

اگر D یک مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد، آن‌گاه برای هر رأس از G مانند v حداقل یکی از رأس‌های مجموعه $N_G[v]$ به همراه همسایه‌هایش) باید در D قرار داشته باشد، زیرا در غیر این صورت v توسط مجموعه D احاطه نمی‌شود. توجه به این نکته در به دست آوردن عدد احاطه‌گری یک گراف بسیار راهگشاست.

تست
□□□□

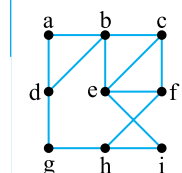
فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر گراف مقابل باشد. مجموعه D با کدام مجموعه ممکن است

عضو مشترک نداشته باشد؟

- ۱) $\{a, b, d\}$ ۲) $\{c, e, f, h\}$
۳) $\{d, h, i\}$ ۴) $\{a, b, d, g\}$

راه‌حل

توجه کنید که $N[a] = \{a, b, d\}$ ، $N[f] = \{c, e, f, h\}$ و $N[d] = \{a, b, d, g\}$ ، پس طبق نکته قبل D با هر یک از این سه مجموعه قطعاً عضو مشترک دارد. ولی D ممکن است با مجموعه $\{d, h, i\}$ عضو مشترک نداشته باشد. مثلاً اگر D مکمل این مجموعه باشد، یعنی $D = \{a, b, c, e, f, g\}$ ، در این صورت D یک مجموعه احاطه‌گر است که با مجموعه $\{d, h, i\}$ عضو مشترکی ندارد.



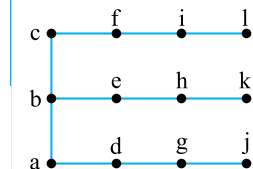
تست
□□□□

عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

راه‌حل

اگر D یک مجموعه احاطه‌گر گراف فوق باشد، آن‌گاه با توجه به نکته فوق از هر یک از مجموعه‌های $\{j, g\}$ ، $\{k, h\}$ ، $\{l, i\}$ و $\{b, a, e, c\}$ حداقل یک رأس باید در D باشد (مجموعه $\{j, g\}$ برابر $N[j]$ و مجموعه $\{b, a, e, c\}$ برابر $N[b]$ است). بنابراین D حداقل 4 عضو دارد، یعنی عدد احاطه‌گری گراف داده شده از 4 کمتر نیست. در ضمن مجموعه $\{b, g, h, i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر این گراف است. در نتیجه عدد احاطه‌گری این گراف برابر 4 است.



مدل‌سازی با گراف

۴۱۴- حداقل چند مهرهٔ رخ باید در یک صفحهٔ شطرنجی 6×6 قرار دهیم به طوری که هر خانه‌ای که در آن رخ قرار نگرفته است توسط حداقل یک مهرهٔ رخ تهدید شود؟ (مهرهٔ رخ تمام خانه‌هایی را که در سطر یا ستون خود قرار دارند تهدید می‌کند).

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

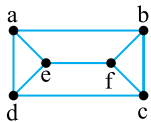
۴۱۵- حداقل چند مهرهٔ وزیر باید در یک صفحهٔ شطرنجی 4×4 قرار دهیم به طوری که هر خانه‌ای که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک مهرهٔ وزیر تهدید شود؟ (مهرهٔ وزیر به صورت سطری، ستونی و قطری بقیهٔ خانه‌ها را تهدید می‌کند).

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۱۶- حداقل چند مهرهٔ شاه باید در یک صفحهٔ شطرنجی 6×6 قرار دهیم به طوری که هر خانه‌ای که در آن شاه قرار نگرفته است توسط حداقل یک مهرهٔ شاه تهدید شود؟ (مهرهٔ شاه از خانه‌ای که در آن قرار دارد هر خانه‌ای را که با آن ضلع یا رأس مشترک دارد تهدید می‌کند).

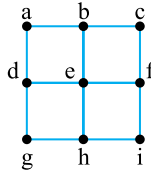
(۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۳

۴۱۷- گراف G در شکل مقابل رسم شده است. کدام مجموعه یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G نیست؟



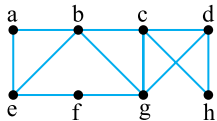
- (۱) $\{a, f\}$ (۲) $\{a, b\}$ (۳) $\{b, c\}$ (۴) $\{e, f\}$

۴۱۸- گراف G در شکل مقابل رسم شده است. کدام مجموعه یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G است؟



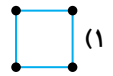
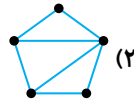
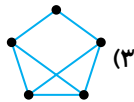
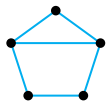
- (۱) $\{a, e, i\}$ (۲) $\{a, d, f, i\}$ (۳) $\{a, b, f, i\}$ (۴) $\{a, c, g, i\}$

۴۱۹- گراف G در شکل مقابل رسم شده است. کدام مجموعه یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف G است؟

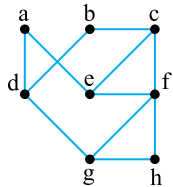


- (۱) $\{b, g, h\}$ (۲) $\{a, g\}$ (۳) $\{b, h\}$ (۴) $\{e, d\}$

۴۲۰- عدد احاطه‌گری کدام گراف برابر ۱ است؟



۴۲۱- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

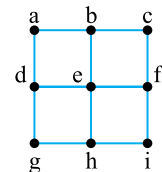


- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۲۲- گراف C_5 چند γ -مجموعه دارد؟

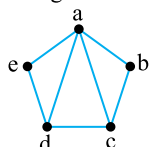
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۱۰

۴۲۳- کدام مجموعه یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال گراف شکل مقابل نیست؟

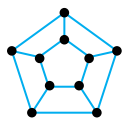


- (۱) $\{d, e, f\}$ (۲) $\{a, b, h, i\}$ (۳) $\{b, d, f, h\}$ (۴) $\{a, b, c, g, i\}$

۴۲۴- گراف شکل مقابل چند احاطه‌گر مینیمال ۲ عضوی دارد؟

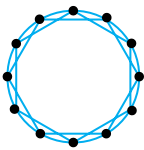


- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶



۴۲۵- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۵ (۳)
- ۴ (۲)
- ۲ (۴)



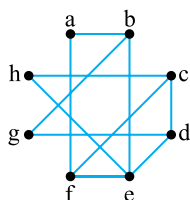
۴۲۶- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۴ (۳)
- ۳ (۲)
- ۵ (۴)

۴۲۷- فرض کنید G گرافی از مرتبه 2^0 با ماکزیمم درجه 18 باشد. عدد احاطه‌گری G برابر کدام است؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۴ (۴)

(۴) عدد احاطه‌گری G را به طور قطعی نمی‌توان تعیین کرد.



۴۲۸- فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر گراف شکل مقابل باشد. مجموعه D حتماً با کدام مجموعه عضو مشترک دارد؟

- {a, b, f} (۱)
- {b, e, g} (۲)
- {c, d, g, h} (۳)
- {a, b, c, d} (۴)

۴۲۹- گراف کامل K_1 چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟

- ۱ (۱)
- ۹ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۴۵ (۴)

۴۳۰- فرض کنید G گرافی از مرتبه 12 و عدد احاطه‌گری G برابر 1 باشد. چندتا از گزاره‌های زیر قطعاً درست است؟

- الف) G همبند است. (۱)
- ب) G دور دارد. (۲)
- پ) G کامل است. (۳)
- ت) G منتظم است. (۴)

۴۳۱- گراف C_6 چند γ -مجموعه دارد؟

- ۱ (۱)
- ۳ (۲)
- ۶ (۳)
- ۱۵ (۴)

۴۳۲- عدد احاطه‌گری گراف P_{10} برابر کدام است؟

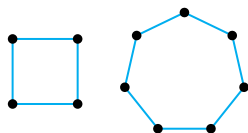
- ۳۳ (۱)
- ۳۴ (۲)
- ۵۰ (۳)
- ۵۱ (۴)

۴۳۳- عدد احاطه‌گری گراف C_{10} برابر کدام است؟

- ۲۵ (۱)
- ۳۳ (۲)
- ۳۴ (۳)
- ۵۰ (۴)

۴۳۴- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۵ (۳)
- ۴ (۲)
- ۶ (۴)



مدل سازی با گراف

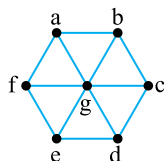
۴۳۵- حداقل چند مهره شاه باید در یک صفحه شطرنجی 7×7 قرار دهیم به طوری که هر خانه‌ای که در آن شاه قرار نگرفته است توسط حداقل

یک مهره شاه تهدید شود؟

- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

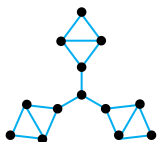
۴۳۶- به ازای چند مقدار $k \in \{1, 2, 3\}$ گراف شکل مقابل یک احاطه‌گر مینیمال k عضوی دارد؟

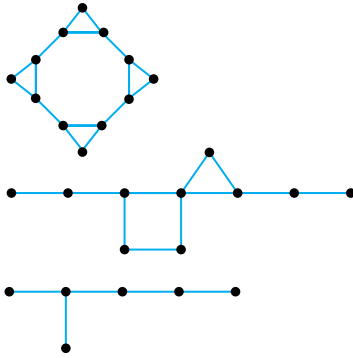
- ۱ (۱)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- صفر (۴)



۴۳۷- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۵ (۳)
- ۴ (۲)
- ۶ (۴)





۴۳۸- عدد احاطه‌گیری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۴۳۹- عدد احاطه‌گیری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۴۴۰- گراف شکل مقابل چند مجموعه‌احاطه‌گر سه عضوی دارد؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

۴۴۱- گراف C_7 چند مجموعه‌احاطه‌گر ۴ عضوی دارد؟

- (۱) ۱۴
(۲) ۲۱
(۳) ۲۸
(۴) ۳۵

۴۴۲- گراف C_6 چند احاطه‌گر مینیمال سه عضوی دارد؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) ۱۲

۴۴۳- چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) گراف P_5 مجموعه‌احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی دارد.

ب) در گراف P_8 مجموعه‌ای ۸ عضوی از رأس‌ها وجود دارد که مجموعه‌احاطه‌گر نیست.

پ) گراف P_5 حداقل سه مجموعه‌احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی دارد.

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۴۴۴- گراف C_9 چند γ -مجموعه دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) ۹

۴۴۵- گراف C_8 چند γ -مجموعه دارد؟

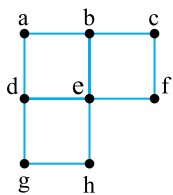
- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۸

۴۴۶- گراف C_7 چند γ -مجموعه دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۷
(۴) ۱۴

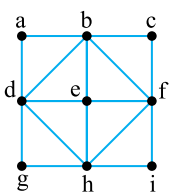
۴۴۷- گراف P_9 چند γ -مجموعه دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۶



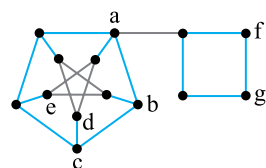
۴۴۸- در گراف شکل مقابل چند γ -مجموعه شامل رأس a وجود دارد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳



۴۴۹- در چند احاطه‌گر مینیمال از گراف شکل مقابل رأس e وجود دارد؟

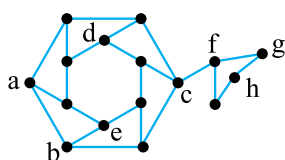
- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر



ریاضی - ۹۸

۴۵۰- کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه‌احاطه‌گر مینیمال است؟

- (۱) $\{a, c, e, g\}$
(۲) $\{a, d, e, g\}$
(۳) $\{a, b, d, e\}$
(۴) $\{a, d, e, f\}$



ریاضی خارج از کشور - ۹۸

۴۵۱- کدام مجموعه، برای گراف زیر، یک مجموعه‌احاطه‌گر مینیمال است؟

- (۱) $\{a, b, c, d, h\}$
(۲) $\{b, c, e, d, g\}$
(۳) $\{a, c, e, d, h\}$
(۴) $\{a, c, e, d, g\}$



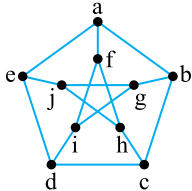
فصل دوم

خودآزمایی (۱۵)

درس دوم: مدل سازی با گراف

۱- حداقل چند مهره رخ باید در یک صفحه شطرنجی 5×5 قرار دهیم به طوری که هر خانه‌ای که در آن رخ قرار ندارد توسط حداقل یک مهره رخ تهدید شود؟ (مهره رخ، تمام خانه‌هایی را که در سطر یا ستون خود قرار دارند تهدید می‌کند).

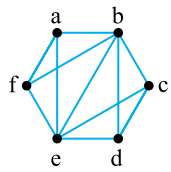
- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴)



۲- چندتا از مجموعه‌های زیر یک مجموعه احاطه‌گر گراف مقابل است؟

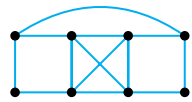
- $\{a, c, f, h\}$, $\{a, c, d, h\}$, $\{a, c, i, j\}$, $\{a, c, g\}$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۳- گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

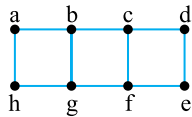


۴- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۵- گراف P_6 چند γ -مجموعه دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (۴)



۶- کدام مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال گراف شکل مقابل نیست؟

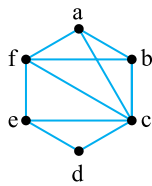
- $\{a, b, c, d\}$ (۱) $\{b, c, f, g\}$ (۲) $\{a, c, e, g\}$ (۳) $\{a, b, e, f\}$ (۴)

۷- به‌ازای چند مقدار k گراف P_6 احاطه‌گر مینیمال k عضوی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

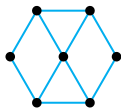
۸- گراف شکل مقابل چند احاطه‌گر مینیمال دو عضوی دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)



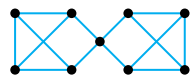
۹- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



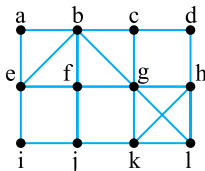
۱۰- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۱۱- فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر گراف شکل مقابل باشد. مجموعه D با کدام مجموعه ممکن است عضو مشترک نداشته باشد؟

- $\{e, f, g, h\}$ (۱) $\{a, b, e\}$ (۲) $\{g, h, l, k\}$ (۳) $\{f, i, j, k\}$ (۴)



۱۲- گراف C_5 دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر ۳ عضوی و دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی است.

- (۱) ۱۰- صفر (۲) ۵- صفر (۳) ۱۰- ۵ (۴) ۵- ۵

۱۳- گراف P_4 چند مجموعه‌ی احاطه‌گر چهار عضوی دارد؟

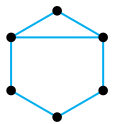
- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۴- کدام گراف فقط یک γ - مجموعه دارد؟



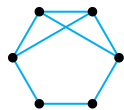
۱۵- گراف شکل مقابل چند γ - مجموعه دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



۱۶- گراف شکل مقابل چند مجموعه‌ی احاطه‌گر دو عضوی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷



۱۷- عدد احاطه‌گری گراف C_5 برابر کدام است؟

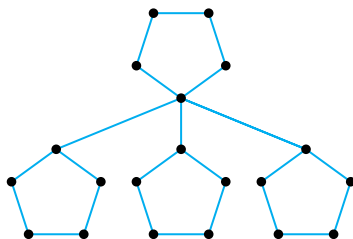
- (۱) ۱۰ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۲۵

۱۸- گراف C_{11} چند γ - مجموعه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۱۱ (۴) ۲۲

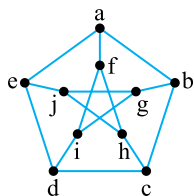
۱۹- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸



۲۰- در گراف شکل مقابل چند γ - مجموعه شامل رأس a وجود دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



فصل دوم

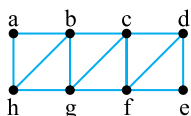
خودآزمایی (۱۶)

درس دوم: مدل‌سازی با گراف

۱- یک مهره‌وزیر در خانه مرکزی یک صفحه شطرنجی 5×5 قرار دارد. حداقل چند مهره‌وزیر دیگر باید در این صفحه شطرنجی قرار دهیم به طوری که هر خانه‌ای که در آن وزیر نیست توسط حداقل یک مهره‌وزیر تهدید شود؟ (مهره‌وزیر به صورت سطری، ستونی و قطری بقیه خانه‌ها را تهدید می‌کند.)

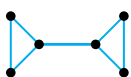
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲- کدام مجموعه یک مجموعه‌ی احاطه‌گر گراف مقابل است؟

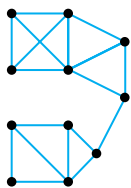


- (۱) $\{b, e\}$ (۲) $\{c, g\}$ (۳) $\{b, c\}$ (۴) $\{a, d\}$

۳- گراف شکل مقابل چند مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم دارد؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۹

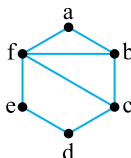


۴- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

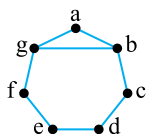
۵- گراف P_5 چند γ - مجموعه دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳)
۴ (۴) ۵ (۵)



۶- کدام مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال گراف شکل مقابل است؟

- ۱ (۱) $\{a, c, e\}$ ۲ (۲) $\{b, d, f\}$
۳ (۳) $\{a, b, d\}$ ۴ (۴) $\{a, b, c\}$



۷- در چند احاطه‌گر مینیمال سه عضوی از گراف مقابل رأس g وجود دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

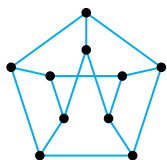
۸- گراف P_5 چند احاطه‌گر مینیمال سه عضوی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳)

صفر (۴)

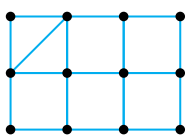
۹- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

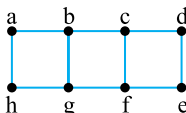


۱۰- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)



۱۱- فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر گراف شکل زیر باشد. مجموعه D حتماً با کدام مجموعه عضو مشترک دارد؟



- ۱ (۱) $\{a, b, g, h\}$ ۲ (۲) $\{a, b, c, d\}$
۳ (۳) $\{b, c, f, g\}$ ۴ (۴) $\{a, d, e, h\}$

۱۲- گراف C_6 چند مجموعه احاطه‌گر سه عضوی دارد؟

- ۱۲ (۱) ۱۴ (۲) ۱۷ (۳) ۲۰ (۴)

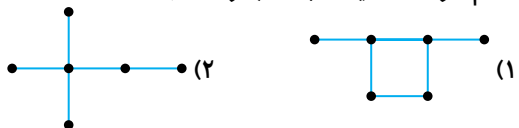
۲۰ (۴)

۱۳- گراف C_7 چند احاطه‌گر مینیمال چهار عضوی دارد؟

- صفر (۱) ۷ (۲) ۱۴ (۳) ۲۱ (۴)

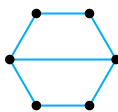
۲۱ (۴)

۱۴- کدام گراف فقط یک γ - مجموعه دارد؟



۱۵- گراف شکل مقابل چند γ - مجموعه دارد؟

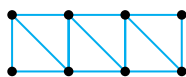
- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)



۱۶- گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه‌گر دو عضوی دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۶ (۴)



۱۷- عدد احاطه‌گری گراف P_7 برابر کدام است؟

- ۱۸ (۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴)

۳۵ (۴)

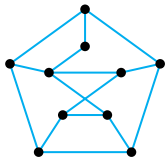
۳۰ (۳)

۱۸- گراف $P_{1,2}$ چند γ - مجموعه دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۴) ۶ (۳) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۴)

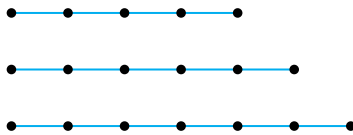
۱۹- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۳) ۵ (۴)



۲۰- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)



فصل دوم

خودآزمایی (۱۷)

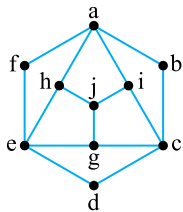
درس دوم: مدل‌سازی با گراف

۱- حداقل چند مهره شاه باید در یک صفحه شطرنجی 8×8 قرار دهیم به طوری که هر خانه‌ای که در آن شاه نیست توسط حداقل یک مهره شاه تهدید شود؟ (مهره شاه از خانه‌ای که در آن قرار دارد هر خانه‌ای را که با آن ضلع یا رأس مشترک دارد تهدید می‌کند.)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

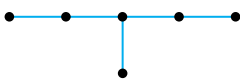
۲- کدام مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر گراف مقابل نیست؟

- (۱) $\{a, d, j\}$
 (۲) $\{a, c, e\}$
 (۳) $\{b, d, f, j\}$
 (۴) $\{b, e, i\}$



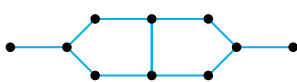
۳- گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۲) ۵ (۴) ۶ (۳) ۷ (۲) ۸ (۴)



۴- عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟

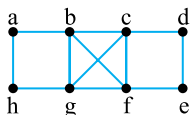
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۲) ۵ (۴) ۶ (۳) ۷ (۲) ۸ (۴)


 ۵- گراف C_4 چند γ - مجموعه دارد؟

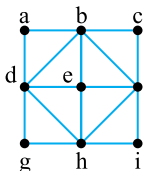
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۴)

۶- چندتا از مجموعه‌های زیر یک احاطه‌گر مینیمال گراف مقابل است؟

- $\{a, b, d\}$, $\{a, g, d\}$, $\{b, c, f, g\}$, $\{b, e, g\}$
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

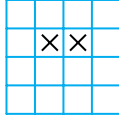

 ۷- در چند احاطه‌گر مینیمال از گراف شکل مقابل هر دو رأس a و f وجود دارند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

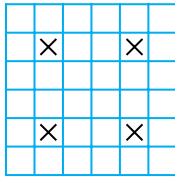


- ۸- گراف P_5 چند احاطه گر مینیمال سه عضوی دارد؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۵ (۲) | ۶ (۳) | ۸ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ۹- عدد احاطه گیری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ۱۰- عدد احاطه گیری گراف شکل مقابل برابر کدام است؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ۱۱- فرض کنید D یک مجموعه احاطه گر گراف شکل مقابل باشد. مجموعه D با چندتا از مجموعه های زیر قطعاً عضو مشترک دارد؟
- $\{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}, \{a, c, f, h\}, \{e, f, g, h\}$
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ۱۲- گراف P_5 چند مجموعه احاطه گر سه عضوی دارد؟
- | | | | |
|-------|--------|--------|--------|
| ۶ (۱) | ۱۰ (۲) | ۱۲ (۳) | ۱۵ (۴) |
|-------|--------|--------|--------|
- ۱۳- گراف شکل مقابل چند γ - مجموعه دارد؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|--------|
| ۷ (۱) | ۸ (۲) | ۹ (۳) | ۱۰ (۴) |
|-------|-------|-------|--------|
- ۱۴- کدام گراف بیش از یک γ - مجموعه دارد؟
- | | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| (۱) | (۲) | (۳) | (۴) |
|-----|-----|-----|-----|
- ۱۵- گراف شکل مقابل چند γ - مجموعه دارد؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۲ (۱) | ۳ (۲) | ۴ (۳) | ۵ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ۱۶- گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه گر دو عضوی دارد؟
- | | | | |
|---------|-------|--------|-------|
| صفر (۱) | ۴ (۲) | ۱۶ (۴) | ۸ (۳) |
|---------|-------|--------|-------|
- ۱۷- گراف P_4 چند γ - مجموعه دارد؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۷ (۳) | ۸ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ۱۸- کدام گزینه درست نیست؟
- (۱) عدد احاطه گیری گراف P_4 برابر ۴ است.
- (۲) گراف P_4 احاطه گر مینیمال ۴ عضوی دارد.
- (۳) گراف P_8 احاطه گر مینیمال ۵ عضوی دارد.
- (۴) گراف C_8 احاطه گر مینیمال ۴ عضوی دارد.
- ۱۹- عدد احاطه گیری شکل مقابل برابر کدام است؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) | ۵ (۳) | ۶ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|
- ۲۰- در گراف شکل مقابل چند مجموعه احاطه گر چهار عضوی شامل هر دو رأس a و f وجود دارد؟
- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) | ۵ (۳) | ۶ (۴) |
|-------|-------|-------|-------|

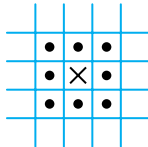
۴۱۵- گزینه ۲ اگر در دو خانه مشخص شده در شکل زیر مهره وزیر قرار دهیم، هر خانه‌ای غیر از این دو حداقل توسط یکی از دو مهره وزیر تهدید می‌شود. همچنین به سادگی می‌توان بررسی کرد که یک مهره وزیر در هر خانه‌ای قرار گیرد از آنجا نمی‌تواند همه خانه‌های جدول را تهدید کند. بنابراین کمترین تعداد مهره وزیر که بتواند کل خانه‌های صفحه شطرنجی 4×4 را تهدید کنند برابر ۲ است.



۴۱۶- گزینه ۱ اگر در چهار خانه مشخص شده در شکل زیر مهره شاه قرار دهیم، هر خانه‌ای غیر از این چهارتا توسط یکی از چهار مهره شاه تهدید می‌شود.



نشان می‌دهیم با کمتر از چهار مهره نمی‌توانیم چنین شرایطی را ایجاد کنیم. توجه کنید که یک مهره شاه از هر خانه حداکثر ۸ خانه را تهدید می‌کند، بنابراین این مهره به همراه خانه خود حداکثر ۹ خانه را احاطه می‌کند. در نتیجه برای احاطه کردن ۳۶ خانه یک صفحه شطرنجی 6×6 حداقل به $\frac{36}{9} = 4$ مهره شاه نیاز داریم.



۴۱۷- گزینه ۳ رأس e توسط مجموعه $\{b, c\}$ احاطه نمی‌شود. پس $\{b, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر گراف G نیست.

۴۱۸- گزینه ۲ توجه کنید که رأس‌های c و g توسط مجموعه $\{a, e, i\}$ احاطه نمی‌شود. رأس g توسط مجموعه $\{a, b, f, i\}$ احاطه نمی‌شود و رأس e توسط مجموعه $\{a, c, g, i\}$ احاطه نمی‌شود. پس هیچ‌یک از این سه مجموعه، مجموعه احاطه‌گر G نیستند. به سادگی می‌توان بررسی کرد که مجموعه $\{a, d, f, i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر G است.

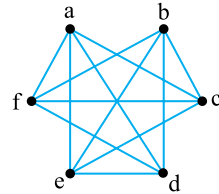
۴۱۹- گزینه ۴ توجه کنید که در گراف G رأسی که با همه رأس‌ها مجاور باشد وجود ندارد، پس G مجموعه احاطه‌گر تک عضوی ندارد. در ضمن مجموعه $\{e, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر این گراف است (بررسی کنید). در نتیجه این

مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از گراف G است. در مورد بقیه گزینه‌ها هم توجه کنید که مجموعه $\{b, g, h\}$ احاطه‌گر است ولی مینیمم نیست و مجموعه‌های $\{a, g\}$ و $\{b, h\}$ نیز احاطه‌گر نیستند زیرا رأس h توسط $\{a, g\}$ احاطه نمی‌شود و رأس f توسط $\{b, h\}$ احاطه نمی‌شود.

۴۲۰- گزینه ۲ می‌دانیم عدد احاطه‌گری یک گراف در صورتی برابر ۱ است که در این گراف رأسی مجاور با همه رأس‌ها وجود داشته باشد. در بین ۴ گراف داده شده فقط گراف گزینه (۲) این ویژگی را دارد.

۴۲۱- گزینه ۲ در گراف داده شده رأسی که مجاور با همه رأس‌ها باشد وجود ندارد، پس عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۱ نیست. در ضمن مجموعه $\{d, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر این گراف است. پس عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۲ است.

۴۱۲- گزینه ۴ فرض کنید G گرافی ۶ رأسی و ۴- منتظم باشد. چون گراف کامل ۶ رأسی، ۵- منتظم است، پس گراف G با حذف یک یال از هر یک از رأس‌های گراف کامل به دست آمده است. رأس‌های گراف کامل را برابر $\{a, b, c, d, e, f\}$ می‌گیریم و فرض کنید G با حذف یال‌های ab ، cd و ef به دست آمده باشد. برای محاسبه تعداد دورهای به طول ۴ در G ابتدا دو رأس را حذف، سپس تعداد دورهای به طول ۴ بین ۴ رأس باقی‌مانده را حساب می‌کنیم. برای دو رأس حذف شده دو حالت وجود دارد.

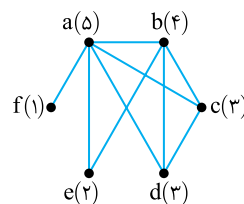


حالت اول دو رأس حذف شده مجاور باشند. به ۳ طریق می‌توانیم این دو رأس را انتخاب کنیم. حال اگر مثلاً a و b را حذف کنیم، چهار رأس باقی‌مانده دقیقاً یک دور به طول ۴ تشکیل می‌دهند. پس در این حالت ۳ دور به طول ۴ وجود دارد.

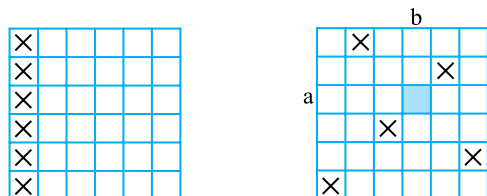
حالت دوم دو رأس حذف شده مجاور نباشند. چون اندازه G برابر $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ است، پس به ۱۲ طریق می‌توانیم دو رأس مجاور را انتخاب کنیم. حال اگر مثلاً a و c را حذف کنیم، چهار رأس باقی‌مانده به صورت زیر خواهند شد و توجه کنید که بین این چهار رأس نیز فقط یک دور به طول ۴ وجود دارد. در نتیجه گراف G ، $3 + 12 = 15$ دور به طول ۴ دارد.

۴۱۳- گزینه ۳ ابتدا نمودار گراف را رسم می‌کنیم. دورهای به طول ۳ در این گراف عبارت‌اند از

- a, b, c, a a, b, d, a a, b, e, a a, c, d, a b, c, d, b



۴۱۴- گزینه ۳ اگر در هر خانه از ستون اول یک مهره رخ قرار دهیم، هر خانه‌ای که در آن رخ قرار ندارد توسط یکی از این مهره‌ها تهدید می‌شود. پس به کمک ۶ مهره رخ می‌توانیم به آنچه که مطلوب است برسیم. نشان می‌دهیم با ۵ مهره رخ نمی‌توانیم به این هدف برسیم. اگر ۵ مهره رخ در صفحه شطرنجی 6×6 قرار داده باشیم، آن‌گاه سطری مانند a و ستونی مانند b وجود دارد که در آن هیچ رخی قرار نگرفته است (زیرا تعداد سطرها و همچنین تعداد ستون‌ها برابر ۶ است). در نتیجه خانه محل تقاطع سطر a و ستون b توسط هیچ مهره رخی تهدید نمی‌شود.

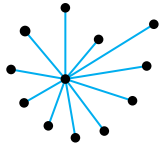


۴۲۷- گزینه ۲ چون مرتبه G برابر 20 و ماکزیمم درجه آن برابر 18 است، بنابراین $\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{20}{18+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20}{19} \right\rfloor = 2$. در ضمن اگر a رأسی از G از درجه 18 باشد، آن گاه a فقط با یک رأس مجاور نیست. فرض کنید a با b مجاور نباشد، در این صورت $\{a, b\}$ یک مجموعه احاطه گر است، زیرا هر رأس خارج از این مجموعه با a مجاور است. در نتیجه عدد احاطه گری G برابر 2 است.

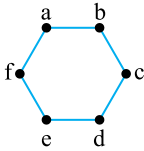
۴۲۸- گزینه ۱ توجه کنید که $\{a, b, f\} = N[a]$ ، بنابراین D حتماً با این مجموعه عضو مشترک دارد (در غیر این صورت رأس a توسط D احاطه نمی‌شود). در مورد هر یک از سه مجموعه دیگر به سادگی می‌توانیم مثال نقض ارائه دهیم. در واقع مکمل هر یک از این سه مجموعه، مجموعه‌ای احاطه گر است که با این مجموعه عضو مشترکی ندارد. مثلاً $\{a, c, d, f, h\}$ مجموعه‌ای احاطه گر است که با $\{b, e, g\}$ عضو مشترکی ندارد.

۴۲۹- گزینه ۳ عدد احاطه گری گراف کامل برابر 1 است، در واقع هر مجموعه تک رأسی، یک مجموعه احاطه گر گراف کامل است، زیرا هر رأس با همه رأس‌ها مجاور است. بنابراین هر مجموعه تک رأسی یک مجموعه احاطه گر مینیمم است. در نتیجه گراف کامل K_6 ، 10 مجموعه احاطه گر مینیمم دارد.

۴۳۰- گزینه ۱ طبق فرض گراف G مجموعه احاطه گر تک عضو مانند $\{a\}$ دارد. در نتیجه همه رأس‌های G با a مجاورند، پس G گرافی همبند است. در ضمن اگر G گراف شکل زیر باشد، عدد احاطه گری آن برابر 1 است ولی نه دور دارد، نه کامل است و نه منتظم!

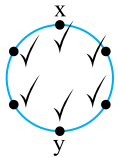


۴۳۱- گزینه ۲ گراف C_6 از مرتبه 6 با ماکزیمم درجه 2 است، در نتیجه

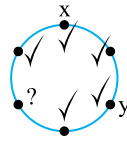


$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{6}{2+1} \right\rfloor = 2$$

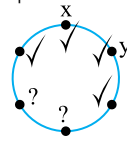
همچنین به سادگی می‌توان دید که $\{a, d\}$ ، $\{b, e\}$ و $\{c, f\}$ کلیه مجموعه‌های احاطه گر دو عضوی C_6 هستند (در واقع مجموعه دو عضوی $\{X, Y\}$ از رأس‌های C_6 ، غیر از X و Y دو رأس مجاور با X و دو رأس مجاور با Y احاطه می‌کند، بنابراین $\{X, Y\}$ به شرطی یک مجموعه احاطه گر است که X و Y دو رأس مقابل هم در C_6 باشند). در نتیجه C_6 سه γ - مجموعه دارد.



قابل قبول



غیر قابل قبول

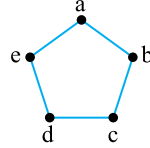


غیر قابل قبول

۴۳۲- گزینه ۲ گراف P_{100} گرافی از مرتبه 100 با ماکزیمم درجه 2 است، در نتیجه $\gamma(P_{100}) \geq \left\lfloor \frac{100}{2+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 34$. نام گذاری شکل زیر، مجموعه 34 عضوی $\{v_1, v_4, v_7, v_{10}, \dots, v_{100}\}$ (اندیس‌های تمام اعداد به صورت $3k+1$ هستند) یک مجموعه احاطه گر است، زیرا هر رأسی که در این مجموعه نیست به صورت v_{3k} یا v_{3k+2} است و توجه کنید که v_{3k+1} با هر دو رأس v_{3k} و v_{3k+2} مجاور است.



۴۲۲- گزینه ۳ عدد احاطه گری گراف C_5 برابر 2 است. برای حل سؤال باید تعداد مجموعه‌های احاطه گر 2 عضوی این گراف را بیابیم. این مجموعه‌ها عبارتند از:



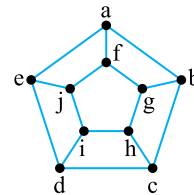
$$\{a, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{d, a\}, \{e, b\}$$

۴۲۳- گزینه ۴ توجه کنید که اگر از مجموعه $\{a, b, c, g, i\}$ رأس a را حذف کنیم، مجموعه باقی‌مانده، یعنی $\{b, c, g, i\}$ ، همچنان یک مجموعه احاطه گر است، پس $\{a, b, c, g, i\}$ احاطه گر مینیمال نیست. مجموعه‌های داده شده در سه گزینه دیگر احاطه گر مینیمال هستند. به عنوان مثال مینیمال بودن مجموعه $\{a, b, h, i\}$ را بررسی می‌کنیم. بررسی دو مجموعه دیگر به روش مشابه قابل انجام است.

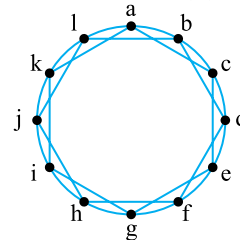
- اگر رأس a را حذف کنیم، رأس d توسط $\{b, h, i\}$ احاطه نمی‌شود.
 - اگر رأس b را حذف کنیم، رأس c توسط $\{a, h, i\}$ احاطه نمی‌شود.
 - اگر رأس h را حذف کنیم، رأس g توسط $\{a, b, i\}$ احاطه نمی‌شود.
 - اگر رأس i را حذف کنیم، رأس f توسط $\{a, b, h\}$ احاطه نمی‌شود.
- پس هر رأسی از مجموعه $\{a, b, h, i\}$ را حذف کنیم، مجموعه حاصل دیگر احاطه گر نیست. بنابراین $\{a, b, h, i\}$ یک احاطه گر مینیمال است.

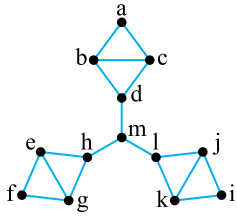
۴۲۴- گزینه ۳ احاطه گرهای مینیمال 2 عضوی گراف داده شده عبارتند از $\{b, d\}$ ، $\{b, e\}$ ، $\{c, d\}$ و $\{c, e\}$. توجه کنید که چون a با همه رأس‌های گراف مجاور است، پس a عضو هیچ احاطه گر مینیمال 2 عضوی نیست، زیرا اگر $\{a, x\}$ یک احاطه گر باشد، با حذف رأس x ، مجموعه باقی‌مانده، یعنی $\{a\}$ ، همچنان یک احاطه گر است.

۴۲۵- گزینه ۱ گراف داده شده 10 رأس دارد و ماکزیمم درجه آن برابر 3 است. بنابراین عدد احاطه گری آن حداقل برابر 3 است. $\left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 3$ (می‌دانیم در گراف از مرتبه n با ماکزیمم درجه Δ ، $\gamma \geq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$). در ضمن در این گراف مجموعه $\{a, h, i\}$ یک مجموعه احاطه گر است. بنابراین عدد احاطه گری این گراف برابر 3 است.



۴۲۶- گزینه ۲ گراف داده شده 12 رأس دارد و ماکزیمم درجه آن برابر 4 است. بنابراین عدد احاطه گری آن حداقل برابر 3 است. $\left\lfloor \frac{12}{4+1} \right\rfloor = 3$ (در ضمن در این گراف مجموعه $\{a, f, k\}$ یک مجموعه احاطه گر است. بنابراین عدد احاطه گری این گراف برابر 3 است).





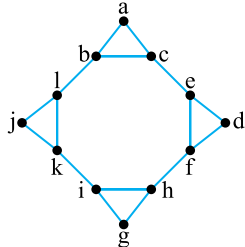
۴۳۷- گزینه ۲) گراف داده شده ۱۳

رأس دارد و ماکزیمم درجه آن برابر ۳ است. در نتیجه عدد احاطه‌گری آن حداقل

برابر $\lceil \frac{13}{3+1} \rceil = 4$ است. در ضمن

مجموعه $\{b, e, j, m\}$ یک مجموعه

احاطه‌گر در این گراف است. بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۴ است.



۴۳۸- گزینه ۳) اگر D یک

مجموعه احاطه‌گر گراف داده شده باشد، آن‌گاه حداقل یکی از رأس‌های

$\{a, b, c\}$ ، $\{d, e, f\}$ ، $\{g, h, i\}$ باید در D قرار

داشته باشد (در غیر این صورت a توسط D احاطه نمی‌شود). به طور مشابه D از

هر یک از مجموعه‌های $\{d, e, f\}$ ، $\{g, h, i\}$ و $\{j, k, l\}$ باید حداقل یک

رأس داشته باشد. بنابراین D حداقل ۴ عضو دارد. پس عدد احاطه‌گری گراف

داده شده از ۴ کمتر نیست. در ضمن مجموعه $\{a, d, g, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر این گراف است. در نتیجه عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۴ است.

۴۳۹- گزینه ۳) فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر گراف داده شده

باشد. می‌دانیم برای هر رأس مانند v، D حداقل یک رأس از مجموعه $N[v]$

را باید داشته باشد. بنابراین D حداقل یک رأس از هر یک از مجموعه‌های

$$N[a]=\{a, b\}, \quad N[d]=\{c, d, e\}$$

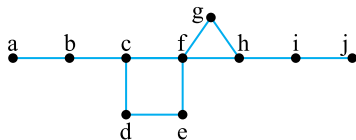
$$N[g]=\{f, g, h\}, \quad N[j]=\{i, j\}$$

را باید داشته باشد. چون این چهار مجموعه دوه‌دو مجزا هستند، بنابراین D

باید حداقل ۴ عضو داشته باشد. در نتیجه عدد احاطه‌گری گراف داده شده از

۴ کمتر نیست. در ضمن مجموعه $\{b, e, h, i\}$ یک مجموعه احاطه‌گر این

گراف است. پس عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۴ است.



۴۴۰- گزینه ۴) رأس‌های گراف را همانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم.

فرض کنید D یک مجموعه احاطه‌گر سه عضوی از این گراف باشد. چون رأس

a توسط D احاطه می‌شود، پس حداقل یکی از رأس‌های a و b در D قرار دارند،

بنابراین D با $\{a, b\}$ عضو مشترک دارد. به طور مشابه نتیجه می‌گیریم D با

$\{b, c\}$ و $\{e, f\}$ نیز عضو مشترک دارد. برای شمارش مجموعه‌های

احاطه‌گر سه عضوی سه حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول $b \notin D$ چون D با هر یک از $\{a, b\}$ و $\{b, c\}$ اشتراک دارد، پس

باید a و c به D تعلق داشته باشند. برای اینکه رأس‌های d، e و f توسط D

احاطه شوند، تنها گزینه برای عضو سوم D رأس e است، پس در این حالت فقط

یک مجموعه احاطه‌گر سه عضوی وجود دارد، $D = \{a, c, e\}$.

حالت دوم $b \in D$ و $e \notin D$ چون D با $\{e, f\}$ عضو مشترک دارد، پس

باید $f \in D$ توجه کنید که $\{b, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر گراف است، پس

رأس سوم D هر کدام از a، c و d باشد، D یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین در این حالت سه مجموعه احاطه‌گر سه عضوی وجود دارد.

$$\{b, f, a\}, \{b, f, c\}, \{b, f, d\}$$

۴۳۳- گزینه ۳) گراف C_{100} گرافی از مرتبه ۱۰۰ با ماکزیمم درجه ۲

است. در نتیجه $\gamma(C_{100}) \geq \lceil \frac{100}{2+1} \rceil = \lceil \frac{100}{3} \rceil = 34$ در ضمن با توجه به

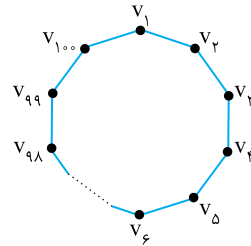
نام‌گذاری شکل زیر، مجموعه ۳۴ عضوی $\{v_1, v_4, v_7, \dots, v_{100}\}$

(اندیس‌های تمام اعداد به صورت $3k+1$ هستند) یک مجموعه احاطه‌گر C_{100}

است، زیرا هر رأسی که در این مجموعه نیست به صورت v_{3k} یا v_{3k+2} است

و توجه کنید که v_{3k+1} با هر دو رأس v_{3k} و v_{3k+2} مجاور است.

تذکر در حالت کلی، با همین روش می‌توان ثابت کرد $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.



۴۳۴- گزینه ۳) گراف داده شده اجتماع جدا از هم دو گراف C_7 و C_4

است. می‌دانیم عدد احاطه‌گری C_7 و C_4 به ترتیب برابر ۲ و $\lceil \frac{4}{3} \rceil = 2$

است، بنابراین با توجه به نکته کلی زیر، عدد احاطه‌گری اجتماع

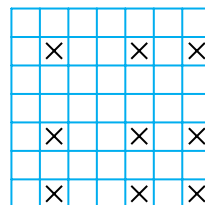
جدا از هم این دو گراف برابر $2+3=5$ است.

نکته عدد احاطه‌گری اجتماع جدا از هم دو گراف G_1 و G_2 برابر

$$\gamma(G_1) + \gamma(G_2)$$

۴۳۵- گزینه ۴) اگر در ۹ خانه مشخص شده در شکل زیر مهره شاه قرار

دهیم، هر خانه‌ای غیر از این ۹ خانه توسط یکی از ۹ مهره شاه تهدید می‌شود.



نشان می‌دهیم با کمتر از ۹ مهره نمی‌توانیم چنین شرایطی را ایجاد کنیم. برای این

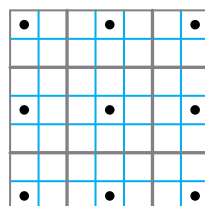
منظور صفحه شطرنجی را همانند شکل زیر به ۹ قسمت تقسیم می‌کنیم. در هر

قسمت یک خانه را علامت زده‌ایم. اگر در یکی از این ۹ قسمت مشخص شده مهره

شاه قرار نداشته باشد، خانه علامت‌دار این قسمت شاه ندارد و توسط هیچ مهره شاهی

تهدید نخواهد شد. بنابراین برای ایجاد آرایش مطلوب در هر یک از ۹ قسمت باید

حداقل یک مهره شاه قرار دهیم. پس در مجموع حداقل به ۹ مهره شاه نیاز داریم.



۴۳۶- گزینه ۳) هر کدام از مجموعه‌های $\{g\}$ ، $\{a, d\}$ و $\{a, c, e\}$

یک احاطه‌گر مینیمال گراف داده شده هستند (بررسی کنید). بنابراین گراف داده

شده به ازای هر $k \in \{1, 2, 3\}$ احاطه‌گر مینیمال k عضوی دارد.