فهرست

فصل ۱
آنالیز ترکیبی و احتمال

فصل ۲
الگوهای خطی

فصل ۳
الگوهای غیرخطی

(فصل ۱)

آنالیز ترکیبی و احتمال

(درس ۱)

شمارش

اصول شمارش

اصل جمع

فرض کنید بتوانیم یک عمل مشخص را به x یا y یا ... یا z روش مختلف انجام دهیم، در این صورت طبق اصل جمع تعداد کل حالت‌های انجام آن کار برابر است با $x+y+\cdots+z$. دقت کنید که حرف «یا» در سؤالات، نشان‌دهندهٔ اصل جمع است. مثلاً فرض کنید مریم برای رفتن از تهران به مشهد، بتواند از یکی از ۳ خط اتوبوس یا یکی از ۲ خط هوایی یا یکی از ۴ خط ریلی استفاده کند. تعداد کل حالت‌هایی که مریم می‌تواند به مشهد برود برابر است با: ۹ = ۴ + ۲ + ۳ = تعداد حالت‌ها

دقت دارید که مریم نمی‌تواند هم‌زمان از هر سه وسیلهٔ نقلیه استفاده کند و برای رفتن به مشهد فقط باید یکی از وسایل نقلیه را انتخاب کند. به همین علت از اصل جمع استفاده کرده‌ایم.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم، هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل، آن عمل به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است (اصل ضرب نیز قابل تعمیم به بیشتر از ۲ مرحله می‌باشد).

توجه کنید که اگر دو یا چند کار، پشت سر هم انجام شوند از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. ضمناً حرف «و» نشان‌دهندهٔ اصل ضرب است.

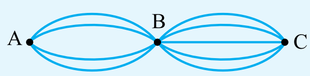
تست اگر علی ۳ پیراهن آبی، سفید و زرد و ۲ شلوار سیاه و طوسی و ۲ جفت کفش قهوه‌ای و نارنجی داشته باشد، به چند طریق می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

پاسخ گزینهٔ ۲ علی می‌تواند هم پیراهن، هم شلوار و هم کفش انتخاب کند؛ پس متوجه می‌شویم که باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

۱۲ = ۲ × ۲ × ۳ = تعداد حالت‌ها

تست نمودار زیر، ارتباط بین سه شهر A، B و C را با جاده‌هایی که همگی دوطرفه هستند نشان می‌دهد. شخصی می‌خواهد از شهر A به C برود و برگردد به طوری که در مسیر برگشت از مسیرهایی که موقع رفتن استفاده کرده، دوباره عبور نکند. او چند انتخاب خواهد داشت؟



۱) ۲۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

پاسخ گزینهٔ ۱ فرد باید اول به شهر B و سپس به شهر C برود؛ پس چون باید دو کار را پشت سر هم انجام دهد، لذا متوجه می‌شویم که با اصل ضرب مواجه‌ایم:

۲۰ = ۵ × ۴ = تعداد حالت‌های مسیر رفت

شخص در مسیر برگشت، نمی‌تواند از مسیرهایی که رفته استفاده کند، لذا بین B و C یک مسیر و بین B و A هم یک مسیر حذف می‌شود و چنین می‌نویسیم:

۱۲ = ۳ × ۴ = تعداد حالت‌های مسیر برگشت

۲۴۰ = ۱۲ × ۲۰ = تعداد کل حالت‌های رفت و برگشت

نکته در سؤالاتی که موضوع آن‌ها آزمون‌های چند گزینه‌ای است اگر پاسخ‌دادن به همهٔ سؤالات الزامی باشد، برای یافتن تعداد کل حالت‌های پاسخگویی باید تعداد گزینه‌ها را به توان تعداد سؤالات برسانیم.

ولی اگر پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی نباشد، برای یافتن تعداد کل حالت‌ها باید تعداد گزینه‌ها را به علاوهٔ یک کرده جواب را به توان تعداد سؤالات برسانیم.

تست اگر بخواهیم به یک آزمون چهارگزینه‌ای با ۱۰ سؤال پاسخ دهیم، چند حالت مختلف خواهیم داشت؟ (پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی است).

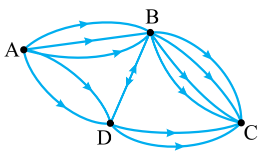
۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۴^{۸}$ ۳) $۱۰^{۴}$ ۴) $۲^{۲۰}$

پاسخ گزینهٔ ۴

$$\text{تعداد حالت‌ها} = (\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}} = ۴^{۱۰} = (۲^{۲})^{۱۰} = ۲^{۲۰}$$

اگر در همین سؤال گفته می‌شد پاسخگویی به همهٔ سؤالات الزامی نیست جواب برابر با $۵^{۱۰}$ می‌شد.

نکته در بسیاری از مسائل، از اصول جمع و ضرب به طور همزمان استفاده می‌شود. مثلاً به شکل روبه‌رو توجه کنید: فرض کنید شخصی می‌خواهد از شهر A به C سفر کند. او ۴ مسیر کلی را می‌تواند انتخاب کند. مسیر ABC یا ABDC یا ADC یا ADBC حالا فرد هر مسیری را که انتخاب کند، باید حالت‌های مختلف بین شهرها را در هم ضرب کند:



ABC تعداد حالت‌های مسیر $= ۳\times۴=۱۲$

ADC تعداد حالت‌های مسیر $= ۲\times۲=۴$

ABDC تعداد حالت‌های مسیر $= ۳\times۱\times۲=۶$

ADBC تعداد حالت‌های مسیر $= ۲\times۱\times۴=۸$

لذا تعداد کل حالت‌ها برابر با ۳۰ می‌باشد.

نماد فاکتوریل

فرض کنید n عددی طبیعی باشد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$

یعنی برای یافتن فاکتوریل یک عدد طبیعی باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب کنیم، مثلاً داریم:

$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$ و $۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$ و $۳!=۳\times۲\times۱=۶$ و $۲!=۲\times۱=۲$

ضمناً توجه کنید که: $۰!=۱$ و $۱!=۱$

تذکر اگر نخواهیم فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم، کافی است هرجا که متوقف می‌شویم علامت فاکتوریل بگذاریم؛ مثلاً:

$$n!=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!$$

$$۱۰!=۱۰\times۹! \qquad ۶!=۶\times۵\times۴\times۳!$$

معمولاً در کسرها این اتفاق می‌افتد؛ یعنی لازم نیست تمام عددهایی را که فاکتوریل دارند تا ۱ باز کنیم؛ مثلاً در کسر $\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!}$ کافی است $(n+۳)!$ را ۲ مرحله باز کنیم تا به مخرج برسیم (چون $n+۳$ بزرگ‌تر از $n+۱$ است):

$$\frac{(n+۳)(n+۲)\cancel{(n+۱)!}}{\cancel{(n+۱)!}}=(n+۳)(n+۲)$$

تست در کدام گزینه، یک تساوی نادرست داریم؟

۱) $\sqrt{۰!}+\sqrt{۱!}+\sqrt{۴!+۱}=۷$ ۲) $\frac{۸!}{۳!۲!۵!}=۲۴$ ۳) $(۳!)!-۲!=۷۱۸$ ۴) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=n^{۲}+n$

پاسخ گزینهٔ ۲

(۱) $\sqrt{۰!}+\sqrt{۱!}+\sqrt{۴!+۱}=\sqrt{۱}+\sqrt{۱}+\sqrt{۲۴+۱}=۱+۱+۵=۷$

(۲) $\frac{۸!}{۳!۲!۵!}=\frac{۸\times۷\times\overset{۱}{\cancel{۶}}\times\overset{۱}{\cancel{۵!}}}{\underbrace{۳\times۲\times۱}_{\overset{\cancel{۶}}{۱}}\times۲\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۵!}}}=۲۸$

(۳) $(\underbrace{۳!}_{۳\times۲\times۱})!-۲!=(۶)!-۲!=۷۲۰-۲=۷۱۸$

(۴) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=\frac{(n+۱)\times n\times \overset{۱}{\cancel{(n-۱)!}}}{\underset{۱}{\cancel{(n-۱)!}}}=(n+۱)\times n=n^{۲}+n$

تست حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(x^2-13)!=6$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -16 ۳) ۲۵ ۴) -25

پاسخ گزینهٔ ۲ فاکتوریل یک عبارت، برابر با ۶ شده؛ پس آن عبارت باید ۳ باشد؛ چون می‌دانیم که $3!=6$ است:

$$x^2-13=3 \Rightarrow x^2=16 \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm 4 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها}=(+4)(-4)=-16$$

جایگشت

مفهوم جایگشت: افراد، اعداد، اشیا و ... به صورت‌های مختلف می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. به هر یک از حالت‌های ممکن برای قرارگرفتن n شیء متمایز در کنار هم، یک جایگشت از آن n شیء می‌گوییم. به عنوان مثال می‌خواهیم جایگشت‌های ارقام ۱ و ۲ و ۳ را بنویسیم؛ یعنی می‌خواهیم تمام اعداد سه‌رقمی که با این ارقام می‌توان ساخت را بنویسیم. این اعداد عبارت‌اند از: ۱۲۳,۱۳۲,۲۳۱,۲۱۳,۳۱۲,۳۲۱

پس ملاحظه می‌کنیم که ۶ عدد ۳رقمی یا ۶ جایگشت ۳رقمی ساخته شد. بدون نوشتن تمام جایگشت‌ها نیز می‌توانیم تعداد آن‌ها را تعیین کنیم. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$ مثلاً تعداد جایگشت‌های مختلف که با حروف کلمهٔ «AMIR» می‌توان ساخت برابر است با: $4!=24$

تست تعداد جایگشت‌های چند شیء متمایز برابر ۱۲۰ می‌باشد. تعداد این اشیاء کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ ۲ اگر تعداد اشیای متمایز را n فرض کنیم، خواهیم داشت:

$n!=120 \Rightarrow n=5$ (می‌دانیم !۵ برابر ۱۲۰ می‌شود)

نکته در بسیاری از مسائل، بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و ... از روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم. در این مسائل اگر شرط خاصی مثل زوج یا فرد بودن عدد مطرح شد، باید ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پر کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ برویم و خانه‌ها را از چپ به راست پر کنیم. *(البته هر مسئله، شرط خاص خودشو داره ولی فهمیدن این‌که از کجا شروع به پرکردن خونه‌ها کنین با کمی تمرین کاملاً براتون جا میفته)*

تست با ارقام ۰,۱,۲,۴,۵,۶ چند عدد ۶رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۰۰ ۲) ۵۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۷۰۰

پاسخ گزینهٔ ۳ شرط خاصی برای عدد شش‌رقمی ذکر نشده (جز این‌که رقم‌ها تکراری نباشند)، پس پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. فقط توجه کنید که اولین رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند با صفر شروع شود، ضمناً پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانهٔ بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده‌شده را به دلخواه از خانهٔ قبلی حذف کنیم (چون تکرار ارقام غیرمجاز است).

۱,۲,۴,۵,۶	۰,۱,۲,۴,۵,$\cancel{۶}$	۰,۱,۲,۴,$\cancel{۵}$	۰,۱,۲,$\cancel{۴}$	۰,۱,$\cancel{۲}$	۰,$\cancel{۱}$
۵	۵	۴	۳	۲	۱

$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ تعداد عددهای مطلوب $=5\times5\times4\times3\times2\times1=600$

تست با ارقام ۰,۲,۳,۵,۶,۷,۸ چند عدد فرد چهاررقمی می‌توان ساخت؟(بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۵۰

پاسخ گزینهٔ ۳ عددی فرد است که یکانش فرد باشد، پس ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را با توجه به این موضوع پر می‌کنیم، سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:

۲,$\cancel{۳}$,۵,۶,۷,۸	۰,۲,۵,۶,۷,$\cancel{۸}$	۰,۲,۵,۶,$\cancel{۷}$	۳,۵,۷
۵	۵	۴	۳

$\Rightarrow$ تعداد اعداد مطلوب $=5\times5\times4\times3=300$

نکته اگر صفر جزء ارقام داده‌شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد، باید دو حالت جداگانه تشکیل دهیم. یکی وقتی که یکان صفر باشد و دیگری وقتی که یکان صفر نباشد.

تست با ارقام ۰,۲,۴,۵,۶,۷ چند عدد ۴رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۸۴ ۲) ۲۰۴ ۳) ۲۸۲ ۴) ۳۴۰

پاسخ گزینهٔ۲ طبق نکتهٔ گفته‌شده باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم:

حالت‌اول

صفر | $\cancel{۰}$,۵,۶,۷ ,$\cancel{۲}$,۴ | ۲,۴,۵,۶,۷ | $\cancel{۲}$,۴,۵,۶,۷

۵	۴	۳	۱

$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۵\times۴\times۳\times۱=۶۰$

حالت‌دوم

۲,۴,۶ | $\cancel{۰}$,۴,۵,۶ | ۰,۴,۵,۶,$\cancel{۷}$ | $\cancel{۲}$,۴,۵,۶,۷

۴	۴	۳	۳

$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۴\times۴\times۳\times۳=۱۴۴$

$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}}$ تعداد کل عددهای خواسته‌شده $= ۶۰+۱۴۴=۲۰۴$

تذکر اگر در تست بالا ذکر می‌شد که تکرار رقم‌ها مجاز است نباید هیچ عددی را خط می‌زدیم و فقط با یک حالت به جواب می‌رسیدیم:

۰,۲,۴,۶ | ۰,۲,۴,۵,۶,۷ | ۰,۲,۴,۵,۶,۷ | ۲,۴,۵,۶,۷

۵	۶	۶	۴

$\Rightarrow$ تعداد عددها $= ۵\times۶\times۶\times۴=۷۲۰$

کنار هم قرارگرفتن چند شیء خاص

گاهی اوقات می‌خواهیم افراد یا اشیاء یا حروف یا ارقام خاصی همیشه کنار هم باشند. در این‌گونه سؤالات آن اشیاء یا افراد را یک مجموعهٔ به هم چسبیده فرض می‌کنیم؛ یعنی آن‌ها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم؛ سپس تعداد اشیای بیرون بسته و خود بسته را شمرده با فاکتوریل می‌نویسیم و آن را در تعداد اشیای داخل بسته با فاکتوریل ضرب می‌کنیم. مثلاً می‌خواهیم با حروف کلمهٔ mafluk کلماتی بسازیم که در آن‌ها حروف m و a همواره کنار هم باشند:

$\underbrace{\boxed{m,a}}_{\text{۱ شیء}}\ f,l,u,k \Rightarrow$ تعدادکلمات‌مطلوب $= ۵!\times۲!=۱۲۰\times۲=۲۴۰$

توجه دارید که بیرون بسته ۴ شیء (۴ حرف) وجود داشت که به همراه خود بسته برابر ۵ شد که با فاکتوریل نوشتیم. سپس تعداد اشیاء (حروف) داخل بسته را شمردیم که ۲تا بود و نوشتیم ۲!.

تست با ارقام ۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹ چند عدد ۷رقمی می‌توان ساخت به طوری که در تمام این اعداد، رقم‌های فرد کنار هم قرار گیرند؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۱) ۲۷۶ ۲) ۴۷۶

۳) ۶۷۶ ۴) ۵۷۶

پاسخ گزینهٔ۴ رقم‌های فرد را کنار هم و در داخل یک بسته قرار می‌دهیم:

$\underbrace{\boxed{۱,۵,۷,۹}}_{\text{۱ شیء}}\ ,۲,۴,۶ \Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب $= ۴!\times۴!=۲۴\times۲۴=۵۷۶$

البته توجه کنید اگر حروف یا ارقام داخل بسته، یکسان بودند نباید اشیای داخل را شمارش کنیم.

تست با حروف کلمهٔ «NAAMDARAAN» چند کلمهٔ ۱۰حرفی می‌توان ساخت به طوری که در همهٔ آن‌ها حروف یکسان، کنار هم قرار داشته باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) $۵!\times۵!\times۲!$ ۴) $۵!\times۴!$

پاسخ گزینهٔ۱

$\underbrace{\boxed{AAAAA}}_{\text{۱ بسته}}\ \underbrace{\boxed{NN}}_{\text{۱ بسته}}\ M\ D\ R \Rightarrow$ تعدادکلمات‌خواسته‌شده $= ۵!=۱۲۰$

توجه کنید که الان دیگر نباید داخل مستطیل‌ها را بشماریم چون در داخل مستطیل اول، همگی A و مستطیل دوم همگی N هستند و جابه‌جایی Aها با هم و Nها با هم، تغییری ایجاد نمی‌کند.

مسائل ترتیب

در نظر بگیرید که n شیء متمایز موجود است و می‌خواهیم r شیء از آن‌ها را به شرطی انتخاب کنیم که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها کنار هم، مهم باشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء را با $P(n,r)$ نشان داده و آن را ترتیب r شیء از n شیء می‌نامیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\ ,\ n\geq r$$

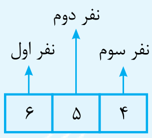
تست از بین ۶ کارمند می‌خواهیم نفر اول را به عنوان مدیر، نفر دوم را به عنوان معاون و نفر سوم را به عنوان دفتردار انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۸۰

پاسخ گزینه ۲ ترتیب انتخاب افراد مهم است، زیرا نفر اول، نفر دوم و نفر سوم هر کدام سِمَت‌های مختلفی دارند، پس در واقع باید به کمک فرمول بالا، ۳ نفر را از بین ۶ نفر انتخاب کنیم:

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times ۵\times ۴\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۱۲۰$$

البته به جای استفاده از فرمول $P(n,r)$ می‌توانیم از روش پرکردن خانه‌ها نیز استفاده کنیم:



$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها}=۶\times ۵\times ۴=۱۲۰$$

تست تعداد ترتیب‌های n شیء از ۵ شیء برابر است با تعداد ترتیب‌های $(n-1)$ شیء از ۵ شیء، مربع n کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۹ ۴) ۲۵

پاسخ گزینه ۴

$$P(۵,n)=P(۵,n-۱)\Rightarrow \frac{۵!}{(۵-n)!}=\frac{۵!}{(۵-(n-۱))!}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{۱}{\cancel{۵!}}}{(۵-n)!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۵!}}}{(۵-n+۱)!}\Rightarrow (۵-n)!=(۶-n)!\Rightarrow \underset{۱}{\cancel{(۵-n)!}}=(۶-n)\,\underset{۱}{\cancel{(۵-n)!}}\Rightarrow ۶-n=۱\Rightarrow n=۵\Rightarrow n^۲=۲۵$$

مسائل ترکیب

در نظر بگیرید که n شیء متمایز وجود دارد و می‌خواهیم r شیء را از بین آن‌ها انتخاب کنیم به شرطی که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها کنار هم مهم نباشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش داده و آن را ترکیب r شیء از n شیء می‌نامیم و فرمول آن به صورت مقابل است:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}\ ,\ n\geq r$$

تست در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی وجود دارد و ۹ نفر در لیست انتظار قرار دارند. به چند حالت می‌توان ۴ نفر را سوار هواپیما کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۲۶

پاسخ گزینه ۴ در مورد ترتیب انتخاب این ۴ مسافر برای سوار کردنشان به هواپیما تأکیدی نشده پس باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{(۹-۴)!\times ۴!}=\frac{۹!}{۵!\times ۴!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶\times \cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}=۱۲۶$$

تست ۷ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. تعداد چهارضلعی‌هایی که با این ۷ نقطه می‌توان ساخت کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۶۵

پاسخ گزینه ۲ باز هم با یک مسئلهٔ ترکیب مواجهیم. چون می‌دانید که چهارضلعی ABCD مثلاً با BCAD فرقی ندارد؛ یعنی وقتی چهار نقطه را به عنوان رأس‌های چهارضلعی انتخاب می‌کنیم، دیگر جابه‌جایی آن‌ها با هم، چهارضلعی جدیدی ایجاد نمی‌کند، لذا خواهیم داشت:

$$\text{تعداد چهارضلعی‌ها}=\binom{۷}{۴}=\frac{۷!}{(۷-۴)!\times ۴!}=\frac{۷!}{۳!\times ۴!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times \overset{۱}{\cancel{۴!}}}{۶\times \underset{۱}{\cancel{۴!}}}=۳۵$$

تذکر اگر در همین سؤال گفته می‌شد چند وتر می‌توان ساخت، جواب برابر با $\binom{۷}{۲}$ می‌شد و اگر گفته می‌شد چند مثلث می‌توان ساخت، جواب برابر با $\binom{۷}{۳}$ می‌شد.

نکته تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$. در این‌جا از فرمول ترکیب استفاده کرده‌ایم، چون می‌دانیم در مجموعه‌ها جابه‌جایی عضوها با هم تأثیری ندارد و مجموعهٔ جدیدی تشکیل نمی‌شود.

تست مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵

پاسخ گزینهٔ ۳ مجموعهٔ A دارای ۷ عضو است، پس تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن برابر است با:

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{(۷-۳)!\times ۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times \cancel{۴!}^{۱}}{\cancel{۴!}_{۱}\times ۳\times ۲\times ۱}=۳۵$$

انتخاب اجباری گاهی اوقات مجبوریم ۱ یا چند شیء یا فرد را حتماً جزء انتخابمان قرار دهیم. فرض کنید بخواهیم از بین n شیء متمایز r شیء را انتخاب کنیم به طوری که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، تعداد حالت‌های انجام این کار برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد. چون واضح است که k شیء قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید $r-k$ شیء باقی‌مانده را از بین $n-k$ شیء انتخاب کرد.

تست تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A=\{m,n,p,z,x,y,f\}$ به شرطی که همهٔ آن‌ها شامل x,y باشند، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

پاسخ گزینهٔ ۲ ۲ انتخاب اجباری x و y داریم، پس خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}=\binom{۷-۲}{۴-۲}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!\times ۲!}=\frac{۵\times ۴\times \cancel{۳!}^{۱}}{\cancel{۳!}_{۱}\times ۲\times ۱}=۱۰$$

روش‌های حل سریع ترکیب: در خیلی از موارد نیازی نیست از فرمول ترکیب به شکل $\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ به طور معمول استفاده کنیم، بدون اثبات از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم تا سرعت حل‌کردن مسائل ترکیب را بالا ببریم:

۱) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ اعداد r و n برابر باشند جواب حتماً برابر ۱ است: $\binom{n}{n}=۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۶}{۶}=۱\ ,\ \binom{۱۰}{۱۰}=۱$

۲) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ عدد r برابر صفر باشد جواب حتماً برابر ۱ است: $\binom{n}{۰}=۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۳}{۰}=۱\ ,\ \binom{۲۰۰}{۰}=۱$

۳) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ عدد r برابر ۱ باشد جواب خود n است: $\binom{n}{۱}=n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۴}{۱}=۴\ ,\ \binom{۲۵}{۱}=۲۵$

۴) اگر در ترکیب $\binom{n}{r}$ اختلاف r و n برابر ۱ باشد آن‌گاه جواب برابر n است: $\binom{n}{n-۱}=n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{۴}=۵\ ,\ \binom{۲۸}{۲۷}=۲۸$

۵) اگر ترکیب به شکل $\binom{n}{۲}$ باشد، خواهیم داشت: $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۸}{۲}=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$

تست به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد، به طوری که حداقل ۳ زن انتخاب شوند؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۸۵

پاسخ گزینهٔ ۱ کلاً ۴ زن وجود دارند، پس حداقل ۳ زن یعنی باید ۳ زن یا ۴ زن انتخاب شوند. می‌دانید حرف «یا» به معنی استفاده از اصل جمع است:

$$\text{تعداد کل حالت‌ها}=\underset{\text{۳ زن}}{\binom{۴}{۳}}\times\underset{\text{۳ مرد}}{\binom{۵}{۳}}+\underset{\text{۴ زن}}{\binom{۴}{۴}}\times\underset{\text{۲ مرد}}{\binom{۵}{۲}}=۴\times ۱۰+۱\times ۱۰=۵۰$$

سعی کنید جواب‌های دو ترکیب $\binom{۵}{۳}$ و $\binom{۵}{۲}$ را حفظ کنید، چون با آن‌ها زیاد سروکار داریم (جواب هر دوی آن‌ها به کمک فرمول ترکیب برابر با ۱۰ می‌شود).

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

اصل جمع ـ اصل ضرب

۱- از بین ۱۰ کشور اروپایی، ۶ کشور آسیایی و ۳ کشور آمریکای شمالی می‌خواهیم یک کشور را برای سفر به این کشورها انتخاب کنیم. چند حالت برای سفر به این کشور خواهیم داشت؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۲- فرض کنید یک دانشجو می‌خواهد ۱ درس عمومی از بین ۳ درس عمومی ارائه‌شده و ۱ درس اختصاصی از بین ۴ درس اختصاصی ارائه‌شده انتخاب کند. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱) ۱۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳- به چند طریق می‌توانیم فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین ۵ خودکار آبی، قرمز، سبز، مشکی و سفید و ۸ مداد با رنگ‌های متمایز و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های مختلف انتخاب کنیم؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۲

۴- یک کارخانهٔ تولید خودرو، خودروهایی در ۷ رنگ، ۳ حجم موتور، ۲ نوع گیربکس و ۲ نوع مختلف داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب خواهد داشت؟

۱) ۱۴ ۲) ۸۴ ۳) ۲۸ ۴) ۱۲۰

۵- یک تاس و ۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد اول آمده کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۸۴

۶- تعداد راه‌های ممکن برای پاسخ‌دادن به تعدادی سؤال ۴ گزینه‌ای برابر $(۱۲۵)^{۶}$ است. تعداد سؤالات کدام گزینه است؟ (پاسخ‌دادن به سؤالات الزامی نیست.)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

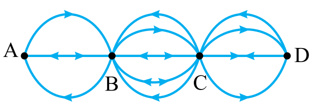
۷- تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی که هر سؤال ۲ گزینه دارد چند برابر تعداد حالت‌های پاسخ‌گویی به یک آزمون ۳ سؤالی ۴ گزینه‌ای است؟ (پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی است.)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۸

۸- یک دانش‌آموز در کنکور سراسری رشتهٔ انسانی، به ۲۸۰ سؤال موجود در دفترچه‌ها به چند طریق می‌تواند پاسخ دهد؟ (پاسخ‌گویی به همهٔ سؤالات الزامی نیست.)

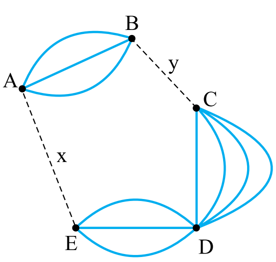
۱) $۴^{۲۸۰}$ ۲) $۲۸۰^{۴}$ ۳) $۵^{۲۸۰}$ ۴) $۲۸۰^{۵}$

۹- بین ۴ شهر A، B، C و D مطابق شکل زیر، راه‌های ارتباطی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از A به D برویم و برگردیم به شرطی که در مسیر رفت از راه‌های دوطرفه و در مسیر برگشت از راه‌های یک‌طرفه استفاده کنیم؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

۱۰- اگر تعداد راه‌ها از شهر A به E را با x و از B به C را با y نمایش دهیم و فردی به ۲۴ حالت مختلف بتواند از A به D سفر کند، حاصل $x+۴y$ کدام است؟ *(کتاب درسی)*



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

فاکتوریل

۱۱- چه تعداد از روابط زیر، درست هستند؟ (n عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ است)

الف) $۳\times۴!=۱۲!$ ب) $۱۰!-۳!=۷!$

پ) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=n^{۲}+n$ ت) $(۰!)^{۲}=(۱!)^{۲}$

ث) $\sqrt{۹!}=۳!$ ج) $n!=n(n-۱)(n-۲)!$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۲- اگر $\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!}=\frac{۱}{۶}$ باشد حاصل $(n+۲)!$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۷۲۰

۱۳- اگر $\frac{(x+2)!}{(x+1)!}=4$ باشد، آن‌گاه حاصل $2x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۴- معادلهٔ $(x^2-4)!=1$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- معادلهٔ $(x^2-x+1)!=24$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۲ ریشه ۲) ۱ ریشه ۳) ۳ ریشه ۴) ریشه ندارد

جایگشت (ساختن کلمات و اعداد)

۱۶- چند عدد ۳رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارد؟ (خارج ۹۱)

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۷- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۵,۶ چند عدد پنج‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۸۰۰

۱۸- با ارقام ۰,۴,۵,۶,۷,۸ چند عدد چهاررقمی و فرد بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۴۶ ۲) ۸۴ ۳) ۹۲ ۴) ۹۶

۱۹- چند عدد پنج‌رقمی زوج با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۸۶ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۱۲ ۴) ۴۱۸

۲۰- با ارقام ۰,۲,۳,۵,۸ چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ (با تکرار ارقام)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۳۰۰

۲۱- با ارقام موجود در مجموعهٔ $\{1,2,4,6,7,8\}$، چند عدد پنج‌رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ (خارج ۹۸)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۲۲- با ارقام ۰,۲,۳,۵,۸ چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۵۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

۲۳- با ارقام ۰,۲,۴,۷,۹ چند عدد ۳رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۷

۲۴- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵، چند عدد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۲۵- چند عدد ۴رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۵۰۴ ۴) ۴۴۸

۲۶- چند عدد ۴رقمی مضرب ۵ با ارقام مختلف می‌توان نوشت؟

۱) ۲۰۰۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۸۱۰ ۴) ۹۵۲

۲۷- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟ (خارج ۸۸)

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۲۰

۲۸- چند عدد ۵رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

۲۹- با ارقام ۷، ۶، ۵، ۴ چند عدد کوچک‌تر از ۷۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۴۸ ۲) ۳۴ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۳۰- با ارقام ۱,۳,۵,۶,۷,۸ چند عدد ۵رقمی و بزرگ‌تر از ۵۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۰۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۳۸۰ ۴) ۲۸۰

۳۱- چند عدد ۳رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟

۱) ۱۹۶ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۳۳۶

۳۲- عدد ۳۸۵۲۹۴ چند جایگشت دارد به طوری که ارقام فرد همواره کنار هم باشند؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

۳۳- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد ۳رقمی بزرگ‌تر از ۳۳۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

۳۴- با ارقام ۰,۱,۴,۵,۸ چند عدد ۳رقمی مضرب ۱۰ و بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۶

۳۵- با تمام ارقام فرد طبیعی یک‌رقمی، چند عدد ۵رقمی مضرب ۵ و بزرگ‌تر از ۷۰۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۴۸

۳۶- با ارقام ۰,۳,۴,۵,۶,۷ چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ و کوچک‌تر از ۶۰۰۰ می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام غیرمجاز است.)

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۰ ۴) ۸۰

۳۷- چند عدد ۴ رقمی طبیعی فرد وجود دارد که رقم یکان هزار آن‌ها فرد نباشد؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۵۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۲۵۰۰

۳۸- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۱,۲,۳,۵,۶,۷ می‌توان ساخت به طوری که ارقام ۵ و ۶ در آن‌ها به کار رفته و در کنار هم باشند؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۳۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷۲ ۴) ۲۴

۳۹- تعداد جایگشت‌های ۶حرفی کلمهٔ «Suarez» که در آن‌ها حروف صدادار و بی‌صدا یکی در میان قرار بگیرند کدام است؟ (تکرار حروف غیرمجاز است.)

۱) ۴۲ ۲) ۷۲ ۳) ۶۴ ۴) ۸۲

۴۰- ۴ فرد با نام‌های A، B، C و D می‌خواهند به ترتیب در یک همایش سخنرانی کنند به چند حالت امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۴۱- با حروف کلمهٔ «تمساح» و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «ت» شروع و به «ح» ختم شوند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۴۲- با حروف کلمهٔ «earth» چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف h باشد؟ (تکرار حروف، غیر مجاز است.)

۱) ۳۶ ۲) ۹۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۲۰

۴۳- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «DAMDARAN» به شرط آن‌که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند کدام است؟ (سراسری ۸۴)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۴۴- پلاک اتومبیل سواری در تهران به صورت $\frac{\text{تهران}}{\text{** ب ***}}$ می‌باشد که هر ستاره، نمایش یک رقم غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۱۱۶۶۴ ۲) ۱۴۵۸۰ ۳) ۱۵۴۸۰ ۴) ۱۸۲۲۵

۴۵- با حروف کلمهٔ «دلبرانه» چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان ساخت به طوری که در همهٔ آن‌ها عبارت «دلبر» به همین شکل مطرح شود؟

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۴۶- حروف کلمهٔ «ASSIST» را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم کنار هم قرار داد که حروف «S» یک در میان باشند؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۷- تعداد جایگشت‌های کلمهٔ «MAHSUS» که در آن‌ها بین دو حرف S دقیقاً یک حرف دیگر وجود داشته باشد کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۱۸ ۴) ۲۴۰

۴۸- با حروف کلمهٔ DANESH چند رمز عبور چهارحرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۶۰ ۴) ۲۷۰

۴۹- با حروف کلمهٔ «همسر خوب» و بدون تکرار حروف، چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «س» و «ب» کنار هم نیامده باشند؟

۱) ۸۸۰ ۲) ۱۲۰۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۳۶۰۰

۵۰- با حروف کلمهٔ «ملک‌پوری» چند کلمهٔ ۴حرفی (با معنی یا بی‌معنی) می‌توان نوشت به طوری که تمام حروف آن‌ها بدون نقطه باشند و همهٔ آن‌ها به «ر» ختم شوند؟ (تکرار حروف جایز نیست.)

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۶ ۴) ۸

ترتیب و ترکیب

۵۱- مقدار کدام عبارت زیر با $n!$ برابر است؟

۱) $C(n,0)$ ۲) $C(n,1)$ ۳) $P(n,n-1)$ ۴) $P(n,0)$

۵۲- از ۱۲ نفر دانش‌آموز نمونه، به چند روش می‌توان سه نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه انتخاب کرد؟

۱) ۱۳۲۰ ۲) ۶۶۰ ۳) ۳۳۰ ۴) ۲۲۰

۵۳- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دستهٔ ۵تایی شامل ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟ (سراسری ۸۱)

۱) ۲۴۱۰ ۲) ۲۴۲۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۵۴۰

۵۴- در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی وجود دارد به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این جعبه خارج کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۱۰

۵۵- روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد. چه تعداد مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

۵۶- به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه با تعداد یکسان تقسیم کرد؟ (سراسری ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

۵۷- در یک دورهٔ بازی فوتبال بین ۸ تیم، بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند در پایان دوره، چند بازی انجام خواهد شد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۸ ۴) ۴۶

۵۸- می‌خواهیم از بین ۴ کودک، ۵ نوجوان و ۷ جوان یک گروه سرود ۵نفره تشکیل دهیم به چند حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم به شرط آن‌که حداقل ۳ نفر از آن‌ها نوجوان باشند؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۵۶۰ ۴) ۶۰۶

۵۹- به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۶ نفر را انتخاب کرد به طوری که حداکثر ۳ زن انتخاب شوند؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۷۴

۶۰- در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند به طوری که ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی باشند؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۴

۶۱- دور یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند به طوری که ۲ فرد موردنظر از آنان، همواره کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰ (خارج ۹۹)

۶۲- به چند طریق می‌توان از بین ۸ سؤال یک امتحان به ۵ سؤال پاسخ داد به شرط آن‌که پاسخ به ۲ سؤال اول، اجباری باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۴۲ ۴) ۸۰

۶۳- مجموعهٔ $A = \{۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ مفروض است. مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ ۴عضوی و شامل عدد ۹ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۶۴- تعداد زیرمجموعه‌های چهارعضوی مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ به طوری که شامل g و فاقد عضو f باشند، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۶۵- از بین ۵ کارمند حسابدار و ۳ کارمند تحویلدار به چند طریق می‌توان یک گروه ۳نفره انتخاب کرد به طوری که رئیس گروه حسابدار باشد؟

۱) ۸۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۱۰

۶۶- چندتا از زیرمجموعه‌های ۴عضوی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ حتماً شامل اعضای ۷ و ۶ هستند؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۶۷- یک مجموعهٔ nعضوی، ۵۵ زیر مجموعهٔ $(n-۲)$ عضوی دارد. n کدام است؟ (سراسری ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۶۸- اگر $P(n,۲) - C(n,۲) = ۳۶$ باشد حاصل $C(n,۶)$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۶۹- مقدار $\dfrac{P(n,r)}{P(n+۱,r+۱)}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{n+۱}$ ۲) $\dfrac{r}{n}$ ۳) $\dfrac{۱}{(n+۱)!}$ ۴) $\dfrac{r+۱}{n+۱}$

۷۰- اگر $۲C(n,۵) = ۳P(n-۱,۴)$ باشد، حاصل $(n-۱۷۶)!$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲۰

۷۱- با حروف کلمهٔ «RANGIN» چند کلمهٔ رمز ۳حرفی می‌توان ساخت؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۱۲۰

۷۲- تعداد جایگشت‌های ۵حرفی کلمهٔ «MANSUR» که دو حرف M و N حتماً در آن‌ها وجود داشته باشد کدام است؟ (بدون تکرار حروف)

۱) ۴۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۱۲

۷۳- تعداد جایگشت‌های ۳حرفی از حروف کلمهٔ «SERESHT» کدام است؟ (سراسری ۸۷)

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

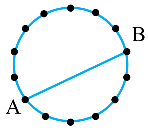
۷۴- ۵ حرف از ۸ حرف کلمهٔ «BUSINESS» را با جایگشت‌های متمایز کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد کلماتی که هر سه S در آن‌ها موجود باشند کدام است؟ (سراسری ۹۲)

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۴۰

۷۵- به چند طریق می‌توان ۲ عدد از میان اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد به طوری‌که مجموع آن‌ها فرد باشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) $\binom{20}{2}$ ۴) $\binom{10}{2}$

۷۶- با توجه به شکل زیر ۱۴ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. وتر AB هم رسم شده است. به چند طریق می‌توان یک چهارضعلی در یک طرف وتر و یک مثلث در طرف دیگر وتر ساخت؟ (چهارضلعی‌ها و مثلث‌ها شامل نقاط A و B نیستند.)



۱) ۲۱۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۲۵

۷۷- از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز که دوبه‌دو غیر هم مدرسه‌ای باشند را انتخاب کرد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۴۸۰

۱- **گزینهٔ ۳** فقط باید یک کشور را از بین ۳ گروه موجود انتخاب کنیم پس متوجه می‌شویم که باید از اصل جمع استفاده کنیم:

$\text{تعداد حالت‌ها} = ۱۰+۶+۳=۱۹$

۲- **گزینهٔ ۴** این دانشجو هم می‌تواند درس عمومی بردارد و هم اختصاصی (به طور همزمان) پس از اصل ضرب استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت: $\text{تعداد کل انتخاب‌ها} = ۳\times۴=۱۲$

۳- **گزینهٔ ۲** در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و تأکید شده که فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس می‌تواند انتخاب شود لذا از اصل جمع استفاده می‌کنیم: $\text{تعداد انتخاب‌ها} = ۵+۸+۳=۱۶$

۴- **گزینهٔ ۲** یک مشتری به طور همزمان می‌تواند از بین هر نوع ویژگی خودرو، (رنگ، حجم موتور، گیربکس، داشبورد)، یکی را انتخاب کند، پس باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

$\text{تعداد انتخاب‌های مشتری} = ۷\times۳\times۲\times۲=۸۴$

۵- **گزینهٔ ۳** برای هر سکه ۲ حالت وجود دارد «رو» یا «پشت» پس برای ۳ سکه تعداد حالت‌ها برابر $۲^۳=۸$ می‌باشد. از طرفی در تاس، اعداد اول عبارت‌اند از ۲، ۳ و ۵ که تعداد آن‌ها ۳تا است. لذا طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۳\times۸=۲۴$

۶- **گزینهٔ ۲** تعداد سؤالات را x فرض می‌کنیم:

$\text{تعداد حالت‌های پاسخگویی} = (\text{تعداد گزینه‌ها}+۱)^{\text{تعداد سؤالات}}$

$(۱۲۵)^۶=(۴+۱)^x \Rightarrow (۵^۳)^۶=۵^x \Rightarrow \cancel{۵}^{۱۸}=\cancel{۵}^x$

$\Rightarrow x=۱۸$

۷- **گزینهٔ ۳** ۳ سؤال داریم که هر سؤال ۲ گزینه دارد پس تعداد حالت‌های پاسخگویی به آن‌ها برابر است با: $۲^۳=۸$

از طرفی به ۳ سؤال با ۴ گزینه به $۴^۳=۶۴$ حالت می‌توان جواب داد لذا نسبت خواسته شده برابر است با: $\frac{۸}{۶۴}=\frac{۱}{۸}$

۸- **گزینهٔ ۳** برای هر سؤال ۵ انتخاب وجود دارد، انتخاب یکی از ۴ گزینه و یا حل‌نکردن سؤال، لذا چون ۲۸۰ سؤال داریم تعداد حالت‌ها برابر است با: $۵^{۲۸۰}$.

۹- **گزینهٔ ۲** در مسیر رفت باید ۳ عمل مختلف را پشت سرهم انجام دهیم یعنی اول از A به B برویم، بعد از B به C و در نهایت از C به D، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های هر عمل را در هم ضرب می‌کنیم. در مسیر برگشت هم باید ۳ عمل مختلف را انجام دهیم و از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{مسیر رفت}: \overset{\overset{AB}{\uparrow}}{۱}\times\overset{\overset{BC}{\uparrow}}{۲}\times\overset{\overset{CD}{\uparrow}}{۱}=۲\\ \text{مسیر برگشت}: \overset{\overset{DC}{\uparrow}}{۱}\times\overset{\overset{CB}{\uparrow}}{۲}\times\overset{\overset{BA}{\uparrow}}{۱}=۲\end{array}\right\}\Rightarrow \text{رفت و برگشت}: ۲\times۲=۴$$

۱۰- **گزینهٔ ۲** برای رفتن از A به D دو مسیر کلی وجود دارد یکی ABCD و دیگری AED:

$$\left.\begin{array}{l}\text{مسیر ABCD}: \overset{\overset{AB}{\uparrow}}{۳}\times\overset{\overset{BC}{\uparrow}}{y}\times\overset{\overset{CD}{\uparrow}}{۴}=۱۲y\\ \text{مسیر AED}: \underset{\underset{AE}{\downarrow}}{x}\times\underset{\underset{ED}{\downarrow}}{۳}=۳x\end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۳x+۱۲y=۲۴$

حالا تمام جملات رابطهٔ بالا را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$۳x+۱۲y=۲۴ \xrightarrow{\div۳} x+۴y=۸$

۱۱- **گزینهٔ ۳** در چهار عمل اصلی، نمی‌توانیم حاصل را بدون بازکردن فاکتوریل، به دست آوریم پس روابط (الف)، (ب) قطعاً نادرست هستند. همچنین دقت کنید که نمی‌توانیم از یک عددی که نماد فاکتوریل دارد و زیر رادیکال است بدون محاسبه جذر بگیریم؛ یعنی رابطهٔ $\sqrt{۹!}=۳!$ نادرست است. (بدون توجه به فاکتوریل، فقط از ۹ جذر گرفته شده) یعنی ابتدا باید حاصل $۹!$ را حساب کرد سپس از آن جذر گرفت. روابط (پ) و (ت) را اثبات می‌کنیم:

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=\frac{(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}}=(n+۱)n=n^۲+n$$

$$\begin{cases}۰!=۱\\ ۱!=۱\end{cases}\Rightarrow (۰!)^۲=(۱!)^۲$$

قسمت (ج) هم درست است چون می‌دانیم در باز کردن یک عدد که فاکتوریل دارد هر جا متوقف شدیم باید علامت (!) بگذاریم.

۱۲- **گزینهٔ ۳** $(n+۱)$ از $(n-۱)$ بزرگ‌تر است، پس $(n+۱)!$ را باز می‌کنیم تا به $(n-۱)!$ برسیم:

$$\frac{\cancel{(n-۱)!}}{(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow n(n+۱)=۶\Rightarrow n^۲+n-۶=۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه می‌کنیم}}(n+۳)(n-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۳ & (\text{غ‌ق‌ق})\\ n=۲ & (\text{ق‌ق})\end{cases}$$

$$\Rightarrow (n+۲)!=(۲+۲)!=۴!=۲۴$$

۱۳- **گزینهٔ ۲** $(x+۲)$ بزرگ‌تر از $(x+۱)$ است پس صورت کسر را باز می‌کنیم تا به مخرج برسیم:

$$\frac{(x+۲)!}{(x+۱)!}=۴\Rightarrow\frac{(x+۲)\cancel{(x+۱)!}}{\cancel{(x+۱)!}}=۴\Rightarrow x+۲=۴$$

$$\Rightarrow x=۴-۲=۲$$

پس حاصل $۲x$ برابر است با: $۲\times۲=۴$

۱۴- **گزینهٔ ۴** می‌دانیم $۰!=۱$ و $۱!=۱$ پس از معادلهٔ $(x^۲-۴)!=۱$ نتیجه می‌گیریم که:

$$x^۲-۴=۰\Rightarrow x^۲=۴\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm۲$$

$$x^۲-۴=۱\Rightarrow x^۲=۵\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm\sqrt{۵}$$

پس معادلهٔ موردنظر، دارای ۴ جواب است.

۱۵- **گزینهٔ ۱** می‌دانیم حاصل $۴!$ برابر با ۲۴ می‌شود پس عبارت داخلی پرانتز باید ۴ شود:

$$x^۲-x+۱=۴\Rightarrow x^۲-x-۳=۰$$

$$\Rightarrow\Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(-۳)=۱+۱۲=۱۳$$

دلتا مثبت شده است پس معادلهٔ بالا ۲ ریشهٔ حقیقی دارد. (نیاز به حل معادله نیست، چون فقط تعداد ریشه‌ها خواسته شده)

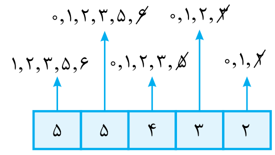
۱۶- **گزینهٔ ۴** باید با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۵ بسازیم.

فرض بر این است که تکرار ارقام مجاز است (در متن سؤال، محدودیتی ذکر نشده) پس خواهیم نوشت:

$$\begin{array}{ccc} ۱,۳,۵,۷,۹ & ۱,۳,۵,۷,۹ & \text{فقط } ۵\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \boxed{۵} & \boxed{۵} & \boxed{۱}\end{array}$$

$\Rightarrow \text{تعداد عددهای مطلوب} = ۵\times۵\times۱=۲۵$

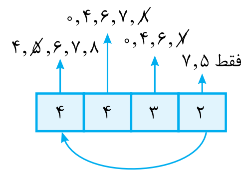
۱۷- **گزینهٔ ۱** شرط خاصی در متن سؤال ذکر نشده پس خانه‌ها را از چپ به راست پر می‌کنیم:



⇒ تعداد عددهای مطلوب $= ۵\times۵\times۴\times۳\times۲ = ۶۰۰$

دقت دارید که در اولین خانهٔ سمت چپ، رقم صفر نمی‌تواند قرار بگیرد چون هیچ عددی با صفر شروع نمی‌شود ولی از صفر در خانه‌های بعدی می‌توان استفاده کرد.

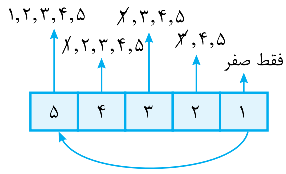
۱۸- **گزینهٔ ۴** شرط اصلی در این مسئله، فردبودن عدد است پس ابتدا اولین خانهٔ سمت راست را پر می‌کنیم و سپس به اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پرکردن را از چپ به راست ادامه می‌دهیم:



⇒ تعداد عددهای خواسته‌شده $= ۴\times۴\times۳\times۲ = ۹۶$

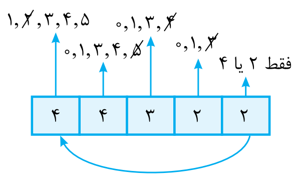
۱۹- **گزینهٔ ۳** چون صفر جزء رقم‌ها است و تکرار ارقام غیرمجاز است باید دو حالت جداگانه برای حل مسئله در نظر بگیریم یکی وقتی‌که یکان صفر باشد و دیگری وقتی که یکان رقم زوجی به جز صفر باشد:

حالت اول



⇒ تعداد عددها $= ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$

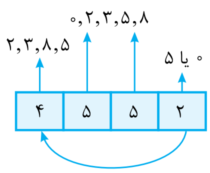
حالت دوم



⇒ تعداد عددها $= ۴\times۴\times۳\times۲\times۲ = ۱۹۲$

⇒ تعداد کل اعداد مطلوب طبق اصل جمع $= ۱۲۰ + ۱۹۲ = ۳۱۲$

۲۰- **گزینهٔ ۳** صفر جزء رقم‌ها است ولی چون تکرار ارقام مجاز است نیازی نیست دو حالت جداگانه در نظر بگیریم، می‌دانیم عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که یکان آن صفر یا ۵ باشد پس خواهیم نوشت:



⇒ تعداد عددهای مطلوب $= ۴\times۵\times۵\times۲ = ۲۰۰$

۲۱- **گزینهٔ ۳** از خانه‌ای شروع به پرکردن می‌کنیم که محدودیت بیشتری دارد. چون قرار است عدد فرد باشد، پس محدودیت فقط برای رقم یکان است (یکان باید فرد باشد).

در این‌جا ترتیب پرشدن خانه‌ها به صورت مقابل است: یکان، ده‌هزارگان، هزارگان، صدگان، دهگان

یکی از ارقام ۱ و ۷ باید در یکان باشد، پس یکان ۲ حالت دارد:

$$\frac{۲}{\text{یکان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{هزارگان}}\times\frac{}{\text{ده‌هزارگان}}$$

حالا از ۵ عدد باقی‌مانده یکی را در ده‌هزارگان قرار می‌دهیم:

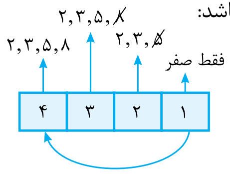
$$\frac{۲}{\text{یکان}}\times\frac{}{\text{دهگان}}\times\frac{}{\text{صدگان}}\times\frac{}{\text{هزارگان}}\times\frac{۵}{\text{ده‌هزارگان}}$$

رقم هزارگان ۴ حالت، رقم صدگان ۳ حالت و رقم دهگان ۲ حالت دارد:

$$۲۴۰ = \frac{۲}{\text{یکان}}\times\frac{۲}{\text{دهگان}}\times\frac{۳}{\text{صدگان}}\times\frac{۴}{\text{هزارگان}}\times\frac{۵}{\text{ده‌هزارگان}}$$

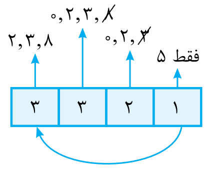
۲۲- **گزینهٔ ۴** صفر جزء رقم‌ها است و تکرار ارقام، غیرمجاز است پس باید دو حالت جداگانه برای حل در نظر بگیریم یکی حالتی است که یکان صفر باشد و دیگری حالتی است که یکان ۵ باشد:

حالت اول



⇒ تعداد عددها $= ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$

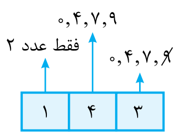
حالت دوم



⇒ تعداد عددها $= ۳\times۳\times۲\times۱ = ۱۸$

⇒ تعداد کل عددها طبق اصل جمع $= ۲۴ + ۱۸ = ۴۲$

۲۳- **گزینهٔ ۱** می‌خواهیم عدد موردنظر کوچک‌تر از ۴۰۰ باشد پس اولین رقم سمت چپ، نمی‌تواند ۴ یا ۷ یا ۹ باشد زیرا اعداد حاصل، بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌شوند پس اولین رقم سمت چپ، فقط می‌تواند ۲ باشد *(یعنی عدد حاصل می‌شه دویست و خرده‌ای)* پس نحوهٔ پرکردن خانه‌ها از چپ به راست و به شکل مقابل است:



⇒ تعداد عددها $= ۱\times۴\times۳ = ۱۲$

۲۴- **گزینهٔ ۳** یکان اعدادی که بر ۵ بخش‌پذیرند، صفر یا ۵ است. تعداد آن‌ها را در دو حالت حساب و با هم جمع می‌کنیم. در هر دو حالت زیر، ترتیب پرکردن خانه‌ها به صورت زیر است:

یکان، هزارگان، صدگان، دهگان ←

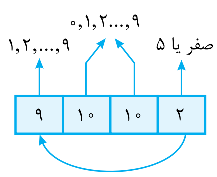
یکان صفر باشد: $\frac{۵}{\text{هزارگان}}\times\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۳}{\text{دهگان}}\times\frac{۱}{\text{یکان}} = ۶۰$

۵ و ۰ نمی‌تواند باشد ↑

یکان ۵ باشد: $\frac{۴}{\text{هزارگان}}\times\frac{۴}{\text{صدگان}}\times\frac{۳}{\text{دهگان}}\times\frac{۱}{\text{یکان}} = ۴۸$

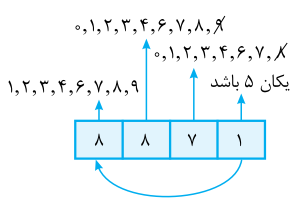
پس در کل ۴۸+۶۰، یعنی ۱۰۸ عدد با این ویژگی می‌توان نوشت.

۲۵- **گزینهٔ ۲** ارقام ۰,۱,۲,...,۹ را در نظر می‌گیریم، تکرار ارقام مجاز است پس مسئله فقط با یک حالت حل می‌شود:

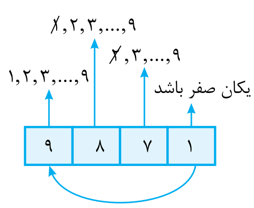


⇒ تعداد عددهای مطلوب $= ۹\times۱۰\times۱۰\times۲ = ۱۸۰۰$

۲۶- **گزینهٔ ۴** ارقام ۰,۱,۲,...,۹ را در نظر می‌گیریم. چون تکرار ارقام غیرمجاز است و در بین رقم‌ها صفر نیز وجود دارد باید دو حالت جداگانه برای اعداد مضرب ۵ در نظر بگیریم:



⇒ تعداد عددها $= ۸\times۸\times۷\times۱ = ۴۴۸$



⇒ تعداد عددها $= ۹\times۸\times۷\times۱ = ۵۰۴$

⇒ تعداد کل عددهای مطلوب $= ۴۴۸ + ۵۰۴ = ۹۵۲$

۲۷- گزینهٔ ۳ می‌توانیم از تمام ارقام ۰,۱,۲,...,۹ استفاده کنیم فقط صفر در اولین خانه سمت چپ نمی‌تواند قرار گیرد.

۱,۲,۳,...,۹ ‏ | ‏ ۰,۱,۲,۳,...,$\cancel{۹}$ ‏ | ‏ ۰,۱,۲,۳,...,$\cancel{۹}$

۹	۹	۸

$\Rightarrow$ تعداد اعداد = ۹ × ۹ × ۸ = ۶۴۸

۲۸- گزینهٔ ۴ باید از ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ برای پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم ضمناً تکرار ارقام مجاز است چون محدودیتی ذکر نشده است:

۲,۴,۶,۸

۴	۴	۴	۴	۴

$\Rightarrow$ تعداد اعداد = ۴ × ۴ × ۴ × ۴ × ۴ = $۴^{۵} = (۲^{۲})^{۵} = ۲^{۱۰}$ = ۱۰۲۴

۲۹- گزینهٔ ۲ در صورت سؤال، در مورد چندرقمی‌بودن عدد مطلوب چیزی گفته نشده، پس خودمان باید حالت‌های مناسب را در نظر بگیریم:

اعداد یک‌رقمی همگی کوچک‌تر از ۷۰۰ هستند. ← ۴,۵,۶,۷ $\Rightarrow$ تعداد = ۴

اعداد دورقمی هم همگی کوچک‌تر از ۷۰۰ هستند. ←

۴,۵,۶,۷

۴	۳

۴,۵,۶,$\cancel{۷}$

$\Rightarrow$ تعداد = ۱۲

اعداد سه‌رقمی اگر بخواهند کوچک‌تر از ۷۰۰ باشند، نباید با ۷ شروع شوند. ←

۴,۵,۶ ‏ | ‏ $\cancel{۵}$,۶,۷

۳	۳	۲

$\cancel{۴}$,۵,۶,۷

$\Rightarrow$ تعداد = ۱۸

طبق اصل جمع ← تعداد کل کلمات مطلوب = ۴ + ۱۲ + ۱۸ = ۳۴

۳۰- گزینهٔ ۲ با توجه به شرایط مسئله، پرکردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:

۱,۳,۵,۶,۷,$\cancel{۸}$ ‏ | ‏ $\cancel{۳}$,۵,۶,۷ ‏ | ‏ ۸,۷,۶,۵ فقط ‏ | ‏ $\cancel{۷}$,۳,۵,۶,۷ ‏ | ‏ $\cancel{۵}$,۶,۷

۴	۵	۴	۳	۲

$\Rightarrow$ تعداد عددهای خواسته‌شده = ۴ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ = ۴۸۰

توجه کنید که پس از پرکردن هر خانه، وقتی به سراغ خانهٔ بعدی رفته‌ایم یک رقم دلخواه از خانهٔ قبلی را خط زده‌ایم. مثلاً در خانهٔ دوم از چپ، به دلخواه عدد ۸ را که در خانهٔ اول از چپ استفاده شده خط زده‌ایم. شما به جای ۸ می توانید ۵ یا ۶ یا ۷ را خط بزنید هیچ فرقی ندارد.

۳۱- گزینهٔ ۳ ابتدا باید خانهٔ دهگان را پر کنیم چون شرط اصلی سؤال در مورد آن است سپس خانهٔ سمت چپ و در نهایت خانهٔ سمت راست را پر می‌کنیم:

۱,۲,$\cancel{۳}$,۴,۵,۶,۷,۸,۹ ‏ | ‏ ۲,۳,۵,۷ ‏ | ‏ ۰,۱,$\cancel{۲}$,۴,۵,۶,۷,۸,۹

۸	۴	۸

$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب = ۸ × ۴ × ۸ = ۲۵۶

۳۲- گزینهٔ ۴ ارقام فرد عبارت‌اند از ۹، ۵، ۳ و چون می‌خواهیم همیشه کنار هم باشند آن‌ها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم. پس خواهیم داشت:

$\boxed{۳,۵,۹}$,۸,۲,۴ $\Rightarrow$ تعداد جایگشت‌ها = !۴ × !۳ = ۲۴ × ۶ = ۱۴۴

یک شیء

۳۳- گزینهٔ ۳ باید دو حالت جداگانه برای حل این سؤال در نظر بگیریم یکی وقتی که اولین خانهٔ سمت چپ ۳ باشد و دیگری وقتی اولین خانه سمت چپ ۴ یا ۵ باشد.

حالت اول

۳ فقط ‏ | ‏ ۴,۵ ‏ | ‏ ۰,۱,۲,۴,$\cancel{۵}$

۱	۲	۴

$\Rightarrow$ تعداد اعداد = ۱ × ۲ × ۴ = ۸

حالت دوم

۵,۴ ‏ | ‏ ۰,۱,۲,۳,$\cancel{۴}$,۵ ‏ | ‏ ۰,۱,۲,۳,$\cancel{۵}$

۲	۵	۴

$\Rightarrow$ تعداد اعداد = ۲ × ۵ × ۴ = ۴۰

$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب = ۸ + ۴۰ = ۴۸

۳۴- گزینهٔ ۱ عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر است که یکان آن صفر باشد از طرفی عدد موردنظر باید از ۴۰۰ بزرگ‌تر باشد پس صدگان آن باید ۴ به بالا باشد، لذا خواهیم نوشت:

۴,۵,۸ ‏ | ‏ ۱,۴,۵,$\cancel{۸}$ ‏ | ‏ فقط صفر

۳	۳	۱

$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب = ۳ × ۳ × ۱ = ۹

۳۵- گزینهٔ ۱ ارقام فرد طبیعی یک‌رقمی عبارت‌اند از ۱,۳,۵,۷,۹ ضمناً اولین خانه سمت چپ فقط می‌تواند ۷ یا ۹ باشد، پس خواهیم داشت:

۷,۹ ‏ | ‏ ۱,۳,۷,$\cancel{۹}$ ‏ | ‏ $\cancel{۱}$,۳,۷ ‏ | ‏ $\cancel{۳}$,۷ ‏ | ‏ ۵ فقط

۲	۳	۲	۱	۱

$\Rightarrow$ تعداد عددهای مطلوب = ۲ × ۳ × ۲ × ۱ × ۱ = ۱۲

۳۶- گزینهٔ ۱ برای آن‌که عدد مطلوب بین ۳۰۰۰ و ۶۰۰۰ باشد، رقم یکان هزار آن فقط می‌تواند ۳ یا ۴ یا ۵ باشد؛ لذا به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۵,۴,۳ ‏ | ‏ ۰,۴,۵,۶,$\cancel{۷}$

۳	۵	۴	۳

۰,$\cancel{۳}$,۴,۵,۶,۷ ‏ | ‏ ۰,۴,۵,$\cancel{۶}$

$\Rightarrow$ جواب = ۳ × ۵ × ۴ × ۳ = ۱۸۰

۳۷- گزینهٔ ۳ اولاً یکان عدد باید از بین ارقام ۱,۳,۵,۷,۹ انتخاب شود تا عدد، فرد محسوب شود. ثانیاً در رقم یکان هزار، باید از ارقام ۲، ۴، ۶، ۸ استفاده کنیم. برای دهگان و صدگان محدودیتی ذکر نشده، پس می‌توانند از بین ارقام صفر تا ۹ انتخاب شوند (توجه کنید که تکرار ارقام مجاز است؛ چون در متن سؤال، چیزی در این مورد گفته نشده است.)

۲,۴,۶,۸ ‏ | ‏ ۰,۱,۲,۳,...,۹

۴	۱۰	۱۰	۵

۱,۳,۵,۷,۹

$\Rightarrow$ جواب = ۴ × ۱۰ × ۱۰ × ۵ = ۲۰۰۰

۳۸- گزینهٔ ۳ رقم‌های ۵ و ۶ را چسبیده به هم فرض می‌کنیم. حال ممکن است ۵ و ۶ در رقم‌های اول و دوم یا دوم و سوم یا سوم و چهارم به کار روند. فقط کافی است جواب یک حالت را به دست آورده و در عدد ۳ ضرب کنیم (چون ۳ حالت داریم.):

$\cancel{۵}$,۶ ‏ | ‏ ۶ ‏ | ‏ ۱,۲,۳,۷ ‏ | ‏ ۱,۲,$\cancel{۳}$,۷

۲	۱	۴	۳

۶ و ۵ در رقم‌های اول و دوم باشند.

$\Rightarrow$ تعداد اعداد = ۲ × ۱ × ۴ × ۳ = ۲۴

$\Rightarrow$ تعداد کل عددهای مطلوب = ۲۴ × ۳ = ۷۲

۳۹- گزینهٔ ۲ تعداد حروف صدادار = ۳ ← (u,a,e)

تعداد حروف بی‌صدا = ۳ ← (s,r,z)

دو حالت خواهیم داشت:

① کلماتی که با حروف صدادار شروع می‌شوند:

u,a,e ‏ | ‏ u,a,$\cancel{e}$ ‏ | ‏ a,$\cancel{a}$

۳	۳	۲	۲	۱	۱

s,r,z ‏ | ‏ s,r,$\cancel{z}$ ‏ | ‏ s,$\cancel{r}$

$\Rightarrow$ تعداد کلمات = ۳۶

② کلماتی که با حروف بی‌صدا شروع می‌شوند:

s,r,z		s,r,~~z~~		s,~~r~~	
۳	۳	۲	۲	۱	۱
	u,a,e		u,a,~~e~~		u,~~a~~

$\Rightarrow$ تعدادکلمات = ۳۶

تعداد کل کلمات مطلوب = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲

۴۰- گزینهٔ ۳ **روش اول** ترتیب انتخاب افراد مهم است پس از فرمول $n!$ استفاده می کنیم. $n! = ۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$ = تعداد حالتها

روش دوم می توانیم از روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم:

A,B,C,D	~~A~~,B,C,D	~~B~~,C,D	~~C~~,D
۴	۳	۲	۱

$\Rightarrow$ تعداد حالتها = ۴×۳×۲×۱ = ۲۴

۴۱- گزینهٔ ۴ چون کلمهٔ «تمساح» فارسی است بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم:

فقط «ح»	م، ~~س~~، الف	~~م~~، س، الف	م، س، الف	فقط «ت»
۱	۱	۲	۳	۱

$\Rightarrow$ تعدادکلمات مطلوب = ۱×۱×۲×۳×۱ = ۶

۴۲- گزینهٔ ۲ ابتدا فرض می‌کنیم حرف h در اولین جایگاه سمت چپ قرار داشته باشد، ضمناً تکرار حروف غیرمجاز است؛ لذا خواهیم داشت:

فقط «h»	e,a,r,t		e,a,~~t~~
۱	۴	۳	۲
		e,a,r,~~t~~	

$\Rightarrow$ تعداد کلمات = ۱×۴×۳×۲ = ۲۴

ولی حرف h در جایگاه‌های دیگر هم می‌تواند قرار گیرد؛ یعنی h می‌تواند در هر ۴ خانه قرار گیرد، پس داریم: تعداد کل کلمات مطلوب = ۲۴×۴ = ۹۶

۴۳- گزینهٔ ۱ حرف‌های D را کنار هم و حرف‌های A را نیز کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را داخل بسته‌هایی قرار می‌دهیم سپس هر بسته را ۱ شیء در نظر می‌گیریم:

$\underbrace{\boxed{DD}}_{\text{۱ شیء}}\ \underbrace{\boxed{AAA}}_{\text{۱ شیء}}\ MRN$ $\Rightarrow$ تعداد کلمات = ۵! = ۱۲۰

توجه کنید که دیگر داخل بسته‌ها را نمی‌شماریم چون حروف داخل هر بسته، یکسان هستند و جابه‌جایی آن‌ها با هم کلمهٔ جدیدی ایجاد نمی‌کند.

۴۴- گزینهٔ ۲ به جای ستاره‌ها، خانه رسم می‌کنیم اولین رقم سمت چپ باید فرد باشد (۱,۳,۵,۷,۹) ولی اولین رقم سمت راست باید زوج باشد (۲,۴,۶,۸) بقیهٔ خانه‌ها محدودیتی ندارند پس می‌توانند هر یک از ارقام ۱ تا ۹ را اختیار کنند ضمناً تکرار ارقام مجاز است، بنابراین:

۱,۳,۵,۷,۹	۱,۲,۳,...,۹	۱,۲,۳,...,۹	۱,۲,۳,...,۹	۲,۴,۶,۸
۵	۹	۹	۹	۴

$\Rightarrow$ تعداد پلاک‌ها = ۵×۹×۹×۹×۴ = ۱۴۵۸۰

۴۵- گزینهٔ ۳ عبارت «دلبر» را یک بسته فرض می‌کنیم و حواسمان هست که حروف موجود در «دلبر» نمی‌توانند با هم جابه‌جا شوند، پس خواهیم داشت:

$\underbrace{\boxed{\text{دلبر}}}_{\text{۱ شیء}}$ ا ن و $\Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب = ۴! = ۲۴

۴۶- گزینهٔ ۴ ۲ حالت وجود دارد. کلماتی که با S شروع می‌شوند و کلماتی که با S شروع نمی‌شوند:

حالت اول

S	A,I,T	S	~~A~~,I,T	S	~~I~~,T
۱	۳	۱	۲	۱	۱

$\Rightarrow$ ۱×۳×۱×۲×۱×۱ = ۶

حالت دوم

A,I,T	S	~~A~~,I,T	S	~~I~~,T	S
۳	۱	۲	۱	۱	۱

$\Rightarrow$ ۳×۱×۲×۱×۱×۱ = ۶

$\Rightarrow$ تعداد کل کلمات خواسته‌شده = ۶ + ۶ = ۱۲

۴۷- گزینهٔ ۲ ابتدا باید جایگاه دو حرف S را در کلمات مختلفی که ساخته می‌شود مشخص کنیم:

①	S	۴	S	۳	۲	۱
②	۴	S	۳	S	۲	۱
③	۴	۳	S	۲	S	۱
④	۴	۳	۲	S	۱	S

پس Sها چهار حالت مختلف خواهند داشت و جواب نهایی برابر می‌شود با:

$\Rightarrow$ تعدادکل کلمات مطلوب = ۴×۴! = ۹۶

۴۸- گزینهٔ ۱ ابتدا فرض می‌کنیم اولین حرف سمت چپ، حرف S باشد:

S	D,A,N,E,H	D,A,N,E,~~H~~	D,A,N,~~E~~
۱	۵	۴	۳

$\Rightarrow$ تعدادکلمات = ۱×۵×۴×۳ = ۶۰

ولی S می‌تواند در خانه‌های دیگر هم باشد پس در کل S می‌تواند در هر یک از ۴ خانه قرار گیرد لذا جواب به دست آمده را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم:

تعداد کل کلمات خواسته‌شده = ۶۰×۴ = ۲۴۰

۴۹- گزینهٔ ۴ ابتدا تعداد کل کلمات ۷حرفی که با حروف داده‌شده می‌توان ساخت به دست می‌آوریم: تعداد کل کلمات = ۷! = ۵۰۴۰

حالا تعداد کلماتی را می‌یابیم که در آن‌ها «س» و «ب» کنار هم باشند:

$\underbrace{\text{س ب}}_{\text{۱شیء}}$ هـ م ر خ و $\Rightarrow$ تعداد کلمات = ۶!×۲! = ۷۲۰×۲ = ۱۴۴۰

اگر جواب‌های دو حالت بالا را از هم کم کنیم، تعداد کلماتی به دست می‌آید که در آن‌ها «س» و «ب» کنار هم نیستند (در واقع از روش متمم‌گیری استفاده کرده‌ایم). تعداد کلمات مطلوب = ۵۰۴۰ − ۱۴۴۰ = ۳۶۰۰

۵۰- گزینهٔ ۱ حروف بدون نقطه عبارت‌اند از: م، ل، ک، ر، و.

ولی توجه کنید که حرف آخر باید «ر» باشد. همچنین می‌دانید «ی» هر جای کلمه (به‌جز آخر کلمه) استفاده شود، نقطه‌دار خواهد بود؛ پس «ی» کلاً حذف می‌شود. حرف «پ» هم که نقطه‌دار است و کنار می‌رود. لذا داریم:

فقط «ر»	م،~~ل~~،و		م،ل،ک،و
۱	۲	۳	۴
		م،ل،~~ک~~،و	

$\Rightarrow$ تعداد کلمات = ۱×۲×۳×۴ = ۲۴

۵۱- گزینهٔ ۳

① $C(n,0) = \dfrac{n!}{(n-0)!\times 0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

② $C(n,1) = \dfrac{n!}{(n-1)!\times 1!} = \dfrac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$

۳ $P(n,n-1)=\dfrac{n!}{(n-(n-1))!}=\dfrac{n!}{(n-n+1)!}=\dfrac{n!}{1!}=n!$

۴ $P(n,0)=\dfrac{n!}{(n-0)!}=\dfrac{n!}{n!}=1$

۵۲- گزینهٔ ۱ چون گفته‌شده این سه نفر باید در سه مورد متمایز فعالیت کنند، پس ترتیب انتخاب‌ها مهم است و باید از فرمول $P(n,r)$ یا روش پرکردن خانه‌ها استفاده کنیم، روش پرکردن خانه‌ها ساده‌تر است:

نفر اول	نفر دوم	نفر سوم
۶	۵	۴

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=12\times 11\times 10=1320$

۵۳- گزینهٔ ۳ باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم چون پس از انتخاب کتاب‌ها، جابه‌جایی آن‌ها مهم نیست:

تعداد حالت‌ها $=\underset{\text{ادبی}}{\dbinom{10}{2}}\times\underset{\text{علوم}}{\dbinom{8}{3}}=\dfrac{10!}{8!\times 2!}\times\dfrac{8!}{5!\times 3!}$

$=\dfrac{10\times 9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}\times 2\times 1}\times\dfrac{8\times 7\times 6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times 3\times 2\times 1}=45\times 56=2520$

۵۴- گزینهٔ ۲ وقتی ۳ مهره را انتخاب کنیم دیگر جابه‌جایی آن‌ها با هم اهمیتی ندارد یعنی ترتیب در این مسئله مهم نیست لذا از فرمول ترکیب بهره می‌گیریم، تعداد کل مهره‌ها برابر $10=6+4$ تا است پس در واقع می‌خواهیم ۳ مهره را از بین ۱۰ مهره انتخاب کنیم:

تعداد حالت‌ها $=\dbinom{10}{3}=\dfrac{10!}{7!\times 3!}=\dfrac{10\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{4}\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}=120$

۵۵- گزینهٔ ۳ با هر ۳ نقطه که روی محیط یک دایره باشند یک مثلث ساخته می‌شود از طرفی مثلثی مثل ABC فرقی با BAC و CAB ندارد؛ یعنی جابه‌جایی سه رأس یک مثلث با هم، مثلث جدیدی ایجاد نمی‌کند پس باید از ترکیب استفاده کنیم:

تعداد مثلث‌ها $=\dbinom{10}{3}=\dfrac{10!}{7!\times 3!}=\dfrac{10\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{4}\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}=120$

۵۶- گزینهٔ ۴ ترتیب پخش اسباب‌بازی بین بچه‌ها مهم نیست؛ پس از ترکیب استفاده می‌کنیم. به بچهٔ اول ۲ اسباب‌بازی از بین ۶ اسباب‌بازی می‌دهیم که تعداد حالت‌های این کار $\dbinom{6}{2}$ است. حالا به سراغ بچهٔ دوم می‌رویم. الان باید از بین ۴ اسباب‌بازی ۲تا را انتخاب کنیم که به $\dbinom{4}{2}$ طریق امکان‌پذیر است. در نهایت ۲ اسباب‌بازی باقی ماند که باید به بچهٔ سوم داده شود؛ یعنی به $\dbinom{2}{2}$ حالت این کار هم انجام می‌شود. لذا طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالت‌ها $=\underset{\text{بچهٔ اول}}{\dbinom{6}{2}}\times\underset{\text{بچهٔ دوم}}{\dbinom{4}{2}}\times\underset{\text{بچهٔ سوم}}{\dbinom{2}{2}}=15\times 6\times 1=90$

۵۷- گزینهٔ ۱ تعداد حالت‌هایی که دو تیم را از بین ۸ تیم برای بازی رفت با هم می‌توان انتخاب کرد عبارت‌اند از:

$\dbinom{8}{2}=\dfrac{8!}{6!\times 2!}=\dfrac{\cancel{8}^{4}\times 7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}\times\cancel{2}}=28$

پس ۲۸ بازی در مرحلهٔ رفت انجام می‌شود. از طرفی می‌دانیم تعداد بازی‌ها در مرحلهٔ برگشت با مرحلهٔ رفت مساوی است پس در مرحلهٔ برگشت هم ۲۸ بازی انجام می‌شود و در کل $56=28+28$ بازی صورت می‌گیرد.

۵۸- گزینهٔ ۴ باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم چون بعد از انتخاب افراد موردنظر، جابه‌جایی آن‌ها با هم هیچ تأثیری ندارد و گروه جدیدی ایجاد نمی‌کند:

تعداد حالت‌ها $=\underset{\text{انتخاب ۲ نفر از بین ۱۱ کودک و جوان}}{\dbinom{11}{2}}\overset{\text{و}}{\times}\underset{\text{انتخاب ۳ نفر از بین ۵ نوجوان}}{\dbinom{5}{3}}$

$+\underset{\text{انتخاب ۴ نفر از بین ۵ نوجوان}}{\dbinom{5}{4}}\overset{\text{و}}{\times}\underset{\text{انتخاب ۱ نفر از بین ۱۱ کودک و جوان}}{\dbinom{11}{1}}+\underset{\text{انتخاب ۵ نفر از بین ۵ نوجوان}}{\dbinom{5}{5}}$

$=\dfrac{5!}{2!\times 3!}\times\dfrac{11!}{9!\times 2!}+5\times 11+1$

$=\dfrac{5\times\cancel{4}^{2}\times\cancel{3!}}{\cancel{2}\times\cancel{3!}}\times\dfrac{11\times\cancel{10}^{5}\times\cancel{9!}}{\cancel{9!}\times\cancel{2}}+55+1=10\times 55+55+1=606$

۵۹- گزینهٔ ۴ پس از این‌که این ۶ نفر را انتخاب کنیم، جابه‌جایی آن‌ها با هم، گروه جدیدی ایجاد نمی‌کند. پس از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. حداکثر ۳ زن، یعنی ۳ زن یا ۲ زن یا ۱ زن یا هیچ زن. ولی اگر هیچ زنی انتخاب نشود، باید هر ۶ نفر مرد باشند که غیرممکن است (چون کلاً ۵ مرد وجود دارد).

تعداد حالت‌ها $=\underset{\text{۳ مرد و ۳ زن}}{\dbinom{4}{3}\times\dbinom{5}{3}}+\underset{\text{۴ مرد و ۲ زن}}{\dbinom{4}{2}\times\dbinom{5}{4}}+\underset{\text{۵ مرد و ۱ زن}}{\dbinom{4}{1}\times\dbinom{5}{5}}$

$=(4\times 10)+(6\times 5)+(4\times 1)=74$

۶۰- گزینهٔ ۲ ابتدا باید راننده را از بین ۳ نفر که مجاز به رانندگی هستند، انتخاب کنیم:

تعداد حالت‌ها برای انتخاب راننده $=\dbinom{3}{1}=3$

اکنون ۴ نفر دیگر باید به $4!$ طریق کنار هم بنشینند، لذا طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها $=3\times 4!=3\times 24=72$

۶۱- گزینهٔ ۲

نکته‌تستی تعداد جایگشت‌های n شخص، دور یک میز دایره‌ای برابر با $(n-1)!$ است؛ چون مکان نشستن نفر اول مهم نیست.

دو نفری که قرار است کنار هم قرار بگیرند (مثلاً A و B) را در یک بسته قرار می‌دهیم:

$\underset{\text{۱ شیء}}{\boxed{A\ ,\ B}}\ ,\ C\ ,\ D\ ,\ E\ ,\ F$

پس می‌توان فرض کرد ۵ نفر داریم که می‌خواهیم آن‌ها را دور یک میز گرد قرار دهیم. این کار به $(5-1)!$، یعنی $4!$ حالت امکان‌پذیر است. ولی خود A و B هم می‌توانند به $2!$ طریق با هم جابه‌جا شوند؛ لذا طبق اصل ضرب داریم:

تعداد کل حالت‌ها: $2!\times 4!=2\times 24=48$

۶۲- گزینهٔ ۲ دو انتخاب اجباری وجود دارد، پس خواهیم داشت:

تعداد حالت‌های پاسخگویی $=\dbinom{8-2}{5-2}=\dbinom{6}{3}=\dfrac{6!}{3!\times 3!}=20$

۶۳- **گزینهٔ ۲** با یک انتخاب اجباری مواجهایم چون می‌خواهیم عدد ۹ حتماً انتخاب شود لذا خواهیم داشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب}=\binom{۵-۱}{۴-۱}=\binom{۴}{۳}=۴$$

در درس‌نامه گفتیم که: $\binom{n}{n-۱}=n$ مثلاً: $\binom{۹}{۸}=۹$ و $\binom{۱۱}{۱۰}=۱۱$

۶۴- **گزینهٔ ۱** عضو f را از مجموعهٔ A کنار می‌گذاریم که در این صورت ۶ عضو باقی می‌ماند عضو g قبلاً انتخاب شده، پس باید از بین ۵ عضو باقی‌مانده ۳ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۲}=۱۰$$

۶۵- **گزینهٔ ۲** رئیس گروه باید حسابدار باشد، پس باید از بین ۵ حسابدار انتخاب شود که تعداد حالت‌های آن $\binom{۵}{۱}$ می‌باشد، پس از انتخاب رئیس گروه، ۲ نفر بعدی را می‌توانیم از بین ۷ نفر (۴ حسابدار باقی‌مانده و ۳ تحویلدار) انتخاب کنیم، که تعداد حالت‌های آن $\binom{۷}{۲}$ است.

طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۲}=\frac{۵!}{۴!\times۱!}\times\frac{۷!}{۵!\times۲!}=۵\times۲۱=۱۰۵$$

۶۶- **گزینهٔ ۳** با یک انتخاب اجباری مواجهایم؛ یعنی از ۴ عضوی که می‌خواهیم انتخاب کنیم، ۲تا قبلاً انتخاب شده‌اند (اعضای ۶ و ۷)، پس حالا باید ۲ عضو باقی‌مانده را از بین اعضای $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۳!\times۲!}=\frac{۵\times۴\times\overset{۱}{\cancel{۳!}}}{\underset{۱}{\cancel{۳!}}\times۲}=۱۰$$

۶۷- **گزینهٔ ۴** می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی از یک مجموعهٔ nعضوی برابر با $\binom{n}{r}$ است، پس با توجه به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$\binom{n}{n-۲}=۵۵\xrightarrow[\text{گزینه‌ها}]{\text{امتحان‌کردن اعداد}}n=۱۱$$

فقط اگر $n=۱۱$ باشد، حاصل $\binom{n}{n-۲}$ برابر ۵۵ می‌شود، زیرا:

$$\binom{n}{n-۲}=\binom{۱۱}{۱۱-۲}=\binom{۱۱}{۹}=\frac{۱۱!}{۲!\times۹!}=\frac{۱۱\times۱۰\times\overset{۱}{\cancel{۹!}}}{۲\times\underset{۱}{\cancel{۹!}}}=۵۵$$

۶۸- **گزینهٔ ۲** الان مجبوریم معادلهٔ داده‌شده را حل کنیم، چون مقدار n خواسته‌نشده که از گزینه‌ها استفاده کنیم:

$$P(n,۲)-C(n,۲)=۳۶\Rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!}-\frac{n!}{(n-۲)!\times۲!}=۳۶$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}}-\frac{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{(n-۲)!}\times۲!}=۳۶$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۱}-\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶$$

$$\xrightarrow[\text{در ۲}]{\text{ضرب دو طرف}}۲n(n-۱)-n(n-۱)=۷۲$$

$$\Rightarrow\underbrace{n^۲-n-۷۲=۰}_{\text{تجزیه می‌کنیم}}\Rightarrow(n-۹)(n+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۹&(\text{ق‌ق})\\n=-۸&(\text{غ‌ق‌ق})\end{cases}$$

$$\Rightarrow C(n,۶)=C(۹,۶)=\frac{۹!}{۳!\times۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳\times۲\times۱\times۶!}=۸۴$$

۶۹- **گزینهٔ ۱** **روش اول** حل معمولی:

$$\frac{P(n,r)}{P(n+۱,r+۱)}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{(n+۱)!}{((n+۱)-(r+۱))!}}=\frac{\frac{n!}{\cancel{(n-r)!}}}{\frac{(n+۱)!}{\cancel{(n-r)!}}}$$

$$=\frac{n!}{\underset{\substack{\downarrow\\\text{یک مرحله}\\\text{بازش می‌کنیم}}}{(n+۱)!}}=\frac{\cancel{n!}}{(n+۱)\times\cancel{n!}}=\frac{۱}{n+۱}$$

روش دوم عددگذاری: r و n را دو عدد طبیعی دلخواه فرض می‌کنیم ولی توجه کنید که r کوچک‌تر از n باشد، مثلاً r را ۲ و n را ۳ فرض می‌کنیم:

$$\frac{P(n,r)}{P(n+۱,r+۱)}=\frac{P(۳,۲)}{P(۴,۳)}=\frac{\frac{۳!}{۱!}}{\frac{۴!}{۱!}}=\frac{۳!}{۴!}=\frac{۳!}{۴\times۳!}=\frac{۱}{۴}$$

حالا در گزینه‌ها نیز عددگذاری را انجام می‌دهیم تا به جواب $\frac{۱}{۴}$ برسیم:

همین گزینه درست است. $\frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۳+۱}=\frac{۱}{۴}$ (۱)

۷۰- **گزینهٔ ۲** می‌دانیم که:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\ \text{و}\ C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

حالا به کمک دو فرمول بالا عبارت‌های داده‌شده در متن معادله را باز می‌کنیم:

$$۲C(n,۵)=۳P(n-۱,۴)\Rightarrow۲\times\frac{n!}{(n-۵)!۵!}=۳\times\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۴)!}$$

$$\Rightarrow\frac{۲(n)\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۵)!}\,۵!}=\frac{۳\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۵)!}}\Rightarrow\frac{۲n}{۵!}=۳$$

$$\Rightarrow۲n=۳\times۵!\Rightarrow۲n=۳\times۱۲۰\Rightarrow n=\frac{۳\times\overset{۶۰}{\cancel{۱۲۰}}}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۸۰$$

$$\Rightarrow(n-۱۷۶)!=(۱۸۰-۱۷۶)!=۴!=۲۴$$

۷۱- **گزینهٔ ۲** دو حالت خواهیم داشت:

(۱) کلماتی که سه حرف آن‌ها متمایزند که تعدادشان برابر است با:

R,A,N,G,I

$$\boxed{۵}\,\boxed{۴}\,\boxed{۳}\Rightarrow۶۰$$

(۲) کلماتی که شامل ۲ حرف N هستند در این صورت ۱ حرف دیگر از بین ۴ حرف R، A، G و I انتخاب می‌شود. تعداد این کلمات برابر است با:

$$\binom{۴}{۱}\times\frac{۳!}{۲!}=۴\times۳=۱۲\Rightarrow\text{تعداد کل کلمات مطلوب}=۶۰+۱۲=۷۲$$

۷۲- **گزینهٔ ۱** دو حرف M و N به همراه ۳ حرف دیگر، کلمات ۵حرفی تشکیل می‌دهند که تعداد آن‌ها برابر !۵ است. از طرفی ۳ حرفی که در مورد آن‌ها صحبت شد باید از بین ۴ حرف انتخاب شوند (A، S، U و R) که این کار به $\binom{۴}{۳}$ حالت مختلف انجام می‌گیرد. در نهایت طبق اصل ضرب به جواب خواهیم رسید:

$$\text{تعداد کلمات مطلوب}=۵!\times\binom{۴}{۳}=۱۲۰\times۴=۴۸۰$$

۷۳- گزینهٔ ۳ باید ۳ حالت مختلف در نظر بگیریم:

۱ حروف تکراری نداشته باشیم:

$$\begin{array}{ccc} \text{S,E,R,H,T} & & \text{S,E,R,}\cancel{\text{H}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{۵} & \boxed{۴} & \boxed{۳} \\ & \downarrow & \\ & \text{S,E,R,H,}\cancel{\text{T}} & \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات} = ۶۰$$

۲ حرف S دو بار تکرار شود:

$$\text{تعداد کلمات} = \underset{}{\overset{\text{حروف E,R,H,T}}{\binom{۴}{۱}}} \times \frac{۳!}{۲!} = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

۳ حرف E دو بار تکرار شود:

$$\text{تعداد کلمات} = \overset{\text{S,R,H,T}}{\binom{۴}{۱}} \times \frac{۳!}{۲!} = ۱۲$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل کلمات مطلوب} = ۶۰ + ۱۲ + ۱۲ = ۸۴$$

۷۴- گزینهٔ ۳ ۳ حرف S انتخاب شده‌اند، پس ۲ حرف دیگر از بین حروف E، N، I، U، B انتخاب می‌شوند، لذا خواهیم داشت:

$$\text{تعداد کلمات مطلوب} = \binom{۵}{۲} \times \frac{۵!}{۳!} = ۱۰ \times ۵ \times ۴ = ۲۰۰$$

شاید بپرسید کسر $\frac{۵!}{۳!}$ از کجا آمده؟ جواب این است که می‌خواهیم کلمات ۵ حرفی بسازیم پس تعداد آن‌ها برابر !۵ است ولی ۳ حرف تکراری وجود داد (حرف S سه بار تکرار شده) پس باید !۵ را بر !۳ تقسیم کنیم.

۷۵- گزینهٔ ۲ می‌دانید که جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد. ضمناً از ۱ تا ۲۰ تعداد اعداد فرد برابر ۱۰ و تعداد اعداد زوج هم برابر ۱۰ می‌باشد، لذا:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \overset{\text{زوج}}{\binom{۱۰}{۱}} \times \overset{\text{فرد}}{\binom{۱۰}{۱}} = ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$$

۷۶- گزینهٔ ۴ می‌دانیم هر مثلث با داشتن ۳ رأس و هر چهار ضلعی با داشتن ۴ رأس آن ساخته می‌شود، لذا داریم:

$$\text{تعداد مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها} = \overset{\text{مثلث بالای وتر}}{\binom{۷}{۳}} \underset{\text{چهارضلعی زیر وتر}}{\binom{۵}{۴}} + \overset{\text{مثلث زیر وتر}}{\binom{۵}{۳}} \underset{\text{چهارضلعی بالای وتر}}{\binom{۷}{۴}} = ۳۵ \times ۵ + ۱۰ \times ۳۵ = ۵۲۵$$

۷۷- گزینهٔ ۳ ابتدا باید ۳ مدرسه از ۵ مدرسه را انتخاب کنیم. چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست، از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم. لذا تعداد حالت‌های این مرحله برابر $\binom{۵}{۳}$ است. حال باید از هر یک از مدارس انتخاب‌شده، فقط ۱ نفر را انتخاب کنیم که برابر می‌شود با $\binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۱}$ پس طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\text{تعداد انتخاب‌ها} = \underset{\text{انتخاب مدارس}}{\binom{۵}{۳}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب دانش‌آموزان}} = ۱۰ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴۰$$