فهرست

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو

قسمتی شیرین و کنکوری! بیشتر دانش‌آموزان کار با S و P را دوست دارند و چه چیزی بهتر از این‌که این بخش سهم خوبی در کنکور هم داشته باشد...

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو: S و P

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، با فرض $\Delta>0$ و وجود دو ریشه به نام‌های α و β، داریم:

	نماد	بر حسب ریشه‌ها	بر حسب ضریب‌ها
جمع دو ریشه	S	$\alpha+\beta$	$-\frac{b}{a}$
ضرب دو ریشه	P	$\alpha\beta$	$\frac{c}{a}$

تست: عدد $\frac{5}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2-6x-4m-1=0$ است. ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{35}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{35}{9}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: $x=\frac{5}{3}\xrightarrow[\text{ریشه در معادله صدق می‌کند}]{\text{بذار توی معادله}} m(\frac{5}{3})^2-6(\frac{5}{3})-4m-1=0\xrightarrow{\times 9}25m-90-36m-9=0$

$\xrightarrow{\text{حل کن}}-11m-99=0\Rightarrow m=-9\xrightarrow{\text{بذار در معادله}}-9x^2-6x+35=0\xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}}P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{35}{-9}$

رابطه‌ای بین ریشه‌ها در تست حضور داد...

هر تستی که در آن «**رابطه‌ای مشخص، بین دوتا ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دو داده شده باشد**» حتماً با روش S و P حل می‌شود؛ برای این منظور بنویسید:

۱ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۲ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ۳ رابطه‌ای که تست بین دو ریشه داده است! مثلاً گفته باشد: $\alpha=\beta^2$ (یا به زبان فارسی بگوید که یکی از ریشه‌ها مجذور دیگری بوده است...!)

حالا با کمک سه رابطه‌ی بالا و جای‌گذاری، پارامترِ موجود در تست را پیدا کنید...

تست: در معادله‌ی $x^2-8x+m=0$ یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ:

$$x^2-8x+m=0 \underset{b=-8,c=m,a=1}{\Rightarrow}\begin{cases} \text{①}\ \alpha+\beta=-(\frac{-8}{1})=8 \\ \text{②}\ \alpha\beta=\frac{m}{1}=m\end{cases}$$

③ یکی از ریشه‌ها از نصف دیگری ۵ واحد بیشتر است $\Rightarrow \alpha=\frac{\beta}{2}+5\xrightarrow[\alpha+\beta=8]{\text{بذار توی ①}}(\frac{\beta}{2}+5)+\beta=8\xrightarrow{\text{ساده‌کن}}\frac{\beta}{2}+\beta=3$

$\xrightarrow{\times 2}\beta+2\beta=6\Rightarrow 3\beta=6\Rightarrow\beta=2\xrightarrow[\alpha+\beta=8]{\text{بذار توی ①}}\alpha+2=8\Rightarrow\alpha=6\xrightarrow[\alpha\beta=m]{\text{بذار توی ②}}6\times 2=m\Rightarrow m=12$

کنترل Δ

در تستی که با S و P حل کرده‌اید و **برای پارامترِ موجود در سؤال، دو مقدار به‌دست آورده‌اید**، یادتان باشد برای هر کدام کنترل کنید که Δ مثبت می‌شود یا منفی؟! چنانچه به ازای پارامتری، $\Delta<0$ شود آن مقدار پارامتر، قابل قبول نیست!

این‌جوری هم ببین: خودِ S و P به‌تنهایی، لزوماً وجود ریشه را برای معادله‌ی درجه‌ی دوم تضمین نمی‌کنند، **حتماً چکِ Δ لازم است...**

راستی یادتان هست که اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، حتماً معادله‌ی درجه‌ی دومِ ما دو ریشه‌ی حقیقی دارد و چکِ Δ، لازم نیست! خب حالا این‌طوری هم بدانید که **کنترلِ Δ همیشه لازم است، مگر این‌که $\frac{c}{a}<0$ شود...**

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$ معکوس یکدیگرند؟ (خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ:

$$mx^۲+۳x+m^۲=۲ \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} mx^۲+۳x+(m^۲-۲)=۰ \xrightarrow{\text{S و P رو تشکیل بده}} \begin{cases} ۱)\ \alpha+\beta=-\frac{۳}{m} \\ ۲)\ \alpha\beta=\frac{m^۲-۲}{m} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\alpha=\frac{۱}{\beta}} \alpha\beta=۱ \xrightarrow{\text{در ۲ بذار}} ۱=\frac{m^۲-۲}{m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} m^۲-۲=m \xrightarrow{\text{مرتب کن}} m^۲-m-۲=۰$$

$$\xrightarrow[\text{جمع ضرایب اولی و سومی با وسطی برابر است}]{\text{حل کن}} m=-۱, m=۲ \xrightarrow{\text{در معادله جای‌گذاری کن}} \begin{cases} \xrightarrow{m=-۱} -x^۲+۳x-۱=۰ \\ \xrightarrow{m=۲} ۲x^۲+۳x+۲=۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کنترل }\Delta} \begin{cases} \Delta=۹-۴(-۱)(-۱)=۵ \text{ ق ق} \\ \Delta=۹-۴(۲)(۲)=-۷ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow m=-۱$$

دو رابطه‌ی معروف بین ریشه‌ها

۱) اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی، k برابرِ ریشه‌ی دیگر است، غیر از روش کلی که در قسمتِ قبل گفتیم، می‌توانید سریع قرار دهید: $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}$ و پارامتر را پیدا کنید.

۲) اگر تست گفت یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی، k واحد از دیگری بیشتر است، باز هم علاوه بر روشِ اصلی می‌توانید این فرمول را حفظ کنید که: $\Delta=k^۲a^۲$

اگر یکی از ریشه‌ها k واحد از اون یکی کمتر باشه، باز هم رابطه‌ی ۲ درسته و هیچ فرقی نمی‌کنه!

تست: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲+mx+۹=۰$ یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

پاسخ:

$$۲x^۲+mx+۹=۰ \xrightarrow[k=۲]{\text{یک ریشه k برابر دیگری}} \frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k} \Rightarrow \frac{m^۲}{۲\times۹}=\frac{(۲+۱)^۲}{۲} \Rightarrow \frac{m^۲}{۱۸}=\frac{۹}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} m^۲=۸۱ \Rightarrow m=\pm۹ \Rightarrow m=-۹ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} ۲x^۲-۹x+۹=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} S=-\frac{b}{a}=-(\frac{-۹}{۲})=۴/۵$$

توجه دارید که به ازای $m=۹$، جمع ریشه‌ها می‌شود $-۴/۵$ و چون ضرب آن‌ها هم مثبت می‌شود، یعنی هر دو ریشه منفی بوده‌اند که قابل قبولِ تست نیست.

یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-(m+۳)x+۳m=۰$ از دیگری ۵ واحد بیشتر است. حاصل‌ضرب ریشه‌های مثبت معادله کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۱ ۴) ۱۸

پاسخ:

$$\alpha=۵+\beta \xrightarrow[\Delta=k^۲a^۲]{k=۵} \underbrace{\boxed{(m+۳)^۲-۴(۱)(۳m)}}_{\Delta\text{ معادله‌ی درجه‌ی دوم}}=\underbrace{\boxed{(۵)^۲(۱)^۲}}_{k^۲a^۲} \xrightarrow{\text{اتحاد رو ساده کن}} m^۲-۶m+۹=۲۵$$

$$\Rightarrow m^۲-۶m-۱۶=۰ \xrightarrow{\text{حل کن}} m=۸,-۲$$

چون حاصل‌ضرب ریشه‌های مثبت خواسته شده، پس حتماً باید ضرب ریشه‌ها مثبت باشد، یعنی $m=۸$ قبوله:

$$m=۸ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} x^۲-۱۱x+۲۴=۰ \xrightarrow{\text{ضرب ریشه‌ها}} \frac{c}{a}=۲۴$$

محاسبه‌ی رابطه‌های معروف بین ریشه‌ها بر حسب S و P

در این مدل از تست‌ها، یک معادله‌ی درجه‌ی دو دارید که خب پارامتر هم ندارد و قرار است عبارتی را که بر حسب ریشه‌ها داده شده است، حساب کنید. مثل مجموع مکعبات ریشه‌ها یا هر چیز دیگری! طبق جدول زیر موارد مهم را به خاطر بسپارید:

مدل اول) معروف‌ها:

	به فارسی	بر حسب ریشه‌ها	حاصل عبارت خواسته‌شده بر حسب S و P
۱	مجموع مربعات ریشه‌ها	$\alpha^۲+\beta^۲$	$S^۲-۲P$
۲	مجموع مکعبات ریشه‌ها	$\alpha^۳+\beta^۳$	$S^۳-۳SP$
۳	قدرمطلقِ تفاضل ریشه‌ها	$\|\alpha-\beta\|$	$\sqrt{S^۲-۴P}$ یا $\frac{\sqrt{\Delta}}{\|a\|}$
۴	مجموع جذرهای ریشه‌های مثبت	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$

اینم دلیلش: واسه اثبات حالت‌هایی شبیه به ۳ و ۴، عبارت را مساوی k گرفته و به توان۲ برسانید و بعد حسابشون کنید، **ببین:**

۴ $k=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان۲}} k^{۲}=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=S+۲\sqrt{P} \xrightarrow[k>۰]{\text{جذر بگیر}} k=\sqrt{S+۲\sqrt{P}} \xrightarrow[\alpha,\beta>۰]{\text{نتیجه}} \boxed{|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}}$

تست: در معادله‌ی $x^{۲}-۸x+۴=۰$ ریشه‌ها را α و β نامیده‌ایم. حاصل تقسیم $\alpha^{۲}+\beta^{۲}$ به $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵۶\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $۲۸\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۵۶\sqrt{۳}$

پاسخ:

$$x^{۲}-۸x+۴=۰ \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=\alpha+\beta=۸ \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=\alpha\beta=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=۸^{۲}-۲(۴)=۵۶ \\ \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=\sqrt{۸+۲\sqrt{۴}}=\sqrt{۸+۴}=\sqrt{۱۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{۵۶}{\sqrt{۱۲}}=\frac{۵۶}{۲\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{گویاکن}} \frac{۵۶\times\sqrt{۳}}{۲\times۳}=\frac{۲۸\sqrt{۳}}{۳}$$

در معادله‌ی $x^{۲}+۳x-۱=۰$ حاصل $\alpha^{۳}+\beta^{۳}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) -۳۶ ۳) ۲۷ ۴) -۲۷

پاسخ:

$$x^{۲}+۳x-۱=۰ \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=-۳ \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=-۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{فرمول}} \alpha^{۳}+\beta^{۳}=S^{۳}-۳SP=(-۳)^{۳}-۳(-۳)(-۱)=-۳۶$$

مدل دوم) غیرمعروف‌ها:

اگر حاصل عبارتی را بر حسب ریشه‌ها خواستند که جزء جدولِ مدل اول نبود، ابتدا عبارت را با عملیات جبری مانند مخرج مشترک‌گیری، فاکتورگیری و اتحاد آن را ساده می‌کنیم؛ با این هدف که در آن‌ها فقط $\alpha\beta$ و $\alpha+\beta$ دیده شود یا عبارت‌های معروفی که در جدول گفتیم، بعدش عبارت را بر حسب S و P نوشته و حاصل آن را از روی معادله پیدا می‌کنیم...

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۴x^{۲}-۱۲x+۱=۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ:

۱ $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}} \frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} \xrightarrow[\text{مخرج جذر P است}]{\text{صورت جزء جدول است}} \frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$

۲ $۴x^{۲}-۱۲x+۱=۰ \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=-(\frac{-۱۲}{۴})=۳ \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=\frac{۱}{۴} \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در ۱}} \frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=\frac{\sqrt{۳+۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}}=\frac{\sqrt{۳+۲(\frac{۱}{۲})}}{\frac{۱}{۲}}$

$$=\frac{\sqrt{۳+۱}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

در معادله‌ی $۲x^{۲}+۷x-۲۰=۰$ با ریشه‌های α و β، حاصل $\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}$ کدام است؟

۱) -۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۳۵ ۴) -۴۵

پاسخ:

۱ $۲x^{۲}+۷x-۲۰=۰ \begin{cases} \xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=-\frac{۷}{۲} \\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=-\frac{۲۰}{۲}=-۱۰ \end{cases}$

۲ $\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲} \xrightarrow{\text{از }\alpha\beta\text{ فاکتوربگیر}} \alpha\beta(\alpha+\beta) \xrightarrow{\text{برحسب S و P بنویس}} PS \xrightarrow{\text{طبق ۱ جای‌گذاری‌کن}} (-۱۰)\times(-\frac{۷}{۲})=۳۵$

بحث درباره‌ی علامت ریشه‌ها فقط با کمکِ S و P

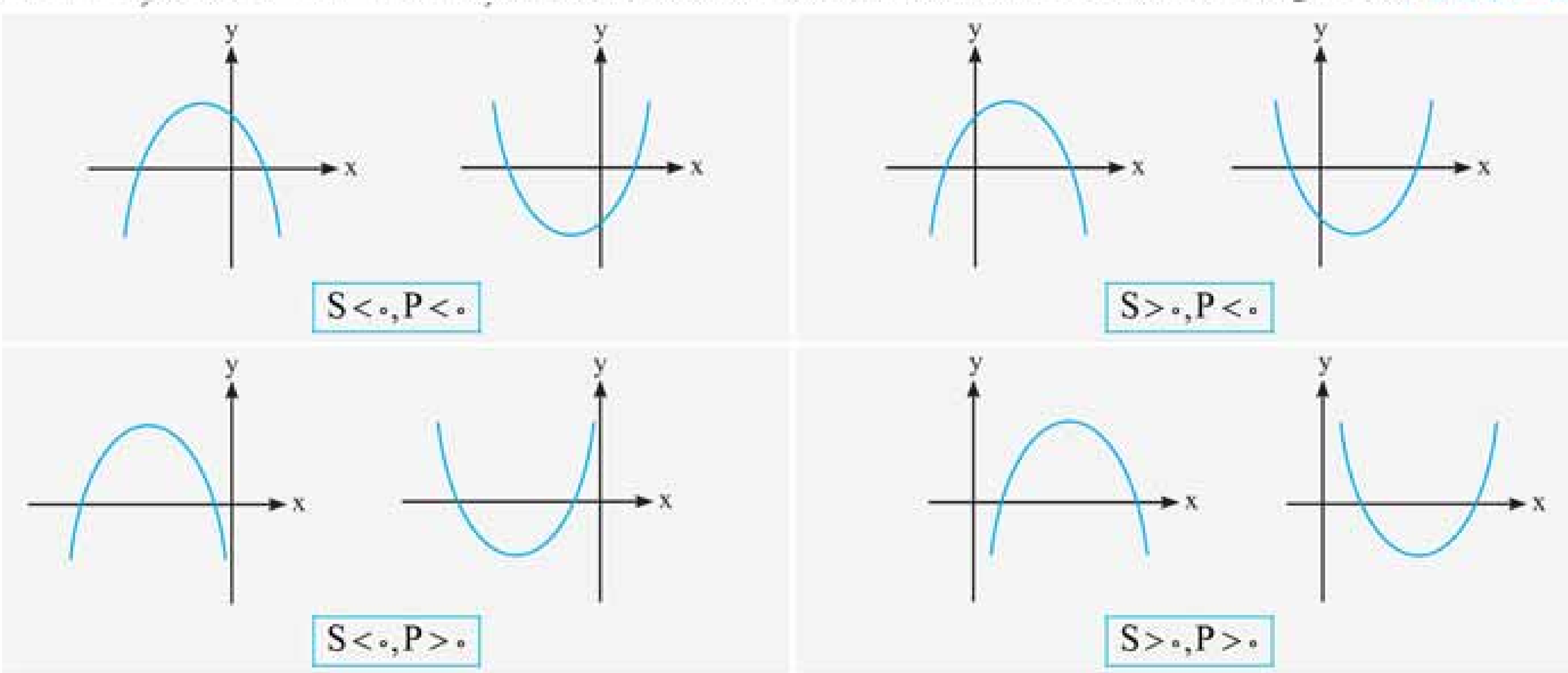
اگر در معادله‌ی درجه‌ی دومی $\Delta > 0$ باشد و در واقع معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، می‌توانید بدون آن‌که معادله را حل کرده و ریشه‌هایش را پیدا کنید، فقط با کمک علامتِ S و P درباره‌ی علامتِ ریشه‌ها اظهار نظر کنید.

این‌جوری هم ببین: یادت باشه اگه علامت ریشه‌ها رو خواستن، به یاد علامت S و P بیفتی...

$\Delta > 0$	$P > 0$	$P < 0$
$S > 0$	هر دو ریشه مثبت هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و قدرمطلق ریشه‌ی مثبت، بزرگ‌تر است؛ مثل ۴ و ۲−.
$S < 0$	هر دو ریشه منفی هستند.	دو ریشه‌ی با علامت متفاوت دارد و قدرمطلق ریشه‌ی منفی، بزرگ‌تر است؛ مثل ۵− و ۲.

۱) اگر $S = 0$ باشد، یعنی معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد؛ مثل ۳ و ۳−. در این‌حالت حتماً P منفی است.
۲) اگر $P = 0$ باشد، یعنی معادله حتماً یک ریشه‌ی صفر دارد.

این‌جوری هم ببین: چهار حالتی را که در جدول صفحه‌ی قبل آوردیم، به‌صورت نموداری هم ببینید؛ برایِ $y = ax^2 + bx + c$ و با فرضِ $\Delta > 0$، داریم:



تست: کدام‌یک از معادله‌های زیر دارای دو ریشه‌ی مثبت است؟

۱) $x^2 - 4x - 2 = 0$　۲) $x^2 - 2x + 4 = 0$　۳) $x^2 + 8x + 1 = 0$　۴) $x^2 - 4x + 2 = 0$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: $x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = -2 \Rightarrow$ علامت ریشه‌ها مختلف است. ✗

گزینه‌ی «۲»: $x^2 - 2x + 4 = 0 \xrightarrow{b^2-4ac} \Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow$ اصلا ریشه ندارد. ✗

گزینه‌ی «۳»: $x^2 + 8x + 1 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a}} P = 1 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند $\xrightarrow{-\frac{b}{a}} S = -8 \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند. ✗

اما در گزینه‌ی «۴»، $P = 2$ و $S = 4$ است که یعنی وجودِ دو ریشه‌ی مثبت؛ در ضمن Δ آن هم مثبت است...

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دو

برای تسلط به این بخش، پیشنهاد می‌کنیم حتماً ایستگاه ۳ را خوب خوانده باشید و تست‌های آن را زده باشید. چون می‌خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دو بنویسیم...

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با داشتنِ S و P آن

اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی را داشته باشید، که آن‌ها را به‌ترتیب S و P می‌نامیم، آن‌وقت معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر می‌شود: $x^2 - Sx + P = 0$

این‌جوری هم ببین: اگر دوتا عدد حقیقیِ α و β را بخواهید به‌طوری که جمع آن‌ها مساوی عدد معلومِ S و ضربشان هم P باشد، برای پیدا کردن این دو عدد باید معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ را حل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر، $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ هستند؟

۱) $x^2 + 4x - a = 0$　۲) $x^2 + ax + 4 = 0$　۳) $x^2 - 4x + a = 0$　۴) $x^2 + ax - 4 = 0$

پاسخ:

$$\alpha=2+\sqrt{4-a}\ ,\ \beta=2-\sqrt{4-a}\ \begin{cases}\xrightarrow{\text{جمع‌کن}} S=(2+\sqrt{4-a})+(2-\sqrt{4-a})=4\\ \xrightarrow{\text{ضرب‌کن}} P=(2+\sqrt{4-a})\times(2-\sqrt{4-a})\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} P=4-(4-a)=a\end{cases}$$

پس معادله‌ی درجه‌ی دوم موردنظر برابر است با: $x^2-Sx+P=0\xrightarrow[P=a]{S=4}x^2-4x+a=0$

نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم با کمک معادله‌ای دیگر؛ دو معادله‌ی درجه‌ی ۲ در یک تست!

در این مدل تست‌ها، دوتا معادله‌ی درجه‌ی دوم بهتون میدن! **ریشه‌های معادله‌ی اولی α و β فرض می‌شوند و ریشه‌های معادله‌ی دوم هم بر حسب α و β داده می‌شوند؛** خب شما S و P معادله‌ی اول را حساب می‌کنید، بعدش جمع و ضرب ریشه‌های دومی را تشکیل می‌دهید و S' و P' می‌نامید. حالا باید S' و P' را با ساده کردن و عملیات جبری بر حسب S و P ساخته و حساب کنید، خب حالا S' و P' هم معلوم شده، دیگه برو واسه خودت!

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k، مجموعه جواب‌های معادله‌ی $8x^2+kx-1=0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta,\alpha\beta^2\}$ است؟ (خارج ۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ:

۱ $2x^2-3x=1\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}}2x^2-3x-1=0\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=\frac{3}{2}=\boxed{\alpha+\beta}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=-\frac{1}{2}=\boxed{\alpha\beta}\end{cases}$

۲ $8x^2+kx-1=0\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}} S'=-\frac{k}{8}=\boxed{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P'=-\frac{1}{8}=\boxed{(\alpha^2\beta)(\alpha\beta^2)}\end{cases}$

حالا ساده می‌کنیم: $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2\xrightarrow{\text{فاکتوربگیر}}\alpha\beta(\alpha+\beta)\xrightarrow{\text{بر حسب S و P جای‌گذاری کن}}PS\xrightarrow{\text{طبق ۱}}(-\frac{1}{2})(\frac{3}{2})=-\frac{3}{4}$

$\xrightarrow[-\frac{k}{8}=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2]{\text{طبق ۲}}-\frac{k}{8}=-\frac{3}{4}\xrightarrow{\times(-8)}k=6$

گاهی تست، ریشه‌های معادله‌ی اولی را به زبان ریاضی برایتان α و β اعلام نمی‌کند! بلکه رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی دومی و معادله‌ی اول را به‌صورت فارسی به شما می‌دهد، باز هم مراحل شما فرقی با قبل ندارد. ریشه‌های اولی را α و β بگیرید و از روی جملات فارسی داده‌شده، ریشه‌های دومی را بر حسب α و β بنویسید و بعد هم دقیقاً مثل قبل عمل کنید...

تست: ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کمترند؟ (کنکور ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

پاسخ:

۱ $2x^2-3x-1=0\begin{cases}\xrightarrow{-\frac{b}{a}} S=\frac{3}{2}\\ \xrightarrow{\frac{c}{a}} P=-\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{فرم ریشه‌های دومی رو بنویس}}\underbrace{\frac{1}{\alpha}-1,\frac{1}{\beta}-1}_{\text{از معکوس، یک واحد کمتر}}$

۲ معادله‌ی دوم: $\begin{cases}S'=(\frac{1}{\alpha}-1)+(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2\Rightarrow S'=\frac{S}{P}-2\\ P'=(\frac{1}{\alpha}-1)\times(\frac{1}{\beta}-1)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{1}{P}-\frac{S}{P}+1\end{cases}$

$$\xrightarrow{\text{عددهای ۱ رو جای‌گذاری کن}}\begin{cases}S'=\frac{S}{P}-2=\dfrac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2=-5\\ P'=\frac{1}{P}-\frac{S}{P}+1=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}-\dfrac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}+1=-2+3+1=2\end{cases}\xrightarrow[x^2-S'x+P'=0]{\text{معادله‌ی دوم رو بنویس}}x^2+5x+2=0$$

۳۳۷. نمودار سهمی به معادله‌ی $y=x^2-(2m^2+1)x+m^4+m^2+\frac{1}{4}$ به ازای هر مقدار دلخواه m همواره:

۱) محور طول‌ها را قطع می‌کند. ۲) بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد.
۳) در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور طول‌ها مماس می‌شود. ۴) در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.

۳۳۸. رأس سهمی به معادله‌ی $y=-3x^2+(2m-1)x+5$ روی محور عرض‌ها واقع است. خط به معادله‌ی $y-2=0$، سهمی را در نقاطی با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ±1 ۲) ±2 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) قطع نمی‌کند.

۳۳۹. اگر مجموعه نقاط سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-x+\frac{2}{3}$ دارای عرضی بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{1}{2}$ باشند، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۴۰. سهمی به معادله‌ی $y=(2x+1)(x+8)$ با خط $y=mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟

۱) $5<m<13$ ۲) $15<m<23$ ۳) $7<m<15$ ۴) $9<m<25$

۳۴۱. به ازای چه مقادیری از a، سهمی به معادله‌ی $y=ax^2-(a+2)x$ هیچ‌گاه از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) $a\le2$ ۲) $a>0$ ۳) $a\le-2$ ۴) $-2\le a<0$

۳۴۲. اگر رأس نمودار سهمی $f(x)=x^2+2x-c$ نقطه‌ی $(-1,3)$ باشد، مختصات رأس سهمی $y=f(2x-1)$ کدام خواهد بود؟

۱) $(4,-5)$ ۲) $(4,5)$ ۳) $(0,5)$ ۴) $(0,3)$

۳۴۳. منحنی نمایش $y=m^2x^2-3mx-1$ به ازای مقادیر مختلف $m\neq0$، همواره:

۱) بالای محور xها قرار دارد. ۲) محور xها را در یک طرف مبدأ قطع می‌کند.
۳) محور xها را در دو طرف مبدأ قطع می‌کند. ۴) بر محور xها مماس است.

ایستگاه ۳: روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو

آموزش 45^+ ٪

۳۴۴. هرگاه x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-9x-1=0$ باشند، حاصل $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) -9 ۳) $4/5$ ۴) $-4/5$

۳۴۵. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-4x-2=0$ کدام است؟

۱) $\frac{20}{9}$ ۲) $\frac{29}{9}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{28}{9}$

۳۴۶. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(3m-1)x^2-2x+1=m^2$ برابر با $\frac{1}{4}$ است. حاصل‌ضرب دو ریشه کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

۳۴۷. به ازای کدام مقدار m حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+m=0$ مساوی ۴ است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار m

۳۴۸. اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $|x'-x''|$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۱۲ ۴) ۳

۳۴۹. یکی از جواب‌های معادله‌ی $-3x^2+(m+1)x+m=0$ برابر با $\alpha=1$ است. جواب دیگر معادله کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{-1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۵۰. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(2x+1)(3x^2-7x+1)=0$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{-1}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۳۵۱. به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$، برابر ۲ می‌باشد؟ (کنکور ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۵۲. معادله‌ی $x^2-x-2=0$ دو ریشه‌ی $\alpha<\beta$ دارد. حاصل عبارت $5\alpha^2+7\beta^2$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۳ ۳) ۲۱ ۴) ۱۵

۳۵۳. اگر در معادله‌ی $2x^2-8x+m=0$ یکی از جواب‌ها ۲ واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۳۵۴. در معادله‌ی $x^2-20x+64=0$، حاصل $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{6}$

۳۵۵. مجموع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)x-(\sqrt{2}+1)=0$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-1$ ۴) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+1$

۳۵۶. برای کدام مقدار a ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a-1)x^2+2ax+3-a=0$ عکس یکدیگرند؟

۱) $a=2$ ۲) $a=1$ ۳) $a=-1$ ۴) هیچ مقدار a

۳۵۷. برای کدام مقادیر k در معادله‌ی $kx^2-4x+k+2=0$ یکی از ریشه‌ها ۳ برابر ریشه‌ی دیگر است؟

۱) ۱ و ۳ ۲) ۱- و ۳- ۳) ۱ و ۳- ۴) ۱- و ۳

تثبیت +70٪

۳۵۸. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $3ax^2+bx-a=0$ مساوی $\frac{2}{3}$ است. ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟

۱) $\frac{-2}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۵۹. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+3x-1=0$ با ریشه‌های α و β حاصل $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۹- ۳) ۲۷- ۴) ۲۷

۳۶۰. بین ریشه‌های α و β در معادله‌ی $x^2+2x+2c-1=0$ رابطه‌ی $\alpha^2+3\beta^2+4\alpha\beta+4=0$ برقرار است. حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-3/5$ ۲) ۷- ۳) ۴- ۴) ۸-

۳۶۱. جذر معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+2=0$ را با هم جمع کرده‌ایم. حاصل در کدام گزینه آمده است؟

۱) $2+\sqrt{2}$ ۲) $2+2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۴) $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

۳۶۲. به ازای یک مقدار a، معادله‌ی $x(2x-5)=a$ دو ریشه‌ی مساوی دارد. این ریشه کدام است؟

۱) $\frac{-5}{2}$ ۲) $\frac{-5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۳۶۳. اگر بین ضرایب معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $c+2b+4a=0$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) $\frac{a}{2c}$ ۲) $\frac{c}{2a}$ ۳) $-\frac{a}{2c}$ ۴) $-\frac{c}{2a}$

۳۶۴. تارا ضمن حل معادله‌ی $x^2-14x+c=0$ ضریب x را به اشتباه ۱۸- دیده و جواب‌های ۲- و ۲۰ را برای آن به‌دست آورده است. ریشه‌های معادله‌ی اصلی کدام‌اند؟

۱) ۴- و ۱۰- ۲) ۴ و ۱۰ ۳) ۱۴ و ۱۰ ۴) ۱۴- و ۱۰-

۳۶۵. در معادله‌ی $x^2-5x+m^2+5m=0$ اگر $\alpha=2$ یک ریشه‌ی آن باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $\alpha^3+\beta^3$ چقدر است؟

۱) ۳۵ ۲) ۱۹ ۳) ۱۹- ۴) به m بستگی دارد.

۳۶۶. به ازای کدام مقدار m یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-6x+5+m=0$ مجذور ریشه‌ی دیگر است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲ ۳) ۳۲- ۴) ۳-

۳۶۷. کدام بیان درباره‌ی معادله‌ی $(\sqrt{4-2\sqrt{3}})x^2+(1-\sqrt{3})x=17$ درست است؟

۱) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
۲) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.
۳) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد بیشتر است.
۴) یکی از ریشه‌ها از ریشه‌ی دیگر ۱ واحد کمتر است.

۳۶۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (خارج ۹۲)

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۳۶۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+(m-2)x+m+1=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت است؟ (خارج ۹۷)

۱) $-1<m<0$ ۲) $m<0$ ۳) $2<m<8$ ۴) $m>8$

تسلط +85٪

۳۷۰. اگر از صفرهای تابع $f(x)=x^2+3x-c$ نیم واحد کم کنیم، حاصل‌ضرب صفرها چقدر تغییر خواهد کرد؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}+c$ ۳) $\frac{7}{4}c$ ۴) $\frac{7}{4}-c$

۳۷۱. برای کدام مقدار b، بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2+bx+b=0$، رابطه‌ی $\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\beta}=1$ برقرار است؟

۱) $\frac{-1}{12}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) صفر ۴) صفر یا $\frac{-1}{12}$

۳۷۲. در تابع $f(x)=2x^2-(\sqrt{5}+2)x+\sqrt{5}$ با صفرهای α و β، حاصل $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|+\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{20}$ ۴) $\sqrt[4]{20}$

۳۷۳. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2-mx+2=0$ باشند و اعداد $x_1x_2, x_1+x_2, 4$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۳۷۴. در معادله‌ی $4x^2-10x+2m=0$، دو برابر یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر یک واحد بیشتر است. در این‌صورت:

۱) $m=5/76$ ۲) $m=2/88$ ۳) $m=5/04$ ۴) $m=2/52$

۳۷۵. ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x+2=0$ را α و β نامیده‌ایم. حاصل عبارت $A=\frac{\alpha}{\alpha^2+2}-\frac{\beta-5}{\beta^2-6\beta+7}$ چقدر است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{-4}{5}$ ۳) $\frac{6}{5}$ ۴) $\frac{-6}{5}$

۳۷۶. در معادله‌ی $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$ حاصل $\alpha^4+\beta^4$ کدام است؟ (α و β ریشه‌ها هستند.)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{41}{2}$ ۴) $\frac{41}{8}$

۳۷۷. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2-2x-4=0$، اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2-4)^2+4\beta^2$ چقدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۳۷۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2+3x+1-m$ محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ (خارج ۹۵)

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

۳۷۹. به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟ (کنکور ۹۷)

۱) $m<-6$ ۲) $m>3$ ۳) $0<m<3$ ۴) $3<m<6$

ایستگاه ۴: تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دو

آموزش +45%

۳۸۰. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشند، در کدام گزینه آمده است؟ (کتاب درسی)

۱) $x^2-2x+1=0$ ۲) $x^2-2x-1=0$ ۳) $x^2+2x+1=0$ ۴) $x^2-2x-4=0$

۳۸۱. مجموع دو عدد حقیقی، ۱/۵- و حاصل‌ضرب آن دو ۷- است. یکی از آن دو عدد کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\frac{-7}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۳۸۲. دو عدد حقیقی که مجموعشان $2\sqrt{3}$ و حاصل‌ضربشان ۱- است، ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $\sqrt{3}x^2+6x-\sqrt{3}=0$ ۲) $\sqrt{3}x^2-6x-\sqrt{3}=0$

۳) $x^2+2\sqrt{3}x-1=0$ ۴) $x^2-2\sqrt{3}x+1=0$

۳۸۳. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

تثبیت +70%

۳۸۴. جواب‌های کدام معادله ۲- برابر جواب‌های معادله‌ی $x^2-bx=2c$ است؟

۱) $x^2-2bx-8c=0$ ۲) $x^2+2bx+8c=0$ ۳) $x^2-2bx+8c=0$ ۴) $x^2+2bx-8c=0$

۳۸۵. معادله‌ای که ریشه‌هایش عددهای حقیقی $(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})$ و $(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})$ هستند، در کدام گزینه دیده می‌شود؟

۱) $x^2+2\sqrt{a}x-1=0$ ۲) $x^2-2\sqrt{a+1}x+1=0$ ۳) $x^2-2\sqrt{a}x+1=0$ ۴) $\sqrt{a}x^2-2ax-\sqrt{a}=0$

۳۸۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\beta}+1\}$ است؟ (کنکور ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۳۸۷. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2-kx+25=0$ به‌صورت $\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\}$ است؟ (کنکور ۹۰)

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۱

تسلط +85%

۳۸۸. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2+10x-16=0$ ۲) $x^2-10x+16=0$ ۳) $x^2-10x-16=0$ ۴) $x^2+10x+16=0$

۳۸۹. عددهای α و β صفرهای تابع $f(x)=x-3\sqrt{x}+2$ هستند. ریشه‌های کدام معادله، اعداد $(\frac{1}{\alpha}+1)$ و $(\frac{1}{\beta}+1)$ است؟

۱) $4x^2-13x+10=0$ ۲) $4x^2+13x+10=0$ ۳) $4x^2-17x+18=0$ ۴) $4x^2+17x+18=0$

۳۹۰. به ازای کدام مقدار m، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2-mx-8=0$، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ می‌باشد؟ (خارج ۹۶)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۳۹۱. اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2-7x+3=0$ باشد، a کدام است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -8 ۴) -6