فصل پنجم

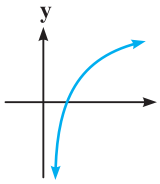
توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی و نمودار آن

می‌فوایم در مورد تابع‌هایی که متغیرشون توی توان قرار می‌گیره، صحبت کنیم.

۱- کدام‌یک از گزینه‌های زیر، بیانگر یک تابع نمایی است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $y=\frac{x-۲}{۳x+۱}$ ۲) $y-۴x=۱$ ۳)



۴) $y=\frac{۱}{\pi^{-x}}$

۲- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=a.b^x\ ;\ b>۰$ داریم $f(۰)=\frac{۳}{۲}$ و $f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}$. مقدار $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۱ و مشابه تجربی داخل ۹۳

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۳- نمودار تابع $f(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{ax+b}$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. اگر $f(۱)=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۲۷ ۴) ۹

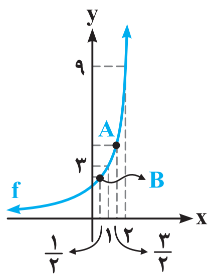
۴- به ازای چه مقادیری از a، با افزایش مقدار x در تابع $y=(a^۲-۳a+۳)^x$، مقدار y هم افزایش می‌یابد؟

۱) $[-۲,-۱]$ ۲) $[۱,۲]$ ۳) $\mathbb{R}-[۱,۲]$ ۴) $\mathbb{R}-[-۲,-۱]$

۵- به ازای چه مقادیری از m، در نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=(۰/۴)^{۲-x}.m^{x+۳}$ با افزایش مقدار x، مقدار تابع کاهش می‌یابد؟

۱) $|m|>۰/۴$ ۲) $m>۰/۴$ ۳) $۰<m<۰/۶$ ۴) $۰<m<۰/۴$

۶- با توجه به نمودار تابع نمایی f در شکل مقابل، حاصل y_A-y_B کدام است؟



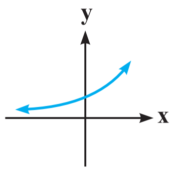
۱) $\sqrt{۳}$

۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۴\sqrt{۳}$

۴) $۲\sqrt{۳}$

۷- به ازای کدام مقادیر k، نمودار تابع نمایی $y=(۴-|k|)x^۲+۳^{kx}$ به‌صورت مقابل است؟



۱) $\varnothing$

۲) فقط ۴

۳) فقط ۴-

۴) ۴ یا ۴-

۸- داده‌های کدام‌یک از جدول‌های زیر، می‌تواند بیانگر یک تابع نمایی باشد؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱)

x	۱	۰	۱-	۲-
y	۴	۱	۲-	۵-

۲)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

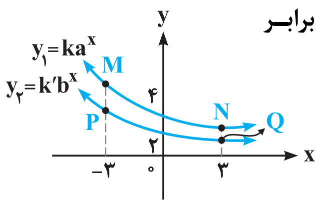
۳)

x	۰	۱	۲	۳
y	۰/۵	۰/۵-	۰/۵	۰/۵-

۴)

x	۱-	۰	۱	۲
y	۰/۵-	۱/۵	۲-	۴

۹- با توجه به نمودار توابع نمایی $y_۱$ و $y_۲$ در شکل روبه‌رو، حاصل‌ضرب عرض‌های نقاط P و Q، چند برابر حاصل‌ضرب عرض‌های نقاط M و N است؟

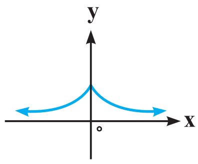


۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۴۸

۱۰- تابع نمایی f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=k^۶\times a^x$ مفروض است. اگر $f(۳)=۴$ و $f(۷)=۶۴$ باشد، مقدار $f(۵)$ کدام است؟

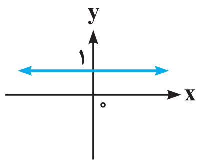
۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

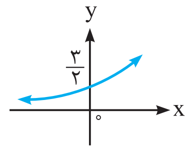
۱۱- شکل مقابل، نمودار کدام‌یک از توابع زیر است؟

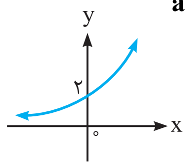


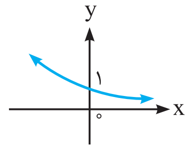
۱) $y=|2^x|$
۲) $y=2^{-|x|}$
۳) $y=2^{|x|}$
۴) $y=|2^{-x}|$

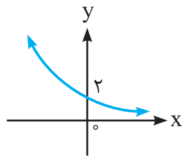
۱۲- اگر نمودار تابع $g(x)=a^x$ به‌صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $f(x)=2a\times\left(\frac{3}{a^2+1}\right)^x$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۳- نمودار توابع $y=x+1$ و $y=2^x$ $(x\geq 0)$، همدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{3}$
۳) $2\sqrt{2}$
۴) $2\sqrt{3}$

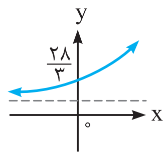
۱۴- کدام‌یک از نمودارهای زیر در ناحیهٔ اول، بالاتر از سایر نمودارها قرار دارد؟

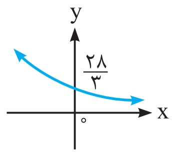
۱) $y=2^{2x-1}$
۲) $y=2^{2x+1}$
۳) $y=4^x$
۴) $y=3(4)^{x-1}$

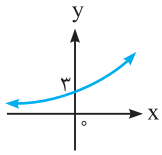
۱۵- در کدام‌یک از بازه‌های زیر، نمودار تابع $y=3^{-2x}$، بالای نمودار تابع $y=4^{-2x}$ قرار می‌گیرد؟

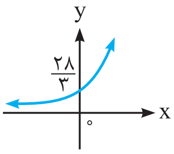
۱) $(-1,+\infty)$
۲) $(-3,2)$
۳) $(2,7)$
۴) $(-6,-2)$

۱۶- نمودار تابع $f(x)=3^{x-1}+3^{x+2}$ کدام است؟

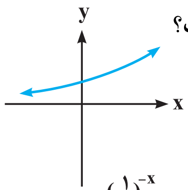
۱)


۲)


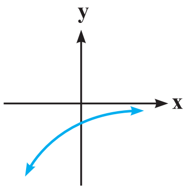
۳)


۴)


۱۷- کدام‌یک از نمودارهای روبه‌رو با توجه به تابع داده شده، به صورت صحیح رسم شده است؟



ب: $y=\dfrac{(\frac{1}{3})^{-x}}{2^{x+1}}$

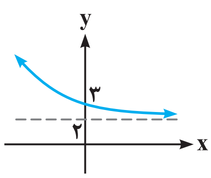


الف: $y=-(4^{1-2x})$

۱) فقط (الف)
۲) فقط (ب)
۳) (الف) و (ب)
۴) هیچ‌کدام

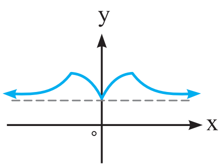
۱۸- با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=k+\left(\frac{1}{3}\right)^{(x-p)}$ در شکل مقابل، دوتایی مرتب (k,p) کدام است؟

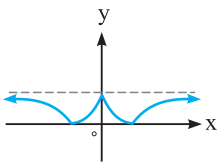
مشابه تمرین کتاب درسی

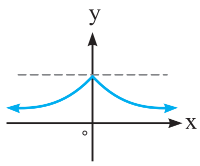


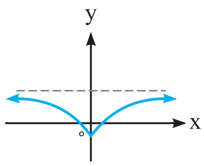
۱) $(0,2)$
۲) $(1,0)$
۳) $(2,0)$
۴) $(2,1)$

۱۹- نمودار تابع $y=\frac{1}{2}-\pi^{-|x|}$ شبیه کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


معادلات نمایی

با تابع نمایی و نمودارش آشنا شدید. حالا بریم سراغ معادله‌هایی که در اون‌ها، توابع نمایی دیده می‌شه.

۲۰- اگر $2^A = \left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right)^2$، عدد A کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $12\sqrt{2}$

۲۱- اگر $9^x = 3^{x+1}$ باشد، حاصل $(5^x)^{-1}$ کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۸

۲۲- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\left(\frac{1}{125^{x-1}}\right)^{2x+2} = (25)^{x-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

۲۳- نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = 2^{ax-1}$ از نقطهٔ $(4, 2\sqrt{2})$ می‌گذرد. نمودار f، خط $y = 4\sqrt[4]{2}$ را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) $\frac{26}{5}$ ۲) $\frac{18}{5}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

۲۴- اگر $x = 10^k$ و $(x^{5+k})^{\frac{1}{6}} = 10^{k+2}$ باشد، حاصل $\frac{x}{k}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳۵۰۰ ۲) $-\frac{1}{2000}$ ۳) ۲۵۰۰ ۴) $-\frac{1}{6000}$

۲۵- فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطهٔ $A(0,4)$، کدام است؟ تجربی خارج ۹۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۶- معادلهٔ $9^x + 3^x - 2 = 0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) صفر

۲۷- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸- معادلهٔ $5^{x+3} - 5^{x+2} + 5^{x+1} = 105x \times 3^x$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۹- معادلهٔ $x^2 = 2^x$ چند جواب حقیقی دارد؟ کار در کلاس کتاب درسی

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۳۰- معادلهٔ $4 + 2^{-x} - x = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

نامعادلات نمایی

معادله‌های نمایی رو دیدین، حالا نوبت می‌رسه به نامعادله‌های نمایی. با ما همراه باشید.

۳۱- کدام‌یک از اعداد زیر بین $3^{0/62}$ و $3^{0/21}$ قرار دارد؟ مشابه فعالیت کتاب درسی

۱) $3^{-0/9}$ ۲) 3^{0} ۳) $3^{0/74}$ ۴) $3^{0/49}$

۳۲- چه تعداد از نامساوی‌های زیر، درست است؟ مشابه کار در کلاس کتاب درسی

الف) $4^{3/5} < 4^{\frac{10}{3}}$ ب) $3^{\sqrt{11}} > 3^{\sqrt{13}}$ پ) $x > y \Rightarrow 5^x > 5^y$ ت) $x > y \Rightarrow (0/3)^x < (0/3)^y$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳- اگر $x = (0/4)^{\sqrt{5}}$ و $y = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-0/1}$، آن‌گاه کدام گزینه، درست است؟

۱) x بزرگ‌تر از ۱، y بین ۰ و ۱
۲) x بین ۰ و ۱، y بزرگ‌تر از ۱
۳) x و y بین ۰ و ۱
۴) x و y بزرگ‌تر از ۱

۳۴- مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-11} \geq 5^{-x}$ شامل چند عدد طبیعی است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۳۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{4}{3})^{-x} \ge (\frac{27}{64})^{2x-1}(\frac{9}{16})^{1-x}$ کدام است؟

۱) $x \le -\frac{1}{3}$ ۲) $x \ge \frac{1}{3}$ ۳) $x \ge -\frac{1}{3}$ ۴) $x \le \frac{1}{3}$

۳۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{1}{\sqrt{2}+1})^{4-3x} > (\sqrt{2}-1)^{x+2}$ کدام است؟

۱) $x > 3$ ۲) $x < \frac{1}{2}$ ۳) $x > \frac{1}{2}$ ۴) $x < 4$

۳۷- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\sqrt{3}-1)^{x^2} > (4-2\sqrt{3})^{5x-12}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشمار

تابع لگاریتمی (معکوس تابع نمایی)

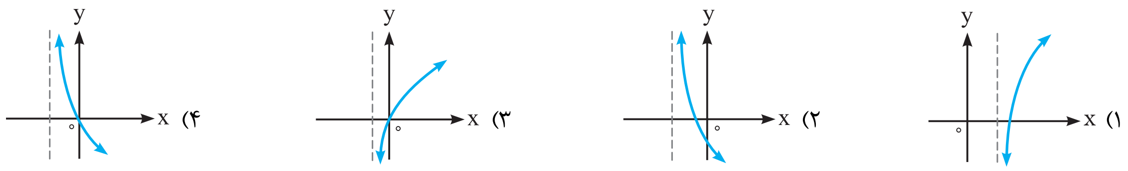
توی یک جملهٔ کوتاه می‌شه گفت، تابع لگاریتمی یعنی معکوس تابع نمایی، که در این مورد، حرفایی دارم براتون!

۳۸- اگر $0 < b < 1$ باشد، نمودار توابع $y = b^x$ و $y = \log_b x$ همدیگر را .....

۱) قطع نمی‌کنند. ۲) در دو نقطه قطع می‌کنند.

۳) بالای خط $y = x$ قطع می‌کنند. ۴) در یک نقطه قطع می‌کنند.

۳۹- نمودار معکوس تابع $y = 3^x - 1$ کدام است؟



۴۰- فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور yها و نقطهٔ برخورد معکوس این تابع با محور xها، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

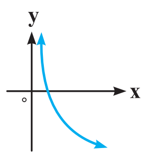
۴۱- ضابطهٔ تابع معکوس $f(x) = (\frac{1}{25})^{1-x} + 5^{2x-1}$ کدام است؟

۱) $\log_5 \frac{6}{25} x$ ۲) $\log_5 \frac{25}{6} x$ ۳) $\log_{25} \frac{6}{25} x$ ۴) $\log_{25} \frac{25}{6} x$

رسم نمودار تابع لگاریتمی

برنیست روی نمودار تابع‌های لگاریتمی، بیشتر تمرین کنیم.

۴۲- نمودار چه تعداد از توابع زیر، شبیه شکل مقابل است؟



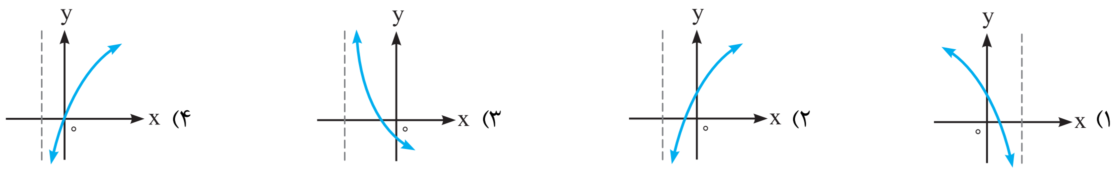
الف) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ب) $y = \log_{0/4} 3x$ پ) $y = \log_8 x$ ت) $y = \log_{0/1} \frac{x}{2}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

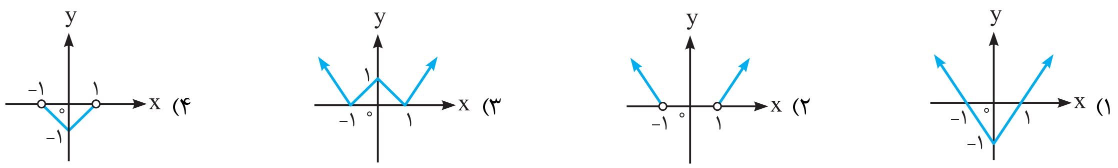
۴۳- به ازای چه مقادیری از a، در تابع $y = \log_{(3-\frac{a^2}{2})} x$ با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد؟

۱) $|a| < \sqrt{6}$ ۲) $|a| > 2$ ۳) $2 < |a| < \sqrt{6}$ ۴) $0 < |a| < 9$

۴۴- نمودار تابع $y = 2 - \log_{0/3}(x+1)$ شبیه کدام است؟



۴۵- نمودار تابع $\log_2 y = \log_2(|x|-1)$ کدام است؟



دامنهٔ تابع لگاریتمی

بریم سراغ بررسی دامنهٔ تابع‌های لگاریتمی.

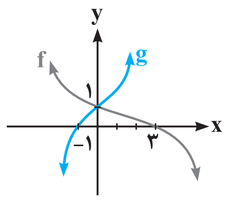
۴۶- دامنهٔ تعریف تابع $y = \log_{(x-۴)}(x^۲ - ۹)$ کدام است؟

۱) $(۴,+\infty)$ ۲) $(۴,+\infty) - \{۵\}$ ۳) $\mathbb{R} - (۳,۴)$ ۴) $(۳,+\infty) - \{۵\}$

۴۷- دامنهٔ تابع $y = \dfrac{\log_۲(۱۶ - x^۲)}{\log_۲(x - ۲)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) بیشمار ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۸- با توجه به شکل مقابل، دامنهٔ تابع $y = \log_{g(x)} f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

ارتباط بین تساوی نمایی و لگاریتمی

نمایی رو می‌شناسیر. لگاریتمی رو هم می‌شناسیر. حالا می‌خوایم بدونیم چه ارتباطی بین تساوی نمایی با لگاریتمی وجود داره!

۴۹- اگر $۲\log_{۱۰۸} \alpha - ۱ = ۰$ و $\log_{۱۲} \beta = \dfrac{۱}{۲}$ باشند، حاصل $\dfrac{\alpha}{\alpha - \beta}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{۲}{۳}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

۵۰- اگر $\log_۳ ۴ = \alpha$ و $\log_۲ ۵ = \beta$ باشد، آن‌گاه $۳^{\alpha\beta}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۰

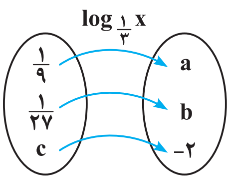
۵۱- اگر $\log_۲ ۱۲ = \alpha$ باشد، عدد $۴^{\alpha - ۲}$ کدام است؟ تجربی خارج ۸۶

۱) $\dfrac{۹}{۲}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۸

ویژگی‌های لگاریتم (بخش اول)

توی لگاریتم‌ها یه ویژگی‌هایی وجود داره که باید خیلی حواستون به اونا باشه. این ویژگی‌ها رو دو بخش کردیم و مسئله‌های خوبی رو برای هر بخش آوردیم. ازتون می‌خوایم با دقت کامل روی اونا کار کنید.

۵۲- با توجه به شکل زیر، مقدار $a - b - c$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی

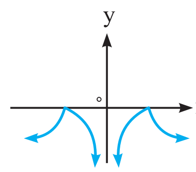
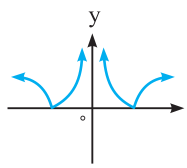
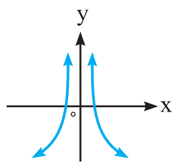
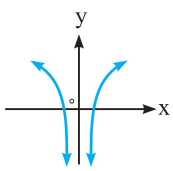


۱) -۱۰
۲) -۹
۳) ۱۴
۴) ۸

۵۳- حاصل کدام عبارت، بزرگ‌تر از بقیه است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $\log_۳ \dfrac{۱}{۲۷}$ ۲) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱$ ۳) $\log_{\frac{۱}{۵}} ۶۲۵$ ۴) $\log_{۱۶} ۶۴$

۵۴- نمودار تابع $y = \log\left|\dfrac{۱}{x}\right|$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۵۵- اگر $f(x) = ۴ - ۵\log_۹\left(\dfrac{x}{۳} + ۶\right)$ باشد، مقدار $f(۶۳)$ کدام است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $-۳/۵$ ۲) $-۲/۵$ ۳) $-۴/۵$ ۴) $-۵/۵$

۵۶- نمودار تابع $y = \log_{\frac{۱}{۲}}(ax + b)$، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- و نیمساز ناحیهٔ چهارم را در نقطه‌ای بـه عـرض ۱- قطـع کـرده است. b کدام است؟ ریاضی خارج ۹۴

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\dfrac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۵۷- اگر $x=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2}$ باشد، حاصل $\log_3(x+1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۸- اگر $x=8\log_4 2\sqrt{2}$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایهٔ x کدام است؟ ریاضی خارج ۸۷

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۹- حاصل $\log_{\frac{1}{16}} 8\sqrt[3]{2}+\left|\log_{27}\frac{1}{9}\right|$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۶۰- اگر $\sqrt{a}=b^2=x^3$ باشد، حاصل $\log_x a-2\log_{x^2} b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

۶۱- حاصل عبارت $\log_{\sqrt{9}} 27\sqrt[3]{81}+\log_7\frac{1}{49}+\log_{\sqrt[4]{2}} 2\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{5}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) $\frac{27}{2}$

۶۲- تابع $f(x)=\log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$، بامعنی است. اگر $f(4)=2$ باشد، آن‌گاه $f\left(-\frac{4}{9}\right)$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۴

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۶۳- تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y=\log_2\sqrt{x}$ و $y=2^x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۶۴- نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_2\frac{1}{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$، نسبت به هم چگونه‌اند؟ تجربی خارج ۹۱

۱) $f(x)$ بالاتر ۲) $g(x)$ بالاتر ۳) منطبق‌اند ۴) فقط در یک نقطه، متقاطع

۶۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\log_2(bx-4)$ از دو نقطهٔ $(2,6)$ و $(12,10)$ می‌گذرد. a کدام است؟ ریاضی داخل ۹۶

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۶- اگر $3^a=A$ باشد، آن‌گاه $\log_3 9A^2$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $2+2a$ ۲) $3+2a$ ۳) $2+a^2$ ۴) $3+a^2$

۶۷- اگر $8^k=4\sqrt{2}$ باشد، مقدار لگاریتم $(6k+1)$ در مبنای ۳۶ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۸- اگر $\log_y x=2$ باشد، آن‌گاه حاصل $\log_{y\sqrt{y}} x\sqrt[3]{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{14}{9}$ ۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{7}{6}$

۶۹- اگر $\log 4=k$ باشد، حاصل $\log 0/125$ کدام است؟

۱) $6k$ ۲) $\frac{3k}{2}$ ۳) $-\frac{3k}{2}$ ۴) $-6k$

۷۰- اگر $\log_b a=\frac{3}{2}$، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}} ab^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷۱- حاصل $\log_{x\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{9}{8}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۷۲- اگر $f(x)=4^x-4^{-x}$ باشد، حاصل $f\left(\log\frac{3}{4}\right)+f\left(\log\frac{4}{3}\right)$ کدام است؟

۱) $\log 3$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\log 4$

۷۳- اگر $x=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{37})$ باشد، آن‌گاه لگاریتم x^2+3x+1 در پایهٔ ۴ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخنامه تشریحی

۱ ۴ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

تابع نمایی و نمودار آن

تعریف: هر تابع به صورت $y = k \times a^x$ که در آن $k \neq 0$ و a عددی حقیقی، $a > 0$، $a \neq 1$ و x یک متغیر باشد را **تابع نمایی** با پایهٔ a می‌نامیم (مانند $y = 3^x$، $y = 0/5 \times 2^x$، $y = (\frac{1}{4})^x$ و یا $y = (\frac{1}{\pi})^x$ که همگی تابع نمایی هستند).

※ *حالا سؤال اینه که چرا پایه، مثبت و مخالف یکه؟ دلیلش اینه که اگه a منفی باشه، x نمی‌تونه هر عدد حقیقی رو اختیار کنه (مثلاً در مورد $y = (-2)^x$، متغیر x نمی‌تونه مساوی $\frac{1}{2}$ باشه، چون $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ تعریف نشده هست، به این خاطر که اعداد منفی در رادیکال با فرجهٔ زوج، بی‌معنی می‌شن). در ضمن اگه a مساوی صفر یا یک باشه، تابع به صورت یه تابع ثابت درمیاد که دیگه نمایی نیست!* مثال زیر، قضیه را برایتان روشن‌تر می‌کند.

مثال **کدام‌یک از توابع زیر، یک تابع نمایی است؟**

الف) $y = 3x^2 - 5x + 4$: تابع نمایی نیست.

ب) $y = x^3 + 1$: تابع نمایی نیست.

پ) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$: تابع نمایی نیست.

ت) $y = 3^{-2x+1}$: $y = 3 \times 3^{-2x} = 3(3^{-2})^x = 3(\frac{1}{9})^x$: تابع نمایی است.

※ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و a و b دو عدد حقیقی باشند، داریم:

۱) $x^0 = 1$

۲) $x^a \times x^b = x^{a+b}$

۳) $(xy)^a = x^a . y^a$

۴) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

۵) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

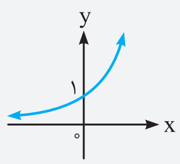
۶) $(x^a)^b = x^{ab}$

۷) $(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}$

خُب، حالا که تابع نمایی را شناختید، بهتر است در مورد نمودارش هم مطالبی را بدانید.

نمودار تابع نمایی $y = a^x$:

۱ به‌طور کلی نمودار تابع $y = a^x$ در صورتی که $a > 1$ باشد، به صورت مقابل بوده و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:



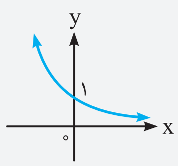
الف) دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ و برد آن $(0, +\infty)$ است.

ب) هر خطی که موازی محور xها رسم شود، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع **یک‌به‌یک** و در نتیجه **وارون‌پذیر** است.

پ) با افزایش مقدار x، مقدار y هم زیاد می‌شود، پس اگر $x_2 > x_1$ باشد، آن‌گاه $a^{x_2} > a^{x_1}$ می‌باشد (و برعکس).

ت) نمودار تابع با محور xها هیچ برخوردی ندارد و همواره بالای محور x ها قرار دارد $(y > 0)$، ولی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند *(چون وقتی $x = 0$ باشه، $y = a^0 = 1$ می‌شه).*

۲ نمودار تابع $y = a^x$ در صورتی‌که $0 < a < 1$ باشد، به صورت مقابل بوده و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:



الف) دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ و برد آن $(0, +\infty)$ است.

ب) تابع **یک‌به‌یک** و در نتیجه **وارون‌پذیر** است.

پ) با افزایش مقدار x، مقدار y کم می‌شود، پس اگر $x_2 > x_1$ باشد، آن‌گاه $a^{x_2} < a^{x_1}$ می‌باشد (و برعکس).

ت) نمودار تابع با محور xها هیچ برخوردی ندارد و همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد. در ضمن محور yها را در $y = 1$ قطع می‌کند.

توجه براساس مطالبی که گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که تابع نمایی $y = a^x$، همواره مثبت است. به عنوان مثال می‌توان نوشت: $|5^{-x}| = 5^{-x}$ و $|2^x| = 2^x$.

بچه‌های عزیزم، مثال نموداری زیر رو ببینید تا درسنامه‌ای رو که تا این قسمت از کار براتون گفتیم به خوبی توی ذهنتون جا بیفته.

مثال **نمودار توابع زیر را رسم کنید.**

الف) $y = 2^x$

ب) $y = 5^{2x}$

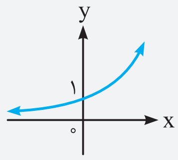
پ) $y = 3 \times 4^{x-1}$

ت) $y = 3^{1-2x}$

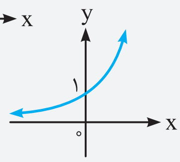
ث) $y = 2^{x+3} + 2^x$

پاسخ:

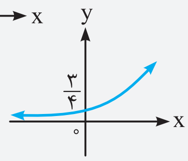
الف) $y=۲^x \xrightarrow[\text{از یک است.}]{\text{پایه (یعنی ۲) بزرگ‌تر}}$



ب) $y=۵^{۲x}=(۵^۲)^x=۲۵^x \xrightarrow[\text{از یک است.}]{\text{پایه (یعنی ۲۵) بزرگ‌تر}}$

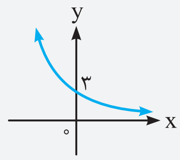


پ) $y=۳\times۴^{x-۱}=۳\times۴^x\times۴^{-۱}=\frac{۳}{۴}(۴^x) \xrightarrow[\text{از یک است.}]{\text{پایه (یعنی ۴) بزرگ‌تر}}$



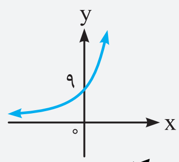
راستی شاید بپرسید چرا توی مورد (پ)، نمودار تابع، محور yها رو در $\frac{۳}{۴}$ قطع کرده ولی توی دوتای قبلی، محور yها رو در ۱ قطع شده، خب دلیلش واضحه! به خاطر اون ضریب $\frac{۳}{۴}$ هستش که توی ۴^x ضرب شده و باعث می‌شه که وقتی $x=۰$ هست، y هم مساوی بشه با $\frac{۳}{۴}(۴^۰)$ یعنی $\frac{۳}{۴}$.

ت) $y=۳^{۱-۲x}=۳\times۳^{-۲x}=۳\times(۳^{-۲})^x=۳(\frac{۱}{۹})^x \xrightarrow[\text{صفر و یک است.}]{\text{پایه (یعنی }\frac{۱}{۹}\text{) بین}}$



در این‌جا هم وقتی x رو صفر می‌دیم، y مساوی می‌شه با $۳(\frac{۱}{۹})^۰$، یعنی ۳، پس همون‌طور که می‌بینید، نمودار محور yها رو توی ۳ قطع کرده.

ث) $y=۲^{x+۳}+۲^x=۲^x\times۲^۳+۲^x=۲^x(۸+۱)=۲^x\times۹ \xrightarrow[\text{از یک است.}]{\text{پایه (یعنی ۲) بزرگ‌تر}}$



مثال درستی یا نادرستی موارد زیر را بررسی کنید.

الف) نقطهٔ $(\frac{۱}{۳},\sqrt[۳]{۷})$ روی نمودار $y=۷^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار $y=۶^x$ با محور yها، نقطهٔ $(۰,۶)$ است.

پ) دامنهٔ توابع $y=۲^x$ و $y=x^۲$ یکسان هستند.

ت) محل تقاطع نمودار $y=۹^x$ با محور xها، نقطهٔ $(۹,۰)$ است.

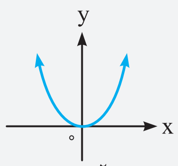
پاسخ: الف) درست است، زیرا با قرار دادن $x=\frac{۱}{۳}$، داریم:

$$y=۷^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۷}$$

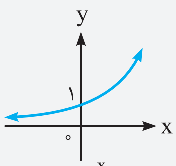
در نتیجه نقطهٔ $(\frac{۱}{۳},\sqrt[۳]{۷})$ روی نمودار $y=۷^x$ قرار دارد.

ب) نادرست است، زیرا اگر $x=۰$ باشد، $y=۶^۰=۱$ می‌شود، پس محل تقاطع نمودار $y=۶^x$ با محور yها، نقطهٔ $(۰,۱)$ است نه $(۰,۶)$.

پ) درست است، زیرا با توجه به نمودار دو تابع $y=۲^x$ و $y=x^۲$ نتیجه می‌گیریم که دامنهٔ هر دوی آن‌ها برابر $\mathbb{R}$ است، ببینید:



$y=x^۲$



$y=۲^x$

ت) نادرست است، زیرا نمودار تابع نمایی $y=۹^x$ اصلاً با محور xها برخوردی ندارد.

مثال اگر در تابع $f(x)=m^x+n^x$ $(m,n>۰)$ داشته باشیم $f(۱)=۱۲f(-۱)$ و $f(۳)=۱۸f(۱)$، آن‌گاه مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

پاسخ: $f(۲)=m^۲+n^۲$، حال برای پیدا کردن مقدار $m^۲+n^۲$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(۱)=۱۲f(-۱)\Rightarrow m+n=۱۲(m^{-۱}+n^{-۱})\Rightarrow m+n=۱۲(\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n})\Rightarrow \cancel{m+n}=۱۲(\frac{\cancel{n+m}}{mn})\Rightarrow ۱=\frac{۱۲}{mn}\Rightarrow mn=۱۲ \quad (*)$$

از طرفی $f(۳)=۱۸f(۱)$، پس:

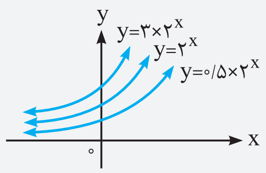
$$m^۳+n^۳=۱۸(m+n)\Rightarrow \cancel{(m+n)}(m^۲-mn+n^۲)=۱۸\cancel{(m+n)}\Rightarrow m^۲-mn+n^۲=۱۸ \quad (**)$$

حال اگر دو طرف تساوی‌های $(*)$ و $(**)$ را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\cancel{mn}+(m^۲-\cancel{mn}+n^۲)=۱۲+۱۸\Rightarrow m^۲+n^۲=۳۰$$

پس $f(۲)=۳۰$، یعنی گزینهٔ (۴) درست است.

توجه بچه‌ها یک موضوعی هم در مورد تابع نمایی $y=m\times a^x$ بدانید. در این تابع، عرض نقاط تابع $y=a^x$ را m برابر می‌کنیم. حال اگر $m>۱$ باشد، نمودار آن **بالای** نمودار $y=a^x$ و اگر $۰<m<۱$ باشد، نمودار آن **پایین** نمودار $y=a^x$ قرار می‌گیرد، مانند شکل روبه‌رو:



همان‌طور که در درسنامه به‌طور مفصل توضیح دادیم، تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{\pi^{-x}}$ که همان $y=\pi^x$ می‌باشد، نشان‌دهندهٔ یک تابع نمایی است.

۲ **۳** ابتدا مقادیر a و b را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم مقدار $f(\frac{۳}{۲})$ را به‌دست آوریم:

$$f(x)=a.b^x:\begin{cases} f(۰)=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a\times b^۰=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a\times ۱=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \\ f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow a\times b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲}\xrightarrow{a=\frac{۳}{۲}}\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{b^۲}=\frac{۳}{۳۲}\Rightarrow b^۲=۱۶\xrightarrow{b>۰}b=۴ \end{cases}$$

پس $f(x)=\frac{۳}{۲}\times ۴^x$ است و داریم:

$$f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}\times(۴)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times(۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times ۲^۳=۳\times ۴=۱۲$$

۳ **۳** با توجه به گفته‌های مسأله، نتیجه می‌گیریم نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۳})^{ax+b}$ از نقاط $(۰,۳)$ و $(۱,\frac{۱}{۳})$ عبور می‌کند، پس:

$$\begin{cases} f(۰)=۳\Rightarrow(\frac{۱}{۳})^b=۳\Rightarrow(۳^{-۱})^b=۳\Rightarrow ۳^{-b}=۳\Rightarrow -b=۱\Rightarrow b=-۱ \\ f(۱)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(\frac{۱}{۳})^{a+b}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a+b=۱\xrightarrow{b=-۱}a-۱=۱\Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=(\frac{۱}{۳})^{۲x-۱}$ می‌باشد، پس داریم:

$$f(-۱)=(\frac{۱}{۳})^{۲(-۱)-۱}=(\frac{۱}{۳})^{-۳}=(۳^{-۱})^{-۳}=۳^۳=۲۷$$

۴ **۳** همان‌طور که در درسنامه گفتیم، برای این‌که با افزایش مقدار x، مقدار y هم در تابع نمایی $y=a^x$ افزایش یابد، باید $a>۱$ باشد، پس در مورد تابع $y=(a^۲-۳a+۳)^x$، داریم:

$$a^۲-۳a+۳>۱\Rightarrow a^۲-۳a+۲>۰\Rightarrow(a-۲)(a-۱)>۰\Rightarrow$$

a		۱		۲	
a − ۲	−		−	۰	+
a − ۱	−	۰	+		+
(a − ۲)(a − ۱)	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow a<۱ \text{ یا } a>۲\Rightarrow a\in\mathbb{R}-[۱,۲]$$

۵ **۴** خب، *این تست نسبت به تست قبلی یه کم قُفُن‌تره*. بهتر است که اول ضابطهٔ تابع را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=(۰/۴)^{۲-x}.m^{x+۳}=(\frac{۲}{۵})^{۲-x}.m^{x+۳}=(\frac{۲}{۵})^۲(\frac{۲}{۵})^{-x}.m^{x+۳}=(\frac{۴}{۲۵})(\frac{۵}{۲})^x.m^x.m^۳=(\frac{۴}{۲۵}m^۳).(\frac{۵}{۲}m)^x$$

اگر قرار باشد با افزایش مقدار x در تابع نمایی $y=a^x$، مقدار y کاهش یابد، باید $۰<a<۱$ باشد، بنابراین:

$$۰<\frac{۵}{۲}m<۱\xrightarrow{\times\frac{۲}{۵}}۰<m<\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۰<m<۰/۴$$

۶ **۴** از آن‌جا که نمودار، مربوط به یک تابع نمایی است، پس با توجه به نمودار از روی نقاط $C(۱,۳)$ و $D(۲,۹)$ می‌توان نوشت:

$$f(x)=k\times a^x\Rightarrow\begin{cases} C(۱,۳)\in f:۳=k\times a\Rightarrow k=\frac{۳}{a}\ (*) \\ D(۲,۹)\in f:۹=k\times a^۲\xrightarrow{(*)}۹=\frac{۳}{a}\times a^۲\Rightarrow ۹=۳a\Rightarrow a=۳\xrightarrow{k=\frac{۳}{a}}k=۱ \end{cases}$$

بنابراین $f(x)=۳^x$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} y_B=f(\frac{۱}{۲})=۳^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳} \\ y_A=f(\frac{۳}{۲})=۳^{\frac{۳}{۲}}=۳\sqrt{۳} \end{cases}\Rightarrow y_A-y_B=۳\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

۷ **۲** چون تابع نمایی است، پس باید x، فقط در توان باشد، در نتیجه باید جملهٔ شامل $x^۲$ را از بین ببریم. برای این کار باید $۴-|k|=۰$ باشد، پس $|k|=۴$ و یا $k=\pm۴$. اما اگر $k=-۴$ باشد، تابع به فرم $y=۳^{-۴x}=(\frac{۱}{۸۱})^x$ در می‌آید که در این صورت با افزایش مقدار x، مقدار y کم می‌شود، پس قابل قبول نیست، بنابراین $k=۴$ است.

۸ | ۲

نیم‌نگاه

اگر نقاطی از تابع نمایی $y=k\times a^x$ را انتخاب کنیم که **طول** آن نقاط، تشکیل یک دنبالهٔ **حسابی** دهند، آن‌گاه **عرض** نقاط نیز تشکیل یک دنبالهٔ **هندسی** می‌دهند.

❋ قدرنسبت دنبالهٔ هندسی به‌وجود آمده، برابر a است (یعنی پایهٔ تابع نمایی)، پس باید بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک باشد ($a\neq ۱$ و $a>۰$).

بیانی دیگر: تابع نمایی f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطهٔ $f(x)=k\times a^x$ را درنظر بگیرید، به‌طوری که $f(a)=y_۱$ و $f(b)=y_۲$ باشد، در این صورت داریم:

$$f(\frac{a+b}{۲})=\sqrt{y_۱y_۲}$$

در این‌جا x های هر چهار گزینه، تشکیل دنبالهٔ حسابی داده‌اند، اما در مورد yها، در گزینهٔ (۱)، yها تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=-۳$ می‌دهند، اما در گزینهٔ (۲)، y ها تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=\frac{۱۲}{۱۶}=۰/۷۵$ می‌دهند، بنابراین بیانگر یک تابع نمایی است. در گزینهٔ (۳)، yها یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=-۱<۰$ درست کرده‌اند، بنابراین قابل قبول نیست. در گزینهٔ (۴) اصلاً yها دنبالهٔ حسابی یا هندسی نمی‌سازند.

۹ | ۱ **روش اول:** چون $x=-۳$، $x=۰$ و $x=۳$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، پس $y_۱(-۳)$، $y_۱(۰)$ و $y_۱(۳)$ هم یک دنبالهٔ هندسی می‌سازند. همچنین $y_۲(-۳)$، $y_۲(۰)$ و $y_۲(۳)$ نیز تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. بنابراین:

$$\begin{cases} y_۱(۰)=\sqrt{y_۱(-۳)\times y_۱(۳)}\Rightarrow ۴=\sqrt{y_M\times y_N}\Rightarrow ۱۶=y_M\times y_N \\ y_۲(۰)=\sqrt{y_۲(-۳)\times y_۲(۳)}\Rightarrow ۲=\sqrt{y_P\times y_Q}\Rightarrow ۴=y_P\times y_Q \end{cases}$$

در نتیجه $\frac{y_P\times y_Q}{y_M\times y_N}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$ است.

روش دوم: با توجه به نمودار داده شده در صورت مسأله، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} (۰,۴)\in y_۱ \xRightarrow{y_۱=ka^x} ۴=k\times a^۰=k\times ۱=k\Rightarrow y_۱=۴\times a^x \\ (۰,۲)\in y_۲ \xRightarrow{y_۲=k'b^x} ۲=k'\times b^۰=k'\times ۱=k'\Rightarrow y_۲=۲\times b^x \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{y_P\times y_Q}{y_M\times y_N}=\frac{(۲\times b^{-۳})\times(۲\times b^۳)}{(۴\times a^{-۳})\times(۴\times a^۳)}=\frac{۴\times b^۰}{۱۶\times a^۰}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

۱۰ | ۲ **روش اول:** چون $f(۳)=۴$ و $f(۷)=۶۴$ است، یعنی نقاط $(۳,۴)$ و $(۷,۶۴)$ روی نمودار تابع قرار دارند. پس همان‌طور که گفتیم حتماً نقطهٔ $(\frac{۳+۷}{۲},\sqrt{۴\times ۶۴})$ هم روی نمودار تابع قرار دارد، به عبارتی دیگر:

$$f(\frac{۳+۷}{۲})=\sqrt{۴\times ۶۴}\Rightarrow f(۵)=\sqrt{۲^۲\times ۲^۶}=\sqrt{۲^۸}=۲^۴=۱۶$$

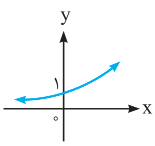
روش دوم:

$$\begin{cases} f(۳)=۴\Rightarrow ۴=k^۶\times a^۳\Rightarrow k^۶=\frac{۴}{a^۳} \\ f(۷)=۶۴\Rightarrow ۶۴=k^۶\times a^۷\Rightarrow k^۶=\frac{۶۴}{a^۷} \end{cases}\Rightarrow \frac{۴}{a^۳}=\frac{۶۴}{a^۷}\Rightarrow a^۴=۱۶\xRightarrow{a>۰} a=۲\Rightarrow k^۶=\frac{۴}{a^۳}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

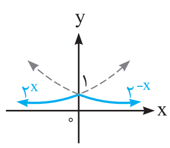
$$\Rightarrow f(x)=k^۶a^x=\frac{۱}{۲}\times ۲^x\Rightarrow f(۵)=\frac{۱}{۲}\times ۲^۵=\frac{۳۲}{۲}=۱۶$$

۱۱ | ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

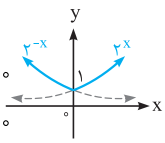
گزینهٔ (۱): $y=|\underbrace{۲^x}_{\text{مثبت}}|=۲^x$



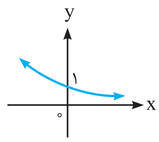
گزینهٔ (۲): $y=۲^{-|x|}=\begin{cases} ۲^{-x}=(\frac{۱}{۲})^x & ; x\geq ۰ \\ ۲^x & ; x<۰ \end{cases}$



گزینهٔ (۳): $y=۲^{|x|}=\begin{cases} ۲^x & ; x\geq ۰ \\ ۲^{-x}=(\frac{۱}{۲})^x & ; x<۰ \end{cases}$



گزینهٔ (۴): $y=|\underbrace{۲^{-x}}_{\text{مثبت}}|=۲^{-x}=(\frac{۱}{۲})^x$



همان‌طور که می‌بینید، نمودار تابع در گزینهٔ (۲)، شبیه شکل داده شده در صورت مسأله است.

یادآوری

❋ *راستی بچه‌های عزیزم با استفاده از انتقال هم می‌تونیم برخی از توابع رو رسم کنیم. ببینید:*

انتقال عرضی و طولی: همان‌طور که در ریاضی دهم خواندید برای رسم نمودار $\mathbf{y=f(x)+k}$ وقتی $\mathbf{k>۰}$ است، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت **بالا** می‌بریم و وقتی $\mathbf{k<۰}$ است، نمودار $y=f(x)$ را $|k|$ واحد به سمت **پایین** می‌آوریم.

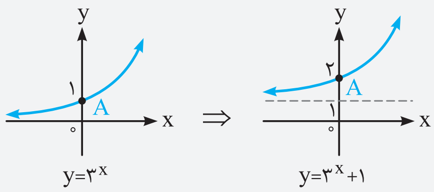
همچنین برای رسم نمودار $\mathbf{y=f(x+k)}$ وقتی $\mathbf{k>۰}$ است، نمودار $y=f(x)$ را k واحد به سمت **چپ** می‌بریم و وقتی $\mathbf{k<۰}$ است، نمودار $y=f(x)$ را $|k|$ واحد به سمت **راست** می‌بریم.

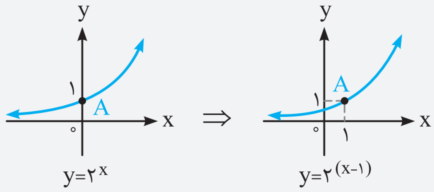
برای فهم بهتر، مثال زیر را ببینید.

مثال **نمودار هر یک از توابع نمایی زیر را رسم کنید.**

الف) $f(x)=3^x+1$ **ب)** $g(x)=2^{(x-1)}$

پاسخ:

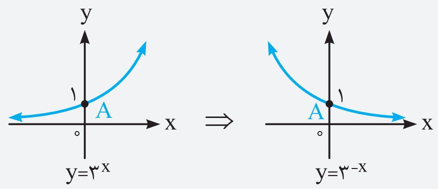
الف)


ب)


قرینه نسبت به محور yها: برای رسم نمودار $y=f(-x)$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و بعد آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

مثال **نمودار تابع $y=3^{-x}$ را رسم کنید.**

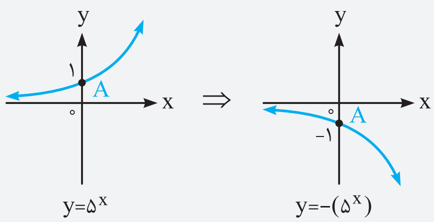
پاسخ:



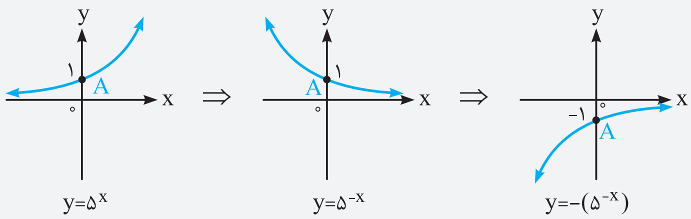
قرینه نسبت به محور xها: برای رسم نمودار $y=-f(x)$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و بعد آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال **نمودار توابع $y=-(5^x)$ و $y=-(5^{-x})$ را رسم کنید.**

پاسخ: برای رسم $y=-(5^x)$ داریم:

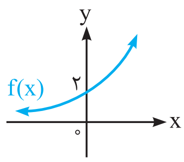


همچنین برای رسم $y=-(5^{-x})$ داریم:



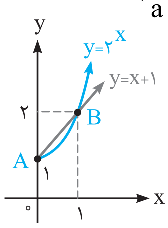
۱۲ **۲** بچه‌ها از روی نمودار داده‌شده در تست، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر x حقیقی، $g(x)=1$ است، یعنی $a^x=1$ است، پس $a=1$ بوده و در نتیجه داریم:

$$f(x)=2a\times\left(\frac{3}{a^2+1}\right)^x \xRightarrow{a=1} f(x)=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow$$



۱۳ **۱** *یه تست خوب نموداری!* با رسم نمودار توابع $y=x+1$ و $y=2^x\ (x\ge 0)$ در یک دستگاه مختصات، می‌فهمیم که نمودار این دو تابع، همدیگر را در نقاط $A(0,1)$ و $B(1,2)$ قطع می‌کنند. ببینید:

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$



تذکر فاصلهٔ بین نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ به دست می‌آید.

۱۴ **۲** اگر همهٔ تابع‌ها را در یک پایه بنویسیم، همه چیز برایمان معلوم می‌شود:

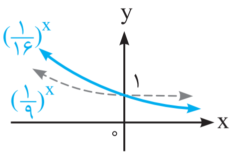
گزینهٔ (۱): $y=2^{2x-1}=(2^2)^x\times 2^{-1}=4^x\times\frac{1}{2}$

گزینهٔ (۲): $y=2^{2x+1}=(2^2)^x\times 2=4^x\times 2$

گزینهٔ (۳): $y=4^x$

گزینهٔ (۴): $y=3(4)^{x-1}=3(4^x)\times 4^{-1}=4^x\times\frac{3}{4}$

از ضرایب 4^x مشخص است که نمودار تابع $y=4^x\times 2$ در ناحیهٔ اول، بالاتر از بقیه است.

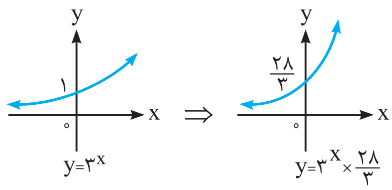


۱۵ **۳** باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن، نمودار $y=3^{-2x}=\left(\frac{1}{9}\right)^x$، بالای نمودار $y=4^{-2x}=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ قرار دارد.
اگر به نمودار این دو تابع نگاه کنید، موضوع حل می‌شود.
واضح است که در بازهٔ $(0,+\infty)$، نمودار $\left(\frac{1}{9}\right)^x$ بالای نمودار $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ قرار می‌گیرد، که بازهٔ $(2,7)$ در گزینهٔ (۳)، زیرمجموعه‌ای از همین بازه است.

توضیح بیشتر: تابع نمایی $y=a^x$ را در نظر بگیرید. هرچه پایه (یعنی a)، بزرگ‌تر باشد، رشد تابع هم بیش‌تر می‌شود. به همین دلیل، رشد $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$ بیش‌تر از رشد $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ است و همین موضوع باعث شده که نمودار $\left(\frac{1}{9}\right)^x$ با وجود این‌که در xهای منفی، پایین‌تر از نمودار $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ قرار دارد، وقتی وارد xهای مثبت می‌شود، نمودارش بالای نمودار $\left(\frac{1}{16}\right)^x$ قرار گیرد.

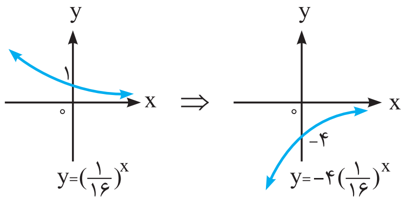
۱۶ **۴** داریم $f(x)=3^{x-1}+3^{x+2}$، بنابراین:

$$f(x)=3^x\times3^{-1}+3^x\times3^2=3^x\times\left(\frac{1}{3}+9\right)=\frac{28}{3}\times3^x \Rightarrow$$

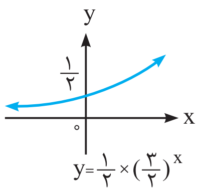


۱۷ **۳** نگاه کنید:

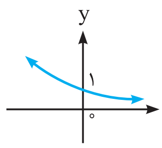
الف) $y=-(4^{1-2x})=-(4\times4^{-2x})=-4\times\left(\frac{1}{16}\right)^x$:



ب) $y=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}}{2^{x+1}}=\dfrac{3^x}{2^x\times2}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$:



۱۸ **۳** نمودار رسم شده، در واقع نمودار



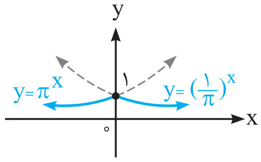
است که دو واحد به سمت بالا انتقال یافته، پس $k=2$ است. از طرفی نقطهٔ $(0,3)$ روی نمودار قرار دارد، پس:

$$f(0)=3\Rightarrow2+\left(\frac{1}{3}\right)^{(0-p)}=3\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{(-p)}=1\Rightarrow-p=0\Rightarrow p=0$$

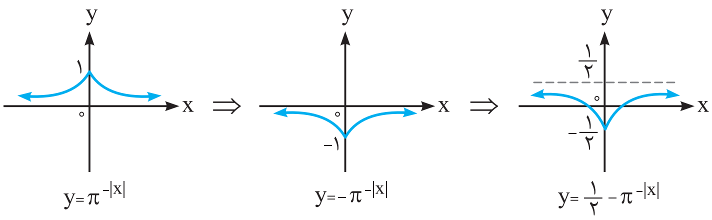
بنابراین $(k,p)=(2,0)$ است.

۱۹ **۴** ابتدا نمودار تابع $y=\pi^{-|x|}$ را رسم می‌کنیم:

$$y=\pi^{-|x|}=\begin{cases}\pi^{-x}=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x & ; x\geq0\\ \pi^x & ; x<0\end{cases}\Rightarrow$$



حال مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:



۲۰ **۴** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

معادلات نمایی

معادله‌هایی که در آن‌ها، متغیر در توان قرار گرفته باشد، **معادلات نمایی** می‌نامند. برای حل این معادلات، باید به گونه‌ای عمل کنیم که در هر طرف تساوی، یک عبارت نمایی با **پایه‌های برابر** قرار داشته باشند (البته بدون ضریب هم باشند). در این صورت توان‌ها را در دو طرف با هم برابر قرار می‌دهیم تا جواب‌های معادله به‌دست آید.

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow$ جواب‌های این معادله را پیدا می‌کنیم.

مثال **معادلات نمایی زیر را حل کنید.**

الف) $25^{3y-2}=125^{y+4}$ **ب)** $4^{2n-1}=\frac{1}{64^3}$ **پ)** $9^{\frac{2x}{3}+1}=\left(\frac{1}{243}\right)^2$

پاسخ: بچه‌ها در هر کدام از موارد بالا، اول باید پایه‌ها را در دو طرف معادله یکسان کنید، ببینید:

الف) $25^{3y-2}=125^{y+4} \Rightarrow (5^2)^{3y-2}=(5^3)^{y+4} \Rightarrow 5^{6y-4}=5^{3y+12}$

حال که پایه‌ها یکی شد، نتیجه می‌گیریم $6y-4=3y+12$، پس:

$3y=16 \Rightarrow y=\frac{16}{3}$

ب) $4^{2n-1}=\frac{1}{64^3} \Rightarrow (2^2)^{2n-1}=(64)^{-3}=(2^6)^{-3} \Rightarrow 2^{4n-2}=2^{-18} \Rightarrow 4n-2=-18 \Rightarrow 4n=-16 \Rightarrow n=-4$

پ) $9^{\frac{2x}{3}+1}=\left(\frac{1}{243}\right)^2 \Rightarrow (3^2)^{\frac{2x}{3}+1}=((243)^{-1})^2 \Rightarrow 3^{\frac{4x}{3}+2}=(3^5)^{-2} \Rightarrow 3^{\frac{4x}{3}+2}=3^{-10} \Rightarrow \frac{4x}{3}+2=-10 \Rightarrow \frac{4x}{3}=-12$

$\Rightarrow 4x=-36 \Rightarrow x=-9$

توجه در حل بعضی از معادلات نمایی، می‌توان عبارت نمایی را برابر یک متغیر در نظر گرفت و آن را به یک معادلهٔ جبری تبدیل و آن را حل کرد.

مثال **حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -1

پاسخ: یادتان نرود که $2+\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ معکوس یکدیگرند، زیرا:

$$2+\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{4-3}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

حال فرض کنید $(2+\sqrt{3})^x=t$، در این صورت:

$$t+\frac{1}{t}=4 \Rightarrow \frac{t^2+1}{t}=4 \Rightarrow t^2+1=4t \Rightarrow t^2-4t+1=0 \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4(1)(1)=12 \Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3} \Rightarrow x=1\\ (2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{-1} \Rightarrow x=-1\end{cases} \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=1\times(-1)=-1 \Rightarrow$$ (گزینهٔ ۴)

در این‌جا باید سمت چپ تساوی را ساده کنیم تا شبیه طرف دیگر تساوی شود و بعد A را به‌دست آوریم:

$$\left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right)^2=\left(\frac{(2^2)^{4\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2=\left(\frac{2^{8\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2=(2^{8\sqrt{2}-2\sqrt{2}})^2=(2^{6\sqrt{2}})^2=2^{12\sqrt{2}}$$

و حالا از مقایسهٔ جواب به‌دست آمده با 2^A، نتیجه می‌گیریم: $A=12\sqrt{2}$.

۲۱ **۲** از تساوی $3^{x+1}=9^x$ نتیجه می‌گیریم:

$$3^{x+1}=(3^2)^x=3^{2x} \Rightarrow x+1=2x \Rightarrow x=1 \Rightarrow (5^x)^{-1} \xrightarrow{x=1} 5^{-1}=\frac{1}{5}=0/2$$

۲۲ **۴** ابتدا باید معادله را ساده‌تر کنیم تا در دو طرف تساوی، پایه‌های یکسان ایجاد شود:

$$(25)^{x-1}=\left(\frac{1}{125^{x-1}}\right)^{2x+2} \Rightarrow (5^2)^{x-1}=\left(\frac{1}{(5^3)^{x-1}}\right)^{2x+2} \Rightarrow 5^{2x-2}=\left(\frac{1}{5^{3(x-1)}}\right)^{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow 5^{2x-2}=\left(5^{-3(x-1)}\right)^{2(x+1)} \Rightarrow 5^{2x-2}=5^{-6(x^2-1)} \Rightarrow 2x-2=-6x^2+6 \Rightarrow 6x^2+2x-8=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases}x=1\\ x=\frac{c}{a}=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

بنابراین ضرب ریشه‌ها برابر است با $1\times-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$.

تذکر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، داریم:

$$\begin{cases}\text{اگر } a+b+c=0 \Rightarrow x=1\,,\ x=\frac{c}{a}\\ \text{اگر } a+c=b \Rightarrow x=-1\,,\ x=-\frac{c}{a}\end{cases}$$

۲۳ **۱** نمودار تابع f از نقطهٔ $(۴,۲\sqrt{۲})$ می‌گذرد، این یعنی $f(۴)=۲\sqrt{۲}$ است، در نتیجه داریم:

$$f(x)=۲^{ax-۱}\Rightarrow f(۴)=۲^{۴a-۱}\xrightarrow{f(۴)=۲\sqrt{۲}}۲^{۴a-۱}=۲\sqrt{۲}=۲\times۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow ۴a-۱=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۴a=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=\frac{۵}{۸}$$

پس $f(x)=۲^{\frac{۵}{۸}x-۱}$ است. حالا باید بفهمیم که نمودار f، خط $y=۴\sqrt[۴]{۲}$ را با چه طولی قطع می‌کند. برای این کار، معادلهٔ $۲^{\frac{۵}{۸}x-۱}=۴\sqrt[۴]{۲}$ را حل می‌کنیم تا مقدار x مشخص شود:

$$۲^{\frac{۵}{۸}x-۱}=۲^{۲}\times۲^{\frac{۱}{۴}}=۲^{\frac{۹}{۴}}\Rightarrow\frac{۵}{۸}x-۱=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\frac{۵}{۸}x=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{\frac{۱۳}{۴}}{\frac{۵}{۸}}=\frac{۲۶}{۵}$$

۲۴ **۳** اگر دو طرف معادلهٔ $۱۰^{k+۲}=(x^{۵+k})^{\frac{۱}{۶}}$ را به توان ۶ برسانیم از دست توان $\frac{۱}{۶}$ خلاص می‌شویم که این‌طوری می‌شود:

$$(۱۰^{k+۲})^{۶}=x^{۵+k}\Rightarrow۱۰^{۶k+۱۲}=x^{۵+k}\xrightarrow{x=۱۰^{k}}۱۰^{۶k+۱۲}=(۱۰^{k})^{۵+k}\Rightarrow۱۰^{۶k+۱۲}=۱۰^{۵k+k^{۲}}\qquad(*)$$

و حالا از معادلهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم $۶k+۱۲=۵k+k^{۲}$، بنابراین:

$$k^{۲}-k-۱۲=۰\Rightarrow(k-۴)(k+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۴\xrightarrow{x=۱۰^{k}}x=۱۰^{۴}=۱۰۰۰۰\Rightarrow\frac{x}{k}=\frac{۱۰۰۰۰}{۴}=۲۵۰۰\\[2mm] k=-۳\xrightarrow{x=۱۰^{k}}x=۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow\frac{x}{k}=\frac{\frac{۱}{۱۰۰۰}}{-۳}=-\frac{۱}{۳۰۰۰}\end{cases}$$

۲۵ **۴** برای پیدا کردن نقطهٔ تلاقی دو منحنی، باید منحنی‌های $y=۲^{x}$ و $y=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴$ را با هم قطع دهیم، یعنی باید معادلهٔ $۲^{x}=(\sqrt{۲})^{x+۱}+۴$ را حل کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$۲^{x}=\sqrt{۲}\times(\sqrt{۲})^{x}+۴\xrightarrow{(\sqrt{۲})^{x}=t}t^{۲}=\sqrt{۲}t+۴\Rightarrow t^{۲}-\sqrt{۲}t-۴=۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{\sqrt{۲}\pm\overset{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}\xrightarrow{(\sqrt{۲})^{x}=t}(\sqrt{۲})^{x}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow۲^{\frac{x}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow x=۳\\[2mm] t=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۲}=-\sqrt{۲}\xrightarrow{(\sqrt{۲})^{x}=t}\underbrace{(\sqrt{۲})^{x}}_{\text{همواره مثبت}}=-\sqrt{۲}:\ \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$x=۳\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در }y=۲^{x}}y=۲^{۳}=۸\Rightarrow\text{نقطهٔ تلاقی}:B(۳,۸)\Rightarrow\begin{cases}A(۰,۴)\\B(۳,۸)\end{cases}\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۸-۴)^{۲}}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۲۶ **۱** در این مسأله، نمی‌توانیم در دو طرف تساوی، پایه‌های یکسان ایجاد کنیم، پس با تغییر متغیر $۳^{x}=t$، فرم معادله را تغییر می‌دهیم:

$$۹^{x}+۳^{x}-۲=۰\Rightarrow(۳^{x})^{۲}+۳^{x}-۲=۰\Rightarrow t^{۲}+t-۲=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}t=-۲\Rightarrow۳^{x}=-۲\ \ \text{غیرقابل قبول (چون حاصل تابع نمایی، همواره مثبت است)}\\[2mm] t=۱\Rightarrow۳^{x}=۱\xrightarrow{۳^{۰}=۱}x=۰\end{cases}$$

بنابراین معادله، فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۲۷ **۲** فرض کنیم $۳^{x}=A$، در این صورت می‌توانیم معادلهٔ $۳^{۲x}-۴\times۳^{x+۱}+۲۷=۰$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$(۳^{x})^{۲}-۴\times۳\times۳^{x}+۲۷=۰\Rightarrow A^{۲}-۱۲A+۲۷=۰\Rightarrow(A-۹)(A-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}A=۹\Rightarrow۳^{x}=۹\Rightarrow x=۲\\A=۳\Rightarrow۳^{x}=۳\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

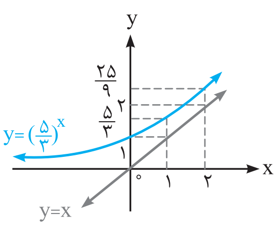
بنابراین مجموع ریشه‌های معادله برابر $۲+۱=۳$ می‌باشد.

۲۸ **۴** ابتدا بهتر است ظاهر معادله را یک کم ساده‌تر کنیم:

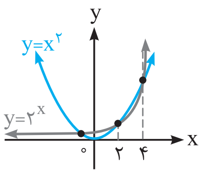
$$۵^{x+۳}-۵^{x+۲}+۵^{x+۱}=۱۰۵x\times۳^{x}\Rightarrow۵^{x}(۱۲۵-۲۵+۵)=۱۰۵x\times۳^{x}$$

$$\Rightarrow۵^{x}\times۱۰۵=۱۰۵x\times۳^{x}\Rightarrow۵^{x}=x\times۳^{x}\Rightarrow\frac{۵^{x}}{۳^{x}}=x\Rightarrow\left(\frac{۵}{۳}\right)^{x}=x$$

الان خوب شد! حالا برای این‌که تعداد جواب‌های معادله را پیدا کنیم، کافی است نمودارهای $y=\left(\frac{۵}{۳}\right)^{x}$ و $y=x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم تا تعداد نقاط تلاقی دو نمودار به‌دست آید:

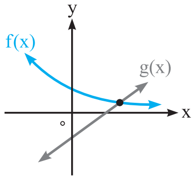


$\Rightarrow$ هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند. $\Rightarrow$ معادله جواب ندارد.



۲۹ **۱** به روش نموداری حلّش می‌کنیم. یعنی چه؟ یعنی این‌که کافی است نمودار دو تـابع $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را در یـک دستگاه مختصات رسم کنیم و تعداد نقاطی که نمودارها همدیگر را قطع می‌کنند، پیدا کنیم:

$\Rightarrow$ نمودار دو تابع، سه نقطهٔ برخورد دارند. $\Rightarrow$ معادله سه ریشه دارد.



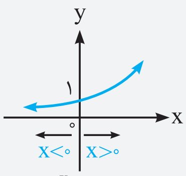
۳۰ **۳** برای تعیین تعداد جواب‌های حقیقی معادلهٔ $۴+۲^{-x}-x=۰$، ابتدا معادله را به فـرم $۲^{-x}=x-۴$ می‌نویسـیم و بعـد نمودار توابع $f(x)=۲^{-x}$ و $g(x)=x-۴$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا تعداد نقاط برخورد آن‌ها پیدا شود:

$\Rightarrow$ یک نقطهٔ برخورد دارند. $\Rightarrow$ معادله یک جواب دارد.

۳۱ **۴** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

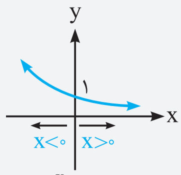
نامعادلات نمایی

دانش‌آموزان گلم، یک بار دیگر نمودار تابع نمایی $y=a^x$ را ببینید و به نتایج به‌دست آمده زیر، دقت کنید.



$y=a^x\ ;\ a>۱$

$$\Rightarrow\begin{cases}x<۰\Rightarrow ۰<a^x<۱ & \text{(یعنی وقتی عدد بزرگ‌تر از ۱ به توان منفی می‌رسد، بین ۰ و ۱ می‌شود.)}\\ x>۰\Rightarrow a^x>۱ & \text{(یعنی وقتی عدد بزرگ‌تر از ۱ به توان مثبت می‌رسد، بزرگ‌تر از ۱ می‌شود.)}\end{cases}$$



$y=a^x\ ;\ ۰<a<۱$

$$\Rightarrow\begin{cases}x<۰\Rightarrow a^x>۱ & \text{(یعنی وقتی عدد بین ۰ و ۱، به توان منفی می‌رسد، بزرگ‌تر از ۱ می‌شود.)}\\ x>۰\Rightarrow ۰<a^x<۱ & \text{(یعنی وقتی عدد بین ۰ و ۱، به توان مثبت می‌رسد، بین ۰ و ۱ می‌شود.)}\end{cases}$$

❊ همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، در تابع نمایی $y=a^x$، اگر $a>۱$ باشد، آن‌گاه با افزایش مقدار x، مقدار y هم افزایش می‌یابد و به ازای $x_۲>x_۱$ نتیجه می‌شود $a^{x_۲}>a^{x_۱}$، بنابراین:

$$\boxed{a^{f(x)}>a^{g(x)}\overset{a>۱}{\Longleftrightarrow}f(x)>g(x)\ \text{.یعنی جهت نامساوی عوض نمی‌شود}}$$

اما اگر $۰<a<۱$ باشد، آن‌گاه با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد و به ازای $x_۲>x_۱$ نتیجه می‌شود $a^{x_۲}<a^{x_۱}$، بنابراین:

$$\boxed{a^{f(x)}>a^{g(x)}\overset{۰<a<۱}{\Longleftrightarrow}f(x)<g(x)\ \text{.یعنی جهت نامساوی عوض می‌شود}}$$

❊ *یادتون نره!* برای حل نامعادلات نمایی، اولین کاری که باید انجام دهید، این است که پایه‌ها را در دو طرف نامعادله، یکسان کنید. اگر پایه‌ها بزرگ‌تـر از یک بودند، بدون این‌که جهت نامعادله را عوض کنید، برای توان‌ها، نامعادله را بنویسید و مجموعه جواب آن را بیابید. اما اگر پایه‌ها بین صفر و یک بودند، جهت نامعادله را عوض کنید و برای توان‌ها، نامعادله را بنویسید و مجموعه جواب آن را به‌دست آورید.

مثال **نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.**

الف) $۳^{۵x-۲}\le ۲۴۳$ ب) $۴^{۳x+۱}>۱۶^{۲x-۲}$ پ) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴x-۱}\ge\left(\frac{۱}{۲۷}\right)^{x+۱}$

پاسخ: همان‌طور که گفتیم، ابتدا باید پایه‌ها را در دو طرف نامعادله، یکسان کرده، سپس با توجه به مقدار a، جهت نامعادله را برای توان‌ها تعیین کنید.

الف) $۳^{۵x-۲}\le ۲۴۳\Rightarrow ۳^{۵x-۲}\le ۳^۵$

چون پایه‌ها در دو طرف نامعادله، مساوی ۳ هستند (یعنی بزرگ‌تر از یک می‌باشند)، پس جهت نامعادله را برای توان‌ها عوض نمی‌کنیم و می‌نویسیم:

$$۵x-۲\le ۵\Rightarrow ۵x\le ۷\Rightarrow x\le\frac{۷}{۵}$$

ب) $۴^{۳x+۱}>۱۶^{۲x-۲}\Rightarrow (۲^۲)^{۳x+۱}>(۲^۴)^{۲x-۲}\Rightarrow ۲^{۶x+۲}>۲^{۸x-۸}$

باز هم پایه‌ها در دو طرف نامعادله، بزرگ‌تر از یک هستند، پس برای توان‌ها جهت نامعادله را عوض نمی‌کنیم:

$$۶x+۲>۸x-۸\Rightarrow ۱۰>۲x\Rightarrow x<۵$$

پ) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴x-۱}\ge\left(\frac{۱}{۲۷}\right)^{x+۱}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴x-۱}\ge\left(\left(\frac{۱}{۳}\right)^۳\right)^{x+۱}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴x-۱}\ge\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳x+۳}$

این بار پایه‌ها در دو طرف نامعادله، بین صفر و یک هستند، پس در ادامهٔ کار جهت نامعادله را عوض می‌کنیم، این‌جوری: $۴x-۱\le ۳x+۳\Rightarrow x\le ۴$

با توجه به این‌که $۰/۶۲>۰/۴۹>۰/۲۱$ می‌باشد، پس $۳^{۰/۶۲}>۳^{۰/۴۹}>۳^{۰/۲۱}$ است.

۳۲ **۲** الف) $\frac{۱۰}{۳} \simeq ۳/۳۳$، پس $\frac{۱۰}{۳} > ۳/۵$ است و در نتیجه $۴^{\frac{۱۰}{۳}} > ۴^{۳/۵}$ می‌باشد، بنابراین (الف) نادرست است.

ب) $\sqrt{۱۳} > \sqrt{۱۱}$، پس $۳^{\sqrt{۱۳}} > ۳^{\sqrt{۱۱}}$ است، در نتیجه (ب) نادرست می‌باشد.

پ) اگر $x > y$ باشد، آن‌گاه $۵^x > ۵^y$ خواهد بود، پس (پ) درست است.

ت) اگر $x > y$ باشد، آن‌گاه $(۰/۳)^x < (۰/۳)^y$ می‌باشد، پس (ت) درست است.

بنابراین دو تا از نامساوی‌های داده شده درست است.

۳۳ **۲** در مورد $x = (۰/۴)^{\sqrt{۵}}$، چون پایه برابر ۰/۴ و بین صفر و یک می‌باشد و توانش (یعنی $\sqrt{۵}$)، عددی مثبت است، پس $x = (۰/۴)^{\sqrt{۵}}$ بین صفر و یک خواهد بود. اما در مورد $y = (\sin\frac{\pi}{۴})^{-۰/۱}$ یا $y = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{-۰/۱}$ چون پایه (یعنی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$) بین صفر و یک است و به توانِ منفی رسیده، پس مقدار y، عددی بزرگ‌تر از یک می‌باشد.

۳۴ **۱** در مورد نامعادلهٔ $(\frac{۱}{۵})^{۳x-۱۱} \ge ۵^{-x}$ می‌توان نوشت:

$$(\frac{۱}{۵})^{۳x-۱۱} \ge (\frac{۱}{۵})^{x} \xrightarrow[\text{چون پایه بین صفر و یک است، پس جهت نامعادله عوض می‌شود.}]{۰<\frac{۱}{۵}<۱} ۳x-۱۱ \le x \Rightarrow ۲x \le ۱۱ \Rightarrow x \le \frac{۱۱}{۲} = ۵/۵$$

بنابراین اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در مجموعه جواب نامعادلهٔ فوق قرار دارند.

۳۵ **۲** ابتدا طرفین نامعادله را ساده می‌کنیم تا پایه‌ها در دو طرف، یکسان شوند:

$$(\frac{۴}{۳})^{-x} \ge (\frac{۲۷}{۶۴})^{۲x-۱}(\frac{۹}{۱۶})^{۱-x} \Rightarrow (\frac{۳}{۴})^{x} \ge \left((\frac{۳}{۴})^{۳}\right)^{۲x-۱}\left((\frac{۳}{۴})^{۲}\right)^{۱-x} \Rightarrow (\frac{۳}{۴})^{x} \ge (\frac{۳}{۴})^{۶x-۳}(\frac{۳}{۴})^{۲-۲x} \Rightarrow (\frac{۳}{۴})^{x} \ge (\frac{۳}{۴})^{۴x-۱}$$

حالا خوب شد. پایه‌ها در دو طرف نامعادله، یکی شده‌اند. اما حواستان باشد که پایه‌ها بین صفر و یک هستند، بنابراین باید جهت نامعادله را عوض کنیم:

$$x \le ۴x-۱ \Rightarrow ۱ \le ۳x \Rightarrow x \ge \frac{۱}{۳}$$

۳۶ **۳** دقت کنید $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$ همان $\sqrt{۲}-۱$ است (چون $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱} \times \frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱} = \frac{\sqrt{۲}-۱}{۲-۱} = \sqrt{۲}-۱$)، به همین خاطر نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\underbrace{\sqrt{۲}-۱}_{۰<\ <۱})^{۴-۳x} > (\underbrace{\sqrt{۲}-۱}_{۰<\ <۱})^{x+۲} \xrightarrow[\text{پس جهت نامعادله، عوض می‌شود.}]{\text{چون پایه بین صفر و یک است}} ۴-۳x < x+۲ \Rightarrow ۲ < ۴x \Rightarrow x > \frac{۱}{۲}$$

۳۷ **۱** با توجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم $(\sqrt{۳}-۱)^۲ = ۴-۲\sqrt{۳}$، پس نامعادله را این‌طوری می‌نویسیم:

$$(\sqrt{۳}-۱)^{x^۲} > (۴-۲\sqrt{۳})^{۵x-۱۲} \Rightarrow (\sqrt{۳}-۱)^{x^۲} > ((\sqrt{۳}-۱)^۲)^{۵x-۱۲} \Rightarrow (\sqrt{۳}-۱)^{x^۲} > (\sqrt{۳}-۱)^{۱۰x-۲۴} \quad (*)$$

با توجه به این‌که $\sqrt{۳}-۱$، عددی بین صفر و یک است، پس از نامساوی $(*)$ باید جهت نامعادله را برای توان‌ها عوض کنیم:

$$x^۲ < ۱۰x-۲۴ \Rightarrow x^۲-۱۰x+۲۴ < ۰ \Rightarrow (x-۶)(x-۴) < ۰ \Rightarrow$$

x		۴		۶	
$(x-۶)(x-۴)$	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x \in (۴,۶)$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادلهٔ داده شده، شامل یک عدد طبیعی (یعنی $x = ۵$) است.

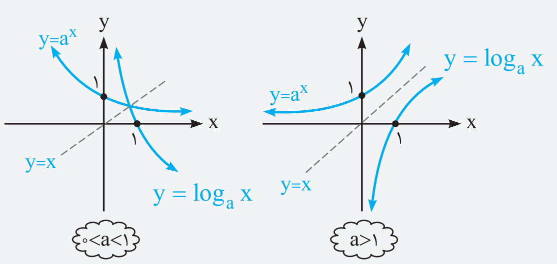
۳۸ **۴** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

تابع لگاریتمی (معکوس تابع نمایی)[۱]

در قسمت‌های قبلی گفتیم تابع نمایی $y = a^x$، یک‌به‌یک است، پس وارون‌پذیر می‌باشد که وارون آن را **تابع لگاریتمی** نامیده و می‌نویسیم:

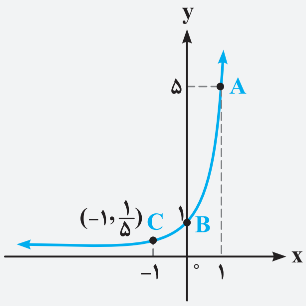
$$f(x) = a^x \xrightarrow{\text{تابع معکوس}} y = f^{-1}(x) = \log_a x \quad : \quad \text{«لگاریتم } x \text{ در مبنای } a\text{»}$$

❋ اگر نمودار تابع نمایی $y = a^x$ را نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم $(y = x)$ قرینه کنیم، نمودار تابع لگاریتمی به‌دست می‌آید. به شکل‌های مقابل توجه کنید:



۱- لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است: «لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن، کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدانشدنی ریاضی بیزار است.»

توجه قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، نقطهٔ $A'(y,x)$ است.



مثال با توجه به نمودار تابع $f(x)=۵^x$ در شکل مقابل، حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

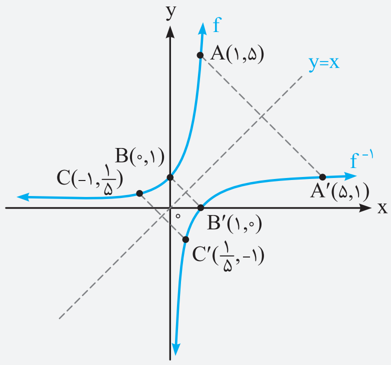
الف) دامنه و برد تابع f

ب) دامنه و برد تابع f^{-1}

پ) مقدار $f(۰)$ ، $f(۱)$ ، $f^{-1}(\frac{۱}{۵})$ و $f^{-1}(۵)$

ت) مقدار a به شرطی که $f^{-1}(a)=۱$

پاسخ: ابتدا نمودار تابع $f(x)=۵^x$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع وارون f (یعنی f^{-1}) که به صورت $f^{-1}(x)=\log_۵ x$ می‌باشد، به دست آید.



حال برویم سراغ موارد خواسته‌شده:

الف) دامنهٔ f ، $\mathbb{R}$ و برد آن، بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

ب) دامنهٔ f^{-1} ، بازهٔ $(۰,+\infty)$ و برد آن، $\mathbb{R}$ است.

پ) نمودار تابع f از نقاط $(۰,۱)$ و $(۱,۵)$ می‌گذرد، پس $f(۰)=۱$ و $f(۱)=۵$ است. از طرفی نمودار تابع f^{-1} از نقاط $(\frac{۱}{۵},-۱)$ و $(۵,۱)$ می‌گذرد، پس $f^{-1}(\frac{۱}{۵})=-۱$ و $f^{-1}(۵)=۱$ می‌باشد (با توجه به ضابطهٔ $f^{-1}(x)=\log_۵ x$ نیز می‌توان $f^{-1}(\frac{۱}{۵})$ و $f^{-1}(۵)$ را حساب کرد که در ادامهٔ مطالب به آن می‌پردازیم).

ت) از روی نمودار تابع f^{-1} مشخص است که این نمودار از نقطهٔ $(۵,۱)$ می‌گذرد، پس $f^{-1}(۵)=۱$ می‌باشد. بنابراین از تساوی $f^{-1}(a)=۱$ نتیجه می‌گیریم $a=۵$ است.

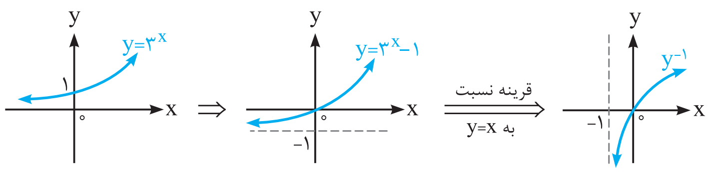
دو نکتهٔ مهم:

۱ همان‌طور که می‌بینید، نمودار تابع نمایی $y=a^x$ و معکوس آن (یعنی $y=\log_a x$)، فقط در شرایطی یک‌دیگر را قطع می‌کنند که $۰<a<۱$ باشد. در ضمن طول نقطهٔ برخورد، عددی بین صفر و یک است.

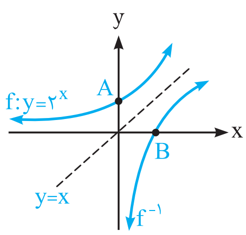
۲ نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ با محور yها هیچ برخوردی ندارد و همواره در سمت راست محور yها قرار دارد، ولی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند (یعنی $\log_a ۱=۰$ است).

با چیزهایی که برایتان گفتیم، جواب سؤال مشخص است.

۳۹ ۳ ابتدا نمودار تابع $y=۳^x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=۳^x-۱$ به‌دست آید. در آخر، نمودار را نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم $(y=x)$ قرینه می‌کنیم تا نمودار معکوسش به دست آید.



۴۰ ۲ برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد منحنی با محور yها، باید x را صفر بگذاریم: $y=۲^۰=۱$ ، پس نقطهٔ $A(۰,۱)$ روی f قرار دارد. بنابراین نقطهٔ $B(۱,۰)$ روی f^{-1} قرار دارد و داریم:



$$AB=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

۴۱ ۴ ابتدا تابع $y=(\frac{۱}{۲۵})^{۱-x}+۵^{۲x-۱}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

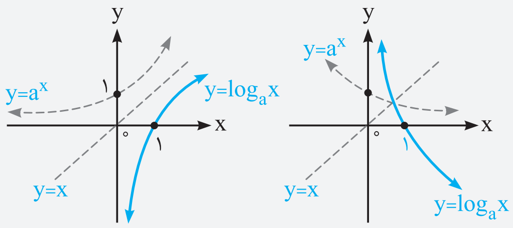
$$y=۲۵^{x-۱}+۵^{۲x-۱}=(۲۵^x\times\frac{۱}{۲۵})+(۵^{۲x}\times\frac{۱}{۵})=(۲۵^x\times\frac{۱}{۲۵})+(۲۵^x\times\frac{۱}{۵})=۲۵^x(\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۵})$$

$$\Rightarrow y=\frac{۶}{۲۵}(۲۵^x)\Rightarrow\frac{۲۵}{۶}y=۲۵^x\Rightarrow x=\log_{۲۵}\frac{۲۵}{۶}y$$

بنابراین $f^{-1}(x)=\log_{۲۵}\frac{۲۵}{۶}x$ می‌باشد.

۴۲ | ۳ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

رسم نمودار تابع لگاریتمی



(a>۱) (۰<a<۱)

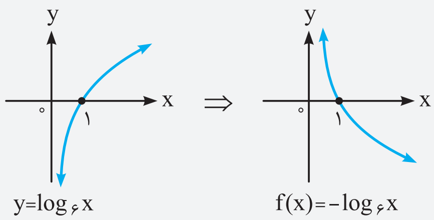
گفتیم تابع لگاریتمی $y=\log_a x$، معکوس تابع $y=a^x$ است و نمودار آن را از طریق قرینه کردن نمودار تابع نمایی $y=a^x$ نسبت به نیمساز نواحی اول و سوم رسم کردیم. یک‌بار دیگر آن‌ها را مرور می‌کنیم و نتایجی را به‌دست می‌آوریم.

نتیجهٔ ۱ مبنا یا پایهٔ لگاریتم (یعنی a) باید همیشه بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک باشد ($a \neq ۱, a > ۰$).

نتیجهٔ ۲ عبارت جلوی لگاریتم، همواره مثبت است ($x > ۰$).

نتیجهٔ ۳ اگر $a > ۱$ باشد، آن‌گاه در تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ با افزایش مقدار x، مقدار y هم افزایش می‌یابد و اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آن‌گاه با افزایش مقدار x، مقدار y کاهش می‌یابد.

مثال نمودار تابع $f(x) = -\log_{۴} x$ را رسم کنید.



پاسخ: ابتدا نمودار تابع $y=\log_{۴} x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)=-\log_{۴} x$ به دست آید (یعنی قرینه نسبت به محور xها)، به این صورت:

مثال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\log_{۵}(x-۲)$

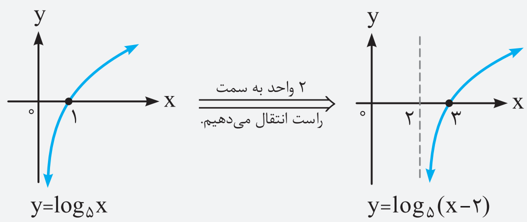
ب) $y=-\log_{۷}(-x)$

پ) $y=۲-\log_{۲} x$

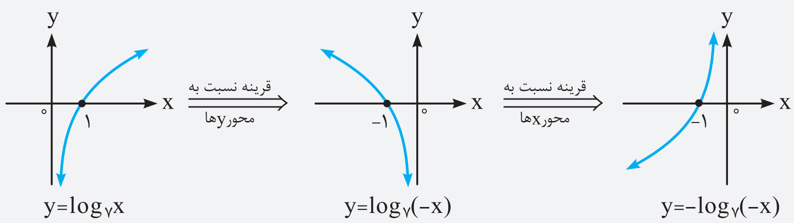
ت) $y=\left(\log_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} x\right)-۱$

پاسخ:

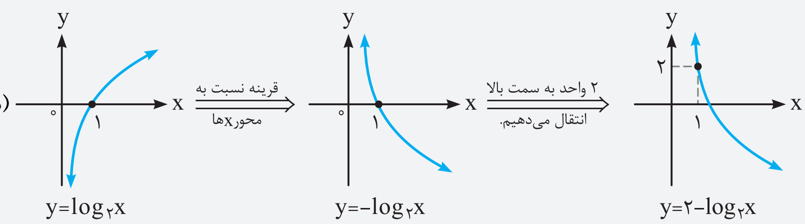
الف)



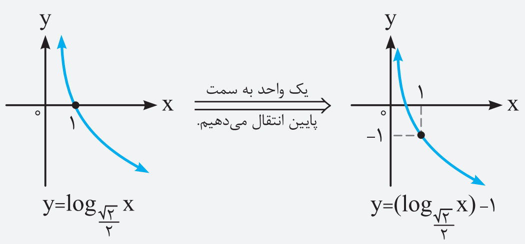
ب)



پ)

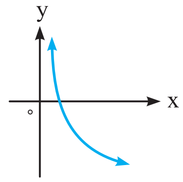


ت)

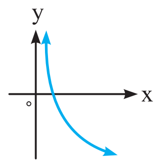


نمودار همهٔ توابع داده شده را رسم می‌کنیم:

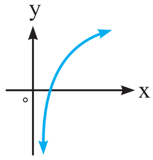
الف) $y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$: $\circ<\downarrow<۱$



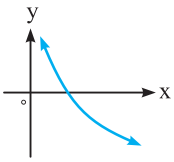
ب) $y=\log_{۰/۴}۳x$ $\circ<\downarrow<۱$



پ) $y=\log_{۸}x$ $\downarrow>۱$



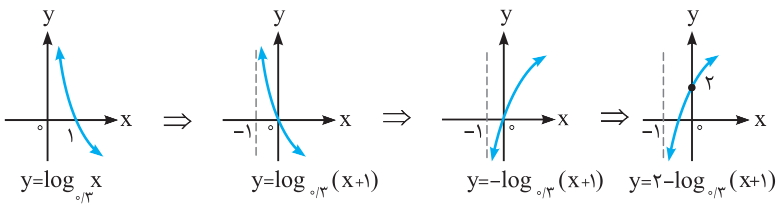
ت) $y=\log_{۰/۱}\frac{x}{۲}$ $\circ<\downarrow<۱$



۴۳ **۳** باید مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد، بنابراین:

$$\circ<۳-\frac{a^۲}{۲}<۱\Rightarrow -۳<-\frac{a^۲}{۲}<-۲\xrightarrow{\times(-۲)}۴<a^۲<۶\xrightarrow{\text{جذر}}۲<|a|<\sqrt{۶}$$

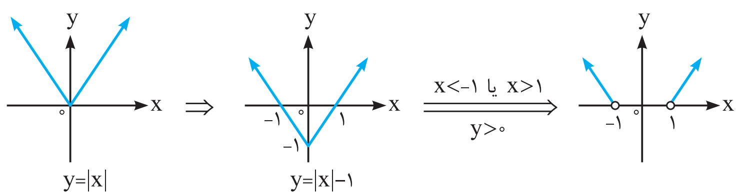
۴۴ **۲** مرحله به مرحله نمودارها را رسم می‌کنیم تا به جواب برسیم:



۴۵ **۲** عبارت جلوی لگاریتم باید همواره مثبت باشد، پس:

$$\begin{cases} y>\circ \\ |x|-۱>\circ\Rightarrow|x|>۱\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۱\end{cases}$$

حال با توجه به تساوی $\log_۲ y=\log_۲(|x|-۱)$، نتیجه می‌گیریم $y=|x|-۱$ است، در نتیجه نمودار آن به این صورت درمی‌آید:



۴۶ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

دامنهٔ تابع لگاریتمی

برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی به فرم $y=\log_v u$، باید عبارت جلوی لگاریتم (یعنی u) را بزرگ‌تر از صفر و مبنای لگاریتم (یعنی v) را بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک قرار دهید. به صورت زیر:

$$y=\log_v u\Rightarrow D_y=\{x\,|\,\underbrace{u>\circ}_{(۱)},\underbrace{v>\circ}_{(۲)},\underbrace{v\neq ۱}_{(۳)}\}$$

در نهایت با اشتراک گرفتن از (۱)، (۲) و (۳)، دامنهٔ تابع لگاریتمی به‌دست می‌آید.

مثال **دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۳(mx+n)$، بازهٔ $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ است. اگر $f(۱)=\circ$ باشد، مقدار n کدام است؟**

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۱-   ۴) ۳-

پاسخ: ابتدا دامنهٔ تابع $f(x)=\log_۳(mx+n)$ را به دست می‌آوریم:

$$mx+n>\circ\Rightarrow mx>-n\Rightarrow x>-\frac{n}{m}\Rightarrow x\in(-\frac{n}{m},+\infty)\xrightarrow{x\in(\frac{۱}{۲},+\infty)}-\frac{n}{m}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=-۲n\quad(*)$$

از طرفی $f(۱)=\circ$ است، پس:

$$f(۱)=\log_۳(m+n)=\circ\xrightarrow{\log_a ۱=\circ}m+n=۱\overset{(*)}{\Rightarrow}-۲n+n=۱\Rightarrow -n=۱\Rightarrow n=-۱\Rightarrow \text{(گزینهٔ ۳)}$$

با چیزهایی که گفتیم، این‌طوری می‌شود:

$$\begin{cases} x^۲-۹>۰ \\ x-۴>۰ \\ x-۴\neq ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲>۹ \xRightarrow{\text{جذر}} |x|>۳ \\ x>۴ \\ x\neq ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-۳ \text{ یا } x>۳ \\ x>۴ \\ x\neq ۵ \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} x>۴, x\neq ۵ \Rightarrow D_y=(۴,+\infty)-\{۵\}$$

۴۷ **۴** باید دامنهٔ صورت و مخرج کسر را تعیین کنیم و بین مجموعهٔ جواب‌های آن‌ها اشتراک بگیریم. در آخر، ریشه‌های مخرج را از مجموعه جواب به‌دست آمده، کم کنیم:

$$\begin{cases} \log_۲(۱۶-x^۲): ۱۶-x^۲>۰ \Rightarrow x^۲<۱۶ \xRightarrow{\text{جذر}} |x|<۴ \Rightarrow -۴<x<۴ \\ \log_۲(x-۲): x-۲>۰ \Rightarrow x>۲ \\ \text{ریشهٔ مخرج}: \log_۲(x-۲)=۰ \xRightarrow{\text{می‌دانیم } \log_a ۱=۰} x-۲=۱ \Rightarrow x=۳ \end{cases} \Rightarrow D_y=(-۴,۴)\cap(۲,+\infty)-\{۳\}=(۲,۴)-\{۳\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع، شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌باشد.

۴۸ **۳** در مورد دامنهٔ تابع $y=\log_{g(x)} f(x)$ داریم:

$$f(x)>۰ \xRightarrow{\text{طبق نمودار}} x<۳ \ , \ g(x)>۰ \xRightarrow{\text{طبق نمودار}} x>-۱ \ , \ g(x)\neq ۱ \xRightarrow{\text{طبق نمودار}} x\neq ۰$$

$$\xRightarrow{\text{اشتراک}} D_y=(-۱,۳)-\{۰\}$$

در نتیجه اعداد صحیح موجود در دامنهٔ تابع عبارت‌اند از ۱ و ۲.

۴۹ **۱** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

ارتباط بین تساوی نمایی و لگاریتمی

اگر $a=b^c$ باشد، به‌طوری که a و b مثبت و $b\neq ۱$، در این صورت c را لگاریتم a در مبنای b می‌نامیم و داریم:

$$\boxed{a=b^c \Leftrightarrow \log_b a=c}$$

مثلاً $\log_۳ ۹=۲$ است، زیرا $۳^۲=۹$ می‌باشد و یا $\log_{۱۰} ۱۰۰۰=۳$ است، زیرا $۱۰^۳=۱۰۰۰$ می‌باشد.

از روی معادلاتی که در اختیار داریم، مقادیر α و β را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲\log_{۱۰۸}\alpha-۱=۰ \Rightarrow \log_{۱۰۸}\alpha=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=(۱۰۸)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۰۸}=\sqrt{۳۶\times ۳}=۶\sqrt{۳} \\ \log_{۱۲}\beta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \beta=(۱۲)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times ۳}=۲\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۶\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

۵۰ **۳** براساس تعریف لگاریتم، از تساوی‌های $\log_۳ ۴=\alpha$ و $\log_۲ ۵=\beta$، نتیجه می‌گیریم $۳^\alpha=۴$ و $۲^\beta=۵$ است، بنابراین:

$$۳^{\alpha\beta}=(۳^\alpha)^\beta=۴^\beta=(۲^۲)^\beta=(۲^\beta)^۲=۵^۲=۲۵$$

۵۱ **۳** از تساوی $\log_۲ ۱۲=\alpha$، نتیجه می‌گیریم $۲^\alpha=۱۲$ است. حالا برویم سراغ $۴^{\alpha-۲}$:

$$۴^{\alpha-۲}=(۲^۲)^{\alpha-۲}=۲^{۲\alpha-۴}=\frac{۲^{۲\alpha}}{۲^۴}=\frac{(۲^\alpha)^۲}{۱۶}=\frac{(۱۲)^۲}{۱۶}=\frac{۱۴۴}{۱۶}=۹$$

۵۲ **۱** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

ویژگی‌های لگاریتم (بخش اول)

در این‌جا با بخش اول ویژگی‌های لگاریتم آشنا می‌شوید.

ویژگی ۱: اگر $a>۰$ و $a\neq ۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\log_a a=۱ \text{ و } \log_a ۱=۰}$$

مثال $\log_{۱۰} ۱۰=۱ \ , \ \log_۵ ۱=۰$

* اگر **مبنای لگاریتم، ۱۰** باشد، آن را **لگاریتم اعشاری** می‌نامیم و اغلب مبنای ۱۰ را نمی‌نویسیم.

ویژگی ۲: اگر $a,b,c>۰$ و $c\neq ۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\log_c ab=\log_c a+\log_c b}$$

اثبات: فرض کنید $\log_c a=m$، در این صورت $c^m=a$ می‌باشد و اگر $\log_c b=n$، آن‌گاه $c^n=b$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$c^m\times c^n=c^{m+n}=ab \quad (*)$$

از طرفی اگر $\log_c ab = t$ باشد، آن‌گاه $c^t = ab$ است و با توجه به (*) خواهیم داشت:

$$c^t = c^{m+n} \Rightarrow t = m+n \Rightarrow \mathbf{\log_c ab = \log_c a + \log_c b}$$

ویژگی ۳: اگر $a,b,c > ۰$ و $c \neq ۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b}$$

اثبات: با توجه به ویژگی ۲ می‌توان نوشت:

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) + \log_c b = \log_c\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \log_c a \Rightarrow \mathbf{\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b}$$

ویژگی ۴: اگر $a,b > ۰$ و $b \neq ۱$ باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\log_b a^m = m \log_b a}$$

اثبات:

$$\log_b a^m = \log_b(\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{بار}}) = \underbrace{\log_b a + \log_b a + \cdots + \log_b a}_{m\text{بار}} = m \log_b a$$

و به‌طور کلی می‌توان نوشت:

$$\boxed{\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a}$$

مثال $\log ۱۰۰ = \log ۱۰^۲ = ۲\log ۱۰ = ۲(۱) = ۲$

مثال $\log ۰/۰۰۱ = \log ۱۰^{-۳} = -۳\log ۱۰ = -۳(۱) = -۳$

مثال اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ باشد، حاصل هر یک از موارد زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

الف) $\log ۷۲$ ب) $\log \frac{۲۷}{۱۲۵}$ پ) $\log ۰/۷۵$

ت) $\log \sqrt[۵]{۳۶}$ ث) $\log \sqrt[۳]{۲۵}$ ج) $\log \frac{\sqrt[۶]{۸۱}}{\sqrt[۳]{۲۵}}$

پاسخ:

الف) $\log ۷۲ = \log(۲^۳ \times ۳^۲) = \log ۲^۳ + \log ۳^۲ = ۳\log ۲ + ۲\log ۳ = ۳a + ۲b$

ب) $\log \frac{۲۷}{۱۲۵} = \log ۲۷ - \log ۱۲۵ = \log ۳^۳ - \log ۵^۳ = ۳\log ۳ - ۳\log ۵ = ۳\log ۳ - ۳\log \frac{۱۰}{۲} = ۳\log ۳ - ۳(\underbrace{\log ۱۰}_{۱} - \log ۲)$

$= ۳b - ۳(۱-a) = ۳b - ۳ + ۳a$

پ) $\log ۰/۷۵ = \log \frac{۷۵}{۱۰۰} = \log \frac{۳}{۴} = \log ۳ - \log ۴ = \log ۳ - \log ۲^۲ = \log ۳ - ۲\log ۲ = b - ۲a$

ت) $\log \sqrt[۵]{۳۶} = \log(۳۶)^{\frac{۱}{۵}} = \frac{۱}{۵}\log ۳۶ = \frac{۱}{۵}\log ۶^۲ = \frac{۲}{۵}\log ۶ = \frac{۲}{۵}\log(۲\times ۳) = \frac{۲}{۵}(\log ۲ + \log ۳) = \frac{۲}{۵}(a+b)$

ث) $\log \sqrt[۳]{۲۵} = \log(۲۵)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\log ۲۵ = \frac{۱}{۳}\log(۵)^۲ = \frac{۲}{۳}\log \overset{\frac{۱۰}{۲}}{\cancel{۵}} = \frac{۲}{۳}(\log ۱۰ - \log ۲) = \frac{۲}{۳}(۱-a)$

ج) $\log \frac{\sqrt[۶]{۸۱}}{\sqrt[۳]{۲۵}} = \log \sqrt[۶]{۸۱} - \log \sqrt[۳]{۲۵} = \log(۸۱)^{\frac{۱}{۶}} - \log(۲۵)^{\frac{۱}{۳}} = \log(۳^۴)^{\frac{۱}{۶}} - \log(۵^۲)^{\frac{۱}{۳}} = \log ۳^{\frac{۲}{۳}} - \log ۵^{\frac{۲}{۳}}$

$= \frac{۲}{۳}\log ۳ - \frac{۲}{۳}\log \overset{\frac{۱۰}{۲}}{\cancel{۵}} = \frac{۲}{۳}\log ۳ - \frac{۲}{۳}(\log ۱۰ - \log ۲) = \frac{۲}{۳}b - \frac{۲}{۳}(۱-a) = \frac{۲b}{۳} + \frac{۲a}{۳} - \frac{۲}{۳}$

مثال حاصل $\log_{\frac{۱}{۴}} ۸\sqrt[۳]{۲}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\log_{۲^{-۲}}(۲^۳ \times ۲^{\frac{۱}{۳}}) = \log_{۲^{-۲}} ۲^{(۳+\frac{۱}{۳})} = \log_{۲^{-۲}} ۲^{\frac{۱۰}{۳}} = \frac{\frac{۱۰}{۳}}{-۲}\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱} = -\frac{۵}{۳}(۱) = -\frac{۵}{۳}$$

مثال حاصل $\log_۶ ۲\sqrt{۳} + \log_۶ ۳\sqrt{۲}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\log_۶ ۲\sqrt{۳} + \log_۶ ۳\sqrt{۲} = \log_۶(۲\sqrt{۳} \times ۳\sqrt{۲}) = \log_۶ ۶\sqrt{۶} = \log_۶ ۶^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}\underbrace{\log_۶ ۶}_{۱} = \frac{۳}{۲}(۱) = \frac{۳}{۲}$$

❋ در هر یک از موارد زیر، لگاریتم‌های داده‌شده را بر حسب $\log ۲$ نوشته‌ایم:

۱ $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \Rightarrow \boxed{\log ۵ = ۱ - \log ۲}$

۲ $\log ۰/۲۵ = \log \frac{۱}{۴} = \log ۲^{-۲} = -۲\log ۲ \Rightarrow \boxed{\log ۰/۲۵ = -۲\log ۲}$

۳ $\log ۱/۲۵ = \log \frac{۵}{۴} = \log ۵ - \log \cancel{۴}^{۲^۲} = (۱ - \log ۲) - ۲\log ۲ = ۱ - ۳\log ۲ \Rightarrow \boxed{\log ۱/۲۵ = ۱ - ۳\log ۲}$

۴ $\log ۲/۵ = \log \frac{۵}{۲} = \log ۵ - \log ۲ = (۱ - \log ۲) - \log ۲ = ۱ - ۲\log ۲ \Rightarrow \boxed{\log ۲/۵ = ۱ - ۲\log ۲}$

۵ $\log ۶/۲۵ = \log (۲/۵)^۲ = ۲\log ۲/۵ = ۲(۱ - ۲\log ۲) \Rightarrow \boxed{\log ۶/۲۵ = ۲(۱ - ۲\log ۲)}$

مثال **اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۳}, -۹)$ عبور کند، مقدار a چه‌قدر است؟**

پاسخ: با توجه به داده‌های مسأله، مختصات نقطهٔ $(\frac{۱}{۳}, -۹)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$f(\frac{۱}{۳}) = -۹ \Rightarrow -۹ = \log_a \frac{۱}{۳} \Rightarrow -۹ = \log_a ۳^{-۱} \Rightarrow -۹ = -\log_a ۳ \Rightarrow ۹ = \log_a ۳ \Rightarrow a^۹ = ۳ \Rightarrow (a^۹)^{\frac{۱}{۹}} = ۳^{\frac{۱}{۹}} \Rightarrow a = \sqrt[۹]{۳}$$

با توجه به شکل داده شده، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a = \log_{\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۹} = \log_{۳^{-۱}} ۳^{-۲} = \frac{-۲}{-۱} \times \underbrace{\log_۳ ۳}_{۱} = ۲ \\ b = \log_{\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۲۷} = \log_{۳^{-۱}} ۳^{-۳} = \frac{-۳}{-۱} \times \underbrace{\log_۳ ۳}_{۱} = ۳ \\ \log_{\frac{۱}{۳}} c = -۲ \Rightarrow c = (\frac{۱}{۳})^{-۲} = ۳^۲ = ۹ \end{cases} \Rightarrow a - b - c = ۲ - ۳ - ۹ = -۱۰$$

۵۳ **۴** همهٔ گزینه‌ها را با توجه به ویژگی‌های لگاریتم به شکل ساده‌تری نوشته و با هم مقایسه می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $\log_۳ \frac{۱}{۲۷} = \log_۳ ۳^{-۳} = -۳\log_۳ ۳ = -۳(۱) = -۳$

گزینهٔ (۲): $\log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱ = \log_{۳^{-۱}} ۳^۴ = \frac{۴}{-۱} \times \log_۳ ۳ = -۴(۱) = -۴$

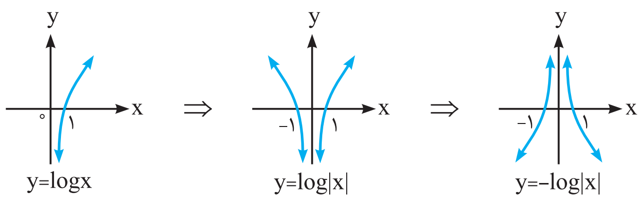
گزینهٔ (۳): $\log_{\frac{۱}{۵}} ۶۲۵ = \log_{۵^{-۱}} ۵^۴ = \frac{۴}{-۱} \times \log_۵ ۵ = -۴(۱) = -۴$

گزینهٔ (۴): $\log_{۱۶} ۶۴ = \log_{۲^۴} ۲^۶ = \frac{۶}{۴} \times \log_۲ ۲ = \frac{۳}{۲}(۱) = \frac{۳}{۲}$

۵۴ **۳** ابتدا ضابطهٔ تابع را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$y = \log \left| \frac{۱}{x} \right| = \log \frac{۱}{|x|} = \log (|x|)^{-۱} = -\log |x|$$

و حالا مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:



۵۵ **۱** با توجه به ضابطهٔ $f(x)$، مقدار $f(۶۳)$ را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$f(۶۳) = ۴ - ۵\log_۹ (\frac{۶۳}{۳} + ۶) = ۴ - ۵\log_۹ (۲۱ + ۶) = ۴ - ۵\log_۹ ۲۷ = ۴ - ۵\log_{۳^۲} ۳^۳ = ۴ - ۵ \times \frac{۳}{۲} \underbrace{\log_۳ ۳}_{۱}$$

$$= ۴ - \frac{۱۵}{۲} = \frac{۸ - ۱۵}{۲} = -\frac{۷}{۲} = -۳/۵$$

۵۶ **۱** نمودار تابع، محور xها را در $x = -۱$ قطع می‌کند، پس مختصات نقطهٔ $(-۱, ۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند. هم‌چنین نمودار، نیمساز ناحیهٔ چهارم $(y = -x)$ را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع کرده است، پس مختصات نقطهٔ $(۱, -۱)$ هم در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x = -۱ \ , \ y = ۰ \Rightarrow ۰ = \log_{\frac{۱}{۲}} (-a + b) \Rightarrow -a + b = ۱ \\ x = ۱ \ , \ y = -۱ \Rightarrow -۱ = \log_{\frac{۱}{۲}} (a + b) \Rightarrow a + b = (\frac{۱}{۲})^{-۱} = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = ۱ \\ a + b = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

۵۷ **۳** داریم $x=(\frac{\sqrt{۲}}{۴})^{-۲}$، پس:

$$x=(\frac{۴}{\sqrt{۲}})^{۲}=\frac{۱۶}{۲}=۸\Rightarrow \log_{۳}(x+۱)\xrightarrow{x=۸}\log_{۳} ۹=\log_{۳} ۳^{۲}=۲\underbrace{\log_{۳} ۳}_{۱}=۲(۱)=۲$$

۵۸ **۳** ابتدا مقدار x را پیدا می‌کنیم، سپس آن را در $\log_{x} ۴(x+۳)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=۸\log_{۴} ۲\sqrt{۲}=۸\times\log_{۲^{۲}}۲^{\frac{۳}{۲}}=۸\times\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}\times\underbrace{\log_{۲} ۲}_{۱}=۸\times\frac{۳}{۴}=۶$$

$$\Rightarrow \log_{x} ۴(x+۳)\xrightarrow{x=۶}\log_{۶} ۴(۶+۳)=\log_{۶} ۳۶=\log_{۶} ۶^{۲}=۲\underbrace{\log_{۶} ۶}_{۱}=۲$$

۵۹ **۱** می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\log_{\frac{۱}{۱۶}} ۸\sqrt[۳]{۲}=\log_{۲^{-۴}}(۲^{۳}\times ۲^{\frac{۱}{۳}})=\log_{۲^{-۴}}۲^{\frac{۱۰}{۳}}=\frac{\frac{۱۰}{۳}}{-۴}\times\underbrace{\log_{۲} ۲}_{۱}=\frac{۱۰}{-۱۲}=-\frac{۵}{۶}\\ \log_{۲۷}\frac{۱}{۹}=\log_{۳^{۳}}۳^{-۲}=-\frac{۲}{۳}\underbrace{\log_{۳} ۳}_{۱}=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{۱}{۱۶}} ۸\sqrt[۳]{۲}+\left|\log_{۲۷}\frac{۱}{۹}\right|=-\frac{۵}{۶}+\left|-\frac{۲}{۳}\right|=-\frac{۵}{۶}+\frac{۲}{۳}=\frac{-۵+۴}{۶}=-\frac{۱}{۶}$$

۶۰ **۳** با توجه به داده‌های مسأله، می‌توان نوشت:

$$\sqrt{a}=x^{۳}\xrightarrow{\text{توان ۲}} a=x^{۶} \quad \text{و} \quad b^{۲}=x^{۳}\xrightarrow{\text{جذر}} b=x^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow \log_{x} a-۲\log_{x^{۲}} b=\log_{x} x^{۶}-۲\log_{x^{۲}} x^{\frac{۳}{۲}}=۶\underbrace{\log_{x} x}_{۱}-۲\times\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}\underbrace{\log_{x} x}_{۱}=۶-\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۶۱ **۳** ابتدا کمی روی $۲۷\sqrt[۳]{۸۱}$ و $۲\sqrt{۲}$ کار می‌کنیم، سپس می‌رویم سراغ حل مسأله:

$$۲۷\sqrt[۳]{۸۱}=۳^{۳}\times\sqrt[۳]{۳^{۴}}=۳^{۳}\times ۳^{\frac{۴}{۳}}=۳^{\frac{۱۳}{۳}} \qquad \text{و} \qquad ۲\sqrt{۲}=۲^{۱}\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}$$

حالا خوب شد! بنابراین داریم:

$$\log_{\sqrt{۹}} ۲۷\sqrt[۳]{۸۱}+\log_{۷}\frac{۱}{۴۹}+\log_{\sqrt[۴]{۲}} ۲\sqrt{۲}=\log_{۳} ۳^{\frac{۱۳}{۳}}+\log_{۷} ۷^{-۲}+\log_{۲^{\frac{۱}{۴}}} ۲^{\frac{۳}{۲}}$$

$$=\frac{۱۳}{۳}\underbrace{\log_{۳} ۳}_{۱}-۲\underbrace{\log_{۷} ۷}_{۱}+\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴}}\underbrace{\log_{۲} ۲}_{۱}=\frac{۱۳}{۳}-۲+۶=\frac{۲۵}{۳}$$

۶۲ **۱** برای تعیین دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{۳}(ax+b)$، باید نامعادلهٔ $ax+b>۰$ را حل کنیم:

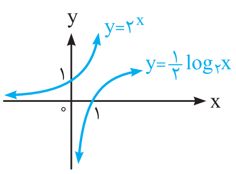
$$ax+b>۰\Rightarrow x>-\frac{b}{a}\Rightarrow D_f=(-\frac{b}{a},+\infty)\xrightarrow{x\in(-\frac{۱}{۲},+\infty)}-\frac{b}{a}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲b \qquad (*)$$

از طرفی $f(۴)=۲$ است، بنابراین:

$$f(۴)=\log_{۳}(۴a+b)=۲\Rightarrow ۴a+b=۳^{۲}=۹\xRightarrow{(*)}۴(۲b)+b=۹\Rightarrow ۹b=۹\Rightarrow b=۱\xRightarrow{(*)}a=۲\Rightarrow f(x)=\log_{۳}(۲x+۱)$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۴}{۹})=\log_{۳}\left(۲(-\frac{۴}{۹})+۱\right)=\log_{۳}(-\frac{۸}{۹}+۱)=\log_{۳}\frac{۱}{۹}=\log_{۳} ۳^{-۲}=-۲\underbrace{\log_{۳} ۳}_{۱}=-۲$$

۶۳ **۴** با رسم نمودار توابع $y=\log_{۲}\sqrt{x}=\log_{۲} x^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log_{۲} x$ و $y=۲^{x}$ در شکل مقابل، متوجه می‌شویم که این دو تابع با هم برخورد ندارند.



۶۴ **۳** دامنهٔ این دو تابع با هم برابر است (در هر دوی آن‌ها $x>۰$ می‌باشد، یعنی $D_f=D_g=(۰,+\infty)$). حال از ویژگی $\log_{b^{n}} a^{m}=\frac{m}{n}\log_{b} a$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\log_{۲}\frac{۱}{x}=\log_{۲} x^{-۱}=-\log_{۲} x \qquad \text{و} \qquad g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}} x=\log_{۲^{-۱}} x=-\log_{۲} x$$

با توجه به این‌که دامنهٔ دو تابع با هم برابر شده و ضابطهٔ آن‌ها نیز یکسان می‌باشد، نتیجه می‌گیریم دو تابع با هم برابر هستند و نمودارهایشان برهم منطبق است.

۶۵ **۳** با توجه به معلومات مسأله، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(۲)=۶ \Rightarrow a+\log_{۲}(۲b-۴)=۶ \\ f(۱۲)=۱۰ \Rightarrow a+\log_{۲}(۱۲b-۴)=۱۰ \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$(\cancel{a}+\log_{۲}(۱۲b-۴))-(\cancel{a}+\log_{۲}(۲b-۴))=۱۰-۶ \Rightarrow \log_{۲}(۱۲b-۴)-\log_{۲}(۲b-۴)=۴$$

$$\Rightarrow \log_{۲}\frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}=۴ \Rightarrow \frac{۱۲b-۴}{۲b-۴}=۲^{۴}=۱۶ \Rightarrow ۱۲b-۴=۳۲b-۶۴ \Rightarrow ۲۰b=۶۰ \Rightarrow b=۳$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$a+\log_{۲}(۱۲b-۴)=۱۰ \xRightarrow{b=۳} a+\log_{۲}۳۲=۱۰ \Rightarrow a+\log_{۲}۲^{۵}=۱۰ \Rightarrow a+۵\underbrace{\log_{۲}۲}_{۱}=۱۰ \Rightarrow a+۵=۱۰ \Rightarrow a=۵$$

۶۶ **۱** به‌جای A، معادل آن یعنی ۳^{a} را می‌گذاریم:

$$\log_{۳}۹A^{۲}=\log_{۳}(۹\times(۳^{a})^{۲})=\log_{۳}(۳^{۲}\times۳^{۲a})=\log_{۳}۳^{(۲+۲a)}=(۲+۲a)\underbrace{\log_{۳}۳}_{۱}=۲+۲a$$

۶۷ **۱** از تساوی $۸^{k}=۴\sqrt{۲}$ نتیجه می‌گیریم:

$$(۲^{۳})^{k}=۲^{۲}\times۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۲^{۳k}=۲^{\frac{۵}{۲}} \Rightarrow ۳k=\frac{۵}{۲} \Rightarrow k=\frac{۵}{۶}$$

حال برویم سراغ $\log_{۳۶}(۶k+۱)$:

$$\log_{۳۶}(۶k+۱)\overset{k=\frac{۵}{۶}}{=\!=\!=}\log_{۳۶}\left(۶\times\frac{۵}{۶}+۱\right)=\log_{۳۶}۶=\log_{۶^{۲}}۶=\frac{۱}{۲}\underbrace{\log_{۶}۶}_{۱}=\frac{۱}{۲}$$

۶۸ **۲** از تساوی $\log_{y}x=۲$ نتیجه می‌گیریم $x=y^{۲}$، بنابراین در مورد $\log_{y\sqrt{y}}x\sqrt[۳]{y}$ می‌توان نوشت:

$$\log_{y\times y^{\frac{۱}{۲}}}(y^{۲}\times y^{\frac{۱}{۳}})=\log_{y^{\frac{۳}{۲}}}y^{\frac{۷}{۳}}=\frac{\frac{۷}{۳}}{\frac{۳}{۲}}\times\underbrace{\log_{y}y}_{۱}=\frac{۱۴}{۹}$$

۶۹ **۳** گفته شده $\log ۴=k$، پس می‌توان نوشت:

$$\log ۲^{۲}=k \Rightarrow ۲\log ۲=k \Rightarrow \log ۲=\frac{k}{۲} \quad (*)$$

حال می‌خواهیم حاصل $\log ۰/۱۲۵$ را بر حسب k به دست آوریم:

$$\log ۰/۱۲۵=\log\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}=\log\frac{۱}{۸}=\log ۲^{-۳}=-۳\log ۲\overset{(*)}{=\!=\!=}-۳\left(\frac{k}{۲}\right)=-\frac{۳k}{۲}$$

۷۰ **۴** با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، داریم:

$$\log_{\sqrt{b}}ab^{۲}=\log_{b^{\frac{۱}{۲}}}a+\log_{b^{\frac{۱}{۲}}}b^{۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_{b}a+\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\underbrace{\log_{b}b}_{۱}=۲\log_{b}a+۴=۲\left(\frac{۳}{۲}\right)+۴=۷$$

۷۱ **۳** به محاسبات زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} \sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x}}=\sqrt[۳]{x^{۲}\times x^{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt[۳]{x^{\frac{۵}{۲}}}=(x^{\frac{۵}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=x^{\frac{۵}{۶}} \\ x\sqrt[۳]{x}=x\times x^{\frac{۱}{۳}}=x^{\frac{۴}{۳}} \end{cases} \Rightarrow \log_{x^{\frac{۴}{۳}}}x^{\frac{۵}{۶}}=\frac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۴}{۳}}\underbrace{\log_{x}x}_{۱}=\frac{۵}{۸}$$

۷۲ **۲** اول این‌که حواستان باشد $\log\frac{۴}{۳}$ برابر $-\log\frac{۳}{۴}$ است، زیرا:

$$\log\frac{۴}{۳}=\log\left(\frac{۳}{۴}\right)^{-۱}=-\log\frac{۳}{۴}$$

حالا $\log\frac{۳}{۴}$ را مساوی α می‌گیریم، پس:

$$\log\frac{۴}{۳}=-\log\frac{۳}{۴}=-\alpha \Rightarrow f\left(\log\frac{۳}{۴}\right)+f\left(\log\frac{۴}{۳}\right)=f(\alpha)+f(-\alpha)=(۴^{\alpha}-۴^{-\alpha})+(۴^{-\alpha}-۴^{\alpha})=۰$$

۷۳ **۴** ابتدا مقدار عبارت $x^{۲}+۳x+۱$ را به ازای x داده شده، به‌دست می‌آوریم:

$$x^{۲}+۳x+۱=x(x+۳)+۱\overset{x=\frac{۱}{۲}(-۳+\sqrt{۳۷})}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{\sqrt{۳۷}-۳}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳۷}-۳}{۲}+۳\right)+۱=\frac{\sqrt{۳۷}-۳}{۲}\times\frac{\sqrt{۳۷}+۳}{۲}+۱=\frac{۳۷-۹}{۴}+۱=۸$$

در نتیجه:

$$\log_{۴}(x^{۲}+۳x+۱)=\log_{۴}۸=\log_{۲^{۲}}۲^{۳}=\frac{۳}{۲}\underbrace{\log_{۲}۲}_{۱}=\frac{۳}{۲}$$

۷۴ **۴** طبق ویژگی $\log a+\log b=\log ab$، می‌توان نوشت:

$$\log x+\log(x^{۲}-۳)=\log x(x^{۲}-۳)=\log(x^{۳}-۳x)$$