فهرست

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

چرا می‌گوییم عدد ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است اما عدد ۵ بر ۲ بخش‌پذیر نیست؟ پاسخ ساده است، چون $\frac{۶}{۳}$ برابر ۲ است که عددی صحیح است ولی $\frac{۵}{۲}$ برابر ۲/۵ است که صحیح نیست. بنابراین می‌توانیم بگوییم اگر کسر $\frac{a}{b}$ عددی صحیح شود a بر b بخش‌پذیر است. یعنی اگر داشته باشیم $\frac{a}{b}=q$ $(q\in\mathbb{Z})$ می‌توانیم بگوییم a بر b بخش‌پذیر است. اما در تعریف بخش‌پذیری، این رابطه به دلایلی طرفین‌وسطین می‌شود.

یعنی:

عدد a را بر b بخش‌پذیر می‌گویند هرگاه $a=bq$.

قبل از این‌که بحث را ادامه دهیم یک چیز مهمی که باید دربارهٔ عدد بگوییم این است که منظور از عدد در بخش نظریهٔ اعداد، عددهای صحیح است. مثلاً نمی‌توانیم بگوییم $\sqrt{۶}$ بر $\sqrt{۲}$ بخش‌پذیر است.

اما گفتیم هرگاه $a=bq$ یعنی a بر b بخش‌پذیر است.

برای مثال از تساوی $۲\times۵=۱۰$ می‌توان نتیجه گرفت ۱۰ بر ۲ بخش‌پذیر است و هم‌چنین ۱۰ بر ۵ نیز بخش‌پذیر است. حالا یک مفهومی وجود دارد که تقریباً برعکس مفهوم بخش‌پذیری است. یعنی وقتی می‌گوییم ۱۰ بر ۵ بخش‌پذیر است، می‌توانیم بگوییم ۵ می‌شمارد یا عاد می‌کند ۱۰ را.

به طور کلی وقتی داریم $a=bq$، می‌توانیم بگوییم a بر b بخش‌پذیر است و b می‌شمارد a را.

b می‌شمارد یا عاد می‌کند a را، هرگاه داشته باشیم $a=bq$ و می‌نویسیم: $b\,|\,a$
$$b\,|\,a \Leftrightarrow a=bq$$

خُب! خوب است حالا یک ذره از این مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن سؤال حل کنیم تا راحت‌تر جا بیفتد.

- هر یک از رابطه‌های $۱۵\,|\,x$ و $x\,|\,۹۰$ به ازای چند عدد طبیعی دورقمی برقرار است؟ به ازای چند عدد طبیعی دورقمی هر دو رابطه برقرار است؟

$۱۵\,|\,x$ دقیقاً یعنی چی؟ یک کمی قبل دیدیم که رابطهٔ عادکردن، یک تساوی معادل داشت، یعنی با توجه به رابطهٔ: $b\,|\,a \Leftrightarrow a=bq$ می‌توان نوشت: $۱۵\,|\,x \Rightarrow x=۱۵q$

خب حالا قرار است x یک عدد طبیعی دورقمی باشد، پس: $۱۰\le ۱۵q\le ۹۹ \Rightarrow \frac{۱۰}{۱۵}\le q\le\frac{۹۹}{۱۵} \Rightarrow q=۱,۲,۳,۴,۵,۶$

پس رابطه به ازای ۶ عدد برقرار است. اگر بخواهیم این عددها را پیدا کنیم، کافی است جای q مقادیر بالا را قرار دهیم. در این صورت:

$x=۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,۷۵,۹۰$

همان‌طور که می‌بینید، این‌ها مضارب ۱۵ هستند، به بیان دیگر رابطهٔ $۱۵\,|\,x$ یعنی این‌که x بر ۱۵ بخش‌پذیر است یا این‌که «x یک مضرب ۱۵» است.

اما برسیم به رابطهٔ $x\,|\,۹۰$.

این‌جا xهایی به درد ما می‌خورد که ۹۰ بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد، خب ۹۰ به چه عددهای دورقمی بخش‌پذیر است؟ ۹۰، ۴۵، ۳۰، ۱۸، ۱۵، ۱۰ این عددها در حقیقت مقسوم‌علیه‌های طبیعی دورقمی ۹۰ هستند.

اگر بخواهیم x عددی باشد که در هر دو رابطهٔ $x \mid 15$ و $x \mid 90$ صدق کند، یعنی از یک طرف x باید مضرب ۱۵ باشد و از طرف دیگر باید x یک شمارنده یا مقسوم‌علیه ۹۰ باشد.

در این حالت عددهای قابل قبول که همان اشتراک دو حالت قبلی هستند، عبارت‌اند از ۹۰، ۴۵، ۳۰ و ۱۵.

اگر داشته باشیم $a \mid x$ یعنی x مضرب a است. یا به عبارت دیگر x بر a بخش‌پذیر است.

اگر داشته باشیم $x \mid a$ یعنی x شمارنده یا مقسوم‌علیه a است یا به عبارت دیگر a بر x بخش‌پذیر است.

تست اگر a عددی طبیعی باشد رابطهٔ $a+1 \mid a^2-1$ .... رابطهٔ $a+1 \mid a^2+3a+2$ ....

۱) همواره برقرار است و ـ نیز همواره برقرار است.

۲) همواره برقرار است ولی ـ به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست.

۳) به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست ولی ـ همواره برقرار است.

۴) به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست و ـ نیز به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست.

پاسخ گزینهٔ۲ دیدیم که رابطهٔ $a \mid b$ زمانی برقرار است که عدد صحیحی مثل q پیدا شود به طوری که $a = bq$. حالا با توجه به این‌که $a^2-1=(a-1)(a+1)$. الان ضرب دو عدد $(a-1)$ و $(a+1)$ شده a^2-1 پس می‌توان نتیجه گرفت $a-1 \mid a^2-1$ و $a+1 \mid a^2-1$.

پس رابطهٔ اول برقرار است.

اما با توجه به این‌که: $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$ می‌توان نتیجه گرفت $a+1 \mid a^2+3a+2$ و $a+2 \mid a^2+3a+2$. اما رابطهٔ $a^2+3a+2 \mid a+1$ به ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست. برای مثال اگر $a=1$ باشد باید $2 \mid 6$ که این رابطه نادرست است.

برای تشخیص این‌که یک رابطهٔ عادکردن درست است یا نه، یک کار ساده می‌شود کرد. کافی است رابطهٔ عادکردن را نود درجه خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید تا یک کسر به وجود آید. حالا اگر حاصل این کسر عددی صحیح شد، رابطه درست و اگر نشد رابطه درست نیست. برای مثال بیایید درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را بررسی کنیم:

الف) $18 \mid -6$ ب) $3^3 \mid 3^5$ پ) $0 \mid a^2+1$

خُب! با توجه به چیزی که گفتیم، هر یک از رابطه‌ها را به یک کسر تبدیل می‌کنیم.

الف) $\frac{18}{-6}=-3$ -3 عددی صحیح است پس رابطه درست است.

ب) $\frac{3^3}{3^5}=\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ عددی صحیح نیست، پس رابطه درست نیست.

پ) $\frac{0}{a^2+1}=0$ صفر عددی صحیح است، پس رابطه درست است.

تست چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که بر ۵۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

پاسخ گزینهٔ۲ با توجه به آن‌چه گفتیم اگر بر ۵۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی $55 \mid x$ داریم: $55 \mid x \Rightarrow x = 55q$

می‌خواهیم x سه‌رقمی باشد، بنابراین: $100 \le 55q < 1000 \Rightarrow 1/8 \le q < 18/1$

بنابراین q از ۲ تا ۱۸ می‌تواند تغییر کند. می‌دانیم تعداد عددهای بزرگ‌تر مساوی عدد a و کوچک‌تر مساوی عدد b برابر است با $b-a+1$. بنابراین:

$18-2+1=17$

اما یک جور دیگر هم می‌شود به این سؤال پاسخ داد که کمی کوتاه‌تر است. اما قبل از آن یک نکته:

به این سؤال ساده توجه کنید: ۳۰ سیب را بین ۷ نفر تقسیم می‌کنیم، به هر کدام چند سیب می‌رسد؟

نه! سرکارتان نگذاشته‌ام. یک هدفی دارم از این سؤال. جواب که ساده است: $\left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4$

نتیجه‌ای که می‌خواستم از این سؤال بگیرم این بود که:

تعداد مضارب طبیعی عدد a که کوچک‌تر مساوی عدد n است برابر است با: $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$

حالا در سؤال قبل می‌خواستیم مضارب سه‌رقمی عدد ۵۵ را حساب کنیم. برای این کار کافی است مضارب ۵۵ را در فاصلهٔ ۱ تا ۹۹۹ حساب کنیم ولی چون فقط مضارب سه‌رقمی ۵۵ را می‌خواهیم پیدا کنیم باید آن قسمتی را که زیادی حساب کرده‌ایم، کم کنیم. یعنی:

$\boxed{1,2,3,\dots,99,\boxed{100,101,\dots,999}}$

$$\left\lfloor \frac{999}{55} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{55} \right\rfloor = 18-1=17$$

بگذارید، این کار را کمی تمرین کنیم.

مثال هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارد؟

الف) $\{x \in \mathbb{N} : ۷ | x , ۲۱۰ < x < ۶۳۰\}$

ب) $\{x \in \mathbb{N} : ۸ | x , ۳۲۰ \le x < ۸۰۰\}$

پ) $\{x \in \mathbb{N} : ۹ | x , ۵۴۰ < x \le ۹۹۰\}$

ت) $\{x \in \mathbb{N} : ۱۱ | x , ۲۲۰ \le x \le ۱۰۰۱\}$

حل الف) بازهٔ $۲۱۰ < x < ۶۳۰$ است. یعنی: ۲۱۱,۲۱۲,...,۶۲۹. برای پیداکردن مضارب ۷ در این فاصله یک بار مضارب طبیعی ۱ تا ۶۲۹ را پیدا می‌کنیم سپس مضارب ۷ را در قسمتی که زیادی حساب کرده‌ایم، کم می‌کنیم. یعنی:

۱,۲,...,۲۱۰, ۲۱۱,۲۱۲,...,۶۲۹

$$\left[\frac{۶۲۹}{۷}\right] - \left[\frac{۲۱۰}{۷}\right] = ۸۹ - ۳۰ = ۵۹$$

ب) با توجه به این‌که $۳۲۰ \le x < ۸۰۰$ بازهٔ موردنظر ما ۳۲۰,۳۲۱,...,۷۹۹ است. بنابراین:

۱,۲,...,۳۱۸,۳۱۹, ۳۲۰,۳۲۱,...,۷۹۹

$$\left[\frac{۷۹۹}{۸}\right] - \left[\frac{۳۱۹}{۸}\right] = ۹۹ - ۳۹ = ۶۰$$

دقت کنید که ما می‌خواهیم مضارب ۸ را از ۳۲۰ تا ۷۹۹ حساب کنیم. بنابراین خود ۳۲۰ را باید جزء اعدادی که می‌خواهیم حساب کنیم. یعنی مضارب ۸ را در ۳۱۹ عدد اول حذف کنیم.

پ) بازهٔ موردنظر $۵۴۰ < x \le ۹۹۰$ است، یعنی ما مضارب ۹ را در بازهٔ ۵۴۱,...,۹۹۰ می‌خواهیم. همانند آن‌چه در قسمت‌های قبل انجام دادیم، داریم:

۱,۲,...,۵۴۰, ۵۴۱,...,۹۹۰

$$\left[\frac{۹۹۰}{۹}\right] - \left[\frac{۵۴۰}{۹}\right] = ۱۱۰ - ۶۰ = ۵۰$$

دقت کنید که اگر یک عدد جابه‌جا در براکت‌ها قرار دهیم جوابمان غلط می‌شود. بنابراین خیلی مهم است که حدود این بازه‌ای را که می‌خواهیم درست تشخیص دهیم.

ت) در این قسمت $۲۲۰ \le x \le ۱۰۰۱$ است. یعنی باید مضارب ۱۱ را از ۲۲۰ تا ۱۰۰۱ حساب کنیم و حواستان باشد که خود دو عدد ۲۲۰ و ۱۰۰۱ را هم باید حساب کنیم. چون هر دوشان مضرب ۱۱ هستند. یعنی یک بار مضارب ۱۱ را از یک تا ۱۰۰۱ حساب می‌کنیم و بعد مضارب ۱۱ را در آن بخشی که نمی‌خواهیم یعنی ۱ تا ۲۱۹ کم می‌کنیم.

۱,...,۲۱۹, ۲۲۰,۲۲۱,...,۱۰۰۱

$$\left[\frac{۱۰۰۱}{۱۱}\right] - \left[\frac{۲۱۹}{۱۱}\right] = ۹۱ - ۱۹ = ۷۲$$

در این مدل سؤال‌ها اگر خیلی علاقه‌مند به فرمول هستید، یک پیشنهادی برای شما دارم. اول با توجه به حدود x بازه را مشخص کنید. برای مثال دیدیم که در قسمت (پ)، $۲۲۰ \le x \le ۱۰۰۱$ است. یعنی بازهٔ موردنظر ۲۲۰,۲۲۱,...,۱۰۰۱ است.

حالا آخرین عدد قابل قبول که این‌جا ۱۰۰۱ است را بگذارید در صورت جزءصحیح اول و از اولین عدد قابل قبول بازه که ۲۲۰ است یکی کم کنید و بگذارید صورت جزءصحیح دوم.

$$\text{در حالت کلی:} \left[\frac{\text{آخرین عدد بازه}}{n}\right] - \left[\frac{\text{اولین عدد بازه منهای یک}}{n}\right]$$

۱) قبل از این‌که برسیم به ویژگی‌های بخش‌پذیری، بد نیست به چند مثال دیگر از مفهوم بخش‌پذیری و رابطهٔ عادکردن توجه کنیم.

تست به ازای چند عدد صحیح مانند x هر دو رابطهٔ $۱۲ | x$ و $x | ۲۴۰$ برقرار است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ گزینهٔ ۱ از رابطهٔ $۱۲ | x$ می‌فهمیم که x مضرب ۱۲ است، یعنی می‌توانیم هر عددی که بر ۱۲ بخش‌پذیر است را به جای x قرار دهیم، عددهایی مثل $۰, \pm ۱۲, \pm ۲۴, \pm ۳۶, ...$ اما آیا ما همهٔ این عددها را می‌خواهیم؟ نه، فقط آن دسته از عددها را می‌خواهیم که در رابطهٔ $x | ۲۴۰$ نیز صدق کند.

حالا یا باید یکی‌یکی این مضارب ۱۲ را چک کنیم و ببینیم کدام آن‌ها شمارندهٔ ۲۴۰ هم هست یا نه (که البته واضح است راه خوبی نیست.) یا این‌که:

$$۱۲ | x \Rightarrow x = ۱۲q$$

حالا x را در رابطهٔ $x | ۲۴۰$ جایگزین می‌کنیم:

$$۱۲q | ۲۴۰ \Rightarrow q | ۲۰$$

خب، کار ساده‌تر شد. کافی است مقسوم‌علیه‌های ۲۰ را پیدا کنیم. ۲۰ بر چه عددهایی بخش‌پذیر است؟

$$\pm ۱, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۵, \pm ۱۰, \pm ۲۰$$

یعنی به ازای ۱۲ عدد این رابطه برقرار است.

تست به ازای چند عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ و کوچک‌تر از ۲۰ مانند x، رابطهٔ $x \mid 10!$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ می‌دانیم $10! = 10\times9\times8\times\cdots\times3\times2\times1$ اگر رابطهٔ $x \mid 10!$ را به صورت کسر نشان دهیم این‌طوری می‌شود:

$$\frac{10!}{x} = \frac{10\times9\times\cdots\times2\times1}{x}$$

یکی‌یکی عددها را بررسی می‌کنیم. مشخص است که اگر جای x عدد ۱۱ را قرار دهیم، کسر ساده نمی‌شود، چون ۱۱ را با هیچ چیزی نمی‌شود ساده کرد. اما اگر جای x عدد ۱۲ را قرار دهیم با توجه به این‌که $12 = 6\times2$ کسر ساده می‌شود، یعنی $12 \mid 10!$ به همین ترتیب $10!$ بر عددهای زیر نیز بخش‌پذیر است.

$18 = 9\times2$ $16 = 8\times2$ $15 = 5\times3$ $14 = 7\times2$

تست کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $715 \mid n!$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

پاسخ گزینهٔ ۲ کلید پاسخ‌دادن به این سؤال این است که ۷۱۵ را تجزیه کنیم:

$$715 = 5\times11\times13$$

حالا اگر رابطهٔ $715 \mid n!$ را به صورت یک کسر بنویسیم، داریم:

$$\frac{n!}{715} = \frac{n!}{5\times11\times13}$$

خب حالا باید کوچک‌ترین عدد فاکتوریلی را پیدا کنیم که هر سه عدد ۵، ۱۱ و ۱۳ را در تجزیه‌اش داشته باشد. به نظر شما اگر جای n عدد $11!$ را قرار دهیم رابطه درست می‌شود؟ معلوم است که نه، چون ۱۳ توی مخرج باقی می‌ماند. اما اگر $n = 13$ باشد $13!$ هم عامل ۵ دارد، هم عامل ۱۱ دارد و هم عامل ۱۳، بنابراین پاسخ سؤال $13!$ است که مجموع ارقام عدد ۱۳ برابر است با $1+3=4$.

ویژگی‌های بخش‌پذیری

رابطهٔ $6 \mid 12$ را در نظر بگیرید. کسر معادل این رابطهٔ $\frac{12}{6}$ است که عددی صحیح است. می‌دانیم اگر یک عدد صحیح را در یک عدد صحیح دیگر ضرب کنیم، حاصل عددی صحیح می‌شود. برای مثال $\frac{12}{6}\times5 = 10$ که عددی صحیح است. حالا اگر همین را به صورت یک رابطهٔ عادکردن نشان دهیم، این‌طوری می‌شود:

$$6 \mid 12 \xrightarrow{\text{سمت راست}\times5} 6 \mid 60$$

در حالت کلی می‌شود گفت سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. یعنی:

$$\boxed{a \mid b \Rightarrow a \mid mb}$$

اما سمت چپ را چه‌طور؟ آیا سمت چپ رابطهٔ عادکردن را هم می‌شود در هر عددی ضرب کنیم؟ پاسخ منفی است.

برای مثال به همین رابطهٔ $6 \mid 12$ نگاه کنید، اگر سمت چپ آن را در ۵ ضرب کنیم به رابطهٔ $30 \mid 12$ می‌رسیم که نادرست است. اما با سمت چپ رابطهٔ عادکردن چه کار می‌توانیم بکنیم؟ فرض کنید $15 \mid x$ این یعنی این‌که x یک عددی است که بر ۱۵ بخش‌پذیر است. مثل ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ... .

خُب مشخص است عددهایی که بر ۱۵ بخش‌پذیرند همگی بر ۵ هم بخش‌پذیرند. همین‌طور همه‌شان بر ۳ نیز بخش‌پذیرند. بنابراین از $15 \mid x$ می‌توان نتیجه گرفت $5 \mid x$ و $3 \mid x$. به بیان دیگر سمت چپ رابطهٔ عادکردن را می‌توانیم به مقسوم‌علیه‌های عدد داده‌شده تقسیم کنیم و آب هم از آب تکان نخورد.

$$a \mid b \Rightarrow \text{هر یک از مقسوم‌علیه‌های } a \mid b$$

البته یک‌جور دیگری هم می‌توانیم این را به زبان ریاضی نشان دهیم که کمی شیک‌تر است:

$$\boxed{ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}}$$

پس به عنوان یک نتیجه‌گیری کلی یادتان باشد، وقتی یک رابطهٔ عادکردن دارید، سمت راست آن را در هر عددی (البته می‌دانید که منظورمان عدد صحیح است) دلتان می‌خواهد ضرب کنید و سمت چپ آن را به شمارنده‌هایش تقسیم کنید.

تست از رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a^2 \mid b^3$ ۲) $2a^2 \mid b^4$ ۳) $a^2 \mid b^6$ ۴) $a \mid b$

پاسخ گزینهٔ ۴ ۱) درست است. زیرا گفتیم می‌توانیم سمت چپ را به شمارنده‌های عدد تقسیم کنیم. این‌جا نیز سمت چپ رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ را به ۲ تقسیم کرده‌ایم. در ۲) سمت راست رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ را در b ضرب کرده‌ایم که با توجه به این‌که دیدیم می‌شود سمت راست یک رابطهٔ عادکردن را در هر عددی ضرب کرد پس این رابطه نیز درست است. در ۳) هر دو کار با هم انجام شده. یعنی هم سمت چپ رابطهٔ $2a^2 \mid b^3$ تقسیم بر ۲ شده و هم سمت راست آن در b^3 ضرب شده.

اما ۴ همیشه درست نیست. برای مثال اگر $b=۸$ و $a=۱۶$ باشد. $b^۳=۵۱۲$ و $۲a^۲=۵۱۲$ یعنی $۲a^۲ \mid b^۳$ اما $a \nmid b$.

می‌دانیم اگر $\frac{a}{b}$ عددی صحیح باشد $(\frac{a}{b})^n$ نیز عددی صحیح است، هم‌چنین اگر $(\frac{a}{b})^n$ عددی صحیح باشد $\frac{a}{b}$ نیز صحیح است. (با برهان خلف می‌توان ثابت کرد.) بنابراین:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n \\ a^n \mid b^n \Rightarrow a \mid b \end{array}}$$

مثال ثابت کنید اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a^۴ \mid b^۷$، آن‌گاه $a^۵ \mid b^۹$.

حل

$$a^۴ \mid b^۷ \xrightarrow{\text{به توان ۵}} a^{۲۰} \mid b^{۳۵} \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b} a^{۲۰} \mid b^{۳۶}$$

$$(a^۵)^۴ \mid (b^۹)^۴ \xrightarrow{\text{ریشهٔ چهارم می‌گیریم}} a^۵ \mid b^۹$$

تست از رابطهٔ $x^۳ \mid y^۵$ کدام رابطه نتیجه می‌شود؟

۱) $x^۵ \mid y^۸$ ۲) $x^۷ \mid y^{۱۱}$ ۳) $x^۸ \mid y^{۱۳}$ ۴) $x^{۱۰} \mid y^{۱۷}$

پاسخ گزینهٔ ۴ برای جواب‌دادن به این مدل تست‌ها یا باید مثل سؤال قبلی تلاش کرد یکی‌یکی گزینه‌ها را ثابت کنید یا با مثال نقض رد کنید. اما یک راه ساده‌تری هم وجود دارد که بد نیست یاد بگیرید. در این مدل سؤال‌ها سعی کنید دو طرف رابطهٔ داده‌شده را یکسان کنید. یعنی چه‌جوری؟ برای مثال در این سؤال داریم $x^۳ \mid y^۵$ ساده‌ترین راه برابرکردن دو طرف، این است که x و y را هر دو برابر یک فرض کنیم. که البته فایده‌ای ندارد چون به ازای $x=۱$ و $y=۱$ همهٔ گزینه‌ها درست می‌شوند.

اما اگر بخواهیم دو طرف با هم برابر باشند می‌شود یک کاری کرد، x و y را به صورت یک عدد توان‌دار با یک پایهٔ دلخواه فرض می‌کنیم (برای سادگی کار می‌شود پایه را ۲ گرفت) و توان‌ها را جابه‌جا می‌کنیم. یعنی در این‌جا چون توان x سه است y را برابر $۲^۳$ و چون توان y پنج است x را برابر $۲^۵$ می‌گیریم

$x=۲^۵ \ , \ y=۲^۳$

با این کار $x^۳=(۲^۵)^۳=۲^{۱۵}$ و $y^۵=(۲^۳)^۵=۲^{۱۵}$. حالا با این عددها گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

۱ $x^۵ \mid y^۸ \Rightarrow (۲^۵)^۵ \mid (۲^۳)^۸ \Rightarrow ۲^{۲۵} \nmid ۲^{۲۴}$

۲ $x^۷ \mid y^{۱۱} \Rightarrow (۲^۵)^۷ \mid (۲^۳)^{۱۱} \Rightarrow ۲^{۳۵} \nmid ۲^{۳۳}$

۳ $x^۸ \mid y^{۱۳} \Rightarrow (۲^۵)^۸ \mid (۲^۳)^{۱۳} \Rightarrow ۲^{۴۰} \nmid ۲^{۳۹}$

۴ $x^{۱۰} \mid y^{۱۷} \Rightarrow (۲^۵)^{۱۰} \mid (۲^۳)^{۱۷} \Rightarrow ۲^{۵۰} \mid ۲^{۵۱}$ ✓

برای اثبات ۴ می‌توانیم این کار را هم بکنیم:

$$x^۳ \mid y^۵ \xrightarrow{\text{به توان ۱۰}} x^{۳۰} \mid y^{۵۰} \xrightarrow{\text{سمت راست} \times y} x^{۳۰} \mid y^{۵۱} \Rightarrow (x^{۱۰})^۳ \mid (y^{۱۷})^۳ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x^{۱۰} \mid y^{۱۷}$$

چند ویژگی دیگر از رابطهٔ عادکردن:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \mid b \ , \ b \mid c \Rightarrow a \mid c \\ a \mid b \ , \ a \mid c \Rightarrow a \mid mb+nc \\ a \mid b \ , \ b \neq ۰ \Rightarrow |a| \leq |b| \end{array}}$$

اثبات این ویژگی‌ها ساده است و در کتاب درسی آمده است. برای مثال دومی را که به نظر سخت‌تر است ثابت می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b=aq \xrightarrow{\times m} mb=maq \\ a \mid c \Rightarrow c=aq' \xrightarrow{\times n} nc=naq' \end{cases} \xrightarrow{+} mb+nc=maq+naq' \Rightarrow \underbrace{mb+nc=a(mq+nq')}_{*} \Rightarrow a \mid mb+nc$$

(*) توجه کنید این‌جا از تعریف عادکردن استفاده کردیم. دیدیم که وقتی $۱۰=۲\times۵$ است، می‌شود نتیجه گرفت $۵ \mid ۱۰$. حالا هم ضرب دو عدد a و $mq+nq'$ شده $mb+nc$، پس می‌شود نتیجه گرفت $a \mid mb+nc$.

چند ویژگی دیگر از عادکردن هست که خوب است این‌ها را نیز با هم مرور کنیم:

همهٔ عددها بر ۱ و ۱− بخش‌پذیرند. $\pm۱ \mid a$

هر عددی بر خودش و قرینه‌اش بخش‌پذیر است. $\pm a \mid a$

صفر بر همهٔ عددها بخش‌پذیر است. $a \mid ۰$

تنها عددهایی که ۱ را می‌شمارند ۱ و ۱− اند. $a \mid ۱ \Rightarrow a=\pm۱$

هر عدد اول فقط بر خودش و قرینه‌اش و یک منهای یک بخش‌پذیر است. $a \mid p \Rightarrow a=\pm۱ , \pm p \Rightarrow$ عدد اول اوست p

در مورد رابطهٔ $۰|۰$ خوب است یک توضیحی بدهیم. در اول این درس گفتیم در تعریف رابطهٔ بخش‌پذیری زمانی می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است که $a=bq$ و رابطه را طرفین‌وسطین شده داده‌اند. علت این است که بتوانند با این تعریف ثابت کنند صفر بر خودش بخش‌پذیر است: $۰=۰\times q \Rightarrow ۰|۰$

حالا وقت آن است که چند سؤال از ویژگی‌های رابطهٔ عادکردن ببینیم.

تست **اگر $a>۱$ عدد طبیعی باشد و دو عدد $۸m+۳$ و $۷m+۵$ بر a بخش‌پذیر باشند، a کدام است؟**

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ گزینهٔ۴

$$a\,|\,۸m+۳$$
$$a\,|\,۷m+۵$$

برای حذف‌کردن m، سمت راست رابطهٔ بالایی را در ۷ و سمت راست رابطهٔ پایینی را در ۸ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$a\,|\,۸m+۳ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۷} a\,|\,۵۶m+۲۱$$
$$a\,|\,۷m+۵ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۸} a\,|\,۵۶m+۴۰$$

حالا از ویژگی $a\,|\,b, a\,|\,c \Rightarrow a\,|\,mb+nc$ استفاده می‌کنیم. سمت چپ هر دو رابطه یکسان است، می‌توانیم سمت راست‌ها را از هم کم کنیم.

$$\begin{cases} a\,|\,۵۶m+۲۱ \\ a\,|\,۵۶m+۴۰ \end{cases} \Rightarrow a\,|\,۱۹ \Rightarrow a=\pm ۱\,,\pm ۱۹$$

با توجه به این‌که $a>۱$ است پس a فقط می‌تواند ۱۹ باشد.

تست **به ازای چند عدد صحیح مانند x رابطهٔ $۳x+۱\,|\,۵x+۲$ برقرار است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ۱ دیدیم که هر عددی خودش را می‌شمارد، بنابراین $۳x+۱\,|\,۳x+۱$. از طرفی می‌خواهیم $۳x+۱\,|\,۵x+۲$، مثل بالا تلاش می‌کنیم جملهٔ xدار را در عبارت سمت راست حذف کنیم.

$$۳x+۱\,|\,۳x+۱ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۵} ۳x+۱\,|\,۱۵x+۵$$
$$۳x+۱\,|\,۵x+۲ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۳} ۳x+۱\,|\,۱۵x+۶$$
$$\xrightarrow{(-)} ۳x+۱\,|\,۱ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۱=۱ \Rightarrow x=۰ \\ ۳x+۱=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۲}{۳} \quad \text{غیرقابل‌قبول} \end{cases}$$

بنابراین رابطه فقط به ازای یک مقدار صحیح x برقرار است.

تست **بزرگ‌ترین مقدار x که به ازای آن رابطهٔ $x-۳\,|\,۵x^۲+۲$ برقرار است، چه مجموع ارقامی دارد؟**

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ۴ دوباره مثل سؤال قبل:

$$x-۳\,|\,x-۳$$
$$x-۳\,|\,۵x^۲+۲$$

دوباره برنامه این است که سمت راست‌ها را یک‌کاری کنیم تا برسیم به یک عدد (یعنی جملهٔ xدار را حذف کنیم). چند راه وجود دارد. اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که سمت راست رابطهٔ اولی را در ۵x ضرب کنیم.

$$x-۳\,|\,x-۳ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۵x} x-۳\,|\,۵x^۲-۱۵x$$

از طرفی $x-۳\,|\,۵x^۲+۲$، از این دو رابطه داریم:

$$\begin{matrix} x-۳\,|\,۵x^۲-۱۵x \\ x-۳\,|\,۵x^۲+۲ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} x-۳\,|\,۱۵x+۲$$

خب تا این‌جا جملهٔ $x^۲$دار را از سمت راست تساوی حذف کردیم حالا جملهٔ xدار را حذف می‌کنیم:

$$x-۳\,|\,x-۳ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۱۵} x-۳\,|\,۱۵x-۴۵$$
$$x-۳\,|\,۱۵x+۲ \qquad x-۳\,|\,۱۵x+۲$$
$$\xrightarrow{(-)} x-۳\,|\,۴۷$$

چون بزرگ‌ترین مقدار x را می‌خواهیم:

$$x-۳=۴۷ \Rightarrow x=۵۰$$

اما یک جور سریع‌تری و در یک مرحله هم می‌شد همان اول کار $۵x^۲$ را حذف کرد. نگاه کنید:

$$x-۳\,|\,x-۳ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۵(x+۳)} x-۳\,|\,۵(x^۲-۹)$$

از طرفی:

$$\begin{matrix} x-۳\,|\,۵x^۲-۴۵ \\ x-۳\,|\,۵x^۲+۲ \end{matrix} \Rightarrow x-۳\,|\,۴۷$$

ولی یک نکتهٔ تستی هم بد نیست یاد بگیرید. در این مدل سؤال‌ها اگر ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار دهیم، سؤال خیلی سریع و ساده‌تر حل می‌شود.

$$x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \xrightarrow{\text{۳ را در عبارت سمت‌راست قرار می‌دهیم}} ۵\times(۳)^۲+۲=۴۷$$

این همان عددی است که عبارت سمت چپ آن را می‌شمارد. یعنی:

$$x-۳\,|\,۴۷ \Rightarrow x-۳=۴۷ \Rightarrow x=۵۰$$

برای پیداکردن مقادیر صحیح x در رابطهٔ مثل $x-a \mid f(x)$ کافی است ریشهٔ عبارت سمت چپ یعنی a را در عبارت سمت راست قرار دهیم و به رابطهٔ $x-a \mid f(a)$ برسیم.

مثال **ثابت کنید بزرگ‌ترین مقدار x که در رابطهٔ $۴x+۳ \mid ۳x^۲+۱$ صدق می‌کند عدد ۱۰ است.**

حل خب این یکی به نظر سؤال سخت‌تری است. دو رابطه را می‌نویسیم: $۴x+۳ \mid ۴x+۳$ هر عددی خودش را می‌شمارد

$$۴x+۳ \mid ۳x^۲+۱$$

باید متغیر را در عبارت سمت راست حذف کنیم تا به یک عدد برسیم. در عبارت پایینی جملهٔ xدار وجود ندارد و فقط یک $۳x^۲$ داریم. بنابراین اگر عبارت بالا را در مزدوجش ضرب کنیم، آن‌جا هم جملهٔ xدار به وجود نمی‌آید.

$$۴x+۳ \mid ۴x+۳ \xrightarrow{\times(۴x-۳)} ۴x+۳ \mid ۱۶x^۲-۹$$

حالا ضرایب را برابر می‌کنیم تا بتوانیم از هم کم کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۴x+۳ \mid ۱۶x^۲-۹ \xrightarrow{\times ۳} ۴x+۳ \mid ۴۸x^۲-۲۷ \\ ۴x+۳ \mid ۳x^۲+۱ \xrightarrow{\times ۱۶} ۴x+۳ \mid ۴۸x^۲+۱۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} ۴x+۳ \mid ۴۳$$

چون بیشترین مقدار را می‌خواهیم:

$$۴x+۳=۴۳ \Rightarrow ۴x=۴۰ \Rightarrow x=۱۰$$

یک چیزی هم بد نیست یواشکی یادتان بدهم (البته مثال نقض هم دارد ولی خیلی جاها هم کار می‌کند). در این مدل سؤال‌ها هم می‌شود ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داد. فقط چون ریشه کسری است وقتی آن را در عبارت سمت راست قرار می‌دهید باید مخرج‌مشترک بگیرید و صورت کسر را به دست بیاورید. عبارت سمت چپ، صورت کسر عبارت سمت راست را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال: $۴x+۳=۰ \Rightarrow x=-\frac{۳}{۴}$

$-\frac{۳}{۴}$ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم: $(-\frac{۳}{۴})^۲ \times ۳+۱=\frac{۲۷}{۱۶}+۱=\frac{۴۳}{۱۶}$

همان‌طور که می‌بینید صورت کسر عدد ۴۳ است. عبارت سمت چپ ۴۳ را می‌شمارد، بنابراین $۴x+۳ \mid ۴۳$ و بقیه‌اش هم مثل بالا.

تست **چند نقطه روی منحنی به مختصات $yx=y+۲x+۱$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ x و y در آن عددهایی طبیعی باشند؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ **گزینهٔ۳** ابتدا y را برحسب x به دست می‌آوریم:

$$yx=y+۲x+۱ \Rightarrow yx-y=۲x+۱ \Rightarrow y(x-۱)=۲x+۱ \Rightarrow y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$$

اگر قرار باشد y عددی طبیعی باشد، یعنی کسر $\frac{۲x+۱}{x-۱}$ باید عددی طبیعی باشد و یک کسر زمانی عددی صحیح است که صورتش بر مخرجش بخش‌پذیر باشد یا به بیان دیگر مخرجش صورتش را بشمارد. پس: $x-۱ \mid ۲x+۱$

مقادیر x را از این رابطه پیدا می‌کنیم:

$$x-۱ \mid x-۱ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times ۲} \left.\begin{array}{l} x-۱ \mid ۲x-۲ \\ x-۱ \mid ۲x+۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} x-۱ \mid ۳$$

$$\Rightarrow x-۱=۱ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=\frac{۵}{۱}=۵ \quad ✓$$

$x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰$ طبیعی نیست.

$$x-۱=۳ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow y=\frac{۹}{۳}=۳ \quad ✓$$

$x-۱=-۳ \Rightarrow x=-۲$ طبیعی نیست.

پس دو نقطهٔ $\begin{vmatrix} ۲ \\ ۵ \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} ۳ \\ ۳ \end{vmatrix}$ روی این منحنی‌اند و در آن x و y هر دو عددهایی طبیعی‌اند.

تست **به ازای چند عدد صحیح رابطهٔ $۵x+۱ \mid x^۳+۲$ برقرار است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ۲** خب! این سؤال با سؤال‌های قبلی فرق دارد. همین‌طور که می‌بینید عبارت سمت چپ یک چندجمله‌ای درجهٔ۳ است. یک راه پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها مثل سؤال‌های قبل حذف‌کردن جملات xدار و رسیدن به یک عدد است، اما راه ساده‌تری هم برای جواب‌دادن به این سؤال‌ها وجود دارد. واضح است که رشد عبارت $x^۳+۲$ از $۵x+۱$ سریع‌تر است. یعنی به ازای عددهای کوچک مثل صفر، $۱, ۲, -۱, \ldots$ ممکن است قدرمطلق $۵x+۱$ بزرگ‌تر از $|x^۳+۲|$ باشد. اما وقتی $|x|$ بزرگ باشد قطعاً $|۵x+۱|$ از $|x^۳+۲|$ کم‌تر خواهد بود. پس فقط کافی است درستی این رابطه را به ازای عددهای کوچک چک کنیم.

$x=۰ \Rightarrow ۲ \mid ۱$ نادرست است.

$$x=۱ \Rightarrow ۳ \mid ۶ \quad ✓$$

$x=۲ \Rightarrow ۱۰ \mid ۱۱$ نادرست است.

و مشخص است به ازای $x \geq ۳$ حتماً $x^۳ + ۲$ بزرگ‌تر از $۵x + ۱$ است و رابطه نادرست خواهد بود. حالا در عددهای منفی بررسی می‌کنیم:

$x = -۱ \Rightarrow ۱ \mid -۴$ ✓

$x = -۲ \Rightarrow -۶ \mid -۹$ نادرست است.

و به ازای $x \leq -۳$ نیز مشخص است که $|۵x+۱|$ کوچک‌تر از $|x^۳+۲|$ است و رابطه برقرار نیست. پس فقط به ازای $x = ۱$ و $x = -۱$ رابطه برقرار است.

مثال اگر $۷ \mid ۳k + ۲$ ثابت کنید: $۴۹ \mid ۹k^۲ - ۹k - ۱۰$.

حل عبارت $۹k^۲ - ۹k - ۱۰$ را تجزیه می‌کنیم:

$$۹k^۲ - ۹k - ۱۰ = (۳k+۲)(۳k-۵)$$

می‌دانیم $۷ \mid ۳k + ۲$ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid ۳k+۲ \\ ۷ \mid ۷ \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۷ \mid ۳k-۵$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد:

$$a \mid b \,,\, c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۷ \mid ۳k+۲ \\ ۷ \mid ۳k-۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴۹ \mid (۳k+۲)(۳k-۵)$$

تست اگر x و y دو عدد صحیح باشند، به طوری که $۲a + ۳b \mid ۳a + ۷b$ کدام گزینه درست **نیست**؟

۱) $۲a + ۳b \mid ۵a$ ۲) $۲a + ۳b \mid ۵b$ ۳) $۲a + ۳b \mid a - b$ ۴) $۲a + ۳b \mid a + b$

پاسخ **گزینهٔ ۴** این سؤال‌ها، سؤال‌های ساده‌ای نیستند. چون باید تک‌تک گزینه‌ها را بررسی کنیم. سمت راست (۱) فقط متغیر a وجود دارد بنابراین سعی می‌کنیم b را از سمت راست رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال حذف کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b \mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۷} ۲a+۳b \mid ۱۴a+۲۱b \\ ۲a+۳b \mid ۳a+۷b \xrightarrow{\times ۳} ۲a+۳b \mid ۹a+۲۱b \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b \mid ۵a$$

پس (۱) درست است. با توجه به این‌که در (۲) در سمت راست فقط b وجود دارد، این بار a را حذف می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b \mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۳} ۲a+۳b \mid ۶a+۹b \\ ۲a+۳b \mid ۳a+۷b \xrightarrow{\times ۲} ۲a+۳b \mid ۶a+۱۴b \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b \mid ۵b$$

خب حالا تلاش کنیم (۳) یا (۴) را ثابت کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲a+۳b \mid ۳a+۷b \\ ۲a+۳b \mid ۲a+۳b \xrightarrow{\times ۲} ۲a+۳b \mid ۴a+۶b \end{array}\right. \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b \mid a-b$$

پس (۳) نیز درست است.

خُب به نظر می‌رسد به اندازهٔ کافی از بخش‌پذیری و ویژگی‌های آن سؤال حل کردیم و بقیه‌اش را در تمرین‌ها ببینید.

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b می‌گویند و می‌نویسند $(a,b) = d$ هر وقت دوتا اتفاق بیفتد:

۱) d مقسوم‌علیه هر دو عدد باشد، یعنی $d \mid a$ و $d \mid b$.

۲) در بین همهٔ مقسوم‌علیه‌ها (شمارنده‌ها)ی مشترک، عدد d بزرگ‌تر از همه باشد. یعنی اگر مثلاً c هم یک مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد است و $c \mid a$ و $c \mid d$، آن‌گاه $c \leq d$ باشد، این‌جوری خیالمان راحت می‌شود که d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد یا خودمانی‌ترش همان ب.م.م دو عدد است.

برای مثال اگر بخواهیم $(۱۲,۱۸)$ را پیدا کنیم، داریم:

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲ $= \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ $= \{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$

م.م یا مقسوم‌علیه‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ $= \{۱,۲,۳,۶\}$

که در میان م.م‌ها یا مقسوم‌علیه‌های مشترک ب یا بزرگ‌ترین آن‌ها عدد ۶ است.

برای پیداکردن بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو یا چند عدد می‌شود همانند مثال قبل مجموعه مقسوم‌علیه‌های عددها را نوشت و از میان مشترک‌ها بزرگ‌ترینشان را انتخاب کرد که البته در مورد عددهای بزرگ کار سختی است، کار دیگری که می‌شود کرد این است که:

برای پیداکردن ب.م.م دو یا چند عدد، عددها را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب می‌کنیم.

برای مثال اگر بخواهیم $(۱۴۴,۳۰۰)$ را حساب کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۴۴ = ۲^۴ \times ۳^۲ \\ ۳۰۰ = ۲^۲ \times ۳ \times ۵^۲ \end{array}\right. \Rightarrow (۱۴۴,۳۰۰) = ۲^۲ \times ۳ = ۱۲$$

دو عدد a و b را نسبت به هم اول می‌گویند هرگاه $(a,b) = ۱$ باشد.

مثال ثابت کنید عدد طبیعی n هر چه باشد دو عدد $9n+4$ و $11n+5$ همواره نسبت به هم اول‌اند.

حل ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. داریم:

$$(11n+5, 9n+4)=d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 9n+4 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times 11} d \mid 99n+44 \\ d \mid 11n+5 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times 9} d \mid 99n+45 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d \mid 1 \Rightarrow d=1$$

تست اگر $(a,6)=3$ باشد، فرم کلی a برحسب متغیر $x \in \mathbb{Z}$ به کدام صورت است؟

۱) $3x$ ۲) $6x$ ۳) $6x+3$ ۴) $9x+6$

پاسخ **گزینهٔ ۳** وقتی $(a,6)=3$ شده است، یعنی $3 \mid a$ و در نتیجه a بر ۳ بخش‌پذیر است. اما اگر a زوج باشد چون می‌دانیم بر ۳ هم بخش‌پذیر است، یعنی بر ۶ بخش‌پذیر است که در آن صورت $(a,6)$ برابر ۶ می‌شود نه ۳. پس a یک عددی است که بر ۳ بخش‌پذیر است ولی بر ۲ بخش‌پذیر نیست. یعنی حاصل‌ضرب ۳ در یک عدد فرد است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$a=3(2x+1)=6x+3$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک

با یک مثال شروع می‌کنیم. به نظر شما کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۵ چه عددی است (واضح است که منظورمان در عددهای طبیعی است).

مجموعه مضارب طبیعی دو عدد را می‌نویسیم:

مجموعه مضارب طبیعی ۱۲ $=\{12,24,36,48,60,72,84,96,108,120,132,\dots\}$

مجموعه مضارب طبیعی ۱۵ $=\{15,30,45,60,75,90,105,120,135,150,\dots\}$

مضرب‌های طبیعی مشترک ۱۲ و ۱۵ $=\{60,120,\dots\}$

که مشخص است کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ بالا عدد ۶۰ است. همان‌طور که می‌بینید این عدد ۶۰ این‌جا دو ویژگی دارد. اول این‌که مضرب هر دو عدد است یعنی بر هر دو عدد بخش‌پذیر است یا به بیان دیگر هر دو عدد ۱۲ و ۱۵ عدد ۶۰ را می‌شمارند: $12 \mid 60$ و $15 \mid 60$ و دوم این‌که در میان همهٔ مضارب طبیعی مشترک ۱۲ و ۱۵ مثل ۱۲۰ و ۱۸۰ و ... این عدد ۶۰ از همه کوچک‌تر است.

عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(یعنی c بر هر دو عدد بخش‌پذیر باشد و مضرب‌شان باشد.) ۱) $a \mid c, b \mid c$

۲) $\forall m>0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \le m$

(یعنی اگر m هم یک مضرب‌مشترک دو عدد بود، c از m کوچک‌تر باشد که بتوانیم بگوییم ک.م.م است.)

برای به دست آوردن ک.م.م دو یا چند عدد کافی است عددها را تجزیه کرده عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب کنیم.

تست مجموع ارقام کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} : 24 \mid x, 30 \mid x\}$ چه عددی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ **گزینهٔ ۱** در واقع ک.م.م دو عدد ۲۴ و ۳۰ را باید پیدا کنیم. داریم:

$$[24,30]=[2^3\times 3, 2\times 3\times 5]=2^3\times 3\times 5=120$$

با استفاده از تعاریف ب.م.م و ک.م.م به راحتی می‌توان ثابت کرد:

۱) $a \mid b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=|a| \\ [a,b]=|b|\end{cases}$

۲) $(a,b)[a,b]=|ab|$

تست اگر m عددی صحیح باشد، حاصل $([a,a^4],(a^2,a^3))$ کدام است؟

۱) a ۲) a^2 ۳) $|a|$ ۴) a^4

پاسخ **گزینهٔ ۲** می‌دانیم $a^2 \mid a^3$، پس $(a^2,a^3)=|a^2|=a^2$. همچنین چون $a \mid a^4$، پس $[a,a^4]=|a^4|=a^4$. بنابراین حالا چون $a^2 \mid a^4$ پس: $(a^2,a^4)=a^2$.

$$([a,a^4],(a^2,a^3))=(a^4,a^2)$$

قضیهٔ تقسیم و کاربردها

از دبستان به یاد دارید که در تقسیم عدد a بر b بین مقسوم و مقسوم‌علیه، باقی‌مانده و خارج‌قسمت رابطهٔ روبه‌رو برقرار است: $a = bq + r$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} - & q \\ \hline r & \end{array}$$

فرض کنید بخواهیم ۳۰ سکه را بین ۷ نفر تقسیم کنیم. اگر من تقسیم را این‌طوری انجام دهم به نظرتان درست است؟

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۷ \\ \cline{2-2} -۲۱ & ۳ \\ \hline ۹ & \end{array}$$

می‌دانیم $۳۰ = ۷ \times ۳ + ۹$ یعنی تساوی درست است.

اما مشخص است که یک چیزی این‌جا غلط است. بله! این‌جا سه سیب به ۷ نفر داده‌ایم و ۹ سیب باقی مانده که این غلط است. چرا که این ۹ سیب باقی‌مانده از تعداد افراد بیشتر است. یعنی می‌شود نفری یک سیب دیگر به این ۷ نفر داد و ۲ سیب باقی بماند، یعنی تقسیم درست این‌طوری است:

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۷ \\ \cline{2-2} -۲۸ & ۴ \\ \hline ۲ & \end{array}$$

حالا درست شد. هدف از طرح این مثال این بود که در تقسیم a بر b فقط تساوی $a = bq + r$ کافی نیست و باقی‌مانده هم باید از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد. هم‌چنین می‌دانیم باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد. مثلاً نمی‌توانیم ۵ سیب به هر نفر بدهیم و ۵ سیب باقی بماند! بنابراین $۰ \le r < b$.

بنابراین:

اگر a عدد صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت در تقسیم عدد a بر b، عددهای منحصربه‌فرد r و q یافت می‌شوند به طوری که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \cline{2-2} & \mathbf{q} \\ \hline \mathbf{r} & \end{array}$$

در این حالت به q خارج‌قسمت، به r باقی‌مانده، به a مقسوم و به b مقسوم‌علیه می‌گویند.

- **دقت کنید که b عددی طبیعی، q و a عددهای صحیح و r عددی حسابی است.**

مثال **در یک تقسیم اگر ۸۳ واحد به مقسوم اضافه کنیم، ۷ واحد به خارج‌قسمت اضافه شده و یک واحد از باقی‌مانده کم می‌شود. مقسوم‌علیه این تقسیم کدام است؟**

حل

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \hline r & \end{array} \Rightarrow a = bq + r \,,\, ۰ \le r < b$$

حالا گفته به مقسوم ۸۳ واحد اضافه شده یعنی a تبدیل شده به $a + ۸۳$، به خارج‌قسمت ۷ واحد اضافه شده یعنی شده $q + ۷$ و از باقی‌مانده یکی کم شده یعنی باقی‌ماندهٔ جدید شده $r - ۱$، داریم:

$$a + ۸۳ = b(q + ۷) + r - ۱$$
$$a = bq + r$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$۸۳ = ۷b - ۱ \Rightarrow ۷b = ۸۴ \Rightarrow b = ۱۲$$

تست **در تقسیم عددی بر ۹ باقی‌مانده برابر ۷ شده است. اگر ۶۶ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج‌قسمت .... واحد اضافه شده و باقی‌مانده برابر .... می‌شود.**

۱) ۷، صفر ۲) ۷، ۸ ۳) ۸، ۸ ۴) ۸، ۱

پاسخ **گزینهٔ ۴**

$$\begin{array}{r|l} a & ۹ \\ \cline{2-2} & q \\ \hline ۷ & \end{array} \Rightarrow a = ۹q + ۷$$

۶۶ واحد به مقسوم اضافه شده است. اگر به طرفین تساوی بالا ۶۶ واحد اضافه کنیم، داریم:

$$a + ۶۶ = ۹q + ۷۳$$

می‌دانیم در تقسیم، باقی‌مانده باید کم‌تر از ۹ باشد. بنابراین باید یک کاری کنیم که آن عدد ۷۳ به صورت یک مضرب ۹ و یک عدد کوچک‌تر از ۹ دربیاید.

$$a + ۶۶ = ۹q + ۷۲ + ۱ = ۹(q + ۸) + ۱$$

تقسیم یک عدد مثبت بر یک عدد مثبت دیگر را قبلاً بارها دیده‌ایم. الان می‌خواهیم ببینیم پیداکردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده در تقسیم یک عدد منفی بر یک عدد مثبت چگونه است. به این سؤال ساده توجه کنید.

مثال **باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم ۴۱− را بر ۷ به دست آورید.**

حل خب اگر عدد ۴۱+ بود پاسخ ساده بود:

$$\begin{array}{r|l} ۴۱ & ۷ \\ \hline -\underline{۳۵} & ۵ \\ ۶ & \end{array}$$

که همه چیز هم در آن درست است. یعنی:

$$۴۱=۷\times ۵+۶$$

و باقی‌مانده که ۶ است از مقسوم‌علیه یعنی ۷ کم‌تر است. اما اگر بنویسیم:

$$\begin{array}{r|l} -۴۱ & ۷ \\ \hline -\underline{-۳۵} & -۵ \\ -۶ & \end{array}$$

داریم:

$$-۴۱=۷\times(-۵)-۶$$

که ۶− را به عنوان باقی‌مانده نمی‌توانیم قبول کنیم، چون‌که باقی‌مانده نمی‌تواند منفی باشد. این‌جا باید یک q و rای پیدا کنیم که در رابطهٔ $-۴۱=۷q+r$ صدق کند و $۰\le r<۷$ باشد.

$$\begin{array}{r|l} -۴۱ & ۷ \\ \hline \underline{\quad} & q \\ r & \end{array}$$

خب یک راه این است که در تساوی بالا به سمت راست تساوی یک عدد ۷ (یعنی به اندازهٔ مقسوم‌علیه) اضافه و کم کنیم:

$$-۴۱=۷\times(-۵)-۶+۷-۷$$

۷− آخر را با ۷ای که در ۵− ضرب شده فاکتور می‌گیریم و ۷ مثبت را با ۶− جمع می‌کنیم. داریم:

$$-۴۱=۷\times(-۵-۱)+(۷-۶)\ \Rightarrow\ -۴۱=۷\times(-۶)+۱$$

خب! حالا شد. همان‌طور که می‌بینید عدد باقی‌مانده ۱ است که بین صفر و ۷ است.

بنابراین خارج‌قسمت برابر ۶− و باقی‌مانده ۱ است. اما یک راه فرمولی هم برای پیداکردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده وجود دارد که شاید ساده‌تر باشد و فرقی نمی‌کند عددها مثبت یا منفی باشند.

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b داریم:

$$q=\left\lfloor \frac{a}{b}\right\rfloor$$

$$r=a-bq$$

برای مثال در سؤال قبل می‌خواستیم باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم ۴۱− را بر ۷ پیدا کنیم. این یعنی $a=-۴۱$ و $b=۷$ است. داریم:

$$q=\left\lfloor \frac{-۴۱}{۷}\right\rfloor=\lfloor -۵/۸\rfloor=-۶$$

$$r=a-bq=-۴۱-۷\times(-۶)=-۴۱+۴۲=۱$$

یک روش دیگری هم برای پیداکردن باقی‌مانده و خارج‌قسمت در عددهای منفی وجود دارد که البته همان روش اول است اما کمی سریع‌تر است. این‌جوری که وقتی می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت به دست آوریم، اگر عدد منفی بر عدد مثبت بخش‌پذیر باشد که باقی‌مانده و خارج‌قسمت مشخص است. برای مثال باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم ۴۲− بر ۷ به ترتیب برابر صفر و ۶− است. اما اگر عدد منفی بر عدد مثبت بخش‌پذیر نبود، شما بیایید منفی‌بودن مقسوم را بی‌خیال شوید و آن را به صورت مثبت بر مقسوم‌علیه منفی تقسیم کنید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را در این حالت به دست آورید بعد با استفاده از این دو رابطه باقی‌مانده و خارج‌قسمت واقعی را پیدا کنید.

باقی‌مانده $r=b-$ (باقی‌مانده در حالتی که عدد مثبت باشد)

خارج‌قسمت $q=-($ خارج‌قسمت در حالتی که عدد مثبت باشد $+۱)$

برای مثال وقتی می‌خواهیم باقی‌مانده و خارج‌قسمت ۴۱− را بر ۷ به دست آوریم، اول می‌آییم خود ۴۱ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را به دست می‌آوریم. یعنی:

$$\begin{array}{r|l} ۴۱ & ۷ \\ \hline -\underline{۳۵} & ۵ \\ ۶ & \end{array}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ داده‌شده باقی‌مانده و خارج‌قسمت واقعی را پیدا می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید، باقی‌مانده وقتی ۴۱ را مثبت فرض کرده‌ایم ۶ و خارج‌قسمت ۵ شده، بنابراین:

$$r=۷-۶=۱$$

$$q=-(۱+۵)=-۶$$

مثال **اگر باقی‌ماندهٔ a در تقسیم بر ۱۲ برابر ۷ و خارج‌قسمت آن q باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۵a+۳۷$ بر ۱۵ و خارج‌قسمت این تقسیم را برحسب q به دست آورید.**

حل اول رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۱۲ \\ \hline ۷ & q \end{array} \Rightarrow a=۱۲q+۷$$

پس مقدار $۵a+۳۷$ را برحسب q به دست می‌آوریم:

$$۵a+۳۷=۵(۱۲q+۷)+۳۷=۶۰q+۳۵+۳۷=۶۰q+۷۲$$

حالا باید باقی‌مانده و خارج‌قسمت $۶۰q+۷۲$ را بر ۱۵ به دست آوریم. بهترین راه به دست آوردن خارج‌قسمت، استفاده از جزءصحیح است. (ببینید وقتی می‌خواهیم خارج‌قسمت یک چیزی را بر یک چیز دیگر به دست آوریم، کافی است جزءصحیح این چیز را به آن چیز دیگر حساب کنیم!) داریم:

$$\text{خارج‌قسمت}=\left\lfloor\frac{۶۰q+۷۲}{۱۵}\right\rfloor=\lfloor ۴q+۴/۸\rfloor=۴q+۴$$

پس خارج‌قسمت جدید برحسب q برابر $۴q+۴$ است. حالا باقی‌ماندهٔ $۶۰q+۷۲$ را بر ۱۵ به دست می‌آوریم. دقت کنید که $۶۰q+۷۲$ جمع دو مقدار به دست آمده، یکی $۶۰q$ و یکی ۷۲، می‌شود تک‌تک باقی‌ماندهٔ هر کدام را به ۱۵ به دست آورده و حاصل را با هم جمع کنیم. مشخص است که $۶۰q$ بر ۱۵ بخش‌پذیر است، یعنی باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۵ برابر صفر است. *(پس این‌که هیچی!)* می‌ماند باقی‌ماندهٔ ۷۲ به ۱۵ که ۱۲ است:

$$\begin{array}{r|l} ۷۲ & ۱۵ \\ \cline{2-2} -۶۰ & ۴ \\ \cline{1-1} ۱۲ & \end{array}$$

بنابراین باقی‌مانده $۶۰q+۷۲$ بر ۱۵ برابر ۱۲ است. البته یک‌جور دیگر هم می‌شد باقی‌مانده و خارج‌قسمت $۶۰q+۷۲$ را بر ۱۵ به دست آورد:

$$۶۰q+۷۲=۶۰q+۶۰+۱۲=۱۵(q+۴)+۱۲$$

مشخص است که خارج‌قسمت جدید $q+۴$ و باقی‌مانده ۱۲ است.

تست **اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت m و n بر ۱۳ به ترتیب برابر ۷ و ۱۱ باشد، باقی‌ماندهٔ $۵m-۷n$ بر ۱۳ کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) -۴۲

پاسخ **گزینهٔ ۳**

$$\begin{array}{l|l} m & ۱۳ \\ \hline ۷ & q \end{array} \Rightarrow m=۱۳q+۷$$

$$\begin{array}{l|l} n & ۱۳ \\ \hline ۱۱ & q' \end{array} \Rightarrow n=۱۳q'+۱۱$$

$$\Rightarrow ۵m-۷n=۵(۱۳q+۷)-۷(۱۳q'+۱۱)=۶۵q+۳۵-۹۱q'-۷۷=۶۵q-۹۱q'-۴۲$$

حالا باید باقی‌ماندهٔ $۶۵q-۹۱q'-۴۲$ را بر ۱۳ به دست آوریم. با توجه به این‌که $۶۵q$ و $-۹۱q'$ بر ۱۳ بخش‌پذیرند، بنابراین باقی‌ماندهٔ آن‌ها در تقسیم بر ۱۳ برابر صفر است و فقط می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ -۴۲ بر ۱۳ و از روش سوم که ساده‌تر است استفاده می‌کنیم. اول -۴۲ را مثبت فرض می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ ۴۲ را بر ۱۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} ۴۲ & ۱۳ \\ \cline{2-2} -۳۹ & ۳ \\ \cline{1-1} ۳ & \end{array}$$

حالا از رابطهٔ «باقی‌مانده وقتی عدد مثبت باشد $-\,b=$ باقی‌مانده» باقی‌ماندهٔ واقعی را پیدا می‌کنیم:

$$r=۱۳-۳=۱۰$$

اما اگر می‌خواستیم به صورت مستقیم هم باقی‌ماندهٔ $۶۵q-۹۱q'-۴۲$ را بر ۱۳ به دست آوریم، می‌شد:

$$۶۵q-۹۱q'-۴۲=۶۵q-۹۱q'-۵۲+۱۰=۱۳\underbrace{(۵q-۷q'-۴)}_{\text{خارج‌قسمت}}+\underbrace{۱۰}_{\text{باقی‌مانده}}$$

تست **مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۵۰ باقی‌ماندهٔ آن ۵ برابر خارج‌قسمت آن باشد، کدام است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

پاسخ **گزینهٔ ۳** عدد را a فرض می‌کنیم. می‌خواهیم باقی‌مانده، پنج برابر خارج‌قسمت باشد، یعنی $r=۵q$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & ۵۰ \\ \hline ۵q & q \end{array} \Rightarrow a=۵۰q+۵q=۵۵q$$

ممکن است فکر کنیم خب q هر چه بزرگ‌تر باشد، عدد هم بزرگ‌تر می‌شود و ما می‌توانیم هر چه‌قدر دلمان می‌خواهد q را بزرگ بگیریم. اما این‌طور نیست. یادتان باشد در رابطهٔ تقسیم، باقی‌مانده یک شرطی هم داشت که: $۰\le r<b$. بنابراین در این‌جا $۰\le ۵q<۵۰$ و در نتیجه $q<۱۰$ یعنی q حداکثر می‌تواند ۹ باشد.

$$q_{max}=۹ \Rightarrow a_{max}=۹\times۵۵=۴۹۵ \Rightarrow \text{مجموع ارقام}=۴+۹+۵=۱۸$$

تست باقی‌ماندهٔ تقسیم $24k$ بر ۱۳۲ برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۶۰ ۳) ۶۶ ۴) ۸۰

پاسخ گزینهٔ ۲

$$24k \,\underline{|\,132}\; \Rightarrow 24k = 132q + r\,,\; 0 \le r < 132$$

$$r = -132q + 24k = 12(-11q + 2k)$$

همان‌طور که می‌بینید r مضرب ۱۲ است. پس باید در میان گزینه‌ها دنبال عددی بگردیم که مضرب ۱۲ بوده و از ۱۳۲ کم‌تر باشد که فقط ۶۰ چنین ویژگی‌ای دارد.

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

می‌دانیم در تقسیم بر ۲، دو دسته عدد داریم. عددهای زوج که آن‌ها را با $2k$ نشان می‌دهیم و عددهای فرد که با $2k+1$ نشان می‌دهیم.
به همین ترتیب در تقسیم به ۳ عددها می‌توانند سه نوع باقی‌ماندهٔ مختلف داشته باشند. یعنی یا بر ۳ بخش‌پذیر باشند که در این صورت می‌توان آن‌ها را به فرم $3k$ نوشت یا بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند، یعنی به فرم $3k+1$ باشند و بالأخره یا در تقسیم به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ داشته باشند که در این صورت آن‌ها را به فرم $3k+2$ می‌توان نوشت.

تست دو عدد فرد در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌های یکسانی دارند. اگر این دو عدد را در هم ضرب کنیم، فرم کلی عدد به دست آمده برحسب k به کدام صورت است؟

۱) $4k+1$ ۲) $4k+3$ ۳) $8k+3$ ۴) $4k+1$ یا $4k+3$

پاسخ گزینهٔ ۱ عددها در تقسیم بر ۴ در یکی از چهار دستهٔ مقابل قرار می‌گیرند:

$4k \Rightarrow$ زوج است. $\quad 4k+1$

$4k+2 \Rightarrow$ زوج است. $\quad 4k+3$

چون گفته دو عدد فردند و در تقسیم به چهار باقی‌ماندهٔ یکسانی دارند، پس یا هر دو به فرم $4k+1$اند و یا هر دو به فرم $4k+3$. اگر هر دو عدد به فرم $4k+1$ باشند، داریم:

$$\begin{cases} a = 4k+1 \\ b = 4k'+1 \end{cases} \Rightarrow ab = 16kk' + 4k + 4k' + 1 = 4(4kk' + k + k') + 1 = 4q + 1$$

و اگر هر دو عدد به فرم $4k+3$ باشند، داریم:

$$\begin{cases} a = 4k+3 \\ b = 4k'+3 \end{cases} \Rightarrow ab = 16kk' + 12k + 12k' + 9 = 4(4kk' + 3k + 3k' + 2) + 1 = 4q' + 1$$

یعنی در هر دو حالت حاصل‌ضرب دو عدد به فرم $4k+1$ است.

مثال ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

حل همان‌طور که در سؤال قبل دیدید، در تقسیم بر ۴، چهار دسته عدد وجود دارد که عددهای فرد در آن به صورت $4k+1$ یا $4k+3$ است. در هر دو حالت مربع عدد را پیدا می‌کنیم:

$$a = 4k+1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8q + 1$$

$$a = 4k+3 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8\underbrace{(2k^2 + 3k + 1)}_{q'} + 1 = 8q' + 1$$

تست a در تقسیم به ۲ باقی‌مانده‌ای برابر ۱، b در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ و c در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد. باقی‌ماندهٔ $a^2+b^2+c^2$ در تقسیم به ۸ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ ۴ با توجه به اطلاعات داده‌شده عددهای a، b و c را می‌توان به فرم‌های زیر نوشت:

$$a = 2k+1 \qquad b = 4k+2 \qquad c = 6k+3$$

مشخص است که عددهای a و c فرد است. بنابراین با توجه به آن‌چه در سؤال قبل ثابت کردیم باقی‌ماندهٔ a^2 و c^2 در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است، می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ b^2 در تقسیم بر ۸.

$$b = 4k+2 \Rightarrow b^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4 = 8q + 4$$

همان‌طور که می‌بینید b^2 در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ دارد. بنابراین:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (8k+1) + (8k'+4) + (8k''+1) = 8(k + k' + k'') + 6$$

پس باقی‌ماندهٔ $a^2+b^2+c^2$ در تقسیم بر ۸ برابر ۶ است.

مثال ثابت کنید هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ دارد.

حل می‌دانیم عددها را می‌توان در تقسیم بر ۶ به یکی از ۶ فرم مقابل نوشت:

$۶k$ مضرب ۶ است.

$۶k+۱$

$۶k+۲$ زوج است.

$۶k+۳$ مضرب ۳ است.

$۶k+۴$ زوج است.

$۶k+۵$

اول نیست.

بنابراین فقط در حالت‌های $۶k+۱$ و $۶k+۵$ عدد می‌تواند اول باشد.

مثال اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۲ و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۵۶ چند است؟

حل این‌جور سؤال‌ها را در فصل بعد و بعد از آموختن هم‌نهشتی راحت‌تر می‌توانید پاسخ دهید اما نمونه‌های ساده‌اش را (مثل این سؤال) با استفاده از الگوریتم تقسیم می‌توان جواب داد:

$$a \div ۷ = q,\ r=۲ \Rightarrow a = ۷q+۲ \xrightarrow{\text{طرفین}\times ۸} ۸a = ۵۶q+۱۶$$

$$a \div ۸ = q',\ r=۵ \Rightarrow a = ۸q'+۵ \xrightarrow{\text{طرفین}\times ۷} ۷a = ۵۶q'+۳۵$$

$$\xrightarrow{-} ۸a-۷a = ۵۶q+۱۶-۵۶q'-۳۵ = ۵۶\underbrace{(q-q')}_{k}-۱۹$$

$$\Rightarrow a = ۵۶k-۵۶+۳۷ \Rightarrow a = ۵۶(k-۱)+۳۷$$

پس باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۵۶ برابر ۳۷ است.

حالا بدون اتلاف وقت خیلی سریع تمرین‌های تشریحی ۱۶ تا ۳۶ و تست‌های ۴۴ تا ۱۴۵ را حل کن.

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۱۶- اگر a، b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc \mid ab+c$، ثابت کنید بیشترین مقدار $a+b+c$ برابر ۵ است.

۱۷- اگر $a^{۷} \mid b^{۵}$ ثابت کنید $a^{۱۱} \mid b^{۸}$ و با یک مثال نقض نشان دهید $a^{۱۳} \mid b^{۹}$ نادرست است.

۱۸- ثابت کنید اگر $x^{۳} \mid ۱۲۸$، آن‌گاه $x^{۵} \mid ۲^{۱۴}$.

۱۹- اگر a عددی صحیح باشد به طوری که $۱۱ \mid ۳a+۲$ ثابت کنید: $۱۲۱ \mid ۲۴a^{۲}+۴۳a+۱۸$.

۲۰- دو عدد طبیعی پیدا کنید به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها از دو برابر عدد کوچک‌تر به علاوهٔ عدد بزرگ‌تر ۱۵ واحد بیشتر باشد.

۲۱- ثابت کنید هیچ مقدار صحیحی مانند x وجود ندارد که به ازای آن $x^{۲}+۲$ بر $۵x+۳$ بخش‌پذیر باشد.

۲۲- به ازای چند عدد طبیعی $n>۲$ رابطهٔ $(n-۲)! \mid n^{۳}-n$ برقرار است؟

۲۳- ثابت کنید اگر a و b عددهایی طبیعی باشند و $a+b \mid ab$ و a عددی اول باشد، آن‌گاه $b=a^{۲}-a$.

۲۴- بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{N} : x \mid ۸۰ , x \mid ۳۰۰\}$ را به دست آورده، پیدا کنید این مجموعه چند عضو دورقمی دارد؟

۲۵- اگر $(a,۶۰)=۱۰$ باشد، دربارهٔ تعداد عوامل ۲، ۳ و ۵ عدد a چه می‌توان گفت؟

۲۶- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ مانند x رابطهٔ $[x,۱۵]=۶۰$ برقرار است؟

۲۷- باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم a بر ۲۴ به ترتیب برابر ۱۷ و q است باقی‌ماندهٔ $۵a+۴۱$ بر ۲۰ و خارج‌قسمت این تقسیم برحسب q کدام است؟

۲۸- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۳۳ برابر ۲۱ و باقی‌ماندهٔ b بر ۲۲ برابر ۱۹ باشد، باقی‌ماندهٔ $۳a-۵b$ بر ۱۱ چند است؟

۲۹- عدد a مضرب ۸ است و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۲۴ برابر r شده است. اگر ۳۳ واحد به a اضافه کنیم، خارج‌قسمت دو واحد اضافه می‌شود. دربارهٔ باقی‌ماندهٔ جدید چه می‌توان گفت؟

۳۰- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ به ترتیب برابر ۱ و ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{۲}+(a+b)^{۴}+(b-a)^{۶}$ بر ۸ چند است؟

۳۱- چند نقطه روی منحنی به معادلهٔ $yx^{۲}-۲x^{۳}-y-۱=۰$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ آن عددهایی صحیح باشد؟

۳۲- ثابت کنید اگر P عددی اول باشد، معادلهٔ $xy+x+y=p-۱$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد.

۳۳- ثابت کنید مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم به ۲۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

۳۴- اگر $۱۳ \mid ۵a + ۷b$ ثابت کنید $۱۳ \mid ۲a - ۵b$.

۳۵- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند x رابطهٔ $۱۳ \mid x^۲ + x + ۱$ برقرار است؟

۳۶- اگر باقی‌ماندهٔ x بر ۱۶ و ۱۵ به ترتیب برابر ۷ و ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ x بر ۱۲۰ چند است؟

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

۴۴- چند عدد صحیح وجود دارد که در میان عددهای صحیح فقط بر خودش و ۱ بخش‌پذیر باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۵- اگر $a \mid c$ و $ab \mid c$ کدام گزینه درست است؟ (۷۹)

۱) $b \mid c$ ۲) $a+b \mid c$ ۳) $a-b \mid c$ ۴) $a^{۲} \mid c$

۴۶- اگر $a \mid a-b$ آن‌گاه: (۷۹)

۱) $a \mid a-b$ ۲) $b \mid a-b$ ۳) $a \mid b$ ۴) $a-b \mid b$

۴۷- اگر $ab \mid ۶$:

۱) هم a بر ۶ بخش‌پذیر است و هم b.
۲) دست‌کم یکی از مقادیر a یا b بر ۶ بخش‌پذیر است.
۳) ممکن است نه a بر ۶ بخش‌پذیر باشد و نه b.
۴) a دست‌کم بر یکی از عددهای ۲ یا ۳ بخش‌پذیر است.

۴۸- حاصل‌ضرب دو عدد به فرم $7k+۳$ به کدام فرم است؟

۱) $7q+۱$ ۲) $7q+۲$ ۳) $7q+۳$ ۴) $7q-۱$

۴۹- اگر $۳a+۴b \mid ۲a+۳b$، چندتا از رابطه‌های $a \mid ۲a+۳b$، $a-b \mid ۲a+۳b$ و $۲a-۳b \mid ۲a+۳b$ همواره درست است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۰- اگر $a \mid x-y$ و $a \mid z-t$ کدام گزینه درست است؟

۱) $a \mid xt-yz$ ۲) $a \mid xt+yz$ ۳) $a \mid xy+yt$ ۴) $a \mid (x+y)(z+t)$

۵۱- اگر $a^{۳} \mid ۴۸$ و $b^{۲} \mid ۳۷۵$، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۷ ۳) ۸۱ ۴) ۸۷

۵۲- اگر $a^{۲} \mid ۱۰۸$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $۱۸ \mid a$ ۲) $۱۲ \mid a$ ۳) $۴ \mid a^{۲}$ ۴) $۲۷ \mid a^{۲}$

۵۳- اگر $a \mid ۱۸$ و $b \mid ۱۸$، آن‌گاه کدام رابطه درست نیست؟ $(a,b \in \mathbb{N})$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $۶ \mid b$ ۲) $a \mid ۳b$ ۳) $a \mid ۵۴$ ۴) $۳a \mid b$

۵۴- رابطهٔ $a^{۲}-a-۱ \mid ۱$ به ازای چند عدد صحیح a برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۵- اگر $a^{۲} \mid a+b$، آن‌گاه کدام رابطهٔ زیر، لزوماً صحیح نیست؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $a^{۲} \mid b^{۲}$ ۲) $a \mid ۳b-۲a$ ۳) $a^{۲} \mid a-b$ ۴) $a^{۲} \mid a^{۲}+b^{۲}$

۵۶- اگر a و b عددهایی طبیعی باشند و $ab \mid a+b$، کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر لزوماً درست نیست؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a \mid ۲$ ۳) $۲a \mid b+۲$ ۴) $b \mid a+۲$

۵۷- اگر $a^{۲} \mid b^{۳}$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

۱) $a^{۵} \mid b^{۸}$ ۲) $a^{۳} \mid b^{۵}$ ۳) $a^{۷} \mid b^{۱۰}$ ۴) $a^{۴} \mid b^{۷}$

۵۸- اگر $a^{۲}+۲a+۱ \mid b^{۵}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a+۱ \mid b^{۲}$ ۲) $a+۱ \mid b^{۳}$ ۳) $a^{۳}+۳a^{۲}+۳a+۱ \mid b^{۶}$ ۴) $a^{۳}+۳a^{۲}+۳a+۱ \mid b^{۷}$

۵۹- اگر $a \mid b+۳$ و $a \mid c-۲$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $bc+۱$ بر a، همواره برابر کدام است؟ $(a \geq ۵)$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) $a-۵$ ۴) صفر

۶۰- چند عدد دورقمی طبیعی مانند a وجود دارد به طوری که $a \mid ۱۰$ و $a \nmid ۱۵$؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۱- بزرگ‌ترین مقدار x برای آن‌که $x-2 \mid 7x+5$، چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۶۲- اگر $a \neq 1$ عددی طبیعی باشد به طوری که $a \mid 5m+4$ و $a \mid 2m+3$ در این صورت a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۶۳- اگر $a \mid b+2$ و $a \mid b^3+1$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a \mid b+1$ ۲) $a \mid b^2+1$ ۳) $a \mid 7$ ۴) $a \mid 5$

۶۴- به ازای چند عدد صحیح مانند x رابطهٔ $3x+2 \mid 5x+7$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۵- به ازای چند عدد طبیعی مانند x رابطهٔ $0 \mid x^7-4x^5-x^3+4x$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۶- به ازای چند عدد طبیعی مانند x رابطهٔ $x^3+1 \mid x^2+1$ برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۶۷- چند مقدار صحیح n وجود دارد به گونه‌ای که $n+6$ بر n^2+2 بخش‌پذیر باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۶۸- چند نقطه روی منحنی به معادلهٔ $2yx+2=3x-y$ وجود دارد که هر دو مولفهٔ آن عددهایی صحیح باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۹- چند عدد صحیح وجود دارد که ۴ برابرش به علاوهٔ یک بر ۳ برابرش منهای یک بخش‌پذیر باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۰- اگر فقط به ازای دو عدد صحیح x رابطهٔ $x-2 \mid x^2-a$ برقرار باشد، a چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۲

۷۱- بزرگ‌ترین مقدار a برای آن‌که هر دو رابطهٔ $a \mid 3m+1$ و $a \mid m^2+2$ برقرار باشد، کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

۷۲- به ازای کدام مقدار m اگر a عدد طبیعی باشد و هر دو عدد $9k+m$ و $7k+6$ را بشمارد، فقط دو مقدار برای a وجود دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۷۳- کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند اول باشد؟ $(n>3)$

۱) $n!+3$ ۲) $n!+n-1$ ۳) $n!-n+1$ ۴) $n!+n+1$

۷۴- چندتا از عددهای $100!+12$، $100!+31$ و $100!+97$ اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۵- باقی‌ماندهٔ تقسیم $8!+7!-6!$ بر ۲۱۰ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۸۰

۷۶- بزرگ‌ترین عدد طبیعی دورقمی n که به ازای آن هر دو رابطهٔ $12 \mid 6n+30$ و $21 \mid 6n+30$ برقرار باشد، کدام است؟

۱) ۹۱ ۲) ۹۳ ۳) ۹۵ ۴) ۹۶

۷۷- اگر $5 \mid 2n+1$، عبارت $14n^2+19n+6$ همواره بر کدام عدد زیر، بخش‌پذیر است؟ $(n \in \mathbb{Z})$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۷۸- اگر x عددی طبیعی باشد از دو رابطهٔ $x \mid 24$ و $x \mid 30$ نتیجه می‌شود .... و از دو رابطهٔ $24 \mid x$ و $30 \mid x$ نتیجه می‌شود ....

۱) $x \mid 3$ ، $120 \mid x$ ۲) $x \mid 3$ ، $240 \mid x$ ۳) $x \mid 6$ ، $120 \mid x$ ۴) $x \mid 6$ ، $240 \mid x$

۷۹- عددهای $a>1$، $b>1$ و $a \neq b$ هر دو فقط دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی هستند. اگر رابطه‌های $a \mid 30$ و $b \mid 30$ برقرار باشد، $a+b$ برابر کدام‌یک از عددهای زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۰- اگر $x \mid 12$ و $x \mid 20$ و x عددی طبیعی باشد، x .... مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد که بزرگ‌ترین آن .... است.

۱) ۲، ۴ ۲) ۳، ۴ ۳) ۲، ۸ ۴) ۴، ۴

۸۱- بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد $4n+1$ و $8n+6$ کدام است؟

۱) همواره ۱ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۱ یا ۲ یا ۴ ۴) ۲ یا ۴

۸۲- اگر $[a,۴]=۱۲$ و $[b,۴]=۱۲$ و $۰<a<۱۲$ و $۰<b<۱۲$ ، $a\neq b$ ، $a+b$ کدام است؟

۱) همواره ۶ ۲) ۶ یا ۹ ۳) همواره ۹ ۴) ۹ یا ۱۲

۸۳- عدد $۲n+۱$ نسبت به کدام‌یک از عددهای زیر ممکن است اول نباشد؟

۱) $۲n-۱$ ۲) $۴n+۱$ ۳) $۵n+۱$ ۴) $۶n+۱$

۸۴- مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N}: x|۷۲ , x|۸۴\}$ چند عضو دورقمی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸۵- کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{N} , ۱۵|x , ۵۰|x\}$ برابر .... و این مجموعه .... عضو سه‌رقمی دارد.

۱) ۷۵، ۳ ۲) ۷۵، ۶ ۳) ۱۵۰، ۳ ۴) ۱۵۰، ۶

۸۶- اگر $d=(۵۴,۹۰)$ و $x\in\mathbb{N}$ و $x|۵۴$ و $x|۹۰$ و $x<d$ ، چند مقدار برای x وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۷- حاصل $([۶^۳,-۶],۲^۹)$ کدام است؟

۱) $۲^۳$ ۲) $۲^۶$ ۳) $۲^۹$ ۴) $۲^۹\times ۳^۳$

۸۸- اگر m عددی طبیعی باشد، حاصل $[(m^۳,m^۷),[m^۵,m^۲]]$ کدام است؟

۱) $m^۲$ ۲) $m^۳$ ۳) $m^۵$ ۴) $m^۷$

۸۹- اگر $(a,b)=d$ ، حاصل $([d,a^۲],([a,b],a))$ کدام است؟

۱) a ۲) $a^۲$ ۳) $[a,b]$ ۴) $|a|$

۹۰- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰ مانند a وجود دارد که فرد باشد و مضرب ۳ نباشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۹

۹۱- اگر $(a,۶)=۳$ ، باقی‌ماندهٔ $۳a+۲$ بر ۹ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۹۲- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n، دو عدد به صورت $۲۵n+۹$ و $۱۱n+۴$ نسبت به هم اول‌اند؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۹۳- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $۱۲n+۷$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹ *(۸۸)*

۹۴- به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $۷n+۵$ و $۱۱n+۲$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟ *(۹۱)*

۱) هیچ عدد ۲) یک عدد ۳) دو عدد ۴) بی‌شمار عدد

۹۵- به ازای مقادیر مختلف $a>۳$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۱۵a+۳$ و $۱۵a-۱۲$ کدام است؟ *(۹۰)*

۱) ۱۵ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۹۶- حاصل $(۱۳!+۵ , ۱۴!-۸)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱۳

۹۷- اگر $-۱۰۷=۷q+r$ و $۰\leq r<۷$ باشد، $r-q$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۹۸- در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کند؟ *(۸۵)*

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود. ۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.

۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند. ۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

۹۹- در تقسیم a بر ۲۳، باقی‌مانده برابر r شده است. اگر ۴۱ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده برابر صفر می‌شود، خارج‌قسمت چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییر نمی‌کند. ۲) یکی اضافه می‌شود. ۳) ۲تا اضافه می‌شود. ۴) ۳تا اضافه می‌شود.

۱۰۰- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۱۷ برابر ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ $۳a+۴$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۹

۱۰۱- اگر $x=۱۳k+۳$ و $y=۱۳k'+۱۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ $۵x-۳y$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰۲- اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a+۱۰۰$ بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر با ۱۰ و ۱۱ باشند، کم‌ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۳ ۳) ۶۶ ۴) ۹۹ *(کانون فرهنگی آموزش ۹۸)*

۱۰۳- اگر $a-1$ مضرب ۶ و $a+1$ مضرب ۸ باشد، باقی‌ماندهٔ a^2-2 بر ۲۴ کدام است؟

۱) ۱   ۲) -1 ۳) ۲۳   ۴) ۴۷

۱۰۴- اگر $a=15k+4$ باشد، خارج‌قسمت تقسیم $8a-71$ بر ۲۰ کدام است؟

۱) $8k-1$ ۲) $8k-2$ ۳) $6k-1$ ۴) $6k-2$

۱۰۵- خارج‌قسمت $20!-21$ بر ۲۰ کدام است؟

۱) $20!-1$ ۲) $20!-2$ ۳) $19!-1$ ۴) $19!-2$

۱۰۶- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۰ وجود دارد که در تقسیم بر ۳۵ باقی‌مانده‌شان ۵ برابر خارج‌قسمت آن‌ها باشد؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

۱۰۷- اگر a و b اعداد صحیح متمایز و مثبتی باشند به طوری که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر کدام از آن‌ها بر ۲۳، دو برابر مکعب خارج‌قسمت باشد، آن‌گاه $2a+b$ کدام می‌تواند باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱) ۶۲   ۲) ۲۵   ۳) ۱۴۹   ۴) ۸۷

۱۰۸- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم از مربع خارج‌قسمت آن ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (۸۴)

۱) ۹   ۲) ۱۲   ۳) ۱۴   ۴) ۱۶

۱۰۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی‌مانده توان دوم خارج‌قسمت است، کدام است؟ (۸۵)

۱) ۱۶   ۲) ۱۱   ۳) ۱۲   ۴) ۱۴

۱۱۰- چند عدد طبیعی مانند b وجود دارد که در تقسیم عدد ۱۳۷ به b باقی‌مانده برابر ۱۶ شود؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بیشتر از ۲

۱۱۱- اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر b، باقی‌مانده بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد و $b \mid a-1$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر b کدام است؟ $(b>1)$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) به a بستگی دارد.

۱۱۲- چند عدد طبیعی مانند b وجود دارد که در تقسیم عدد ۱۷۱ بر b خارج‌قسمت برابر ۹ شود؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۱۳- در تقسیم a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده، ۳۴ و خارج‌قسمت، عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کم‌تر از ۷۰ برای a وجود دارد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱۱۴- عدد a نه مضرب ۳ است و نه مضرب ۲، باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر ۱۲، چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

۱۱۵- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a^2+4$ باقی‌ماندهٔ $a^2+b^2+a^2b^2$ بر ۸ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

۱۱۶- باقی‌ماندهٔ $1^2+5^2+9^2+\cdots+97^2$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

۱۱۷- کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند اختلاف مکعب‌های دو عدد متوالی باشد؟

۱) ۳۲۹   ۲) ۳۳۱   ۳) ۳۳۴   ۴) ۳۳۷

۱۱۸- اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم k^2+1 بر ۵، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۳   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) صفر

۱۱۹- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که a^4-b^4 همواره بر آن بخش‌پذیر است، کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۸۰   ۲) ۴۰   ۳) ۹۶   ۴) ۱۶

۱۲۰- اگر $27^m \mid 9^n$ و $64^m \mid a^n$، کم‌ترین مقدار طبیعی a چه مجموع ارقامی دارد؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۷   ۴) ۸

۱۲۱- به ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $\frac{n+3}{5}$ و $\frac{n^3+2n}{10}$ اعداد صحیح هستند؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) هیچ   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) ۳

۱۲۲- بزرگ‌ترین مقدار صحیح کسر $\frac{x^3+5}{2x+1}$ کدام است؟

۱) ۱۷   ۲) ۱۹   ۳) ۱۴۱   ۴) ۱۷۶

۱۲۳- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n رابطهٔ $n^2 \mid 6^n$ برقرار است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۲۴- اگر $7 \mid 3x+2y$، به ازای کدام مقدار m می‌توان نتیجه گرفت: $7 \mid x+my$؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۵- اگر $a-b \mid a^2+b^2$ کدام گزینه درست نیست؟

۱) $a-b \mid 2a^2$ ۲) $a-b \mid 2ab$ ۳) $a-b \mid (a+b)^2$ ۴) $a-b \mid b^4$

۱۲۶- به ازای چند عدد صحیح مانند x رابطهٔ $2^x \mid (x^2+1)(5x+2)$ برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشتر از ۱

۱۲۷- اگر عدد طبیعی $2n+1$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $14n^2+19n+6$ بر ۲۵ کدام است؟ (۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۲۸- اگر a، عضوی از مجموعهٔ $A=\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ باشد، آن‌گاه به ازای چند مقدار a، عدد طبیعی مانند k می‌توان یافت به گونه‌ای که رابطهٔ $a \mid k^2+2$ برقرار باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱۲۹- دو عدد a^2+a+3 و $a-1$ نسبت به هم اول‌اند. کدام گزاره همواره درست است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) $a=5k+1$ ۲) $a=5k$ ۳) $a \neq 5k$ ۴) $a \neq 5k+1$

۱۳۰- اگر $(a,24)=6$، حاصل $(a^2,216)$ کدام است؟

۱) همواره ۳۶ ۲) ۳۶ یا ۷۲ ۳) ۳۶ یا ۱۰۸ ۴) همواره ۷۲

۱۳۱- دو عدد $A=2^3\times3^4\times5^3\times7^2$ و $B=2^5\times3^2\times5^p\times11$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک و مثبت و غیریک هستند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد کدام است؟ (۹۰)

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۳۲- اگر n عددی طبیعی و ب.م.م دو عدد $n+2$ و $9n-1$، عددی مخالف ۱ باشد، جمع ارقام کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ (کانون فرهنگی آموزش ۹۶)

۱۳۳- باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر ۸ برابر ۳ و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b برابر ۱ است. اگر a مضرب ۸ باشد، خارج‌قسمت تقسیم a بر b برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۹

۱۳۴- در تقسیمی، مقسوم، ۲۰ برابر باقی‌مانده و باقی‌مانده ماکزیمم است، مقسوم‌علیه حداکثر کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۳۵- اگر $a+3$ مضرب ۷ باشد و $a-11$ بر ۱۴ بخش‌پذیر نباشد، باقی‌ماندهٔ a بر ۱۴ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۸

۱۳۶- دو عدد طبیعی ۱۰۷ و ۸۳ را بر عدد طبیعی b تقسیم نموده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۳ و ۵ شده است. عدد b، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش ۹۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۷- عدد طبیعی a، فرد است. اگر در تقسیم a بر ۲۰۰، باقی‌مانده یک عدد مربع کامل باشد، آن‌گاه رقم دهگان بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۴ (کانون فرهنگی آموزش ۹۵)

۱۳۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲، ۴ و ۸ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی A بر ۲۳ کدام است؟ (۹۷)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۴

۱۳۹- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم 2A بر ۶۳ چگونه است؟

۱) عدد اول ۲) مضرب ۲ ۳) مضرب ۳ ۴) مضرب ۵

۱۴۰- اگر باقی‌ماندهٔ a بر ۳۰ و ۱۲ به ترتیب برابر ۱۷ و ۱۱ شود، باقی‌ماندهٔ a بر ۶۰ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۴۳ ۴) ۴۷

۱۴۱- اگر $5 \mid 7a+1$ و $5 \mid 3b+7$، باقی‌ماندهٔ $ab-1$ بر ۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۲- اگر $11 \mid a+3b+k$ و $11 \mid 5a+4b+3$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟ $(a,b \in \mathbb{Z})$ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۴۳- اگر $7 \mid a+3b$ و $7 \nmid b$، به ازای چند مقدار k از مجموعهٔ $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -3\le x\le 7\}$، رابطهٔ $7 \mid 2a+kb$ لزوماً برقرار است؟ $(a,b\in\mathbb{Z})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (کانون فرهنگی آموزش ۹۸)

۱۴۴- باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی N بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ است. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر خارج‌قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر N کدام است؟ (۹۵)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۵- اگر همواره یکی از عددهای a، $a+x$ و $a+y$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، $x+y$ برابر کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۳

۳) ۴۴ ۴) برابر هر کدام از این سه عدد می‌تواند باشد.

۱۶- می‌دانیم اگر $ab \mid c$ می‌توان نتیجه گرفت $a \mid c$ و $b \mid c$، در این سؤال:

$$\left.\begin{array}{l} abc \mid ab+c \xrightarrow{\text{سمت‌چپ} \div c} \begin{array}{l} ab \mid ab+c \\ ab \mid ab \end{array} \Rightarrow ab \mid c \\ abc \mid ab+c \xrightarrow{\text{سمت‌چپ} \div ab} \begin{array}{l} c \mid ab+c \\ c \mid c \end{array} \Rightarrow c \mid ab \end{array}\right\} \Rightarrow ab = c$$

اگر در رابطهٔ اصلی به جای ab عدد c را قرار دهیم، داریم:

$$c^2 \mid c+c \Rightarrow c^2 \mid 2c \xrightarrow{\div c} c \mid 2 \Rightarrow c = 1 \text{ یا } 2$$

اگر $c=1$ باشد، $ab=1$ یعنی $a=1$ و $b=1$ در نتیجه $a+b+c=3$.

اگر $c=2$ باشد، یعنی $ab=2$ است، پس از a و b یکی برابر ۲ و یکی برابر ۱ است. در نتیجه $a+b+c=5$.

۱۷- دیدیم که می‌توان یک رابطهٔ عادکردن را به توان رساند:

$$a^7 \mid b^5 \xrightarrow{\text{به توان } 11} a^{77} \mid b^{55}$$

همچنین دیدیم که سمت راست یک رابطهٔ عادکردن را در هر عدد صحیحی می‌توان ضرب کرد. بنابراین:

$$a^{77} \mid b^{55} \xrightarrow{\text{سمت‌راست} \times b} a^{77} \mid b^{56} \Rightarrow (a^{11})^7 \mid (b^8)^7$$

بنابراین کسر $\left(\frac{b^8}{a^{11}}\right)^7$ عددی صحیح است، پس $\frac{b^8}{a^{11}}$ نیز عددی صحیح است و در نتیجه: $a^{11} \mid b^8$. برای پیداکردن مثال نقض کافی است در رابطهٔ اولی a و b را یک عدد توان‌دار (برای سادگی با پایهٔ ۲) در نظر گرفت و توان a را به b داد و برعکس. یعنی چی؟ یعنی این‌جا $a=2^5$ و $b=2^7$ باشد. چون اگر این کار را بکنیم رابطهٔ صورت سؤال درست می‌شود و دو طرف برابر می‌شوند.

$$(2^5)^7 \mid (2^7)^5$$

حالا به ازای این دو مقدار درستی یا نادرستی رابطهٔ $a^{13} \mid b^9$ را بررسی می‌کنیم:

$$(2^5)^{13} \mid (2^7)^9 \Rightarrow 2^{65} \mid 2^{63} \quad \times$$

۱۸- اگر $128 \mid x^3$، یعنی کسر $\frac{x^3}{128}$ عددی صحیح است. $\frac{x^3}{128} = \frac{x^3}{2^7}$

x باید جوری باشد که کسر $\frac{x^3}{2^7}$ عددی صحیح شود. همان‌طور که می‌بینید در مخرج ۷تا ۲ داریم که باید با صورت ساده شود. سؤال این است که x چند عامل ۲ داشته باشد که این ۷ عامل ۲ در مخرج ساده شود.

اگر x عددی باشد که فقط یک عامل ۲ داشته باشد x^3 دارای ۳ عامل ۲ خواهد بود و کسر $\frac{x^3}{2^7}$ به صورت $\frac{2^3}{2^7}$ می‌شود که ساده نمی‌شود.

اگر x در تجزیه‌اش ۲ عامل ۲ داشته باشد (برای مثال عددی مثل ۴ باشد) در این صورت x^3 دارای ۶ عامل ۲ است. اما چون مخرج دارای ۷ عامل ۲ است باز کسر ساده نمی‌شود و به صورت $\frac{2^6}{2^7}$ درمی‌آید.

اما اگر x دارای ۳ عامل ۲ باشد آن‌گاه x^3 دارای ۹ عامل ۲ خواهد شد و کسر $\frac{x^3}{2^7}$ به صورت $\frac{(2^3)^3}{2^7}$ یا $\frac{2^9}{2^7}$ درمی‌آید که ساده می‌شود.

بنابراین می‌شود نتیجه گرفت که x باید حداقل ۳ عامل ۲ داشته باشد. در این صورت x^5 دارای دست‌کم ۱۵ عامل ۲ است و در نتیجه بر 2^{14} بخش‌پذیر است.

۱۹- $3a+2$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. $24a^2+43a+18$ را بر $3a+2$ تقسیم می‌کنیم، ببینیم می‌شود آن را یک‌جورهایی تجزیه کرد یا نه؟

$$\begin{array}{l|l} 24a^2 + 43a + 18 & 3a+2 \\ \cline{2-2} -24a^2 + 16a & 8a+9 \\ \cline{1-1} \quad 27a + 18 & \\ -\,27a + 18 & \\ \cline{1-1} \qquad 0 & \end{array}$$

بنابراین:

$$24a^2 + 43a + 18 = (3a+2)(8a+9)$$

$3a+2$ که بر ۱۱ بخش‌پذیر است، اگر بتوانیم ثابت کنیم $8a+9$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است. مسئله ثابت شده است. داریم:

$$\begin{array}{l} 11 \mid 3a+2 \\ 11 \mid 11a \end{array} \xrightarrow{(-)} \begin{array}{l} 11 \mid 8a-2 \\ 11 \mid 11 \end{array} \xrightarrow{(+)} 11 \mid 8a+9$$

بنابراین $8a+9$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر است در نتیجه $(3a+2)(8a+9)$ بر ۱۲۱ بخش‌پذیر است.

۲۰- عددها را a و b می‌نامیم و فرض می‌کنیم $a<b$ است، با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$ab=۲a+b+۱۵$$

a را برحسب b پیدا می‌کنیم:

$$ab-۲a=b+۱۵$$

$$a(b-۲)=b+۱۵\ \Rightarrow\ a=\frac{b+۱۵}{b-۲}$$

اگر قرار باشد a عددی طبیعی شود باید کسر $\frac{b+۱۵}{b-۲}$ عددی طبیعی باشد، یعنی $b+۱۵$ بر $b-۲$ بخش‌پذیر باشد پس از این رابطه مقادیر b را پیدا می‌کنیم:

$$b-۲\,|\,b+۱۵$$

$$\begin{cases} b-۲\,|\,b-۲ \\ b-۲\,|\,b+۱۵ \end{cases} \xrightarrow{(-)} b-۲\,|\,۱۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-۲=۱ \Rightarrow b=۳ \\ \Rightarrow a=\frac{۳+۱۵}{۳-۲}=۱۸ \quad \text{غ.ق. چون a باید کوچک‌تر از b باشد.} \\ b-۲=-۱ \Rightarrow b=۱ \\ \Rightarrow a=\frac{۱+۱۵}{۱-۲}=-۱۶ \quad \text{طبیعی نیست.} \\ b-۲=۱۷ \Rightarrow b=۱۹ \Rightarrow a=\frac{۳۴}{۱۷}=۲ \ ✓ \\ b-۲=-۱۷ \Rightarrow b=-۱۵ \quad \text{طبیعی نیست.} \end{cases}$$

پس دو عدد ۲ و ۱۹ هستند.

۲۱- اگر بخواهیم $x^۲+۲$ بر $۵x+۳$ بخش‌پذیر باشد باید $۵x+۳\,|\,x^۲+۲$، داریم:

$$\begin{cases} ۵x+۳\,|\,۵x+۳ \xrightarrow{\times(۵x-۳)} ۵x+۳\,|\,۲۵x^۲-۹ \\ ۵x+۳\,|\,x^۲+۲ \xrightarrow{\times ۲۵} ۵x+۳\,|\,۲۵x^۲+۵۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} ۵x+۳\,|\,۵۹ \Rightarrow \begin{cases} ۵x+۳=۱ \Rightarrow x=\frac{-۲}{۵} \ ✗ \\ ۵x+۳=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۴}{۵} \ ✗ \\ ۵x+۳=۵۹ \Rightarrow x=\frac{۵۶}{۵} \ ✗ \\ ۵x+۳=-۵۹ \Rightarrow x=\frac{-۶۲}{۵} \ ✗ \end{cases}$$

پس به ازای هیچ مقداری از x، رابطه برقرار نیست.

۲۲- می‌دانیم رشد یک عبارت فاکتوریلی خیلی سریع‌تر از رشد یک چندجمله‌ای است. بنابراین از یک عددی به بعد حتماً $(n-۲)!$ از $n^۳-n$ بزرگ‌تر خواهد شد و رابطه دیگر برقرار نیست. بنابراین در عددهای کوچک رابطه را بررسی می‌کنیم تا جایی که $(n-۲)!$ از $n^۳-n$ بزرگ‌تر شود. داریم:

$$n=۳ \Rightarrow ۱!\,|\,۲۷-۳ \quad ✓$$
$$n=۴ \Rightarrow ۲!\,|\,۶۴-۴ \quad ✓$$
$$n=۵ \Rightarrow ۳!\,|\,۱۲۵-۵ \quad ✓$$
$$n=۶ \Rightarrow ۴!\,|\,۲۱۶-۶ \quad ✗$$
$$n=۷ \Rightarrow ۵!\,|\,۳۴۳-۷ \quad ✗$$
$$n=۸ \Rightarrow ۶!\,|\,۵۱۲-۸ \quad ✗$$

از این‌جا به بعد سمت چپ رابطه بزرگ‌تر از سمت راست می‌شود و رابطه برقرار نیست.
پس فقط به ازای سه عدد ۳، ۴ و ۵ رابطه برقرار است.

۲۳- داریم:

$$\begin{cases} a+b\,|\,ab \\ a+b\,|\,a+b \xrightarrow{\times a} a+b\,|\,ab+a^۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b\,|\,ab \\ a+b\,|\,ab+a^۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} a+b\,|\,a^۲$$

a عددی اول است، پس مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن ۱، a و $a^۲$ هستند. بنابراین:

$a+b=۱$ امکان‌پذیر نیست، چون a و b عددهای طبیعی‌اند.

یا

$a+b=a \Rightarrow b=۰$ امکان‌پذیر نیست، چون b باید عددی طبیعی باشد.

یا

$$a+b=a^۲ \Rightarrow b=a^۲-a \quad ✓$$

۲۴- هر دو عبارت $x\,|\,۳۰۰$ و $x\,|\,۸۰$ را به صورت کسر می‌نویسیم تا درک بهتری پیدا کنیم.

$$x\,|\,۸۰ \Rightarrow \frac{۸۰}{x}=\frac{۲^۴\times ۵}{x}$$

$$x\,|\,۳۰۰ \Rightarrow \frac{۳۰۰}{x}=\frac{۲^۲\times ۳\times ۵^۲}{x}$$

x باید جوری باشد که هر دوی این کسرها عددی صحیح شود. در صورت کسر اول فقط عوامل ۲ و ۵ و در صورت کسر دوم فقط عوامل ۲، ۳ و ۵ است، پس اگر قرار باشد x هر دو کسر عددی صحیح باشد، x فقط می‌تواند عوامل ۲ و ۵ داشته باشد. (برای مثال: *اگه x عامل ۷ داشته باشه، ۷ رو با چی ساده کنیم که کسر عدد صحیح بشه؟ با هیچ چی! همچنین x عامل ۳ هم نمی‌تونه داشته باشه چون کسر بالایی ساده نمی‌شه.*)

چون x فقط عوامل ۲ و ۵ دارد می‌توان آن را به صورت $۲^\alpha\times ۵^\beta$ نوشت. در این صورت دو کسر به صورت مقابل خواهند شد:

$$\frac{۸۰}{x}=\frac{۲^۴\times ۵}{۲^\alpha\times ۵^\beta}$$

$$\frac{۳۰۰}{x}=\frac{۲^۲\times ۳\times ۵^۲}{۲^\alpha\times ۵^\beta}$$

α و β را حداکثر برابر چه عددهایی می‌توانیم قرار دهیم تا هر دو کسر عددهایی صحیح باشند؟ از رابطهٔ $\frac{۲^۴\times ۵}{۲^\alpha\times ۵^\beta}$ می‌توان نتیجه گرفت $\alpha\le ۴$ و $\beta\le ۱$ و اگر قرار باشد کسر $\frac{۲^۲\times ۳\times ۵^۲}{۲^\alpha\times ۵^\beta}$ عددی صحیح باشد، باید $\alpha\le ۲$ و $\beta\le ۲$ باشد

چون می‌خواهیم هر دوی کسرها عددی صحیح باشند، باید:

$$\alpha\le ۴ \quad \wedge \quad \alpha\le ۲ \Rightarrow \alpha\le ۲$$
$$\beta\le ۱ \quad \wedge \quad \beta\le ۱ \Rightarrow \beta\le ۱$$

بنابراین $۰\le\alpha\le ۲$ و $۰\le\beta\le ۱$ تغییر می‌کند. حداکثر مقدار x که همان بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است، زمانی رخ می‌دهد که α و β بیشترین مقدار خود را داشته باشند، یعنی $\alpha=۲$ و $\beta=۱$ که در این حالت $x=۲^۲\times ۵=۲۰$ می‌شود. اما چون عضوهای دورقمی مجموعهٔ خواسته‌شده می‌توان $\alpha=۱$ و $\beta=۱$ را هم در نظر گرفت که در این صورت $x=۲\times ۵=۱۰$ است.

به طور ساده‌تر اگر بخواهیم این سؤال را جمع‌بندی کنیم بزرگ‌ترین مقدار x، ب.م.م دو عدد ۸۰ و ۳۰۰ یعنی عدد ۲۰ است و بقیهٔ عضوهای مجموعه نیز مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های ۲۰، یعنی $\{۱,۲,۴,۵,۱۰,۲۰\}$ که ما این‌جا عضوهای دورقمی آن را می‌خواستیم. یعنی ۱۰ و ۲۰.

در پایان خوب است این نکته را یادآوری کنم:

$$\begin{matrix} x\,|\,a \\ x\,|\,b \end{matrix} \Rightarrow x\,|\,(a,b)$$

۲۵- می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد، $d|a$ و $d|b$ و d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است. در این‌جا $(a,60)=10$ پس $10|a$ یعنی a بر ۱۰ بخش‌پذیر است. یعنی $a=10q$.

$$(a,60)=10 \Rightarrow (a,2^2\times3\times5)=2\times5$$

$$\Rightarrow (10q,2^2\times3\times5)=2\times5 \Rightarrow (2\times5\times q\ ,\ 2^2\times3\times5)=2\times5$$

q نمی‌تواند زوج باشد چون اگر q زوج باشد $10q$ مضرب ۲ می‌شود و با توجه به این‌که ۶۰ نیز مضرب ۲۰ است، ب.م.م دو عدد ۲۰ می‌شود و نه ۱۰. پس q فرد است و در واقع a فقط یک عامل ۲ دارد، هم‌چنین q مضرب ۳ نیست چون اگر مضرب ۳ باشد، a بر ۳۰ بخش‌پذیر می‌شود و چون ۶۰ هم بر ۳۰ بخش‌پذیر است ب.م.م دو عدد ۳۰ می‌شود و نه ۱۰. پس a عامل ۳ ندارد اما q می‌تواند مضرب ۵ باشد یا نباشد چون در هر دو حالت ب.م.م دو عدد باز هم همان عدد ۱۰ می‌شود.
پس a دست‌کم یک شمارندهٔ ۵ دارد. (می‌تواند هزارتا هم داشته باشد.)

۲۶- می‌دانیم $[x,15]$ یعنی کوچک‌ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد x و ۱۵، بنابراین ۶۰ یک مضرب عدد x است و در نتیجه $x|60$. حالا مجموعه مضارب طبیعی ۱۵ را نگاه کنید. $\{15,30,45,60,...\}$
x باید یک‌جوری باشد که کوچک‌ترین مضرب مشترک x و ۱۵ عدد ۶۰ بشود.

$$[x,15]=60 \Rightarrow [x,3\times5]=2^2\times3\times5$$

جدای از این‌که x باید ۶۰ را بشمارد x حتماً باید مضرب ۴ نیز باشد زیرا در غیر این صورت $[x,15]=60$ نمی‌شود. برای مثال اگر $x=10$ باشد، $[10,15]=30$ می‌شود و نه ۶۰. پس باید دنبال آن دسته شمارنده‌های عدد ۶۰ بگردیم که مضرب ۴ باشد. *(یه جور دیگه هم می‌شه اینو توضیح داد. ببینید موقع به دست آوردن ک.م.م چی‌کار می‌کردیم؟ عوامل مشترک رو با توان بزرگ‌تر در غیرمشترک‌ها ضرب می‌کردیم. این‌جا جواب ک.م.م ۶۰ شده و $15=3\times5$ پس باید x حتماً 2^2 داشته باشه که ک.م.م ۶۰ بشه.)*
بنابراین مقادیر قابل‌قبول برای x عبارت‌اند از: ۴,۱۲,۲۰,۶۰

۲۷-

$$\begin{array}{l|l} a & 24 \\ \hline 17 & q \end{array} \Rightarrow a=24q+17$$

$$\Rightarrow 5a+41=5(24q+17)+41=120q+85+41=120q+126$$

حالا باید باقی‌مانده و خارج‌قسمت $120q+126$ را بر ۲۰ به دست آوریم. $120q$ که بر ۲۰ بخش‌پذیر است، یعنی در تقسیم به ۲۰ باقی‌مانده‌ای ندارد، می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ ۱۲۶ بر ۲۰ که ۶ است.

$$\begin{array}{l|l} 126 & 20 \\ 120 & 6 \\ \hline 6 & \end{array}$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $5a+41$ بر ۲۰ برابر ۶ است.
می‌دانیم برای پیداکردن خارج‌قسمت تقسیم a بر b کافی است $\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor$ را پیدا کنیم. داریم:

$$\left\lfloor\frac{5a+41}{20}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{120q+126}{20}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{120q}{20}+\frac{126}{20}\right\rfloor=\lfloor 6q+6.3\rfloor=6q+6$$

بنابراین خارج‌قسمت تقسیم $5a+41$ بر ۲۰ برحسب q برابر $6q+6$ است.

۲۸-

$$\begin{array}{l|l} a & 33 \\ \hline 21 & q \end{array} \Rightarrow a=33q+21 \qquad \begin{array}{l|l} b & 22 \\ \hline 19 & q' \end{array} \Rightarrow b=22q'+19$$

$$\Rightarrow 3a-5b=3(33q+21)-5(22q'+19)$$
$$=99q+63-110q'-95=99q-110q'-32$$

$99q$ و $-110q'$ بر ۱۱ بخش‌پذیرند و باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۱۱ برابر صفر است. فقط کافی است باقی‌ماندهٔ -32 را بر ۱۱ به دست آوریم.
اگر از روش سوم پیداکردن باقی‌مانده وقتی مقسوم عددی منفی باشد استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{array}{l|l} 32 & 11 \\ -22 & 2 \\ \hline 10 & \end{array} \Rightarrow 11-10=1$$

البته می‌شه این‌جوری هم باقی‌مانده رو پیدا کرد.

$$99q-110q'-32=99q-110q'-33+1=11(9q-10q'-3)+1$$
$$=11m+1$$

۲۹-

$$\begin{array}{l|l} a & 24 \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow a=24q+r\ ,\ 0\le r<24$$

a مضرب ۸ است، بنابراین $a=8k$ داریم:

$$8k=24q+r \Rightarrow r=8k-24q=8(k-3q)$$

پس r باید مضرب ۸ باشد و از طرفی کم‌تر از ۲۴ است. پس: ۱۶ یا ۸ یا $r=0$

$$\begin{array}{l|l} a+33 & 24 \\ \hline r' & q+2 \end{array} \Rightarrow a+33=24(q+2)+r'\ ,\ 0\le r'<24$$

$$a+33=24q+48+r' \Rightarrow \cancel{24q}+r+33=\cancel{24q}+48+r'$$
$$r=15+r'$$

با توجه به این‌که r یا صفر یا ۸ یا ۱۶ است و r' دست‌کم صفر است، پس $r=16$ و $r'=1$ است.

۳۰- می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.

$$a=4k+1 \qquad\qquad b=4k'+2$$

a فرد است پس a^2 مربع عدد فرد است پس باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.
$a+b=4k+1+4k'+2=4k+4k'+2$ عددی فرد است.
پس $(a+b)^2$ نیز عددی فرد است و $(a+b)^4$ که مربع $(a+b)^2$ است.
مربع عددی فرد است که باقی‌ماندهٔ آن نیز در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.
$b-a=4k'+2-4k-1=4k'-4k+1$ فرد است.
پس $(b-a)^3$ نیز فرد است و $(b-a)^6$ مربع یک عدد فرد است پس باقی‌ماندهٔ $(b-a)^6$ نیز در تقسیم بر ۸ برابر ۱ است.
بنابراین باقی‌ماندهٔ $a^2+(a+b)^4+(b-a)^6$ در تقسیم به ۸ برابر ۳ است.

۳۱-

$$yx^2-2x^3-y-1=0 \Rightarrow yx^2-y=2x^3+1$$

$$\Rightarrow y(x^2-1)=2x^3+1 \Rightarrow y=\frac{2x^3+1}{x^2-1}$$

اگر بخواهیم y عددی صحیح باشد $2x^3+1$ باید بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد یا به عبارت دیگر $x^2-1|2x^3+1$. داریم:

$$\begin{cases} x^2-1|2x^3+1 \\ x^2-1|x^2-1 \xrightarrow{\times 2x} x^2-1|2x^3-2x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x^2-1|1+2x$$

$$\xrightarrow{\times(2x-1)} \begin{cases} x^2-1|4x^2-1 \\ x^2-1|x^2-1 \xrightarrow{\times 1} x^2-1|4x^2-4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x^2-1|3$$

$x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2$ ✖

$x^2-1=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-1$

$x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=\frac{17}{3} \text{ ✖} \\ x=-2 \Rightarrow y=-5 \end{cases}$

$x^2-1=-3 \Rightarrow x^2=-2$ ✖

پس دو نقطه با مختصات صحیح روی این منحنی وجود دارد.

۳۲- $xy+x+y=p-1 \Rightarrow xy+x+y+1=p$

$\Rightarrow (x+1)(y+1)=p$

حاصل‌ضرب دو عدد برابر عددی اول شده است پس یکی از آن‌ها ۱ و دیگری عدد اول p. داریم:

$x+1=1 \Rightarrow x=0$

$y+1=p \Rightarrow y=p-1$

چون x و y باید عددهایی طبیعی باشند پس معادله در $\mathbb{N}$ جواب ندارد.

۳۳- دیدیم که: ۱) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به یکی از دو صورت $6k+1$ یا $6k+5$ نوشت.

۲) مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$$p=6x+1 \Rightarrow p^2=36k^2+12k+1=6(6k^2+2k)+1=6q+1$$

$$p=6k'+5 \Rightarrow p^2=36k'^2+60k'+\underbrace{25}_{24+1}$$

$$=6(6k'^2+10k'+4)+1=60q'+1$$

پس در هر دو حالت p^2 در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد و یا به بیان دیگر p^2-1 بر ۶ بخش‌پذیر است.

از طرفی چون عددهای اول بزرگ‌تر از ۳ فردند، p^2 ربع یک عدد فرد است که در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. پس p^2-1 بر ۸ نیز بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l} 6 \mid p^2-1 \\ 8 \mid p^2-1 \end{array} \xrightarrow{\text{ک.م.م}} 24 \mid p^2-1 \Rightarrow p^2-1=24m \Rightarrow p^2=24m+1$$

۳۴- از رابطهٔ $13 \mid 5a+7b$ می‌خواهیم به رابطه‌ای برسیم که در آن ضریب a برابر ۲ باشد. خب چه‌کار باید بکنیم. ببینید ما این دو رابطه را داریم:

$$13 \mid 5a+7b \qquad\qquad 13 \mid 13a$$

می‌توان سمت راست هر کدام از رابطه‌ها را در هر عددی بخواهیم ضرب کنیم.

این‌جا باید فکر کنیم کدام رابطه را در چه عددی ضرب کنیم که وقتی دو رابطه را از هم کم می‌کنیم ضریب a برابر ۲ شود.

اگر بالایی را دو برابر کنیم ضریب a برابر ۱۰ می‌شود که اگر از $13a$ کم کنیم $3a$ باقی می‌ماند اما اگر رابطهٔ بالایی را در ۳ ضرب کنیم داریم:

$$13 \mid 5a+7b \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 13 \mid 15a+21b \\ 13 \mid 13a \end{cases} \xrightarrow{(-)} 13 \mid 2a+21b$$

خب ضریب a درست شد! حالا برویم سراغ ضریب b:

$$\begin{array}{l} 13 \mid 2a+21b \\ 13 \mid 13b \xrightarrow{\times 2} 13 \mid 26b \end{array} \xrightarrow{(-)} 13 \mid 2a-5b$$

۳۵- اگر x^2+x+1 تجزیه می‌شد خوب بود چون می‌شد دو پرانتز که حاصل‌ضرب آن‌ها بر ۱۳ بخش‌پذیر است. در این صورت یا پرانتز اول بر ۱۳ بخش‌پذیر می‌شد یا پرانتز دوم و یا هر دو. اما متأسفانه x^2+x+1 تجزیه نمی‌شود، پس چه‌کار کنیم؟ می‌دانیم:

$$\begin{array}{l} 13 \mid x^2+x+1 \\ 13 \mid 13 \end{array} \xrightarrow{(-)} 13 \mid x^2+x-12$$

حالا می‌شود x^2+x-12 را تجزیه کرد.

$x^2+x-12=(x+4)(x-3)$

$13 \mid (x+4)(x-3)$

پس یا $x-3$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است یا $x+4$، بنابراین:

$x-3=13k \Rightarrow x=13k+3$

$x+4=13k' \Rightarrow x=13k'-4$

$$\begin{array}{ll} 10 \le 13k+3 \le 99 & 10 \le 13k'-4 \le 99 \\ 7 \le 13k \le 96 & 14 \le 13k' \le 103 \\ 0/5 \le k \le 7/3 & 1/07 \le k' \le 7/9 \\ \Rightarrow k=1,2,\dots,7 \text{ هفت عدد} & \Rightarrow k'=2,3,\dots,7 \text{ شش عدد} \end{array}$$

پس به ازای ۱۳ عدد دورقمی رابطه برقرار است.

۳۶- باقی‌ماندهٔ a در تقسیم به ۱۶ و ۱۵ به ترتیب برابر ۷ و ۲ است؛ بنابراین داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 16 \\ \hline 7 & q \end{array} \Rightarrow a=16q+7 \xrightarrow{\times 15} 15a=240q+105$$

$$\begin{array}{l|l} a & 15 \\ \hline 2 & q' \end{array} \Rightarrow a=15q'+2 \xrightarrow{\times 16} 16a=240q'+32$$

$$\xrightarrow{-} a=240q'+32-240q-105=240\underbrace{(q'-q)}_{k}-73$$

$$\Rightarrow a=240k-73 \Rightarrow a=240k-\underbrace{120+47}_{-73}$$

$$\Rightarrow a=120(2k-1)+47$$

پس باقی‌ماندهٔ a بر ۱۲۰ برابر ۴۷ است.

۴۴- گزینهٔ۲ ممکن است فکر کنید عددهای اول چنین ویژگی‌ای دارند اما برای مثال عدد ۳ هم بر ۳ بخش‌پذیر است، هم بر ۳−، هم بر ۱ و هم بر ۱−. عددهای مرکب بر عددهای بیشتری بخش‌پذیرند. عدد ۱ به‌جز خودش بر ۱− نیز بخش‌پذیر است. اما عدد ۱− عددی است که بر خودش و ۱ بخش‌پذیر است و تنها عددی است که این خاصیت را دارد.

۴۵- گزینهٔ ۱ سؤال ساده‌ای است و در حقیقت یکی از ویژگی‌های عادکردن است. می‌دانیم اگر $ab|c$ می‌توان نتیجه گرفت $a|c$ و $b|c$ پس ۱ درست است.

اما اگر $c=۶$ ، $b=۳$ و $a=۲$ ، ۲ و ۴ رد می‌شوند. برای رد ۳ کافی است a را برابر ۲، b را برابر ۳- و c را برابر ۶ فرض کنید.

۴۶- گزینهٔ ۴ این هم سؤال بسیار ساده‌ای است. داریم:

$$\begin{array}{l} a-b\,|\,a-b \\ a-b\,|\,a \end{array} \xrightarrow{(-)} a-b\,|\,b$$

۴۷- گزینهٔ ۳ فرض کنید $a=۲$ و $b=۳$ باشد، ۱ و ۲ رد می‌شود. همچنین اگر $a=۱$ و $b=۶$ ، ۴ نیز رد می‌شود.

۴۸- گزینهٔ ۲ دو عدد را $a=۷k+۳$ و $b=۷k'+۳$ فرض می‌کنیم. داریم:

$$ab=(۷k+۳)(۷k'+۳)=۴۹kk'+۲۱k+۲۱k'+۹$$

$$=\underbrace{۴۹kk'+۲۱k+۲۱k'+۷}_{\text{مضرب ۷}}+۲=۷(۷kk'+۳k+۳k'+۱)+۲=۷q+۲$$

۴۹- گزینهٔ ۴ یک بار a را از سمت راست رابطه حذف می‌کنیم و یک بار b را. اما قبل از آن یک کمی رابطه را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۲a+۳b\,|\,۳a+۴b \\ ۲a+۳b\,|\,۲a+۳b \end{array} \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b\,|\,a+b$$

حالا داریم:

$$\begin{array}{l} ۲a+۳b\,|\,a+b \\ ۲a+۳b\,|\,۲a+۳b \end{array} \xrightarrow{\times۲} \begin{cases} ۲a+۳b\,|\,۲a+۲b \\ ۲a+۳b\,|\,۲a+۳b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} ۲a+۳b\,|\,b \quad (I)$$

$$\begin{array}{l} ۲a+۳b\,|\,a+b \\ ۲a+۳b\,|\,۲a+۳b \end{array} \xrightarrow{\times۳} \begin{cases} ۲a+۳b\,|\,۳a+۳b \\ ۲a+۳b\,|\,۲a+۳b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} ۲a+۳b\,|\,a \quad (II)$$

درستی $۲a+۳b\,|\,a$ که ثابت شد.

برای اثبات درستی $۲a+۳b\,|\,a-b$ کافی است (I) و (II) را از هم کم کنیم:

$$\begin{array}{l} ۲a+۳b\,|\,a \\ ۲a+۳b\,|\,b \end{array} \Rightarrow ۲a+۳b\,|\,a-b$$

همچنین:

$$\begin{cases} ۲a+۳b\,|\,a \xrightarrow{\times۲} ۲a+۳b\,|\,۲a \\ ۲a+۳b\,|\,b \xrightarrow{\times۳} ۲a+۳b\,|\,۳b \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲a+۳b\,|\,۲a-۳b$$

پس هر سه رابطه درست است.

۵۰- گزینهٔ ۱

$$\begin{array}{l} a\,|\,x-y \xrightarrow{\times t} a\,|\,xt-yt \\ a\,|\,z-t \xrightarrow{\times y} a\,|\,zy-ty \end{array} \xrightarrow{(-)} a\,|\,xt-yz$$

پس ۱ درست است.

برای بقیهٔ گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

کافی است $a=۵$ ، $x=۷$ ، $y=۲$ ، $z=۶$ و $t=۱$ باشد.

۲ $۵\nmid ۷+۱۲$ ۳ $۵\nmid ۱۴+۲$

۴ $۵\nmid ۹\times۷$

۵۱- گزینهٔ ۴ $۴۸\,|\,a^۳ \Rightarrow ۲^۴\times۳\,|\,a^۳ \Rightarrow \frac{a^۳}{۲^۴\times۳}\in\mathbb{Z}$

کسر $\frac{a^۳}{۲^۴\times۳}$ باید عددی صحیح باشد. چهار عامل ۲ در مخرج داریم، بنابراین a باید دست‌کم دو عامل ۲ داشته باشد. (دقت کنید که اگر a فقط یک عامل ۲ داشته باشد، یعنی عددی مثل ۶ باشد، وقتی به توان ۳ می‌رسد دارای سه عامل ۲ است و مخرج ۴ عامل ۲ دارد، پس کسر ساده نمی‌شود.)بنابراین a باید دست‌کم دو عامل ۲ و یک عامل ۳ داشته باشد. پس: $a_{min}=۲^۲\times۳=۱۲$

از طرفی: $۳۷۵\,|\,b^۲ \Rightarrow ۳\times۵^۳\,|\,b^۲ \Rightarrow \frac{b^۲}{۳\times۵^۳}\in\mathbb{Z}$

کسر $\frac{b^۲}{۳\times۵^۳}$ باید عددی صحیح باشد. با استدلال مشابه، b باید دست‌کم ۲ عامل ۵ و یک عامل ۳ داشته باشد. بنابراین: $b_{min}=۲۵\times۳=۷۵$

در نتیجه کم‌ترین مقدار $a+b$ برابر است با: $۷۵+۱۲=۸۷$

۵۲- گزینهٔ ۲ رابطهٔ $۱۰۸\,|\,a^۲$ را تبدیل به کسر می‌کنیم:

$$\frac{a^۲}{۱۰۸}=\frac{a^۲}{۲^۲\times۳^۳}$$

خب! این کسر باید عدد صحیح باشد. همان‌طور که در مخرج کسر می‌بینید یک $۲^۲$ در مخرج است و یک $۳^۳$. a نمی‌تواند فرد باشد، چون ۲های مخرج ساده نمی‌شوند. اما اگر a یک عامل ۲ داشته باشد کافی است. چون اگر a یک عامل ۲ داشته باشد $a^۲$ دارای دو عامل ۲ است و $۲^۲$ در مخرج و صورت ساده می‌شوند. حالا می‌رویم سراغ عوامل ۳، در مخرج یک $۳^۳$ داریم. اگر a فقط یک عامل ۳ داشته باشد کافی نیست، چرا که در این صورت $a^۲$ دارای ۲ عامل ۳ می‌شود ولی مخرج ۳ عامل ۳ دارد که بعد از ساده‌کردن یک عامل ۳ در مخرج می‌ماند. پس a باید دست‌کم ۲ عامل ۳ داشته باشد، یعنی a دست‌کم یک عامل ۲ و دست‌کم ۲ عامل ۳ دارد، یعنی $a_{min}=۲\times۳^۲$. که در این حالت رابطهٔ $۱۰۸\,|\,a^۲$ نیز برقرار می‌شود چرا که $۲^۲\times۳^۳\,|\,۲^۲\times۳^۴$.

بنابراین با توجه به گزینه‌ها $a\,|\,۱۲$ لزوماً درست نیست.

۵۳- گزینهٔ ۴ می‌دانیم سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد دلخواهی ضرب و سمت چپ رابطهٔ عادکردن را می‌توان بر هر کدام از مقسوم‌علیه‌های آن تقسیم کرد. بنابراین:

۱ $۱۸\,|\,b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر ۳}} ۶\,|\,b$

۲ $a\,|\,۱۸,\ ۱۸\,|\,b \Rightarrow a\,|\,b \xrightarrow{\text{سمت راست}\times۳} a\,|\,۳b$

۳ $a\,|\,۱۸ \xrightarrow{\text{سمت راست}\times۳} a\,|\,۵۴$

اما گزینهٔ $۳a\,|\,b$ ممکن است درست نباشد، مثلاً اگر a و b هر دو ۱۸ باشند، رابطهٔ $۳a\,|\,b$ برقرار نیست.

۵۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $a\,|\,۱$ ، آن‌گاه $a=\pm۱$ است. بنابراین با توجه به این‌که $a^۲-a-۱\,|\,۱$ پس $a^۲-a-۱=\pm۱$.

داریم:

$$a^۲-a-۱=۱ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰ \Rightarrow a=-۱\ ,\ a=۲$$

$$a^۲-a-۱=-۱ \Rightarrow a^۲-a=۰ \Rightarrow a(a-۱)=۰ \Rightarrow a=۰\ ,\ a=۱$$

پس به ازای ۴ عدد صحیح این رابطه برقرار است.

۵۵- گزینهٔ ۳

$$\left.\begin{array}{l} a^2 | a+b \xrightarrow{\times a} a^2 | a^2+ab \\ a^2 | a^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} a^2 | ab \xrightarrow{\div a} a | b$$

① ✓ $a | b \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 | b^2$

② ✓ $\begin{array}{l} a | b \Rightarrow a | 3b \\ a | a \Rightarrow a | 2a \end{array} \xrightarrow{(-)} a | 3b-2a$

④ $\begin{array}{l} a | b \Rightarrow a^2 | b^2 \\ a | a \Rightarrow a^2 | a^2 \end{array} \Rightarrow a^2 | a^2+b^2$

③ ممکن است درست نباشد.

برای مثال اگر $a=3$ و $b=6$ باشد، $a^2 | a+b$ زیرا $9 | 3+6$ اما: $9 \nmid 3-6$

۵۶- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $ab | c$ می‌توان نتیجه گرفت: $a | c$ و $b | c$. داریم:

$$ab | a+b \Rightarrow \begin{array}{l} a | a+b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a | a+b \\ a | a \end{array}\right. \Rightarrow a | b \\ b | a+b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b | a+b \\ b | b \end{array}\right. \Rightarrow b | a \end{array} \Rightarrow a=b$$

حالا اگر در رابطهٔ اصلی جایگزین کنیم، داریم:

$$a^2 | a+a \Rightarrow a^2 | 2a \xrightarrow{\div a} a | 2 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } 2$$

بنابراین فقط دو حالت وجود دارد: $a=b=1$ یا $a=b=2$.

① و ② که واضح است درست‌اند.

در مورد ③ اگر $a=b=1$ باشد، داریم: $2 | 1+2$ که نادرست است.

در ④ اگر $a=b=1$ باشد، داریم: $1 | 1+2$ و اگر $a=b=2$ باشد، داریم: $2 | 2+2$، که هر دو درست‌اند.

۵۷- گزینهٔ ۳ بهترین راه برای پاسخ‌گویی به این سؤالات این است که به وسیلهٔ دو عدد توان‌دار، a^2 و b^3 را برابر کنیم. راحت‌ترین راه هم این‌طوری است که پایه را ۲ بگیریم، توان a را به b بدهیم و توان b را به a یعنی:

$$a = 2^3 \qquad b = 2^2$$

در این صورت $a^2 | b^3$ زیرا $(2^3)^2 | (2^2)^3$.

حالا به ازای این مقادیر a و b گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① $a^5 | b^8 \Rightarrow (2^3)^5 | (2^2)^8 \Rightarrow 2^{15} | 2^{16}$ ✓

② $a^3 | b^5 \Rightarrow (2^3)^3 | (2^2)^5 \Rightarrow 2^9 | 2^{10}$ ✓

③ $a^7 | b^{10} \Rightarrow (2^3)^7 | (2^2)^{10} \Rightarrow 2^{21} | 2^{20}$ ✗

④ $a^4 | b^7 \Rightarrow (2^3)^4 | (2^2)^7 \Rightarrow 2^{12} | 2^{14}$ ✓

همان‌طور که می‌بینید برای ③ مثال نقض پیدا کردیم.

۵۸- گزینهٔ ۲ داریم $(a+1)^2 | b^5$ همان‌طور که در سؤال‌های قبل دیدید دو طرف را برابر می‌کنیم:

$$a+1 = 2^5 \qquad b = 2^2$$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

① $a+1 | b^2 \Rightarrow 2^5 | (2^2)^2$ ✗

② $a+1 | b^3 \Rightarrow 2^5 | (2^2)^3$ ✓

③ $(a+1)^3 | b^6 \Rightarrow (2^5)^3 | (2^2)^6$ ✗

④ $(a+1)^3 | b^7 \Rightarrow (2^5)^3 | (2^2)^7$ ✗

۵۹- گزینهٔ ۳

$$a | b+3 \Rightarrow b+3 = aq \Rightarrow b = aq-3$$

$$a | c-2 \Rightarrow c-2 = aq' \Rightarrow c = aq'+2$$

دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$bc = \underbrace{a^2qq' + 2aq - 3aq'}_{\text{بر a بخش‌پذیر است.}} - 6$$

سه جملهٔ اول، بر a بخش‌پذیر است. از طرفی می‌دانیم باقی‌مانده نمی‌تواند عددی منفی باشد، بنابراین:

$$bc+1 = a(\overbrace{aqq'+2q-3q'}^{k}) - 5 = ak-5 = ak-a+a-5$$

$$= a(k-1) + \underbrace{a-5}_{r}$$

بنابراین باقی‌مانده برابر $a-5$ است.

۶۰- گزینهٔ ۲

$$10 | a \Rightarrow a = 10k$$

ابتدا کل مضارب دورقمی ۱۰ را پیدا می‌کنیم:

$$10 \le 10k < 100 \Rightarrow 1 \le k < 10$$

پس به ازای ۹ عدد رابطه برقرار است. حالا از میان این‌ها باید عددهایی که مضرب ۱۵ هستند را حذف کنیم، یعنی ۳۰، ۶۰ و ۹۰، بنابراین ۶ عدد دورقمی وجود دارد که بر ۱۰ بخش‌پذیر است ولی بر ۱۵ بخش‌پذیر نیست.

۶۱- گزینهٔ ۱ می‌دانیم سمت راست یک رابطهٔ عادکردن را در هر عدد دلخواهی می‌توان ضرب کرد:

$$x-2 | x-2 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times 7} x-2 | 7x-14$$

از طرفی داریم $x-2 | 7x+5$.

همچنین می‌دانیم اگر $a | b$ و $a | c$، آن‌گاه $a | b-c$. این‌جا داریم:

$$\begin{array}{l} x-2 | 7x-14 \\ x-2 | 7x+5 \end{array} \xrightarrow{(-)} x-2 | -19$$

بزرگ‌ترین عددی که ۱۹− را می‌شمارد عدد ۱۹ است. پس:

$$x-2 = 19 \Rightarrow x = 21 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 1+2 = 3$$

۶۲- گزینهٔ ۴ می‌دانیم اگر $a | b$ آن‌گاه $a | mb$.

$$\begin{array}{l} a | 2m+3 \xrightarrow{\times 5} a | 10m+15 \\ a | 5m+4 \xrightarrow{\times 2} a | 10m+8 \end{array} \xrightarrow{(-)} a | 7 \Rightarrow a = 1, 7$$

چون $a \neq 1$ است، پس $a = 7$.

۶۳- گزینهٔ ۳ از اتحاد $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$ استفاده می‌کنیم و سعی می‌کنیم b را از سمت راست تساوی حذف کنیم:

$$a | b+2 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times(b^2-2b+4)} \begin{array}{l} a | b^3+8 \\ a | b^3+1 \end{array} \Rightarrow a | 7$$

۶۴- گزینهٔ ۳ x را از سمت راست رابطه حذف می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 3x+2 | 3x+2 \xrightarrow{\times 5} 3x+2 | 15x+10 \\ 3x+2 | 5x+7 \xrightarrow{\times 3} 3x+2 | 15x+21 \end{array} \xrightarrow{(-)} 3x+2 | 11$$

$3x+2 = 11 \Rightarrow x = 3$ ✓

$3x+2 = -11$ ✗

$3x+2 = 1$ ✗

$3x+2 = -1 \Rightarrow x = -1$ ✓

۶۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم طبق قرارداد تنها عددی که به ازای آن رابطهٔ $a \mid 0$ برقرار است، عدد صفر است. پس این رابطه تنها زمانی برقرار است که $x^7-4x^5-x^3+4x=0$ باشد. داریم:

$$x(x^6-4x^4-x^2+4)=x(x^4-1)(x^2-4)=0$$
$$\Rightarrow x(x^2-1)(x^2+1)(x-2)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x-2)(x+2)=0$$

پس رابطه به ازای $x=0$، $x=1$، $x=-1$، $x=-2$ و $x=2$ برقرار است، اما چون مقادیر طبیعی x خواسته شده، فقط $x=1$ و $x=2$ قابل‌قبول است.

۶۶- گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر x عددی بزرگ باشد، $|x^3+1|$ از $|x^2+1|$ بیشتر است، بنابراین فقط ممکن است به ازای عددهای کوچک این رابطه برقرار باشد. کسر $\frac{x^2+1}{x^3+1}$ را در نظر بگیرید. x را تا جایی بزرگ می‌کنیم که قدرمطلق مخرج از قدرمطلق صورت بیشتر شود. مشخص است از آن‌جا به بعد هیچ‌وقت رابطه برقرار نیست.

$$\left.\begin{aligned} &x=0 \Rightarrow 1\mid 1 \quad ✓\\ &x=1 \Rightarrow 2\mid 2 \quad ✓\\ &x=2 \Rightarrow 9\mid 5 \quad ✗\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{سؤال گفته x طبیعی باشد.}$$

به ازای $x>2$ رابطه برقرار نیست.

$$\left.\begin{aligned} &x=-1 \Rightarrow 0\mid 2 \quad ✗\\ &x=-2 \Rightarrow -7\mid 5 \quad ✗\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{سؤال گفته x طبیعی است.}$$

پس رابطه فقط به ازای عدد ۱ برقرار است.

۶۷- گزینهٔ ۱ کسر $\frac{n+6}{n^2+2}$ باید عددی صحیح شود.

می‌دانیم رشد مخرج از صورت، بیشتر است. یعنی اگر n عددی بزرگ باشد، مخرج از صورت بیشتر می‌شود و رابطه برقرار نیست. در میان عددهای کوچک، رابطه را بررسی می‌کنیم:

$$n=0 \Rightarrow \frac{6}{2}=3 \quad ✓$$
$$n=1 \Rightarrow \frac{7}{3} \quad ✗$$
$$n=-1 \Rightarrow \frac{5}{3} \quad ✗$$
$$n=2 \Rightarrow \frac{8}{6} \quad ✗$$
$$n=-2 \Rightarrow \frac{4}{6} \quad ✗$$

به ازای $n\geq 3$ و $n\leq -3$ صورت کسر از مخرج، کوچک‌تر می‌شود که اگر $n+6$ و n^2+2 عددهایی غیرصفر باشند، $n+6$ نمی‌تواند بر n^2+2 بخش‌پذیر باشد.

اما اگر $n=-6$ باشد، صورت کسر صفر می‌شود و حاصل کسر برابر صفر می‌شود، پس به ازای دو عدد $n=0$ و $n=-6$ کسر عدد صحیحی می‌شود.

۶۸- گزینهٔ ۴ ابتدا y را برحسب x پیدا می‌کنیم:

$$2yx+2=3x-y \Rightarrow 2yx+y=3x-2 \Rightarrow y=\frac{3x-2}{2x+1}$$

اگر قرار باشد y عددی صحیح باشد، کسر $\frac{3x-2}{2x+1}$ باید صحیح باشد پس باید $2x+1 \mid 3x-2$. داریم:

$$\left.\begin{aligned} &2x+1\mid 2x+1 \xrightarrow{\times 3} 2x+1\mid 6x+3\\ &2x+1\mid 3x-2 \xrightarrow{\times 2} 2x+1\mid 6x-4\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x+1\mid 7$$

$$2x+1=7 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=1 \quad ✓$$
$$2x+1=-7 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow y=2 \quad ✓$$
$$2x+1=1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-2 \quad ✓$$
$$2x+1=-1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=5 \quad ✓$$

۶۹- گزینهٔ ۳ **راه اول** عدد را x می‌نامیم. $4x+1$ باید بر $3x-1$ بخش‌پذیر باشد یا به بیان دیگر $3x-1 \mid 4x+1$.

گفتیم که می‌شود برای پیداکردن x در این‌گونه سؤال‌ها ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داد، مخرج‌مشترک گرفته، عبارت را ساده کرد و صورت کسر را پیدا کرد. عبارت سمت چپ، صورت کسر عبارت سمت راست را می‌شمارد. نگاه کنید:

$$3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{را در } 4x+1 \text{ جایگزین می‌کنیم.}\ \frac{1}{3}} \frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$$

صورت کسر ۷ است. پس:

$$3x-1\mid 7 \Rightarrow 3x-1=1 \quad ✗$$
$$3x-1=-1 \Rightarrow x=0 \quad ✓$$
$$3x-1=7 \quad ✗$$
$$3x-1=-7 \Rightarrow x=-2 \quad ✓$$

پس به ازای دو عدد صحیح رابطه برقرار است.

راه دوم

$$\left.\begin{aligned} &3x-1\mid 3x-1 \xrightarrow{\times 4} 3x-1\mid 12x-4\\ &3x-1\mid 4x+1 \xrightarrow{\times 3} 3x-1\mid 12x+3\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(-)} 3x-1\mid 7$$

و ادامهٔ ماجرا!

۷۰- گزینهٔ ۳

$$x-2\mid x-2 \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times(x+2)} x-2\mid x^2-4$$
$$\text{ازطرفی:}\ x-2\mid x^2-a$$
$$\xrightarrow{(-)} x-2\mid a-4$$

اگر فقط به ازای دو عدد صحیح بخواهیم رابطه برقرار باشد، $a-4$ باید ۱ یا ۱- باشد:

$$a-4=1 \Rightarrow a=5$$
$$a-4=-1 \Rightarrow a=3$$

پس a فقط دو مقدار می‌تواند داشته باشد.

۷۱- گزینهٔ ۴ باید m را از سمت راست رابطه حذف کنیم تا به عدد برسیم:

$$\left.\begin{aligned} &a\mid 3m+1 \xrightarrow{\times(3m-1)} a\mid 9m^2-1\\ &a\mid m^2+2 \xrightarrow{\times 9} a\mid 9m^2+18\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(-)} a\mid 19$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } 19$$

که بزرگ‌ترین مقدار آن برابر ۱۹ است.

۷۲- گزینهٔ ۱ سعی می‌کنیم k را از سمت راست رابطه‌ها حذف کنیم:

$$\left.\begin{aligned} &a\mid 7k+6 \xrightarrow{\times 9} a\mid 63k+54\\ &a\mid 9k+m \xrightarrow{\times 7} a\mid 63k+7m\end{aligned}\right\} \Rightarrow a\mid 7m-54$$

گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

$m=۷ \Rightarrow ۷m-۵۴=۴۹-۵۴=-۵$

$a\,|-۵ \Rightarrow a=۱,۵$

پس پاسخ همین گزینه است. برای محکم‌کاری! بقیهٔ گزینه‌ها را نیز بررسی می‌کنیم:

$m=۹ \Rightarrow ۷m-۵۴=۶۳-۵۴=۹$

$a\,|\,۹ \Rightarrow a=۱,۳,۹$

$m=۶ \Rightarrow ۷m-۵۴=۴۲-۵۴=-۱۲$

$a\,|-۱۲ \Rightarrow a=۱,۲,۳,۴,۶,۱۲$

$m=۱۰ \Rightarrow ۷m-۵۴=۷۰-۵۴=۱۶$

$a\,|\,۱۶ \Rightarrow a=۱,۲,۴,۸,۱۶$

۷۳- گزینهٔ ۴ چون $n>۳$ است پس در $n!$ حتماً عامل ۳ وجود دارد. پس $n!+۳$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

$n!+n-۱=n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱+n-۱$

$=(n-۱)(n(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱+۱)$

بر $n-۱$ بخش‌پذیر است. $n!-n+۱=n!-(n-۱)$

و طبق استدلال بالا بر $n-۱$ بخش‌پذیر است، پس اول نیست.

اما $n!+n+۱$ ممکن است اول باشد. برای مثال به ازای $n=۴$ داریم:

$۴!+۴+۱=۲۹$ اول است.

۷۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم:

$۱۰۰!=۱۰۰\times۹۹\times۹۸\times۹۷\times\cdots\times۳۱\times\cdots\times۱۲\times\cdots\times۳\times۲\times۱$

بنابراین در تجزیهٔ $۱۰۰!$ هر سه عامل ۹۷، ۳۱ و ۱۲ وجود دارد. بنابراین $۱۰۰!+۱۲$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است. (از ۱۲ می‌شود فاکتور گرفت.) $۱۰۰!+۳۱$ بر ۳۱ و $۱۰۰!+۹۷$ نیز بر ۹۷ بخش‌پذیر است.

۷۵- گزینهٔ ۳ $۲۱۰=۲\times۳\times۵\times۷$

$۸!$ و $۷!$ بر ۲۱۰ بخش‌پذیرند چون هر ۴ عامل فوق را دارند. پس فقط می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ ۷۲۰- بر ۲۱۰. از روش دوم پیداکردن باقی‌مانده در عددهای منفی، استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۷۲۰ & ۲۱۰ \\ \underline{-۶۳۰} & ۳ \\ ۹۰ & \end{array} \Rightarrow \text{باقی‌مانده}=۲۱۰-۹۰=۱۲۰$$

۷۶- گزینهٔ ۲ عدد $۶n+۳۰$ بر هر دو عدد ۲۱ و ۱۲ بخش‌پذیر است. یعنی یک مضرب مشترک این دو عدد است پس بر ک.م.م این دو عدد بخش‌پذیر است:

$[۱۲,۲۱]=[۲^۲\times۳\ ,\ ۳\times۷]=۲^۲\times۳\times۷=۸۴$

$$\begin{array}{l} ۱۲\,|\,۶n+۳۰ \\ ۲۱\,|\,۶n+۳۰ \end{array} \xrightarrow{\text{ک.م.م}} ۸۴\,|\,۶n+۳۰$$

$\Rightarrow ۶n+۳۰=۸۴q \xrightarrow{\div۶} n+۵=۱۴q \Rightarrow n=۱۴q-۵$

$۱۴q-۵\le۹۹ \Rightarrow ۱۴q\le۱۰۴ \Rightarrow q\le۷/۴$

$q_{max}=۷ \Rightarrow n_{max}=۱۴\times۷-۵=۹۳$

۷۷- گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $۱۴n^۲+۱۹n+۶=(۷n+۶)(۲n+۱)$

از طرفی:

$$\begin{array}{l} ۵\,|\,۲n+۱ \\ ۵\,|\,۵n+۵ \end{array} \xrightarrow{(+)} ۵\,|\,۷n+۶$$

هر دو عدد $۲n+۱$ و $۷n+۶$ بر ۵ بخش‌پذیرند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها همواره مضرب ۲۵ است.

۷۸- گزینهٔ ۳ به بهانهٔ این سؤال می‌خواهیم دو نکتهٔ مهم را با هم مرور کنیم. اگر عددی مثل x بر دو عدد a و b بخش‌پذیر باشد، یعنی مضرب هر دو است، پس کم‌ترین مقدار طبیعی آن ک.م.م دو عدد است و بقیهٔ مقادیر آن، مضارب ک.م.م آن دو عدد است. یعنی:

$$\begin{array}{l} a\,|\,x \\ b\,|\,x \end{array} \Rightarrow [a,b]\,|\,x$$

برای مثال در این سؤال:

$$\begin{array}{l} ۲۴\,|\,x \\ ۳۰\,|\,x \end{array}$$

یعنی عدد x هم بر ۲۴ بخش‌پذیر است و هم بر ۳۰. کوچک‌ترین عدد طبیعی که هم مضرب ۲۴ است و هم مضرب ۳۰ چه عددی است؟ مشخص است که ک.م.م ۲۴ و ۳۰. $[۲۴,۳۰]=[۲^۳\times۳,۲\times۳\times۵]=۲^۳\times۳\times۵=۱۲۰$

یعنی:

$$\begin{array}{l} ۲۴\,|\,x \\ ۳۰\,|\,x \end{array} \Rightarrow ۱۲۰\,|\,x$$

حالا برعکس داستان را نگاه کنید. فرض کنید ۲ عدد a و b بر عددی مثل x بخش‌پذیر باشند. مشخص است بزرگ‌ترین xی که این ویژگی را دارد همان ب.م.م دو عدد است و وقتی این دو عدد بر ب.م.م‌شان بخش‌پذیرند پس بر شمارنده‌های ب.م.م نیز بخش‌پذیرند. یعنی:

$$\begin{array}{l} x\,|\,a \\ x\,|\,b \end{array} \Rightarrow x\,|\,(a,b)$$

با مثال، بهتر می‌شود این مسئله را فهمید.

x یک مقسوم‌علیه مشترک ۲۴ و ۳۰ است.

$$\begin{array}{l} x\,|\,۲۴ \\ x\,|\,۳۰ \end{array}$$

البته (۱) هم درست است و باید اصلاح شود.

خب بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۲۴ و ۳۰ چند است؟

$(۲۴,۳۰)=(۲^۳\times۳,۲\times۳\times۵)=۲\times۳=۶$

یعنی بزرگ‌ترین عددی که هم ۲۴ بر آن بخش‌پذیر است و هم ۳۰، عدد ۶ است. خب وقتی این دو عدد هر دو بر ۶ بخش‌پذیرند واضح است که بر مقسوم‌علیه‌های ۶ یعنی ۳، ۲ و ۱ نیز بخش‌پذیرند. پس:

$$\begin{array}{l} x\,|\,۲۴ \\ x\,|\,۳۰ \end{array} \Rightarrow x\,|\,۶$$

۷۹- گزینهٔ ۲ می‌دانیم فقط عددهای اول دارای دو مقسوم‌علیه طبیعی هستند (مثلاً ۷ که عددی اول است فقط بر خودش و یک بخش‌پذیر است اما ۶ چون اول نیست بر خودش، یک، ۲ و ۳ بخش‌پذیر است).

بنابراین a و b باید عددهایی اول باشند. خب چه عددهای اولی عدد ۳۰ را می‌شمارند؟ $۳۰=۲\times۳\times۵$

با توجه به این‌که $a\neq b$ است، یکی از حالت‌های روبه‌رو امکان‌پذیر است:

a	b	a+b
۲	۳	۵
۲	۵	۷
۳	۲	۵
۳	۵	۸
۵	۲	۷
۵	۳	۸

بنابراین $a+b$ برابر ۶ نمی‌تواند باشد.

۸۰- گزینهٔ ۲ $x\,|\,۱۲$ و $x\,|\,۲۰$ را به صورت کسر می‌نویسیم. x باید جوری باشد که هر دو کسر عددهایی صحیح شوند. داریم:

$$\frac{۱۲}{x}=\frac{۲^۲\times۳}{x} \qquad \frac{۲۰}{x}=\frac{۲^۲\times۵}{x}$$

در صورت کسر اول فقط عوامل ۲ و ۳ و در صورت کسر دوم فقط عوامل ۲ و ۵ داریم. با توجه به این‌که هر دو کسر باید عددی صحیح شوند x فقط می‌تواند عامل

۲ داشته باشد (مثلاً اگر x عامل ۵ هم داشته باشد، کسر دوم ساده نمی‌شود). مشخص است بزرگ‌ترین عددی که هر دو کسر به ازای آن عددی صحیح می‌شود عدد ۴ است و مقادیر دیگر x عددهای ۱ و ۲ است. یعنی x سه مقدار طبیعی می‌تواند داشته باشد که بزرگ‌ترین آن عدد ۴ است.

۸۱- گزینهٔ ۱ ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم، داریم:

$$(۸n+۶,۴n+۱)=d$$

$$\begin{matrix} d|۴n+۱ \xrightarrow{\times ۲} d|۸n+۲ \\ d|۸n+۶ \qquad\quad d|۸n+۶ \end{matrix} \Rightarrow d|۴ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۴$$

اما مقادیر ۲ و ۴ برای d قابل‌قبول نیستند! چرا که $۴n+۱$ عددی فرد است و عدد فرد نمی‌تواند بر ۲ یا ۴ بخش‌پذیر باشد.

۸۲- گزینهٔ ۳ $[a,۴]=۱۲$ است یعنی ۱۲ از یک طرف مضرب a است. (یا به بیان دیگر a مقسوم‌علیه ۱۲ است) و از طرف دیگر a باید طوری باشد که کوچک‌ترین مضرب مشترک a و ۱۲ عدد ۱۲ باشد.

می‌دانیم: $a|۱۲ \xrightarrow{۰<a<۱۲} a=۱,۲,۳,۴,۶$

ک.م.م تک‌تک این عددها را با ۴ پیدا می‌کنیم:

$[۱,۴]=۴ \qquad [۳,۴]=۱۲ \qquad [۶,۴]=۱۲$

$[۲,۴]=۴ \qquad [۴,۴]=۴$

پس a برابر ۳ یا ۶ است و با همین استدلال b آن یکی است، یعنی اگر $a=۳$، آن‌گاه $b=۶$ و اگر $a=۶$ باشد، $b=۳$ است. پس $a+b$ در هر حالت برابر ۹ است.

۸۳- گزینهٔ ۳ گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

۱) $(۲n+۱,۲n-۱)=d$

$$\begin{matrix} d|۲n-۱ \\ d|۲n+۱ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|۲ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۲$$

اما $d=۲$ قابل‌قبول نیست. زیرا هر دو عدد $۲n-۱$ و $۲n+۱$ فردند و نمی‌توانند بر ۲ بخش‌پذیر باشند، پس $d=۱$.

۲) $(۲n+۱,۴n+۱)=d$

$$\begin{matrix} d|۲n+۱ \xrightarrow{\times ۲} d|۴n+۲ \\ d|۴n+۱ \qquad\quad d|۴n+۱ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|۱ \Rightarrow d=۱$$

۳) $(۲n+۱,۵n+۱)=d$

$$\begin{matrix} d|۲n+۱ \xrightarrow{\times ۵} d|۱۰n+۵ \\ d|۵n+۱ \xrightarrow{\times ۲} d|۱۰n+۲ \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|۳ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۳$$

که هر دو حالت قابل‌قبول است. برای مثال اگر $n=۱$ باشد: $(۳,۶)=۳$

پس $۲n+۱$ ممکن است نسبت به $۵n+۱$ اول نباشد. برای محکم‌کاری ۴ را نیز بررسی می‌کنیم:

۴) $(۲n+۱,۶n+۱)=d$

$$\begin{matrix} d|۲n+۱ \xrightarrow{\times ۳} d|۶n+۳ \\ d|۶n+۱ \qquad\quad d|۶n+۱ \end{matrix} \Rightarrow d|۲ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۲$$

مشابه آن‌چه در ۱ گفته شد $d=۲$ قابل‌قبول نیست.

۸۴- گزینهٔ ۱ همان‌طور که گفتیم:

$$\begin{matrix} x|a \\ x|b \end{matrix} \Rightarrow x|(a,b)$$

بنابراین:

$$\begin{matrix} x|۷۲ \\ x|۸۴ \end{matrix} \Rightarrow x|(۷۲,۸۴)$$

$$(۷۲,۸۴)=(۲^۳\times ۳^۲ , ۲^۲\times ۳\times ۷)=۲^۲\times ۳=۱۲ \Rightarrow x|۱۲$$

تنها عدد دورقمی که ۱۲ را می‌شمارد خود عدد ۱۲ است.

۸۵- گزینهٔ ۴ دیدیم که:

$$\begin{matrix} a|x \\ b|x \end{matrix} \Rightarrow [a,b]|x$$

بنابراین:

$$\begin{matrix} ۱۵|x \\ ۵۰|x \end{matrix} \Rightarrow [۱۵,۵۰]|x \Rightarrow [۳\times ۵,۲\times ۵^۲]|x$$

$$\Rightarrow ۲\times ۳\times ۵^۲|x \Rightarrow ۱۵۰|x$$

پس x مضرب ۱۵۰ است. مضارب ۳رقمی ۱۵۰ را پیدا می‌کنیم: $[\frac{۹۹۹}{۱۵۰}]=۶$

۸۶- گزینهٔ ۴ ابتدا $(۵۴,۹۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$(۵۴,۹۰)=(۲\times ۳^۳,۲\times ۳^۲\times ۵)=۲\times ۳^۲=۱۸$$

حالا با توجه به این‌که $x|۵۴$ و $x|۹۰$، x نیز یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۵۴ و ۹۰ است.

با توجه به این‌که:

$$\begin{matrix} x|a \\ x|b \end{matrix} \Rightarrow x|(a,b)$$

بنابراین:

$$\begin{matrix} x|۵۴ \\ x|۹۰ \end{matrix} \Rightarrow x|۱۸$$

پس x یک مقسوم‌علیه طبیعی ۱۸ است که خود ۱۸ نیز نیست. مقادیر قابل‌قبول برای x عبارت‌اند از: $x=۱,۲,۳,۶,۹$

۸۷- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $-۶|۶^۳$ بنابراین $[-۶,۶^۳]=۶^۳$ حالا باید ب.م.م دو عدد $۲^۹$ و $۶^۳$ را پیدا کنیم: $(۲^۳\times ۳^۳,۲^۹)=۲^۳$

مشخص است که بزرگ‌ترین عددی که هم $۲^۹$ بر آن بخش‌پذیر باشد، و هم $۲^۳\times ۳^۳$ عدد $۲^۳$ است.

۸۸- گزینهٔ ۳ می‌دانیم:

$$a|b \Rightarrow \begin{matrix} (a,b)=|a| \\ [a,b]=|b| \end{matrix}$$

بنابراین:

چون m طبیعی است. $m^۳|m^۷ \Rightarrow (m^۳,m^۷)=|m^۳|=m^۳$

$$m^۲|m^۵ \Rightarrow [m^۲,m^۵]=m^۵$$

$$m^۳|m^۵ \Rightarrow [m^۳,m^۵]=m^۵$$

۸۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم که:

$$a|b \Rightarrow \begin{cases} (a,b)=|a| \\ [a,b]=|b| \end{cases}$$

از طرف دیگر می‌بینیم d یا ب.م.م دو عدد a و b، هر دو را می‌شمارد، یعنی $d|a$ و $d|b$. هم‌چنین ک.م.م دو عدد یا $[a,b]$ بر هر دو عدد بخش‌پذیر است. یعنی:

$$a|[a,b] \qquad b|[a,b]$$

داریم:

$$d|a \Rightarrow d|a^۲ \Rightarrow [d,a^۲]=|a^۲|=a^۲$$

$$a|[a,b] \Rightarrow ([a,b],a)=|a| \Rightarrow (a^۲,|a|)=|a|$$

۹۰- گزینهٔ «۳» **راه اول** باید بررسی کنیم عددی که فرد است ولی مضرب ۳ نیست به چه فرمی است. عددی که مضرب ۳ نیست یعنی یا به صورت $3k+1$ است یا به صورت $3k+2$. اما از کجا معلوم این‌ها فردند؟ در عددهایی به فرم $3k+1$ اگر k زوج باشد عدد فرد و اگر k فرد باشد عدد زوج می‌شود. نگاه کنید:

فرد است. k زوج باشد $\Rightarrow k=2q \Rightarrow 3k+1=3(2q)+1=6q+1$

زوج است. k فرد است $\Rightarrow k=2q+1 \Rightarrow 3k+1=3(2q+1)+1=6q+4$

پس عدد ما می‌تواند به فرم $6q+1$ باشد.

حالا برویم سراغ عددهایی به فرم $3k+2$. این‌جا اگر k زوج باشد، $3k+2$ زوج و اگر k فرد باشد، $3k+2$ فرد است:

$$k \text{ زوج} \Rightarrow k=2q \Rightarrow 3k+2=6q+2$$

$$k \text{ فرد} \Rightarrow k=2q+1 \Rightarrow 3k+2=3(2q+1)+2=6q+5$$

پس عددهای ما یا به فرم $6q+1$اند یا به فرم $6q+5$. حالا باید ببینیم چند عدد این‌فرمی در فاصلهٔ خواسته‌شده وجود دارد:

$$6q+1<50 \Rightarrow 6q<49 \Rightarrow q<8/1 \Rightarrow q=\underbrace{0,1,2,\dots,8}_{\text{نه عدد}}$$

$$6q+5<50 \Rightarrow 6q<45 \Rightarrow q<7/5 \Rightarrow q=\underbrace{0,1,2,\dots,7}_{\text{هشت عدد}}$$

بنابراین در کل به ازای $9+8=17$ عدد رابطه برقرار است.

راه دوم اول کل عددهای فرد را حساب می‌کنیم.

$$2k+1<50 \Rightarrow 2k<49 \Rightarrow k<24/5 \Rightarrow k=0,1,2,\dots,24$$

۲۵ عدد فرد در این فاصله داریم. حالا پیدا می‌کنیم چندتا از این عددهای فرد مضرب ۳ هم هستند (یعنی هم فردند هم مضرب ۳)، پس فرم کلی آن‌ها به صورت $3(2q+1)$ خواهد بود.

$$6q+3<50 \Rightarrow 6q<47 \Rightarrow q<7/8 \Rightarrow q=0,1,2,\dots,7$$

بنابراین هشت‌تا از عددها مضرب ۳ هستند. $25-8=17$

۹۱- گزینهٔ «۲» می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد $d|a$ و $d|b$.

بنابراین با توجه به $(a,6)=3$ می‌توان نتیجه گرفت: $3|a \Rightarrow a=3k$

اما k نمی‌تواند زوج باشد، زیرا اگر k زوج باشد a مضرب ۶ می‌شود و در نتیجه $(a,6)=6$ می‌شود. پس k باید فرد باشد:

$$k=2q+1 \Rightarrow a=3(2q+1)=6q+3$$

$$\Rightarrow 3a+2=3(6q+3)+2=18q+\underbrace{11}_{9+2}=9(2q+1)+2$$

پس باقی‌ماندهٔ $3a+2$ بر ۹ برابر ۲ است.

۹۲- گزینهٔ «۴» ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(25n+9, 11n+4)=d$$

$$\begin{matrix} d|11n+4 \xrightarrow{\times 25} d|275n+100 \\ d|25n+9 \xrightarrow{\times 11} d|275n+99 \end{matrix} \Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

یعنی به ازای همهٔ مقادیر n دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند. خب چند عدد دورقمی داریم؟ درست است، ۹۰تا!

۹۳- گزینهٔ «۱» می‌دانیم $(a,b)=d$ باشد، $d|a$ و $d|b$. داریم:

$$(5n-2, 12n+7)=d$$

$$\begin{cases} d|5n-2 \xrightarrow{\times 12} d|60n-24 \\ d|12n+7 \xrightarrow{\times 5} d|60n+35 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d|59 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 59$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند ب.م.مشان ۵۹ است.

۹۴- گزینهٔ «۱» ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم، داریم:

$$(7n+5, 11n+2)=d$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} d|11n+2 \xrightarrow{\times 7} d|77n+14 \\ d|7n+5 \xrightarrow{\times 11} d|77n+55 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|41 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 41$$

پس ب.م.م دو عدد یا ۱ است و یا ۴۱ و بنابراین هیچ‌وقت نمی‌تواند ۳ باشد.

۹۵- گزینهٔ «۳» می‌دانیم $15a+3$ و $15a-12$ هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند. پس عدد ۳ یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است. یعنی d یک عامل ۳ دارد.

$$(15a-12, 15a+3)=d \Rightarrow \begin{matrix} d|15a-12 \\ d|15a+3 \end{matrix} \xrightarrow{(-)} d|15$$

چون d از یک طرف مضرب ۳ است و از طرف دیگر ۱۵ را می‌شمارد، پس $d=3$ یا ۱۵ اما $d=15$ نیز نمی‌تواند باشد، چون برای مثال عدد $15a+3$ در تقسیم به ۱۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۳ دارد و نمی‌تواند بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد.

بنابراین ب.م.م این دو عدد همواره برابر ۳ است.

توجه با یک مثال هم می‌شد فهمید!

$$a=1 \Rightarrow (15a+3, 15a-12)=(18,3)=3$$

۹۶- گزینهٔ «۱» ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. داریم:

$$(13!+5, 14!-8)=d$$

$$\begin{matrix} d|13!+5 \xrightarrow{\times 14} d|14!+70 \\ d|14!-8 \qquad\qquad d|14!-8 \end{matrix} \Rightarrow d|78$$

$$d=1,2,3,6,13,26,39,78$$

$$78=2\times 3\times 13$$

می‌دانیم در تجزیهٔ $13!$ همهٔ این عوامل وجود دارد. بنابراین $13!+5$ نمی‌تواند بر هیچ‌کدام از عددهای ۲، ۳، ۶، ۱۳، ۲۶، ۳۹ و ۷۸ بخش‌پذیر باشد، بنابراین $d=1$ است.

۹۷- گزینهٔ «۲» دیدیم که در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b عددهای یکتای q و r یافت می‌شوند به طوری که $a=bq+r$ و $0\le r<b$.

با توجه به این توضیح در این سؤال q و r به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم -107 بر ۷ است: $q=\left\lfloor\frac{-107}{7}\right\rfloor=\lfloor -15/2\rfloor=-16$

$$r=a-bq=-107-7\times(-16)=-107+112=5$$

$$\Rightarrow r-q=5-(-16)=21$$

۹۸- گزینهٔ «۱» $a=63q+17 \Rightarrow a+60=63q+77$

می‌دانیم در تقسیم یک عدد بر ۶۳ باقی‌مانده باید کم‌تر از ۶۳ باشد. بنابراین:

$$a+60=63q+63+14=63(q+1)+14$$

باقی‌ماندهٔ جدید ۱۴ است که نسبت به باقی‌ماندهٔ قبلی ۳ واحد کم شده و خارج‌قسمت جدید $q+1$ است که نسبت به خارج‌قسمت قبلی یکی زیاد شده است.

۹۹- گزینهٔ «۳» $a=23q+r,\ 0\le r<23$

$$a+41=23q+r+41$$

چون باقی‌مانده صفر است پس $r+41$ باید بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد. از طرفی $0\le r<23$ پس $41\le r+41<64$.

تنها مضرب ۲۳ در این فاصله عدد ۴۶ است. پس:

$$r+41=46 \Rightarrow r=5 \Rightarrow a+41=23q+46=23(q+2)$$

همان‌طور که دیده می‌شود خارج‌قسمت تقسیم، ۲ واحد زیاد می‌شود.

۱۰۰- گزینهٔ ۲ باقی‌ماندهٔ a بر ۱۷ برابر ۵ است. یعنی $a=17q+5$

داریم: $3a+4=3(17q+5)+4=51q+19$

$51q$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است. پس باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۷ برابر صفر است. فقط کافی است باقی‌ماندهٔ ۱۹ را بر ۱۷ پیدا کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 19 & 17 \\ \cline{2-2} -17 & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

۱۰۱- گزینهٔ ۴ عبارت خواسته‌شده را می‌سازیم:

$$5x-3y=5(13k+3)-3(13k'+11)=65k+15-39k'-33$$
$$=65k-39k'-18=65k-39k'-26+8=13(5k-3k'-2)+8$$

پس باقی‌ماندهٔ $5x-3y$ بر ۱۳ برابر ۸ است.

دقت کنید از رابطهٔ $5x-3y=65k-39k'-18$ نیز می‌شد باقی‌ماندهٔ $5x-3y$ را بر ۱۳ حساب کرد. ۶۵ و ۳۹ که بر ۱۳ بخش‌پذیرند پس $65k$ و $-39k'$ نیز بر ۱۳ بخش‌پذیرند و باقی‌ماندهٔ آن‌ها در تقسیم بر ۱۳ برابر صفر است. می‌ماند پیداکردن باقی‌ماندهٔ ۱۸- بر ۱۳.

از راه سومی که برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ عددهای منفی گفتیم، باقی‌مانده را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 18 & 13 \\ \cline{2-2} -13 & 1 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \Rightarrow 13-5=8$$

۱۰۲- گزینهٔ ۲

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} 10 & \end{array} \Rightarrow a=bq+10, 10<b$$

$$\begin{array}{l|l} a+100 & b \\ \cline{2-2} & q' \\ \cline{1-1} 11 & \end{array} \Rightarrow a+100=bq'+11, 11<b$$

$$\xrightarrow{(-)} 100=b(q-q')+1 \Rightarrow 99=b(q-q')$$

با توجه به این‌که $b>11$ است، پس تنها حالت قابل‌قبول برای b عددهای ۳۳ و ۹۹ است که کم‌ترین مقدار b عدد ۳۳ است.

۱۰۳- گزینهٔ ۳

$$\begin{array}{l} a-1=6k \\ a+1=8k' \end{array} \xrightarrow{\text{دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم.}} a^2-1=48kk'$$

$$\Rightarrow a^2=48kk'+1 \Rightarrow a^2-2=48kk'-1$$

باید باقی‌ماندهٔ $48kk'-1$ را بر ۲۴ پیدا کنیم. $48kk'$ که بر ۲۴ بخش‌پذیر است و باقی‌مانده‌ای بر ۲۴ ندارد. پس فقط کافی است باقی‌ماندهٔ ۱- را بر ۲۴ پیدا کنیم. از روش سوم پیداکردن باقی‌مانده در عددهای منفی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 24 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \Rightarrow \text{باقی‌مانده}=24-1=23$$

راه دیگر:

$$48kk'-1=48kk'-24+24-1=24(2kk'-1)+23=24q+23$$

۱۰۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم خارج‌قسمت تقسیم a بر b برابر است با: $(\frac{a}{b}]$.

بنابراین: $a=15k+4 \Rightarrow 8a-71=8(15k+4)-71=120k-39$

$$[\frac{120k-39}{20}]=[6k-1/95]=[6k]+[-1/95]=6k-2$$

۱۰۵- گزینهٔ ۴ برای پیداکردن خارج‌قسمت a بر b کافی است $[\frac{a}{b}]$ را به دست آوریم. داریم:

$$\left[\frac{20!-21}{20}\right]=\left[\frac{20\times19\times\cdots\times1}{20}-\frac{21}{20}\right]=[19!-1/05]$$
$$=[19!]+[-1/05]=19!-2$$

۱۰۶- گزینهٔ ۱ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b:

$a=bq+r\ ,\ 0\le r<b$

داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 35 \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} 5q & \end{array} \Rightarrow a=35q+5q\ ,\ 0\le 5q<35$$

$$\Rightarrow a=40q \Rightarrow q=0,1,2,3,4,5,6$$

به ازای $q=0$ عدد طبیعی نمی‌شود و به ازای $q=5$ و $q=6$ عدد بزرگ‌تر مساوی ۲۰۰ خواهد شد. بنابراین مقادیر قابل‌قبول برای q عبارت‌اند از: ۱,۲,۳,۴.

۱۰۷- گزینهٔ ۳ a و b عددهایی متمایز و مثبت‌اند.

$$\begin{array}{l|l} a & 23 \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} 2q^3 & \end{array} \Rightarrow a=23q+2q^3, 0\le 2q^3<23 \Rightarrow q=1,2$$

$$\begin{array}{l|l} b & 23 \\ \cline{2-2} & q' \\ \cline{1-1} 2q'^3 & \end{array} \Rightarrow b=23q'+2q'^3, 0\le 2q'^3<23 \Rightarrow q'=1,2$$

چون قرار است a و b متمایز باشند، پس یا $q=1$ است و $q'=2$ و یا $q=2$ و $q'=1$. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} q=1 \Rightarrow a=25 \\ q'=2 \Rightarrow b=62 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=50+62=112$$

$$\begin{cases} q=2 \Rightarrow a=62 \\ q'=1 \Rightarrow b=25 \end{cases} \Rightarrow 2a+b=149$$

۱۰۸- گزینهٔ ۴ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b:

$a=bq+r\ ,\ 0\le r<b$

داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & 37 \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} q^2-2 & \end{array} \Rightarrow a=37q+q^2-2\ ,\ 0\le q^2-2<37$$

$$\Rightarrow 2\le q^2<39 \Rightarrow q=2,3,4,5,6$$

بیشترین مقدار q عدد ۶ است، بنابراین: $a=37\times6+36-2=256$ که مضرب ۱۶ است.

۱۰۹- گزینهٔ ۳ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b

$a=bq+r\ ,\ 0\le r<b$

داریم:

در این‌جا:

$$\begin{array}{l|l} a & 47 \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} q^2 & \end{array} \Rightarrow a=47q+q^2\ ,\ 0\le q^2<47 \Rightarrow q=0,1,2,\dots,6$$

چون بزرگ‌ترین عدد را می‌خواهیم q را برابر ۶ فرض می‌کنیم:

$a=47\times6+36=318$

$\text{مجموع ارقام}=3+1+8=12$

۱۱۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b:

$$a = bq + r \,,\, ۰ \le r < b$$

داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۱۳۷ & b \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{۱۶} & \end{array} \Rightarrow ۱۳۷ = bq + ۱۶ \,,\, ۱۶ < b$$

$$\Rightarrow ۱۲۱ = bq \Rightarrow b \mid ۱۲۱ \Rightarrow b = ۱, ۱۱, ۱۲۱$$

اما با توجه به شرط رابطهٔ تقسیم فقط $b = ۱۲۱$ قابل‌قبول است.

۱۱۱- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، داریم:

$$۰ \le r < b \,,\, a = bq + r$$

چون باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد، پس $r = b - ۱$؛ بنابراین:

$$a = bq + b - ۱ \Rightarrow a + ۱ = b(q + ۱) \Rightarrow b \mid a + ۱$$

از طرفی $b \mid a - ۱$، بنابراین: $\begin{array}{l} b \mid a+۱ \\ b \mid a-۱ \end{array} \xrightarrow{(+)} b \mid ۲ \Rightarrow b = ۱$ یا ۲

$b > ۱$ است، پس $b = ۲$ قابل قبول است.

$a+۱$ و $a-۱$ بر ۲ بخش‌پذیرند، پس هر دو زوج‌اند و a فرد است، در نتیجه $a^۲$ نیز فرد است و باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم به ۲ برابر ۱ است.

۱۱۲- گزینهٔ ۲ می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b داریم:

$$a = bq + r \,,\, ۰ \le r < b$$

در این‌جا:

$$\begin{array}{r|l} ۱۷۱ & b \\ \cline{2-2} & ۹ \\ \overline{r} & \end{array} \Rightarrow ۱۷۱ = ۹b + r \,,\, ۰ \le r < b$$

از شرط باقی‌مانده استفاده می‌کنیم: $r = ۱۷۱ - ۹b$

$$r \ge ۰ \Rightarrow ۱۷۱ - ۹b \ge ۰ \Rightarrow ۹b \le ۱۷۱ \Rightarrow b \le ۱۹$$

$$r < b \Rightarrow ۱۷۱ - ۹b < b \Rightarrow ۱۰b > ۱۷۱$$

$$\Rightarrow b > ۱۷/۱ \Rightarrow b = ۱۸, ۱۹$$

پس به ازای دو مقدار b، رابطه برقرار است.

۱۱۳- گزینهٔ ۱ داریم:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{۳۴} & \end{array} \Rightarrow a = bq + ۳۴ , ۳۴ < b$$

کم‌ترین مقدار b، عدد ۳۵ است.

$$a = ۳۵q + ۳۴$$

با توجه به این‌که q عددی طبیعی است، اگر $q = ۱$ باشد، $a = ۶۹$ است و اگر $q > ۱$ باشد، a عددی بزرگ‌تر از ۷۰ خواهد شد، پس فقط به ازای یک مقدار a، رابطه برقرار است.

۱۱۴- گزینهٔ ۳ در تقسیم به ۱۲، عددها را به ۱۲ شکل زیر می‌توان دسته‌بندی کرد:

$۱۲k$	زوج	$۱۲k+۶$	هم زوج هم مضرب ۳
$۱۲k+۱$	✓	$۱۲k+۷$	✓
$۱۲k+۲$	زوج	$۱۲k+۸$	زوج
$۱۲k+۳$	مضرب ۳	$۱۲k+۹$	مضرب ۳
$۱۲k+۴$	زوج	$۱۲k+۱۰$	زوج
$۱۲k+۵$	✓	$۱۲k+۱۱$	✓

همان‌طور که می‌بینید در چهار حالت، عبارت داده‌شده نه مضرب ۲ است و نه مضرب ۳ و در نتیجه باقی‌مانده به ۱۲، چهار حالت ۱، ۵، ۷ و ۱۱ را می‌تواند داشته باشد.

۱۱۵- گزینهٔ ۴ اول از همه این‌که می‌دانیم مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. اگر a فرد باشد $a^۲$ نیز فرد است، $a^۲ + ۴$ نیز فرد است. b عددی است که $a^۲ + ۴$ که عددی فرد است را می‌شمارد. پس b نیز فرد است. $a^۲$، $b^۲$ و $a^۲b^۲$ هر سه مربع‌های عددهای فردند که در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند. پس باقی‌ماندهٔ $a^۲ + b^۲ + a^۲b^۲$ بر ۸ برابر است با ۳.

$$a^۲ + b^۲ + a^۲b^۲ = a^۲ + b^۲ + (ab)^۲ = ۸k + ۱ + ۸k' + ۱ + ۸k'' + ۱$$

$$= ۸(k + k' + k'') + ۳$$

۱۱۶- گزینهٔ ۱ می‌دانیم مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. با توجه به این‌که $۱^۲$، $۵^۲$، ...، $۹۷^۲$ همگی عددهای فردند، باقی‌ماندهٔ همهٔ آن‌ها در تقسیم به ۸ برابر ۱ است. کافی است تعداد این عددها را به دست آوریم: $۱,۵,۹,\ldots,۹۷$

تشکیل یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۴ می‌دهند که جملهٔ اول آن عدد ۱ و جملهٔ nام آن ۹۷ است. با توجه به این‌که $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ داریم:

$$a_n = ۱ + (n-۱) \times ۴ = ۹۷ \Rightarrow ۴(n-۱) = ۹۶ \Rightarrow n = ۲۵$$

تک‌تک این ۲۵ عدد در تقسیم به ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارند. پس:

$$\underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{۲۵\text{تا}} = ۲۵$$

و باقی‌ماندهٔ ۲۵ در تقسیم به ۸ برابر ۱ است.

۱۱۷- گزینهٔ ۲ دو عدد متوالی را k و $k+۱$ می‌نامیم. داریم:

$$(k+۱)^۳ - k^۳ = ۳k^۲ + ۳k + ۱ = ۳k(k+۱) + ۱$$

چون $k+۱$ و k دو عدد متوالی‌اند پس حاصل‌ضرب آن‌ها زوج‌اند. یعنی به جای $k(k+۱)$ می‌شود نوشت ۲q در این صورت: $(k+۱)^۳ - k^۳ = ۶q + ۱$

یعنی اختلاف مکعب‌های دو عدد متوالی در تقسیم به ۶، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. باقی‌ماندهٔ گزینه‌ها را در تقسیم به ۶ پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۳۲۹ & ۶ \\ \cline{2-2} \underline{۳۰} & ۵۴ \\ ۲۹ & \\ \underline{۲۴} & \\ ۵ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۳۳۱ & ۶ \\ \cline{2-2} \underline{۳۰} & ۵۵ \\ ۳۱ & \\ \underline{۳۰} & \\ ۱ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۳۳۴ & ۶ \\ \cline{2-2} \underline{۳۰} & ۵۵ \\ ۳۴ & \\ \underline{۳۰} & \\ ۴ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۳۳۷ & ۶ \\ \cline{2-2} \underline{۳۰} & ۵۶ \\ ۳۷ & \\ \underline{۳۶} & \\ ۱ & \end{array}$$

۱ و ۳ حذف می‌شوند اما از میان ۲ و ۴ باید بررسی کنیم کدام می‌تواند به فرم $۳k(k+۱) + ۱$ باشد. داریم:

$$۳k(k+۱) + ۱ = ۳۳۱ \Rightarrow k(k+۱) = ۱۱۰ \Rightarrow k = ۱۰ \quad ✓$$

$$۳k(k+۱) + ۱ = ۳۳۷ \Rightarrow k(k+۱) = ۱۱۲ \quad ✗$$

هیچ دو عدد پشت‌سرهمی وجود ندارد که حاصل‌ضرب‌شان برابر ۱۱۲ شود.

۱۱۸- گزینهٔ ۱ می‌دانیم در تقسیم عدد k بر عدد ۵، پنج نوع باقی‌ماندهٔ مختلف وجود دارد. در هر ۵ حالت، باقی‌ماندهٔ $k^۲ + ۱$ را بر ۵ به دست می‌آوریم:

$k = ۵q \Rightarrow k^۲ + ۱ = ۲۵q^۲ + ۱ \Rightarrow$ در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.

$k = ۵q + ۱ \Rightarrow k^۲ + ۱ = ۲۵q^۲ + ۱۰q + ۲ \Rightarrow$ در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

$k = ۵q + ۲ \Rightarrow k^۲ + ۱ = ۲۵q^۲ + ۲۰q + ۵ \Rightarrow$ مضرب ۵ است.

$k = ۵q + ۳ \Rightarrow k^۲ + ۱ = ۲۵q^۲ + ۳۰q + ۱۰ \Rightarrow$ مضرب ۵ است.

$k = ۵q + ۴ \Rightarrow k^۲ + ۱ = ۲۵q^۲ + ۴۰q + ۱۷ \Rightarrow$ در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

بنابراین باقی‌ماندهٔ $k^۲ + ۱$ در تقسیم به ۵ هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر ۳ و ۴ باشد.

۱۱۹- گزینهٔ ۴ می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $۸q+۱$ نمایش داد. داریم:

$$a^۴-b^۴=(a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲) \Rightarrow a^۴-b^۴$$
$$=(۸q+۱-۸q'-۱)(۸q+۱+۸q'+۱)=(۸q-۸q')(۸q+۸q'+۲)$$
$$=[۸(q-q')]۲(۴q+۴q'+۱)=۱۶(q-q')(۴q+۴q'+۱)$$

پس عبارت، همواره بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

۱۲۰- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $۲۷=۳^۳$ و $۹=۳^۲$. داریم:

$$۲۷^m \mid ۹^n \Rightarrow ۳^{۳m} \mid ۳^{۲n}$$

این رابطه زمانی برقرار است که $۳m \le ۲n$ یا $\frac{۳}{۲}m \le n$ باشد. (اگر درست نمی‌فهمید به کسر معادل این رابطه فکر کنید. $\frac{۳^{۲n}}{۳^{۳m}}$ باید عددی صحیح باشد، چه زمانی این اتفاق رخ می‌دهد؟ وقتی توان ۳ صورت بزرگ‌تر یا معادل توان ۳ مخرج باشد.) حالا برویم سراغ ساده‌کردن رابطهٔ $۶۴^m \mid a^n$. داریم:

$$۶۴^m \mid a^n \Rightarrow ۲^{۶m} \mid a^n$$

اگر کسر معادل این رابطه یعنی $\frac{a^n}{۲^{۶m}}$ را در نظر بگیریم، مشخص است که در مخرج یک عالمه ۲ داریم. بنابراین a حتماً باید ۲ یا توانی از ۲ باشد. هم‌چنین می‌دانیم کم‌ترین مقدار a خواسته شده، اما اگر $a=۲$ باشد به کسر $\frac{۲^n}{۲^{۶m}}$ می‌رسیم که همیشه برقرار نیست، چون داشتیم $\frac{۳m}{۲} \le n$ ولی این‌جا باید $n \ge ۶m$ باشد.

برای آن‌که به رابطهٔ $\frac{۳m}{۲} \le n$ برسیم a دست‌کم باید ۱۶ باشد. در این صورت داریم:

$$۶۴^m \mid ۱۶^n$$

که اگر آن را ساده کنیم:

$$۲^{۶m} \mid ۲^{۴n} \Rightarrow ۶m \le ۴n \Rightarrow \frac{۳m}{۲} \le n$$

پس کم‌ترین مقدار a عدد ۱۶ است که مجموع ارقام آن $۷=۶+۱$ است.

۱۲۱- گزینهٔ ۱ $n+۳$ باید بر ۵ و $n^۳+۲n$ باید بر ۱۰ بخش‌پذیر باشند داریم:

$$۵ \mid n+۳ \Rightarrow n+۳ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow n \overset{۵}{\equiv} -۳ \overset{۵}{\equiv} ۲$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n^۳ \overset{۵}{\equiv} ۸ \\ ۲n \overset{۵}{\equiv} ۴ \end{cases} \Rightarrow n^۳+۲n \overset{۵}{\equiv} ۲$$

واضح است عددی که در تقسیم به ۵ باقی‌مانده‌ای برابر دو دارد نمی‌تواند بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد بنابراین رابطه به ازای هیچ عدد صحیحی برقرار نیست.

۱۲۲- گزینهٔ ۴ اگر بخواهیم کسر عددی صحیح باشد باید $۲x+۱ \mid x^۳+۵$. ریشهٔ عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار داده صورت کسر را پیدا می‌کنیم:

$$۲x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow \left(\frac{-۱}{۲}\right)^۳+۵=-\frac{۱}{۸}+۵=\frac{۳۹}{۸}$$

پس $۲x+۱ \mid ۳۹$. چون بزرگ‌ترین مقدار x خواسته شده است.

$$۲x+۱=۳۹ \Rightarrow x=۱۹ \Rightarrow \text{کسر}=\frac{۱۹^۳+۵}{۳۹}=۱۷۶$$

۱۲۳- گزینهٔ ۴ رابطهٔ $n^۲ \mid ۶^n$ را به کسر تبدیل می‌کنیم. کسر $\frac{۶^n}{n^۲}$ باید عددی صحیح باشد.

$$\frac{۶^n}{n^۲}=\frac{۲^n \times ۳^n}{n^۲}$$

در صورت کسر فقط عوامل ۲ و ۳ وجود دارد. بنابراین عددهایی که به‌جز این دو عامل را داشته باشند نمی‌توان در مخرج قرار داد. برای مثال رابطه به ازای $n=۱۰$ برقرار نیست. چون در تجزیهٔ ۱۰ عامل ۵ وجود دارد و این ۵ با صورت ساده نمی‌شود. حالا در میان عددهای طبیعی دورقمی آن‌هایی را که فقط عوامل ۲ و ۳ در تجزیه‌شان دارند پیدا می‌کنیم:

$$\{۱۲,۱۶,۱۸,۲۴,۲۷,۳۲,۳۶,۴۸,۵۴,۶۴,۷۲,۸۱,۹۶\}$$

۱۲۴- گزینهٔ ۲ می‌دانیم: $۷ \mid ۳x+۲y$ و $۷ \mid ۷x$

اگر بخواهیم در سمت راست رابطه یک x باقی بماند، می‌توانیم رابطهٔ پایینی را در ۲ ضرب کنیم و رابطه‌ها را از هم کم کنیم:

$$\begin{array}{l} ۷ \mid ۷x \\ ۷ \mid ۶x+۴y \end{array} \xrightarrow{(-)} ۷ \mid x-۴y$$

خب m می‌تواند -۴ باشد اما -۴ در گزینه‌ها نیست. بنابراین:

$$\begin{array}{l} ۷ \mid x-۴y \\ ۷ \mid ۷y \end{array} \xrightarrow{(+)} ۷ \mid x+۳y$$

حالا درست شد و m می‌تواند برابر ۳ باشد.

۱۲۵- گزینهٔ ۴

$$\begin{cases} a-b \mid a-b \xrightarrow{\times(a+b)} a-b \mid a^۲-b^۲ \\ a-b \mid a^۲+b^۲ \qquad\qquad a-b \mid a^۲+b^۲ \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(-)} a-b \mid ۲b^۲ \quad (I)$$
$$\xrightarrow{(+)} a-b \mid ۲a^۲ \quad (II)$$

پس ① درست است.

$$a-b \mid a-b \xrightarrow{\times ۲a} a-b \mid ۲a^۲-۲ab$$
$$\xrightarrow{\text{با توجه به } (II)} a-b \mid ۲a^۲ \Rightarrow a-b \mid ۲ab \quad (III)$$

پس ② نیز درست است.

$$a-b \mid a-b \xrightarrow{\times(a-b)} a-b \mid a^۲+b^۲-۲ab$$
$$\xrightarrow{\text{با توجه به } (III)} a-b \mid ۲ab \xrightarrow{\times ۲} a-b \mid ۴ab$$
$$\xrightarrow{(+)} a-b \mid (a+b)^۲$$

پس ③ نیز درست است.

④ اما نادرست است. اگر $a=۵$ و $b=۳$ باشد، $۵-۳ \mid ۵^۲+۳^۲$ اما $۵-۳ \nmid ۳^۴$.

۱۲۶- گزینهٔ ۱ اگر x زوج باشد $x^۲+۱$ فرد است و اگر x فرد باشد $۵x+۲$ فرد است. با توجه به این‌که ۲^x عددی است که فقط و فقط در تجزیه‌اش عوامل ۲ دارد نمی‌تواند بر عددی فرد بخش‌پذیر باشد مگر این‌که آن عدد فرد ۱ یا -۱ باشد. $۵x+۲$ که نمی‌تواند برابر ۱ یا -۱ باشد اما اگر $x^۲+۱=۱$، $x=۰$ باشد، است که به ازای $x=۰$ رابطه به صورت $۲ \mid ۱$ درمی‌آید که باز نادرست است. پس این رابطه هیچ‌گاه برقرار نیست.

۱۲۷- گزینهٔ ۴ سعی می‌کنیم $۱۴n^۲+۱۹n+۶$ را تجزیه کنیم. به طوری که یکی از عوامل آن $۲n+۱$ باشد. برای این‌کار $۱۴n^۲+۱۹n+۶$ را بر $۲n+۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ۱۴n^۲+۱۹n+۶ & ۲n+۱ \\ \cline{2-2} -(۱۴n^۲+۷n) & ۷n+۶ \\ \cline{1-1} ۱۲n+۶ & \\ -(۱۲n+۶) & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

پس $۱۴n^۲+۱۹n+۶=(۲n+۱)(۷n+۶)$.

از طرفی:

$$\begin{cases}۵\mid ۲n+۱\\ ۵\mid ۵n+۵\end{cases}\xrightarrow{(+)} ۵\mid ۷n+۶$$

پس هر دو عدد $۲n+۱$ و $۷n+۶$ بر ۵ بخش‌پذیرند. بنابراین $(۷n+۶)(۲n+۱)$ مضرب ۲۵ است.

۱۲۸- گزینهٔ ۲ اعضای مجموعهٔ A به صورت زیر است:

$$A=\{۲,۴,۸,۱۶,...\}$$

می‌دانیم $a\in A$ است. اگر $a=۲$ باشد، داریم: $۲\mid k^۲+۲$

روشن است اگر k زوج باشد، این رابطه برقرار است، پس برای $a=۲$ می‌توان مقادیری برای k پیدا کرد که رابطه برقرار باشد.

اگر $a=۴$ باشد، رابطه به صورت $۴\mid k^۲+۲$ خواهد بود. مشخص است که اگر k فرد باشد، $k^۲+۲$ نیز فرد است و رابطه برقرار نیست. اما اگر k زوج باشد، داریم: $k=۲q \Rightarrow k^۲=۴q^۲ \Rightarrow k^۲+۲=۴q^۲+۲$

که این عبارت بر ۴ بخش‌پذیر نیست، چون در تقسیم به ۴ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که به ازای $a=۸$، $a=۱۶$ و ... نیز هیچ مقداری برای k وجود ندارد. پس فقط به ازای $a=۲$ می‌توان مقادیری برای k پیدا کرد.

۱۲۹- گزینهٔ ۴ ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم، داریم:

$$(a-۱,a^۲+a+۳)=d$$

$$d\mid a-۱ \xrightarrow{\text{سمت‌راست}\times(a+۲)} d\mid a^۲+a-۲\ (I)$$

$$d\mid a^۲+a+۳\ (II)$$

با توجه به (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases}d\mid a^۲+a-۲\\ d\mid a^۲+a+۳\end{cases}\xrightarrow{(-)} d\mid ۵ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۵$$

چون دو عدد نسبت به هم اول‌اند پس $d=۵$ نمی‌تواند باشد یعنی $a-۱$ نباید مضرب ۵ باشد. بنابراین: $a-۱\neq ۵k \Rightarrow a\neq ۵k+۱$

۱۳۰- گزینهٔ ۳ $(a,۲۴)=۶$ است، یعنی $۶\mid a \Rightarrow a=۶k$.

اما می‌خواهیم بررسی کنیم a چند عامل ۲ و چند عامل ۳ دارد. $a=۶k$ است اما اگر k زوج باشد، یعنی a دارای بیش از یک عامل ۲ باشد، آن‌گاه a بر ۱۲ هم بخش‌پذیر می‌شود در این صورت $(a,۲۴)=۱۲$ می‌شود. پس a نمی‌تواند بیشتر از یک عامل ۲ داشته باشد و دقیقاً یک عامل ۲ دارد.

از طرفی با توجه به تساوی $a=۶k$، می‌دانیم a دارای دست‌کم یک عامل ۳ است اما از آن‌جایی که ۱۲ نیز یک عامل ۳ دارد، اگر a بیش از یک عامل ۳ نیز داشته باشد (برای مثال $a=۷$ باشد) باز هم ب.م.م آن با ۲۴ برابر ۶ می‌شود. پس می‌شود نتیجه گرفت a دست‌کم یک عامل ۳ دارد. یعنی اگر a را به صورت تجزیه‌شده بنویسیم، داریم: $a=۲\times۳^n\times\cdots, n\geq۱$

(توجه دارید که a ممکن است عوامل ۵، ۷ و ... نیز داشته باشد.)

حالا می‌خواهیم $(a^۲,۲۱۶)$ را پیدا کنیم. داریم:

$$(a^۲,۲۱۶)=(۲^۲\times۳^{۲n}\times\cdots,۲^۳\times۳^۳)$$

با توجه به این‌که برای پیداکردن ب.م.م دو یا چند عدد فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در نظر می‌گیریم، این‌جا این‌که n چه عددی باشد برای ما تعیین‌کننده است. در توان‌های ۲ که یکی $۲^۲$ و دیگری $۲^۳$ است توان کوچک‌تر یعنی $۲^۲$ را در نظر می‌گیریم. اما در توان‌های ۳ دو حالت رخ می‌دهد، اگر $n=۱$ باشد، می‌شود $۳^۳$ و $۳^۲$ که توان کوچک‌تر $۳^۲$ است اما اگر $n\geq۲$ باشد توان کوچک‌تر $۳^۳$ خواهد شد. بنابراین:

$$n=۱ \Rightarrow (۲^۲\times۳^۲\ ,\ ۲^۳\times۳^۳)=۲^۲\times۳^۲=۳۶$$

$$n\geq۲ \Rightarrow (۲^۲\times۳^{۲n}\ ,\ ۲^۳\times۳^۳)=۲^۲\times۳^۳=۱۰۸$$

۱۳۱- گزینهٔ ۴ خوب است یک بار دیگر یادآوری کنیم: برای پیداکردن ب.م.م دو عدد فقط عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب می‌کنیم. اما برای پیداکردن ک.م.م دو عدد، عوامل مشترک را با توان بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. یک نکتهٔ دیگر را هم در این سؤال یاد بگیریم: (اثباتش را بی‌خیال شوید، هر چند واقعاً سخت نیست.)

برای پیداکردن مقدار مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد کافی است عدد را تجزیه کرده توان‌ها را با یک جمع کرده در هم ضرب کنیم:

$$\mathbf{n=p_۱^{\alpha_۱}\times p_۲^{\alpha_۲}\times\ldots\times p_k^{\alpha_k}}$$

$$\mathbf{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n}=(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)}$$

دیدیم که $\begin{matrix}x\mid a\\ x\mid b\end{matrix} \Rightarrow x\mid (a,b)$، بنابراین:

$$\begin{matrix}x\mid ۲^۳\times۳^۴\times۵^۳\times۷^۲\\ x\mid ۲^۵\times۳^۲\times۵^p\times۱۱\end{matrix} \Rightarrow x\mid ۲^۳\times۳^۲\times۵^{\min\{۳,p\}}$$

می‌دانیم $\min\{۳,p\}$ یا ۳ است و یا p. اگر ۳ باشد، داریم:

- $x\mid ۲^۳\times۳^۲\times۵^۳ \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های x}=۴\times۳\times۴=۴۸$ که امکان‌پذیر نیست. پس $\min\{۳,p\}=p$ است. یعنی $x\mid ۲^۳\times۳^۲\times۵^p$.

تعداد مقسوم‌علیه‌های x برابر است با: $(۳+۱)(۲+۱)(p+۱)=۱۲(p+۱)$

اما می‌دانیم تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۲۴تاست (۲۳تا به‌جز یک که با عدد ۱ می‌شود ۲۴تا). پس: $۱۲(p+۱)=۲۴ \Rightarrow p+۱=۲ \Rightarrow p=۱$

حالا ک.م.م دو عدد را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{matrix}A=۲^۳\times۳^۴\times۵^۳\times۷^۲\\ B=۲^۵\times۳^۲\times۵\times۱۱\end{matrix} \Rightarrow [A,B]=۲^۵\times۳^۴\times۵^۳\times۷^۲\times۱۱$$

که تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن برابر است با:

$$(۵+۱)(۴+۱)(۳+۱)(۲+۱)(۱+۱)=۷۲۰$$

۱۳۲- گزینهٔ ۱ ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. در این صورت:

$$(۹n-۱,n+۲)=d \Rightarrow \begin{cases}d\mid n+۲ \xrightarrow{\times۹} d\mid ۹n+۱۸\\ d\mid ۹n-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} d\mid ۱۹ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۱۹$$

از آن‌جایی که ب.م.م عددی بزرگ‌تر از ۱ است، پس $d=۱۹$ و دو عدد، بر ۱۹ بخش‌پذیرند:

$$n+۲=۱۹k \Rightarrow n=۱۹k-۲>۱۰۰ \Rightarrow ۱۹k>۱۰۲$$

$$\Rightarrow k>۵/۳ \xrightarrow{k=۶} n=۱۱۲ \Rightarrow ۱+۱+۲=۴$$

۱۳۳- گزینهٔ ۲ خارج‌قسمت تقسیم b بر ۸ را q فرض می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} b & ۸ \\ \hline & q \\ ۳ & \end{array} \Rightarrow b=۸q+۳$$

خارج‌قسمت a بر b را k فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline & k \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow a=bk+۱$$

a مضرب ۸ است، آن را به صورت $۸m$ در نظر گرفته و b را از بالا جایگزین می‌کنیم:

$$۸m=(۸q+۳)k+۱ \Rightarrow ۸m=۸kg+۳k+۱$$

$$\underbrace{۸m-۸kq}_{\text{مضرب ۸}}=۳k+۱$$

k باید طوری باشد که $۳k+۱$ مضرب ۸ باشد:

✗ $۱۵\times ۳+۱=۴۶$ مضرب ۳ نیست.

✓ $۱۳\times ۳+۱=۴۰$ مضرب ۸ است.

✗ $۱۱\times ۳+۱=۳۴$ مضرب ۸ نیست.

✗ $۹\times ۳+۱=۲۸$ مضرب ۸ نیست.

۱۳۴- گزینهٔ ۱ مقسوم، ۲۰ برابر باقی‌مانده است؛ یعنی $a=۲۰r$ و چون باقی‌مانده ماکزیمم است و می‌دانیم $۰\le r<b$، بیشترین مقدار r برابر است با: $r=b-۱$

داریم:

$$\begin{array}{l|l} ۲۰(b-۱) & b \\ \hline b-۱ & q \end{array} \Rightarrow ۲۰(b-۱)=bq+b-۱$$

$$\Rightarrow ۱۹(b-۱)=bq \Rightarrow \frac{b}{b-۱}=\frac{۱۹}{q}$$

b و $b-۱$ نسبت به هم اول‌اند (یعنی کسر، ساده نمی‌شود)، بنابراین b برابر ۱۹ است.

۱۳۵- گزینهٔ ۱ $a+۳$ مضرب ۷ است. پس:

$$a+۳=۷k \Rightarrow a=۷k-۳$$

در این صورت: $a-۱۱=۷k-۳-۱۱=۷k-۱۴$.

اگر k زوج باشد، $a-۱۱$ مضرب ۱۴ خواهد شد، پس k حتماً فرد است.

بنابراین: $k=۲q+۱ \Rightarrow a-۱۱=۷(۲q+۱)-۱۴ \Rightarrow a-۱۱=۱۴q-۷$

$$\Rightarrow a=۱۴q+۴$$

پس باقی‌ماندهٔ a بر ۱۴ برابر ۴ است.

۱۳۶- گزینهٔ ۲

$$\begin{array}{l|l} ۱۰۷ & b \\ \hline ۳ & q \end{array} \Rightarrow ۱۰۷=bq+۳, ۳<b \Rightarrow ۱۰۴=bq$$

$$\Rightarrow b|۱۰۴ \Rightarrow b|۲^۳\times ۱۳ \quad (I)$$

$$\begin{array}{l|l} ۸۳ & b \\ \hline ۵ & q' \end{array} \Rightarrow ۸۳=bq'+۵, ۵<b \Rightarrow ۷۸=bq'$$

$$\Rightarrow b|۷۸ \Rightarrow b|۲\times ۳\times ۱۳ \quad (II)$$

با توجه به دو رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} b|۲^۳\times ۱۳ \\ b|۲\times ۳\times ۱۳ \end{array}\right. \Rightarrow b|۲۶ \Rightarrow b=۱,۲,۱۳,۲۶$$

و با توجه به شرط رابطهٔ تقسیم، یعنی $b>۵$ فقط دو مقدار ۱۳ و ۲۶ برای b، قابل‌قبول است.

۱۳۷- گزینهٔ ۱ a فرد است، آن را به صورت $۲k+۱$ در نظر می‌گیریم.
همچنین باقی‌مانده مربع کامل است، پس آن را با $r^۲$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$\begin{array}{l|l} ۲k+۱ & ۲۰۰ \\ \hline r^۲ & q \end{array} \Rightarrow ۲k+۱=۲۰۰q+r^۲, ۰\le r^۲<۲۰۰ \Rightarrow ۰\le r\le ۱۴$$

اما اگر r زوج باشد، سمت راست تساوی عددی زوج و سمت راست آن عددی فرد خواهد شد که امکان‌پذیر نیست. بنابراین r عددی فرد بین صفر تا ۱۴ است.
اگر بخواهیم عدد، بیشترین مقدار خود را داشته باشد، کافی است q را برابر ۴ (اگر $q=۵$ باشد، عدد، چهاررقمی می‌شود) و r را برابر ۱۳ فرض کنیم، در این صورت: $a=۲۰۰\times ۴+۱۳^۲=۹۶۹$
که رقم دهگان آن ۶ است.

۱۳۸- گزینهٔ ۱

$$\begin{array}{l|l} A & ۵ \\ \hline ۲ & q \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} A & ۷ \\ \hline ۴ & q' \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} A & ۱۱ \\ \hline ۸ & q'' \end{array}$$

$$\Rightarrow A=۵q+۲ \qquad A=۷q'+۴ \qquad A=۱۱q''+۸$$

حالا باید یک‌جوری این سه‌تا رابطه را تبدیل به یک رابطه کنیم:
در فصل بعد که هم‌نهشتی را بیاموزیم می‌بینیم که با نوشتن کلاس هم‌ارزی این مدل سؤال‌ها را راحت‌تر می‌شود حل کرد، اما چون در کتاب درسی این نوع سؤال‌ها در درس دوم یا بخش‌پذیری آمده است، خوب است یاد بگیریم این نوع سؤال‌ها را بدون هم‌نهشتی چگونه می‌شود حل کرد. روش حل این مدل سؤال‌ها این‌طور است که باید یک عدد یکسانی پیدا کنیم که بر عددهای داده‌شده بخش‌پذیر باشد. برای مثال در این سؤال یعنی $A-۲$ بر ۵ بخش‌پذیر است. اما در رابطهٔ دوم که بر چیز خاصی بخش‌پذیر نیست و در نتیجه به درد نمی‌خورد:

$$A=۵q+۲ \Rightarrow A-۲=۵q$$
$$A=۷q'+۴ \Rightarrow A-۲=۷q'+۲$$

پس چه‌کار کنیم. رابطهٔ اول را یک بار دیگر نگاه کنید:

$$A=۵q+۲ \xrightarrow{+۳} A+۳=۵q+۵=۵(q+۱)$$

این‌بار ۳تا به A اضافه کردیم و دیدیم که $A+۳$ بر ۵ بخش‌پذیر است. برای بقیهٔ رابطه‌ها هم همین کار را بکنیم، ببینیم فایده‌ای دارد یا نه.

$$A=۷q'+۴ \Rightarrow A+۳=۷q'+۷=۷(q'+۱)$$
$$A=۱۱q''+۸ \Rightarrow A+۳=۱۱q''+۱۱=۱۱(q''+۱)$$

خُب! این به درد خورد. همان‌طور که می‌بینید $A+۳$ بر هر سه عدد ۵، ۷ و ۱۱ بخش‌پذیر است. پس بر ک.م.م آن‌ها یعنی $۵\times ۷\times ۱۱=۳۸۵$ نیز بخش‌پذیر است. بنابراین: $A+۳=۳۸۵k \Rightarrow A=۳۸۵k-۳$

اگر بخواهیم A بزرگ‌ترین مقدار سه‌رقمی خود را داشته باشد کافی است k را برابر ۲ فرض کنیم (اگر $k=۳$ باشد عدد سه‌رقمی می‌شود). $k=۲ \Rightarrow A=۷۶۷$

حالا فقط کافی است باقی‌ماندهٔ ۷۶۷ را بر ۲۳ به دست آوریم:

$$\begin{array}{l|l} ۷۶۷ & ۲۳ \\ \underline{۶۹} & ۳۳ \\ ۷۷ & \\ \underline{۶۹} & \\ ۸ & \end{array}$$

۱۳۹- گزینهٔ ۱ با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} A=۹q+۵ \xrightarrow{\times ۷} ۷A=۶۳q+۳۵ \\ A=۷q'+۶ \xrightarrow{\times ۹} ۹A=۶۳q'+۵۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-} ۲A=۶۳(q'-q)+۱۹$$

پس باقی‌ماندهٔ $۲A$ بر ۶۳ برابر ۱۹ است که عددی اول است.

۱۴۰- گزینهٔ ۴

$$\begin{array}{l|l} a & ۳۰ \\ \hline ۱۷ & q \end{array} \Rightarrow a=۳۰q+۱۷ \xrightarrow{\times ۴} ۴a=۱۲۰q+۶۸$$

$$\begin{array}{l|l} a & ۱۲ \\ \hline ۱۱ & q' \end{array} \Rightarrow a=۱۲q'+۱۱ \xrightarrow{\times ۵} ۵a=۶۰q'+۵۵$$

$$\xrightarrow{-} a=۶۰q'+۵۵-۱۲۰q-۶۸ \Rightarrow a=۶۰(\underbrace{q'-۲q'}_{k})-۱۳$$

$$=۶۰k-\underbrace{۶۰+۴۷}_{۱۳}=۶۰(k-۱)+۴۷$$

پس باقی‌ماندهٔ a بر ۶۰ برابر ۴۷ است.

۱۴۱- گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{array}{l}5\,|\,7a+1\\ 5\,|\,5a\end{array}\right. \Rightarrow 5\,|\,2a+1 \Rightarrow 2a+1=5q$$

$$\left.\begin{array}{l}5\,|\,3b+7\\ 5\,|\,5b+5\end{array}\right. \Rightarrow 5\,|\,2b-2 \Rightarrow 2b-2=5q'$$

$2a+1$ عددی فرد است، پس q نیز باید فرد باشد:

$$q=2k+1 \Rightarrow 2a+1=5(2k+1) \Rightarrow 2a+1=10k+5$$
$$\Rightarrow 2a=10k+4 \Rightarrow a=5k+2$$

$2b-2$ زوج است. پس q' باید زوج باشد:

$$q'=2k' \Rightarrow 2b-2=5(2k') \Rightarrow 2b-2=10k'$$
$$\Rightarrow 2b=10k'+2 \Rightarrow b=5k'+1$$

حالا $ab-1$ را تشکیل می‌دهیم: $ab-1=(5k+2)(5k'+1)-1$

$$=25kk'+5k+10k'+2-1=5(5kk'+k+2k')+1$$

پس باقی‌ماندهٔ $ab-1$ بر ۵ برابر ۱ است.

۱۴۲- گزینهٔ ۱

$$11\,|\,5a+4b+3 \quad (I)$$
$$11\,|\,a+3b+k \xrightarrow{\times 5} 11\,|\,5a+15b+5k \quad (II)$$

با توجه به ۲ رابطهٔ (I) و (II) داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}11\,|\,5a+4b+3\\ 11\,|\,5a+15b+5k\end{array}\right. \xrightarrow{(-)} \begin{array}{l}11\,|\,11b+5k-3\\ 11\,|\,11b\end{array}$$
$$\xrightarrow{(-)} 11\,|\,5k-3$$

در میان گزینه‌ها کوچک‌ترین عدد، ۵ است که به ازای همان $k=5$ عبارت $5k-3$ برابر ۲۲ می‌شود که بر ۱۱ بخش‌پذیر است. *در فصل بعد خواهید دید که این مدل سؤال‌ها را با معادلهٔ هم‌نهشتی به صورت ساده‌تری می‌توان پاسخ داد.*

۱۴۳- گزینهٔ ۲

$$\left.\begin{array}{l}7\,|\,a+3b \xrightarrow{\times 2} 7\,|\,2a+6b\\ \text{از طرفی: } 7\,|\,7b\end{array}\right\} \Rightarrow 7\,|\,2a-b$$

می‌خواهیم $7\,|\,2a+kb$، بنابراین: $\begin{array}{l}7\,|\,2a-b\\ 7\,|\,2a+kb\end{array} \xrightarrow{(-)} 7\,|\,(k+1)b$

b بر ۷ بخش‌پذیر نیست، پس $k+1$ باید مضرب ۷ باشد.

$$k+1=7q \Rightarrow k=7q-1$$

می‌دانیم $-3\le k\le 7$ است. در نتیجه: $-3\le 7q-1\le 7 \Rightarrow -2\le 7q\le 8$

این رابطه به ازای $-2\le 7q\le 8$ و $q=0$ برقرار است یعنی ۲ مقدار $k=-1$ و $k=6$.

۱۴۴- گزینهٔ ۱ پیش از حل سؤال لازم است بگوییم در فصل بعد و آموختن هم‌نهشتی ساده‌تر می‌توانید به این سؤال‌ها جواب دهید.

$$\begin{array}{l|l} N & 31\\ \hline & q\\ 26 & \end{array} \Rightarrow N=31q+26 \quad (I)$$

$$\begin{array}{l|l} N & 43\\ \hline & q'\\ q' & \end{array} \Rightarrow N=43q'+q',\ 0\le q'<43 \quad (II)$$

با توجه به رابطه‌های (I) و (II) داریم:

$$31q+26=44q' \Rightarrow 31q+26=31q'+13q'$$
$$\Rightarrow 31(q-q')=13q'-26 \Rightarrow 31(q-q')=13(q'-2)$$

سمت راست تساوی مضرب ۱۳ است، پس سمت چپ آن نیز باید مضرب ۱۳ باشد. یعنی $q-q'=13k$، داریم:

$$31(13k)=13(q'-2) \Rightarrow 31k=q'-2 \Rightarrow q'=31k+2$$

در رابطهٔ (II) دیدیم که $q'<43$ بنابراین k حداکثر می‌تواند ۱ باشد در نتیجه:

$$k=1 \Rightarrow q'=33 \Rightarrow N=44\times 33=1452$$

که رقم یکان آن برابر ۲ است.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ می‌دانیم a در تقسیم به ۳ سه حالت دارد یا مضرب ۳ است $(3k)$ یا در تقسیم به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد $(3k+1)$ و یا در تقسیم به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد $(3k+2)$. اگر a مضرب ۳ باشد که خود a بر ۳ بخش‌پذیر است و x و y هر عددی می‌توانند باشند.

اگر $a=3k+1$ باشد باید حتماً یکی از عددهای زیر مضرب ۳ باشد:

$$a+x=3k+1+x \qquad a+y=3k+1+y$$

فرض می‌کنیم $a+x$ مضرب ۳ باشد، در این صورت:

$$a+x=3k+1+x=3q \Rightarrow x=3q-3k-1=3(q-k)-1=3m-1$$

حالا اگر $a=3k+2$ باشد:

$a+x=3k+2+3m-1=3k+3m+1$ مضرب ۳ نیست.

یعنی a و $a+x$ مضرب ۳ نیستند، پس $a+y$ باید مضرب ۳ باشد:

$$a+y=3q' \Rightarrow 3k+2+y=3q'$$
$$\Rightarrow y=3q'-3k-2=3(q'-k)-2=3m'-2$$

یعنی عددهای ما باید به فرم a، $a+3m-1$ و $a+3m'-2$ باشند، در این حالت $x+y$ را پیدا می‌کنیم:

$$x+y=3m-1+(3m'-2)=3m+3m'-3=3(m+m'-1)$$

یعنی $x+y$ باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد که در میان گزینه‌ها فقط ۴۲ بر ۳ بخش‌پذیر است.