فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

درس اول

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعاریف اولیهٔ مجموعه‌ها

سلام. به درس اول از فصل اول کتاب ریاضی دهم خوش اومدین. کارمون رو می‌خوایم با یک‌سری از تعریف‌ها و مفاهیم اولیهٔ مجموعه‌ها شروع کنیم. با ما همراه باشید.

۱- کدام گزینه، نادرست است؟

۱) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{N}$ ۳) $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{N}$ ۴) $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$

۲- در مجموعهٔ $A=\{\{1\},\{\{1\}\}\}$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{1\}\subseteq A$ ۲) $\{1\}\in A$ ۳) $\{\{1\}\}\in A$ ۴) $\{\{1\}\}\subseteq A$

۳- مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۲ را با A، مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۳ را با B و مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۶ را با C نشان می‌دهیم. در این‌صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $C\subseteq A$ ۲) $A\subseteq C$ ۳) $C\subseteq B$ ۴) گزینه‌های ۱ و ۳ درست‌اند.

۴- اگر $x_0\in A$ و $-x_0\in A$، آن‌گاه مجموعهٔ A کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{W}$ ۳) $\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Q}$

در تست بعدی می‌خوام توجه شما عزیزان رو به تعریف اعداد گویا جلب کنم.

۵- به‌ازای چه مقداری از a، عدد $\dfrac{2+\sqrt{7}}{a+5\sqrt{7}}$ عددی گویا می‌شود؟

۱) 10 ۲) $10+5\sqrt{7}$ ۳) $10-5\sqrt{7}$ ۴) $5\sqrt{7}$

۶- کدام مجموعهٔ زیر، دارای کوچک‌ترین عضو است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x<6\}$ ۳) $(-\infty,4)$ ۴) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geq 5\}$

۷- بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{4x+1\mid x\in\mathbb{Z}\,,\,2^x<\sqrt{11}\}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۳

۸- چه تعداد از مجموعه‌های زیر، دارای بزرگ‌ترین عضو هستند؟

$D=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\,,\,\sqrt{-x}\in\mathbb{Z}\}$ $C=\{3^x\mid x\in\mathbb{N}\}$ $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\,,\,x^2\leq 25\}$ $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\,,\,x>-4\}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست بعدی هم می‌برتتون تو فاز اعداد صحیح و این چیزا.

۹- به‌ازای چند مقدار صحیح a، عدد $\sqrt{216-\sqrt{a}}$ برابر مقداری صحیح می‌شود؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۲۹

بحث مهم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه.

۱۰- مجموعهٔ $A=\{\{\ \},\varnothing,\{\varnothing\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۱- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{\{a\},b\}$، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{\{b,\{b\}\}\}$ می‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۲- اگر ۴ عضو به تعداد اعضای یک مجموعه اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

۱) ۸ برابر می‌شود. ۲) ۱۶ برابر می‌شود. ۳) ۱۶ واحد اضافه می‌شود. ۴) ۸ واحد اضافه می‌شود.

۱۳- اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را دو برابر کنیم، تعداد ۲۴۰ زیرمجموعه به تعداد زیرمجموعه‌های آن اضافه می‌شود. مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ زوج‌عضوی دارد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

تعریف بازه

حالا می‌خوام مفهوم بازه و انواع اونو براتون بیان کنم.

۱۴- به‌ازای چه مقادیری از k، عدد ۳- متعلق به بازهٔ $(۲k - ۱,۵k + ۳)$ است؟

۱) $(۱,\frac{۶}{۵})$ ۲) $(-\frac{۶}{۵},-۱)$ ۳) $(-۱,-\frac{۵}{۶})$ ۴) $(-\frac{۶}{۵},۱)$

۱۵- مجموعهٔ $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \,,\, \sqrt{۲} < x < \sqrt{۳}\}$ مفروض است. کدام‌یک از اعداد زیر، عضو این مجموعه است؟

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ ۳) $\frac{۹}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

۱۶- فرض کنید $A_n = \{x \mid x \ge n\}$، اگر $A_p \subseteq A_q$ باشد، آن‌گاه کدام رابطه همواره بین p و q برقرار است؟ $(x,n \in \mathbb{N})$

۱) $p > q$ ۲) $q > p$ ۳) $p \ge q$ ۴) $q \ge p$

اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها

نوبت می‌رسه به اجتماع و اشتراک گرفتن و تفاضل بازه‌ها.

۱۷- اگر n عدد طبیعی و A_n بازهٔ $((-۱)^n n\,,۲n)$ باشد، چند عدد صحیح به مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴$ تعلق دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۸- اگر $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$ باشد، حاصل $\bigcap_{n=۱}^{۳۰} I_n$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۳۰},۱)$ ۲) $(-۱,\frac{۱}{۳۰})$ ۳) $(-\frac{۱}{۳۰},\frac{۱}{۳۰})$ ۴) $(-۱,۱)$

۱۹- اگر $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{۱}{n} \le x \le n\}$ باشد، آن‌گاه $A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴ \cup \cdots$ برابر کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(۰,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$

۲۰- اگر $A_n = [(-۱)^n n, n+a]$ و $(n \in \mathbb{N})$ باشد، به‌ازای کدام مقدار طبیعی a، مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴$ شامل یازده عضو صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۲۱- اگر $A_i = [۱ - ۲^i, ۱۷ - ۲i]$ و مجموعهٔ $A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n$ برابر تهی <u>نباشد</u>، حداکثر مقدار n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

سه تا تست بعدی هم در مورد تفاضل بازه‌هاس!

۲۲- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \le x < ۵\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+۳) \in A\}$، آن‌گاه حاصل $B - A$ کدام است؟

۱) $(-۵,۲)$ ۲) $[-۵,۲)$ ۳) $[-۲,۲)$ ۴) $[-۵,-۲)$

۲۳- اگر $A_n = [n-۱,n+۱]$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴) - (A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳)$ با کدام مجموعه، برابر است؟

۱) $\{x : ۱ \le x \le ۵\}$ ۲) $\{x : ۰ \le x \le ۵\}$ ۳) $\{x : ۱ \le x \le ۵ \,,\, x \ne ۲\}$ ۴) $\{x : ۰ \le x \le ۵ \,,\, x \ne ۲\}$

۲۴- اگر $i \in \{۱,۲,۳,۴,\cdots,۹\}$ و $A_i = \left[-i,\frac{۹-i}{۲}\right]$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۲ \cap A_۵) - (A_۱ \cap A_۷)$ به کدام صورت است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $[-۲,-۱) \cup (۱,۲]$ ۲) $[-۲,-۱] \cup [۱,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\varnothing$

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

در این‌جا اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها رو یه مروری می‌کنیم تا کم‌کم وارد مطالب بعدی بشیم.

۲۵- کدام مجموعه، زیرمجموعهٔ سایر مجموعه‌ها است؟

۱) $\{\{\varnothing\}\}$ ۲) $\varnothing \cup \{\varnothing\}$ ۳) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$ ۴) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

۲۶- اگر $A \cap C = C$ و $A \cap B = B$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $A \subseteq B \subseteq C$ ۲) $C \subseteq B \subseteq A$ ۳) $A \subseteq C \subseteq B$ ۴) هیچ‌کدام

۲۷- اگر $A = \{\{۱,۲\},\{\varnothing\}\}$ و $B = \{\{۳,۴,۵\},\varnothing\}$، آن‌گاه $A \cap B$ کدام است؟

۱) $\{۳,۲\}$ ۲) $\{۱,۲\}$ ۳) $\{\{\varnothing\}\}$ ۴) $\varnothing$

۲۸- اگر $A=\{x \mid x=۶k, k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{x \mid x=۳k, k\in\mathbb{N}\}$، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $A\cap B=\varnothing$ ۲) $A\cap B=A$ ۳) $A\cap B=B$ ۴) $A\cup B=A$

۲۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد دو مجموعهٔ A و B، نادرست است؟

الف) $A\subseteq (A\cup B)$ ب) $(A\cup B)\subseteq (A\cap B)$

ج) اگر $a\in (A\cup B)$، آن‌گاه $a\in A$ د) اگر $a\in B$، آن‌گاه $a\in (A\cap B)$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

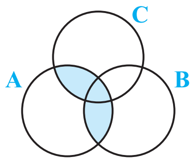
۳۰- اگر A مجموعهٔ ارقام زوج طبیعی بین ۱ تا ۱۰ و B مجموعهٔ اعداد اول بین ۱ تا ۱۰ باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A\cup B$ چقدر از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A\cap B$ بیشتر است؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۲۶ ۳) ۴۸ ۴) ۹۸

۳۱- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ باشد، چند مجموعه مانند X در رابطهٔ $(A\cap B)\subseteq X\subseteq (A\cup B)$ صدق می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۲- چه تعداد از موارد زیر، نشان‌دهندهٔ نمودار وِن در شکل مقابل می‌باشند؟



الف) $A\cup (B\cap C)$ ب) $(A\cap B)\cup (A\cap C)$

ج) $A\cap (B\cup C)$ د) $(A\cup B)\cap (A\cup C)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

چند تا تست بعدی از تفاضل مجموعه‌ها مطرح شده.

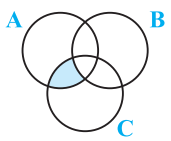
۳۳- اگر $B-A=B$ باشد، حاصل $A-B$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) B ۳) A ۴) $\varnothing$

۳۴- حاصل $B\cup (A-B)$ کدام است؟

۱) B ۲) $A\cap B$ ۳) A ۴) $A\cup B$

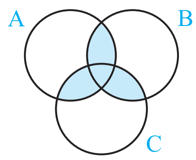
۳۵- کدام گزینه، قسمت رنگی در شکل مقابل را مشخص نمی‌کند؟

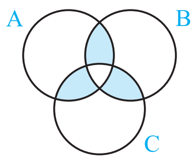


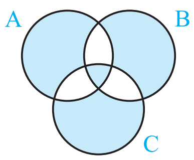
۱) $(C-B)\cap A$ ۲) $(A\cap C)-(B\cap C)$

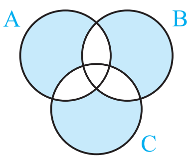
۳) $(A-C)\cap B$ ۴) $(C\cap A)-(A\cap B)$

۳۶- کدام گزینه نمایش $A\Delta (B\Delta C)$ است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۷- حاصل مجموعهٔ $[(A\cup C)-(B\cap C)]\cap [C\cap (A\cup C)]$ کدام است؟

۱) $C\cap A$ ۲) $C-B$ ۳) C ۴) $A-C$

۳۸- اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$، $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟ ریاضی خارج ۹۴

۱) $A-B=C$ ۲) $B-C=\varnothing$ ۳) $B-C=\{۱,۲\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

تست بعدی مربوط به اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌هاس، ولی خواستم با نگاه مجموعه‌ای هم حلش کنید. ببینید داستان از چه قراره!

۳۹- اگر $A=\{x\in\mathbb{R}: ۴\le x<۸\}$، $A\cap B=(۵,۸)$، $A\cup B=[۴,۹]$ باشند، مجموعهٔ B کدام است؟

۱) $[۵,۹]$ ۲) $(۵,۹)$ ۳) $[۵,۹)$ ۴) $(۵,۹]$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

بریم سراغ آشنایی با مجموعه‌ها، از این نظر که به کدوم مجموعه‌ها می‌گن متناهی و به کدوم‌ها می‌گن نامتناهی.

۴۰- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج ۲) مجموعهٔ اعداد اول فرد ۳) مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد ۴) مجموعهٔ اعداد اول زوج

۴۱- چه تعداد از مجموعه‌های زیر، نامتناهی هستند؟

الف) مجموعهٔ نقاط با مختصات صحیح که داخل یک مستطیل قرار دارند.

ب) مجموعهٔ نقاط با مختصات صحیح که خارج یک مستطیل قرار دارند.

ج) مجموعهٔ نقاطی که روی محیط یک مستطیل قرار دارند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۲- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $A=\{x \in \mathbb{N} : x > 502\}$ ۲) $B=\left\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$

۳) $C=\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 60\}$ ۴) $D=\{x \in \mathbb{Q} : 1 < x < 1/2\}$

۴۳- A و B دو مجموعهٔ نامتناهی و $A \subseteq B$ است. A و B کدام باشند تا $B-A$ تک عضوی شود؟

۱) $B=\mathbb{Z}\ ,\ A=\mathbb{N}$ ۲) $B=\mathbb{Q}\ ,\ A=\mathbb{Z}$ ۳) $B=\mathbb{Z}\ ,\ A=\mathbb{W}$ ۴) $B=\mathbb{W}\ ,A=\mathbb{N}$

۴۴- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعهٔ اعداد صحیح با قدرمطلق کم‌تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ متناهی است؟

۱) $A-B$ ۲) $\mathbb{Z}-A$ ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

درس دوم متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع و مجموعهٔ متمم

وقتش رسیده با مجموعهٔ مرجع و متمم یک مجموعه آشنا بشید.

۴۵- اگر U مجموعهٔ مرجع و A یک مجموعه باشد، آن‌گاه اشتراک دو مجموعهٔ $(U' \cap A)'$ و $(A \cup \varnothing')'$ برابر کدام است؟

۱) A' ۲) A ۳) $\varnothing$ ۴) U

۴۶- اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی، A متناهی (باپایان) و B نامتناهی (بی‌پایان) باشد، کدام مجموعه الزاماً نامتناهی (بی‌پایان) است؟

۱) $A' \cup B'$ ۲) $A \cap B'$ ۳) $A \cup B'$ ۴) $A' \cap B'$

۴۷- اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (A و B دو مجموعهٔ غیرتهی‌اند.)

۱) $A \subseteq B'$ ۲) $B \subseteq A'$ ۳) $B-A=B$ ۴) $A-B=B$

۴۸- اگر $B' \subseteq A'$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $A \cup B = A$ ۲) $B'-A=A$ ۳) $B-A=A'$ ۴) $A \subseteq B$

۴۹- اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) $B' \subseteq A'$ ۲) $A' \cup B = U$ ۳) $A \cap B' = \varnothing$ ۴) $A' \cap B = \varnothing$

۵۰- با شرط $A \cap B = A$، کدام‌یک از روابط زیر نادرست است؟

۱) $B' \subseteq A'$ ۲) $A \cap B' = \varnothing$ ۳) $A' \cap B' = A'$ ۴) $A \subseteq B$

۵۱- چه تعداد از مجموعه‌های زیر، برابر A می‌باشد؟

الف) $A-(A \cap B)$ ب) $A-\varnothing$ ج) $A-(B-A)$ د) $A-A'$

هـ) $(A \cap B) \cup (A-B)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۲- اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند و $A \cap B' = B \cap A'$، آن‌گاه کدام رابطه بین A و B برقرار است؟

۱) $A \cup B = A \cap B$ ۲) $A \cap B = \varnothing$ ۳) $A = B'$ ۴) $A-B=A$

۵۳- اگر مجموعهٔ مرجع، مجموعهٔ اعداد صحیح باشد و $A'=\{1,2,3\}$ و $B'=\{2,3,4,5\}$، آن‌گاه $(A \cup B)'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{2,3\}$ ۲) $\{2,4,5\}$ ۳) $\{3,4,5\}$ ۴) $\{4,5\}$

۵۴- اگر $A=\{x \mid x > 1\}$ و $B=\{x \mid x < -1\}$، آن‌گاه $A' \cap B'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{x \mid -1 < x < 1\}$ ۲) $\{x \mid -1 < x \le 1\}$ ۳) $\{x \mid -1 \le x < 1\}$ ۴) $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$

۵۵- اگر مجموعهٔ مرجع U به‌صورت $U=\{3a \mid a\in\mathbb{Z}\}$ و $B=\{6a \mid a\in\mathbb{Z}\}$ باشد، متمم مجموعهٔ B کدام است؟

۱) $\{6a+1 \mid a\in\mathbb{Z}\}$ ۲) $\{6a-3 \mid a\in\mathbb{Z}\}$ ۳) $\{6a+6 \mid a\in\mathbb{Z}\}$ ۴) $\{2a \mid a\in\mathbb{Z}\}$

۵۶- اگر $A_n=\{1,2,3,\dots,n\}$ و مجموعهٔ اعداد طبیعی را به‌عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر بگیریم، متمم (A_n-A_{n+1}) کدام است؟

۱) $\mathbb{N}-A_{n-1}$ ۲) $\mathbb{N}-A_n$ ۳) $\mathbb{N}$ ۴) $\mathbb{N}-A_{n+1}$

۵۷- متمم مجموعهٔ $A-(B-A)'$، نسبت به مجموعهٔ مرجع کدام است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) A ۴) B

۵۸- متمم مجموعهٔ $C\cup A'\cup B'$، نسبت به مجموعهٔ مرجع، با کدام مجموعه برابر نیست؟

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)$ ۳) $A\cap(B-C)$ ۴) $(A\cap B)-C$

۵۹- اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، متمم $((A-B)-(B-A))\cap((B-A)-(A-B))$ کدام مجموعه است؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

۱) U ۲) $A\cup B$ ۳) $(A-B)\cup(B-A)$ ۴) $\varnothing$

۶۰- اگر A مجموعهٔ اعدادی باشد که بر ۵ و B مجموعهٔ اعدادی باشد که بر ۲ بخش‌پذیر است و $a\in(A'-B')$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) a بر ۵ بخش‌پذیر است ولی بر ۲ بخش‌پذیر نیست. ۲) a بر ۲ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

۳) a بر ۵ و ۲ بخش‌پذیر است. ۴) a بر ۵ و ۲ بخش‌پذیر نیست.

۶۱- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $A'\Delta B'$ برابر کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $A\cup B$ ۳) $A\Delta B$ ۴) U

۶۲- حاصل $(A'\cup B)'\Delta(B-A')$ کدام است؟

۱) $A\cap B$ ۲) A ۳) $A-B$ ۴) $A\cup B$

۶۳- چه تعداد از مجموعه‌های زیر، مساوی با U هستند؟ (U مجموعهٔ مرجع است.)

الف) $A\cap(A'\cup B)$ ب) $(A\cup B)\cup B'$ ج) $(A'\cap B)\cup(A'\cap B')$ د) $(B'\cup A)\cup(B\cap A')$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۴- اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعهٔ $(A-B)\cup[B\cap(A\cup B)]$، متمم کدام مجموعه است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A'\cup B'$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A'\cap B'$

۶۵- مجموعهٔ $[A\cup(A\cap(B\cup C')'\cap C)]$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) $B\cap C$ ۳) $B'\cup C'$ ۴) $\varnothing$

۶۶- فرض کنید A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند و $C=(A\cup B')-(A'\cap B')$. اگر مجموعهٔ D چنان باشد که $D\cap C=\varnothing$ و $D\cup C=U$، آن‌گاه مجموعهٔ D برابر کدام است؟ (U = مجموعهٔ مرجع)

۱) A ۲) B' ۳) A' ۴) B

۶۷- اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی، $A\neq B$ و $(A-B)'\cap(A\cup B)\cap X=\varnothing$ باشد، X کدام مجموعه نمی‌تواند باشد؟

۱) $\varnothing$ ۲) B' ۳) $B-A$ ۴) $A-B$

۶۸- متمم مجموعهٔ $C\cup A'\cup B'$ نسبت به مجموعهٔ مرجع با کدام مجموعه برابر نیست؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)$ ۳) $A\cap(B-C)$ ۴) $(A\cap B)-C$

تعداد عضوهای اجتماع، اشتراک و ...

۶۹- اجتماع دو مجموعهٔ $A=\{\{\{\varnothing\},\{a\},a\}\}$ و $B=\{a,\varnothing\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۷۰- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی و فرد کوچک‌تر از ۶۰ و $B=\{k(2+k):k\in A\}$ باشد، آن‌گاه اشتراک دو مجموعهٔ A و B چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۷۱- اگر A_2 مجموعهٔ زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ و B_2 مجموعهٔ زیرمجموعه‌های دوعضوی $B=\{a,b,c,e,f\}$ باشند، مجموعهٔ $A_2\cap B_2$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۲- اگر $A_k=\{k,k+1,\cdots,2k-1,2k\}$ باشد، مجموعهٔ $(A_{15}\cup A_{16}\cup\cdots\cup A_{20})-(A_{15}\cap A_{16}\cap\cdots\cap A_{20})$ شامل چند عضو است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۷

۷۳- اگر A ، B و C سه مجموعهٔ دوبه دو مجزا باشند و $n(A\cup B)=12$ ، $n(A\cup C)=10$ و $n(B\cup C)=14$ ، آن‌گاه $n(A\cup B\cup C)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۷ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۷۴- در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۸ نفر در برنامهٔ هنری و ۲۱ نفر در برنامهٔ علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۹ نفر آن‌ها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند، چند نفر از آن‌ها در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۷۵- از بین ۱۰۰ کارمند یک اداره، ۵۰ نفر علاقمند به والیبال، ۸۰ نفر علاقمند به فوتبال و ۱۰ نفر به هیچ‌کدام از این دو رشته علاقه‌ای ندارند. چند نفر به فوتبال علاقه دارند ولی به والیبال علاقمند نیستند؟

۱) ۴۰ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۵۰

۷۶- تعداد مسافرین در یک هتل ۶۵ نفر است که ۳۲ نفر آن‌ها ورزشکار و ۲۱ نفر دانشجو هستند. ۱۰ نفر از این ورزشکاران، دانشجو می‌باشند. چند نفر از مسافرین هتل نه ورزشکار هستند و نه دانشجو می‌باشند؟

۱) ۲۲ ۲) ۱۲ ۳) ۳۲ ۴) ۲۳

۷۷- اگر $A\cup C=\{n^2\mid n\in\mathbb{N},n\le 6\}$ و $A\cup B=\{3n-2\mid n\in\mathbb{N}\}$ باشند، آن‌گاه اجتماع مجموعه‌های A و $(B\cap C)$ دارای چند عضو است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۷۸- مجموعهٔ A دارای ۱۴ عضو، مجموعهٔ B دارای ۱۷ عضو و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۵ عضو است. تفاضل متقارن A و B چند عضو دارد؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۷۹- اگر از مجموعهٔ A یک عضو برداشته و به B اضافه کنیم، تعداد اعضای مجموعهٔ B تغییر نمی‌کند. کدام رابطه بین A و B نتیجه نمی‌شود؟

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$

۳) $A\cap B\neq\varnothing$ ۴) $A\cup B=B$

۸۰- مجموعهٔ A دارای ۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۸ عضو است. اگر ۵ عضو از مجموعهٔ A را در مجموعهٔ B قرار دهیم، مجموعهٔ B حاصل دارای ۹ عضو می‌شود. اجتماع دو مجموعهٔ A و B اولیه چند عضو دارد؟

۱) ۹ یا ۱۰ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۸۱- اگر $A_i=\{m\in\mathbb{Z}\mid -i\le m\le 8-i\}$ باشد، مجموعهٔ $\bigcap_{i=1}^{8}A_i-\bigcup_{i=1}^{8}A_i$ چند عضو دارد؟ ریاضی خارج ۸۷

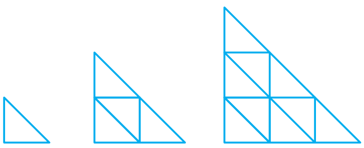
۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

درس سوم الگو و دنباله

الگو و دنباله

رسیدیم به تعریف الگو و دنباله

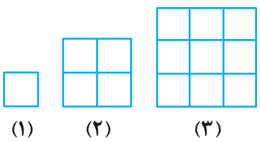
۸۲- اگر جملهٔ nاُم دنباله‌ای، تعداد مثلث‌های کوچک در مرحلهٔ nاُم الگوی روبه‌رو باشد، جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟



۱) ۲۰ ۲) ۴۰

۳) ۸۰ ۴) ۱۰۰

۸۳- با توجه به روند شکل مقابل، مجموع تعداد مربعات کوچک در شکل چهارم و ششم کدام است؟



۱) ۴۱ ۲) ۵۲

۳) ۵۴ ۴) ۶۱

پاسخنامه تشریحی

۱ | ۳ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

تعاریف اولیهٔ مجموعه‌ها

با مفاهیم زیر در سال قبل آشنا شدید. برای یادآوری آن‌ها را بیان می‌کنم:

* هرگاه یک‌سری از اشیاء را دسته‌بندی کنیم، آن دسته را یک **مجموعه** و اشیاء را **عضوهای** آن مجموعه می‌نامیم. به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۲۰ عبارت است از: $\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$.

* اگر a عضو مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$. مثلاً مجموعهٔ $A=\{a,\{b\},\{a,b\}\}$ را در نظر بگیرید. می‌توان گفت $a \in A$، $\{b\} \in A$ و $\{a,b\} \in A$، زیرا هر یک از آن‌ها (یعنی a، $\{b\}$ و $\{a,b\}$) متعلق به مجموعهٔ A هستند.

* **مجموعهٔ تهی:** مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد و آن را با نماد $\{\ \}$ یا $\varnothing$ نشان می‌دهند.

* **زیرمجموعه:** دو مجموعهٔ A و B را در نظر بگیرید. اگر هر عضو A، متعلق به B هم باشد، می‌گوییم A یک زیرمجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$. درصورتی‌که A زیرمجموعهٔ B نباشد، می‌نویسیم $A \nsubseteq B$ (حواستان باشد هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ خودش است. هم‌چنین مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای می‌باشد.)

مثال **زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A=\{۲,\varnothing,\{۲\}\}$ را بنویسید.**

پاسخ:

$$\underbrace{\{\ \}}_{\text{زیرمجموعهٔ صفرعضوی}},\overbrace{\{۲\},\{\varnothing\},\{\{۲\}\}}^{\text{اینا زیرمجموعه‌های یک‌عضوی هستن}},\underbrace{\{۲,\varnothing\},\{۲,\{۲\}\},\{\varnothing,\{۲\}\}}_{\text{اینا زیرمجموعه‌های دوعضوی هستن}},\overbrace{\{۲,\varnothing,\{۲\}\}}^{\text{زیرمجموعهٔ سه‌عضوی}}$$

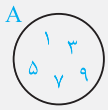
* *یه مثال مهم که تسلطتون رو بر روی نمادهای $\in$ و $\subseteq$ بالا می‌بره:* مجموعهٔ $A=\{۱,۲,\{۱\},\{۱,۲\},\varnothing\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان نوشت:

$$۱\in A\ ,\ ۲\in A\ ,\ \{۱\}\in A\ ,\ \{۱,۲\}\in A\ ,\ \varnothing\in A$$

$$\{۱\}\subseteq A\ ,\ \{۲\}\subseteq A\ ,\ \{\{۱\}\}\subseteq A\ ,\ \{\{۱,۲\}\}\subseteq A\ ,\ \{\varnothing\}\subseteq A$$

توجه مجموعه‌ها را می‌توان با **نوشتن عضوهای آن** یا به‌صورت **نمودار وِن** و یا با استفاده از **نمادهای ریاضی** نشان داد. مثلاً می‌خواهیم اعداد فرد یک‌رقمی را به‌صورت مجموعه نشان دهیم، در این صورت داریم:

$A=\{۲n-۱ \mid n\in \mathbb{N}, n<۶\}$



$A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

برخی از مجموعه‌های اعداد عبارتند از:

مجموعهٔ اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\dots\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی : $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,\dots\}$

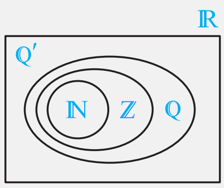
مجموعهٔ اعداد صحیح : $\mathbb{Z}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا : $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\right\}$

مجموعهٔ اعدادی که نتوان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد: $\mathbb{Q}'=\{x \mid x\notin\mathbb{Q}\}$: مجموعهٔ اعداد گنگ

مجموعهٔ اعداد حقیقی : $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

* همان‌طور که می‌بینید، رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ برقرار است. (در واقع همهٔ مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آن‌ها آشنا شدیم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند.)



* حواستان به اعداد گنگ (یعنی $\mathbb{Q}'$) هم باشد. اجتماع آن‌ها با اعداد گویا، اعداد حقیقی را می‌دهد (یعنی $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$) و از طرفی هیچ اشتراکی با اعداد گویا ندارند (یعنی $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$).

اعدادی مثل ۶، $-\frac{۷}{۲}$ و $-۴/۹$ اعداد گویا و اعدادی مثل π، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ اعداد گنگ هستند.

طبق درسنامهٔ بالا، گزینه‌های (۱) و (۴) درست‌اند. از طرفی گفتیم هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است، پس گزینهٔ (۲) هم درست می‌باشد. اما گزینهٔ (۳) که می‌گوید $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{N}$، نادرست است.

۲ ۱ ببینید:

$$A=\{\underbrace{\{1\}}_{\{1\}\in A \quad \{\{1\}\}\subseteq A}, \overbrace{\{\{1\}\}}^{\{\{1\}\}\in A}\}$$

۳ ۴ A مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۲ است، پس $A=\{2,4,6,8,10,\cdots\}$. از طرفی B مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۳ است، پس $B=\{3,6,9,12,15,\cdots\}$ و C مجموعهٔ مضارب طبیعی عدد ۶ می‌باشد، بنابراین $C=\{6,12,18,24,\cdots\}$. همان‌طور که می‌بینید $C\subseteq A$ و $C\subseteq B$ است.

۴ ۲ هر عضو دلخواهی که در مجموعه‌های $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ انتخاب کنیم، قرینهٔ آن عضو نیز در آن مجموعه قرار دارد. اما در مورد مجموعهٔ اعداد حسابی (یعنی $\mathbb{W}$) حواستان باشد که قرینهٔ اعضای مجموعه، متعلق به مجموعه نیستند. مثلاً $2\in\mathbb{W}$ ولی $-2\notin\mathbb{W}$.

۵ ۱ عبارت $\frac{2+\sqrt{7}}{a+5\sqrt{7}}$ در شرایطی گویا می‌شود که عبارت‌های رادیکالی حذف شوند. اگر $a=10$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\frac{2+\sqrt{7}}{10+5\sqrt{7}}=\frac{2+\sqrt{7}}{5(2+\sqrt{7})}=\frac{1}{5}\in\mathbb{Q}$$

بنابراین $a=10$ را می‌پذیریم.

۶ ۴ مجموعهٔ اعداد حقیقی (یعنی $(-\infty,+\infty)$ یا همان $\mathbb{R}$)، کوچک‌ترین عضو ندارد. از طرفی کوچک‌ترین عدد گویای کوچک‌تر از ۶ هم وجود ندارد. هم‌چنین در بازهٔ $(-\infty,4)$ هم کوچک‌ترین عضو وجود ندارد، اما کوچک‌ترین عدد گویای بزرگ‌تر یا مساوی ۵، برابر همان ۵ است.

۷ ۲ با توجه به مجموعهٔ $\{4x+1 \mid x\in\mathbb{Z}, 2^x<\sqrt{11}\}$، باید x های صحیحی را انتخاب کنیم که حاصل 2^x از $\sqrt{11}$ کوچک‌تر شود و بعد آن xها را در عبارت $(4x+1)$ جای‌گذاری کنیم. بنابراین x های مطلوب عبارتند از: ۱، ۰، ۱-، ۲-، ۳- و ... . در نتیجه بیشترین مقدار $(4x+1)$ برابر می‌شود با:

$$4(1)+1=5$$

۸ ۲ همهٔ مجموعه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x>-4\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,\cdots\}\Rightarrow$ بزرگ‌ترین عضو وجود ندارد.

$B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x^2\leq 25\}=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}\Rightarrow$ بزرگ‌ترین عضو برابر ۵ است.

$C=\{3^x \mid x\in\mathbb{N}\}=\{3,9,27,81,\cdots\}\Rightarrow$ بزرگ‌ترین عضو وجود ندارد.

$D=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, \sqrt{-x}\in\mathbb{Z}\}=\{0,-1,-4,-9,-16,\cdots\}\Rightarrow$ بزرگ‌ترین عضو برابر صفر است.

در نتیجه مجموعه‌های B و D دارای بزرگ‌ترین عضو هستند.

۹ ۲ برای این‌که عدد $\sqrt{216-\sqrt{a}}$ برابر مقداری صحیح شود باید $(k\in\mathbb{W}$ ،$k\geq 0)$ ،$\sqrt{216-\sqrt{a}}=k$، در نتیجه:

$$216-\sqrt{a}=k^2:(k\in\mathbb{W})\Rightarrow 216-k^2=\underbrace{\sqrt{a}}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی صفر}}\Rightarrow 216-k^2\geq 0\Rightarrow 216\geq k^2 \qquad (*)$$

برای برقراری نامساوی $(*)$ می‌توانیم به‌جای k، اعداد $0,1,2,3,\cdots,14$ را قرار دهیم که تعداد آن‌ها ۱۵ تا است.

۱۰ ۱

نیم‌نگاه

یک مجموعهٔ n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه می‌باشد.

$\varnothing$ مساوی با { } است، بنابراین مجموعهٔ A را به‌صورت $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ می‌نویسیم که چون دو عضو دارد، پس 2^2 یعنی ۴ زیرمجموعه خواهد داشت.

۱۱ ۳ مجموعهٔ B دو عضو دارد که عبارتند از $\{a\}$ و b، بنابراین 2^2 یعنی ۴ زیرمجموعه دارد. از طرفی مجموعهٔ A فقط یک عضو دارد که عبارت است از $\{\{b,\{b\}\}\}$ و در نتیجه ۲ زیرمجموعه دارد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ B، دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A است.

۱۲ ۲ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر 2^n است. بنابراین وقتی ۴ عضو به مجموعه اضافه می‌شود، تعداد اعضای مجموعه برابر $(n+4)$ شده و در نتیجه 2^{n+4} زیرمجموعه خواهد داشت، پس می‌توان گفت تعداد زیرمجموعه‌ها، ۱۶ برابر شده است، زیرا:

$$\frac{2^{n+4}}{2^n}=\frac{\cancel{2^n}\times 2^4}{\cancel{2^n}}=2^4=16$$

۱۳ ۳ فرض کنیم مجموعهٔ A، n عضو دارد. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌هایش برابر 2^n خواهد بود. در این‌جا با توجه به معلومات مسأله می‌توان نوشت:

$$2^{2n}=2^n+240\Rightarrow 2^{2n}-2^n=240\Rightarrow 2^n(2^n-1)=16\times 15\Rightarrow 2^n=16\Rightarrow n=4$$

در نتیجه مجموعهٔ A، ۴ عضو دارد و دارای 2^4 یعنی ۱۶ زیرمجموعه می‌باشد که ۸ تای آن‌ها زوج‌عضوی هستند.

۱۴ **۲** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

تعریف بازه

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، **بازه** یا **فاصله** می‌نامیم.

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به‌طوری که $a < b$، آن‌گاه خواهیم داشت:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a,b)	باز
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$	بسته
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$	نیم‌باز
a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$	نیم‌باز
a	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز
b	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	$(-\infty,b]$	نیم‌باز
a	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$(a,+\infty)$	باز
b	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty,b)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty,+\infty)$	باز

قرار است $-۳ \in (۲k-۱, ۵k+۳)$، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۲k-۱ < -۳ \Rightarrow ۲k < -۲ \Rightarrow k < -۱ \\ -۳ < ۵k+۳ \Rightarrow -۶ < ۵k \Rightarrow -\frac{۶}{۵} < k \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{۶}{۵} < k < -۱$$

۱۵ **۲** می‌دانیم $\sqrt{۲} = ۱/۴...$ و $\sqrt{۳} = ۱/۷...$، پس:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\ ،\ ۱/۴... < x < ۱/۷...\}$$

حال کافی است ببینیم عدد کدام گزینه در این بازه قرار دارد:

$۱)\ \frac{۷}{۵} = ۱/۴$ $\quad ۲)\ \frac{۸}{۵} = ۱/۶$ $\quad ۳)\ \frac{۹}{۵} = ۱/۸$ $\quad ۴)\ \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$

واضح است که فقط گزینهٔ (۲) عضو مجموعهٔ A است.

۱۶ **۳** از $A_p \subseteq A_q$ نتیجه می‌گیریم که همهٔ اعضای A_p در A_q نیز وجود دارند، بنابراین:

$$A_p = \{p, p+۱, p+۲, p+۳, \cdots\} \quad \text{و} \quad A_q = \{q, q+۱, q+۲, q+۳, \cdots\}$$

از آن‌جا که اعضای A_p در A_q هم هستند، پس عضو p، حتماً در مجموعهٔ A_q هم قرار دارد، در نتیجه $p = q$ یا $p = q+۱$ یا $p = q+۲$ و یا ... به عبارتی بهتر $p \ge q$ است.

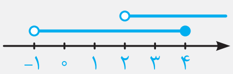
۱۷ **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها

برای این‌که با چگونگی اجتماع و اشتراک گرفتن و هم‌چنین نحوهٔ تفاضل بازه‌ها آشنا شوید، کافی است مثال‌های زیر را با دقت بخوانید.

مثال **حاصل $(۲,+\infty) \cup (-۱,۴]$ را به‌دست آورید.**

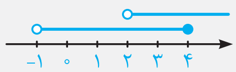
پاسخ: ابتدا نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل، روی یک محور رسم کرده و بعد اجتماع آن‌ها را پیدا می‌کنیم:



$$\Rightarrow (-۱,۴] \cup (۲,+\infty) = (-۱,+\infty)$$

مثال **حاصل $(۲,+\infty) \cap (-۱,۴]$ را به‌دست آورید.**

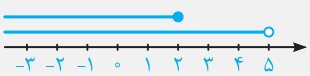
پاسخ:



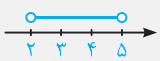
$$\Rightarrow (-۱,۴] \cap (۲,+\infty) = (۲,۴]$$

مثال **حاصل $(-\infty,۵) - (-\infty,۲]$ را به‌دست آورید.**

پاسخ:



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow (-\infty،۵) - (-\infty،۲] = (۲،۵)$$

مثال دو عدد حقیقی دلخواه a و b را در نظر بگیرید به‌طوری که $a<b$ است. در این صورت موارد زیر را به‌صورت اجتماع دو بازه نشان دهید.

پاسخ:

الف) $\mathbb{R}-[a,b]$:

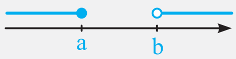

$\Rightarrow (-\infty,a)\cup(b,+\infty)$

ب) $\mathbb{R}-(a,b)$:


$\Rightarrow (-\infty,a]\cup[b,+\infty)$

ج) $\mathbb{R}-[a,b)$:


$\Rightarrow (-\infty,a)\cup[b,+\infty)$

د) $\mathbb{R}-(a,b]$:


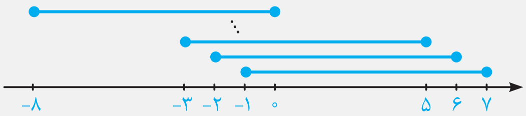
$\Rightarrow (-\infty,a]\cup(b,+\infty)$

مثال اگر $A_k=[-k,۸-k]$ و $k\in\{۱,۲,۳,\dots,۸\}$ باشد، آن‌گاه $A_۱\cap A_۲\cap\dots\cap A_۸$ کدام است؟

۱) $(-۱,۰]$ ۲) $[-۲,۰]$ ۳) $[-۱,۰]$ ۴) $[-۲,۰)$

پاسخ: می‌توان نوشت:

$$A_۱\cap A_۲\cap A_۳\cap\dots\cap A_۸=[-۱,۷]\cap[-۲,۶]\cap[-۳,۵]\cap\dots\cap[-۸,۰]$$



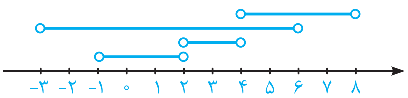
$\xRightarrow{\text{اشتراک}}$ جواب $=[-۱,۰]\Rightarrow$ (گزینهٔ ۳)

* حواستان باشد که در برخی از مسایل به جای نوشتن $A_۱\cap A_۲\cap\dots\cap A_۸$، آن را به‌صورت $\bigcap_{k=۱}^{۸}A_k$ نشان می‌دهند.

داریم $A_n=((-۱)^n n,۲n)$ و $n\in\mathbb{N}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴=(-۱,۲)\cup(۲,۴)\cup(-۳,۶)\cup(۴,۸)=(-۳,۸)$$

در نتیجه اعداد صحیح $۷,\dots,۲,۱,۰,-۱,-۲$ در بازهٔ به‌دست آمده قرار دارند که تعدادشان ۱۰ تا است.



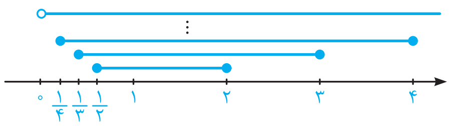
۱۸ **۳** منظور از $\bigcap_{n=۱}^{۳۰}I_n$، اشتراک $I_۱$، $I_۲$، $I_۳$، ... و $I_{۳۰}$ است، بنابراین طبق $I_n=(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})$ می‌توان نوشت:

$$I_۱\cap I_۲\cap I_۳\cap\dots\cap I_{۳۰}=(-۱,۱)\cap(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\cap(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})\cap\dots\cap(-\frac{۱}{۳۰},\frac{۱}{۳۰})=(-\frac{۱}{۳۰},\frac{۱}{۳۰})$$

۱۹ **۲** داریم $A_n=[\frac{۱}{n},n]$، بنابراین:

$$A_۲\cup A_۳\cup A_۴\cup\dots=[\frac{۱}{۲},۲]\cup[\frac{۱}{۳},۳]\cup[\frac{۱}{۴},۴]\cup\dots\cup A_{+\infty}$$

$$[\frac{۱}{+\infty},+\infty)=(۰,+\infty)$$



$$\Rightarrow \text{جواب}=[\frac{۱}{۲},۲]\cup[\frac{۱}{۳},۳]\cup[\frac{۱}{۴},۴]\cup\dots\cup(۰,+\infty)=(۰,+\infty)$$

حواستون باشه بچه‌های عزیزم، وقتی به $\frac{۱}{+\infty}$ می‌رسید یعنی به کسری رسیدید که مخرجش خیلی بزرگ شده و در نتیجه حاصل کسر، خیلی ریز شده طوری‌که بسیار بسیار به صفر نزدیک می‌شه، به طوری‌که می‌تونیم بگیم $\frac{۱}{+\infty}$ تقریباً برابر صفر می‌شه (ولی یه کوچولو از صفر بزرگ‌تره).

۲۰ **۴** $A_n=[(-۱)^n n,n+a]$ است، پس:

$$\left.\begin{array}{ll} A_۱=[-۱,۱+a] & , \quad A_۲=[۲,۲+a] \\ A_۳=[-۳,۳+a] & , \quad A_۴=[۴,۴+a] \end{array}\right. \Rightarrow A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴=[-۳,۴+a]$$

اگر a عددی طبیعی باشد، آن‌گاه تعداد اعداد صحیح موجود در بازهٔ $[-۳,۴+a]$ برابر می‌شود با:

$$(۴+a)-(-۳)+۱=۸+a=۱۱\Rightarrow a=۳$$

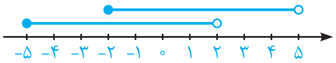
۲۱ **۳** با توجه به این‌که $A_i=[۱-۲^i,۱۷-۲i]$ است، پس $A_۱=[-۱,۱۵]$، $A_۲=[-۳,۱۳]$ و $A_۳=[-۷,۱۱]$ و ... می‌باشد. حواستان باشد که زمانی $A_۱\cap A_۲\cap\dots\cap A_n$ برابر تهی نمی‌شود که عدد $۱۷-۲i$ از -۱ کم‌تر نشود، یعنی:

$$-۱\le ۱۷-۲i\Rightarrow -۱۸\le -۲i\xRightarrow{\div(-۲)} i\le ۹$$

پس $A_۹=[-۵۱۱,-۱]$ و در نتیجه $A_۱\cap A_۲\cap\dots\cap A_۹=\{-۱\}$.

۲۲ **۴** داریم $A=[-۲,۵)$ و در مورد B هم می‌توان نوشت:

$$x+۳\in[-۲,۵)\Rightarrow -۲\le x+۳<۵\Rightarrow -۵\le x<۲\Rightarrow B=[-۵,۲)$$



$$\Rightarrow B-A=[-۵,۲)-[-۲,۵)=[-۵,-۲)$$

۲۳ **۴** داریم $A_n=[n-۱,n+۱]$، بنابراین:

$$\begin{cases}A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴=[۰,۲]\cup[۱,۳]\cup[۲,۴]\cup[۳,۵]=[۰,۵]\\ A_۱\cap A_۲\cap A_۳=[۰,۲]\cap[۱,۳]\cap[۲,۴]=\{۲\}\end{cases}$$

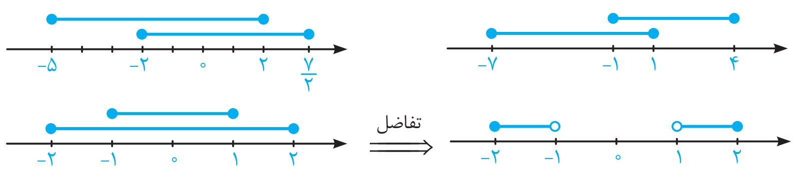
$$\Rightarrow (A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴)-(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=[۰,۵]-\{۲\}=\{x:۰\le x\le ۵,x\ne ۲\}$$

۲۴ **۱** $A_i=\left[-i,\frac{۹-i}{۲}\right]$، پس می‌توان نوشت:

$$A_۱=[-۱,۴]\,,\ A_۲=\left[-۲,\frac{۷}{۲}\right]\,,\ A_۵=[-۵,۲]\,,\ A_۷=[-۷,۱]$$

$$\Rightarrow (A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)=\left(\left[-۲,\frac{۷}{۲}\right]\cap[-۵,۲]\right)-([-۱,۴]\cap[-۷,۱])$$

$=[-۲,۲]-[-۱,۱]:$



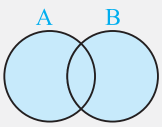
$=[-۲،-۱)\cup(۱،۲]$

۲۵ **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

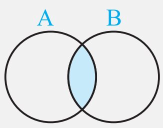
یادآوری:

اجتماع دو مجموعهٔ A و B: $A\cup B$ مجموعهٔ همهٔ عضوهای A یا B یا هر دوی آن‌ها است.



$:A\cup B$

اشتراک دو مجموعهٔ A و B: $A\cap B$ مجموعهٔ همهٔ عضوهای مشترک A و B است.



$:A\cap B$

قوانین اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها:

۱) $A\cup A=A$

۲) $A\cup\varnothing=A$

۳) $A\cup B=B\cup A$:قانون جابه‌جایی

۴) $A\cap A=A$

۵) $A\cap\varnothing=\varnothing$

۶) $A\cap B=B\cap A$:قانون جابه‌جایی

۷) $A\subseteq A\cup B\ ,\ B\subseteq A\cup B$

۸) $A\cap B\subseteq A\ ,\ A\cap B\subseteq B$

۹) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

۱۰) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

۱۱) $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$:قانون شرکت‌پذیری

۱۲) $A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$:قانون شرکت‌پذیری

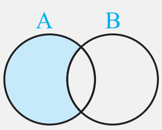
۱۳) $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$

۱۴) $\begin{cases}A\cap(A\cup B)=A\\ A\cup(A\cap B)=A\end{cases}$:قوانین جذبی

۱۵) $\begin{cases}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{cases}$:قوانین پخشی

تفاضل دو مجموعهٔ A و B: $A-B$ مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از A است که به B تعلق ندارند.

به‌طور مشابه، $B-A$ تعریف می‌شود.



$:A-B$

قوانین تفاضل مجموعه‌ها:

۱) $A-A=\varnothing$

۲) $A-\varnothing=A \ , \ \varnothing-A=\varnothing$

۳) $(A-B)\subseteq A$

۴) تفاضل متقارن: $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)=A\Delta B$

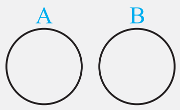
۵) $A-B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B$

۶) $A-B=A-(A\cap B)$

۷) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

توجه در حالت کلی، تفاضل دو مجموعه خاصیت جابه‌جایی ندارد. $(A-B\neq B-A)$

مجموعه‌های جدا از هم یا مجزا: در صورتی که اشتراک دو مجموعهٔ غیرتهی، تهی باشد $(A\cap B=\varnothing)$، آن‌گاه دو مجموعه، جدا از هم هستند.



به‌طور مثال، دو مجموعهٔ $\underbrace{\text{«اعداد طبیعی زوج»}}_{A}$ و $\underbrace{\text{«اعداد طبیعی فرد»}}_{B}$ مجزا هستند.

تهی یا مجموعهٔ $\varnothing$ که به فرم $\{\ \}$ هم دیده می‌شود، زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است. از طرفی اشتراک هر مجموعه‌ای با تهی، مجموعه‌ای تهی خواهد شد، در نتیجه، گزینهٔ (۳) زیرمجموعهٔ سایر مجموعه‌ها است، زیرا $\varnothing\cap\{\varnothing\}=\varnothing$.

۲۶ ۴ از $A\cap C=C$ نتیجه می‌گیریم C زیرمجموعهٔ A و از $A\cap B=B$ نتیجه می‌گیریم B هم زیرمجموعهٔ A است، اما در مورد ارتباط بین B و C هیچ نظری نمی‌توانیم بدهیم. پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست‌اند.

۲۷ ۴ عضوهای مجموعهٔ A عبارتند از $\{۱,۲\}$ و $\{\varnothing\}$، اما عضوهای مجموعهٔ B عبارتند از $\{۳,۴,۵\}$ و $\varnothing$. همان‌طور که می‌بینید هیچ عضو مشترکی بین این دو مجموعه وجود ندارد، پس $A\cap B=\varnothing$ است.

۲۸ ۲ با توجه به معلومات مسأله می‌توان نوشت:

$$A=\{x\,|\,x=۶k\ ,\ k\in\mathbb{N}\}=\{۶,۱۲,۱۸,\dots\} \quad , \quad B=\{x\,|\,x=۳k\ ,\ k\in\mathbb{N}\}=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,\dots\}$$

واضح است که $A\subset B$ و در نتیجه $A\cap B=A$ می‌باشد.

۲۹ ۲ الف) درست است، زیرا همهٔ اعضای مجموعهٔ A، در مجموعهٔ $A\cup B$ هم وجود دارند.

ب) نادرست است، زیرا $A\cup B$ همهٔ اعضای A و B را در بر می‌گیرد ولی $A\cap B$ فقط عضوهای مشترک A و B را در بر می‌گیرد، بنابراین $(A\cup B)\subseteq(A\cap B)$ درست نیست.

ج) نادرست است، زیرا وقتی $a\in(A\cup B)$، نتیجه می‌گیریم a متعلق به A یا B یا هر دوی آن‌ها است و لزومی ندارد که حتماً متعلق به A باشد.

د) نادرست است، زیرا وقتی $a\in B$، نمی‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که حتماً a متعلق به مجموعهٔ A هم است، بنابراین از $a\in B$، اجازهٔ رسیدن بـه $a\in(A\cap B)$ را نداریم.

۳۰ ۲ با توجه به گفته‌های مسأله، داریم:

$$A=\{۲,۴,۶,۸\}\ ,\ B=\{۲,۳,۵,۷\}\Rightarrow A\cup B=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A\cup B$ برابر $۲^۷$ یا ۱۲۸ است، از طرفی:

$$A\cap B=\{۲\}\Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ } A\cap B=۲^۱=۲\Rightarrow \text{جواب مسأله}=۱۲۸-۲=۱۲۶$$

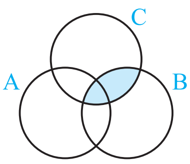
۳۱ ۳ داریم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$، بنابراین:

$$A\cap B=\{۲,۳,۴\} \qquad , \qquad A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

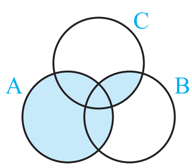
در نتیجه $\{۲,۳,۴\}\subseteq X\subseteq\{۱,۲,۳,۴,۵\}$. از آن‌جـا کـه X بـین دو مجموعـهٔ مـذکور قـرار گرفتـه، می‌تـوان گفـت کـه X می‌توانـد مسـاوی $\{۲,۳,۴\}$ یا $\{۱,۲,۳,۴\}$ یا $\{۲,۳,۴,۵\}$ و یا $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ باشد.

۳۲ ۳ همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

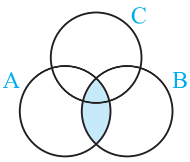
الف) $B\cap C:$



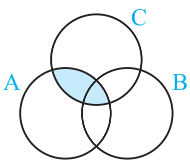
$\Rightarrow A\cup(B\cap C):$



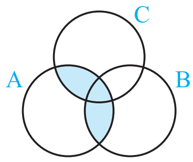
ب) $A\cap B:$

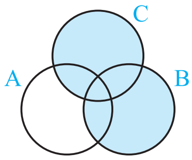


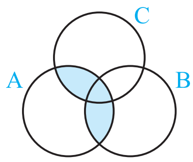
و $A\cap C:$

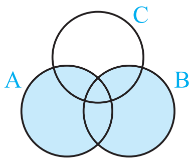


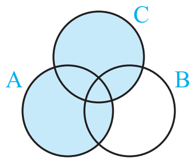
$\Rightarrow(A\cap B)\cup(A\cap C):$

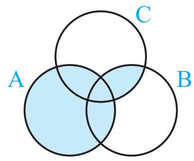


ج) $B\cup C:$ 

$\Rightarrow A\cap(B\cup C):$ 

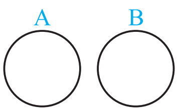
د) $A\cup B:$ 

و $A\cup C:$ 

$\Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cup C):$ 

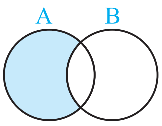
بنابراین (ب) و (ج) موارد مطلوب هستند.

۳۳ **۳** وقتی $B-A$ برابر B می‌شود، نتیجه می‌گیریم دو مجموعهٔ A و B جدا از هم هستند، یعنی داریم:



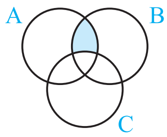
$\Rightarrow A-B=A$

۳۴ **۴** به نمودار وِن در شکل زیر توجه کنید:



$A-B$

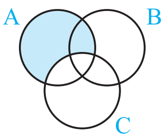
$\Rightarrow$



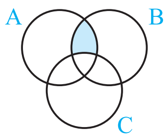
$B\cup(A-B)$

$\Rightarrow B\cup(A-B)=A\cup B$

۳۵ **۳** در بین گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳)، شکل داده‌شده را مشخص نمی‌کند، به‌طوری که داریم:

$(A-C)\cap B:$ 

$A-C$

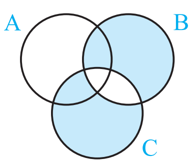
$\Rightarrow$ 

$(A-C)\cap B$

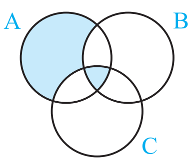
مثل کاری که من کردم، شما هم در مورد سایر گزینه‌ها انجام بدید تا توی این مدل تست‌ها قوی‌تر بشید.

۳۶ **۳** می‌دانیم $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$، پس در مورد $A\Delta(B\Delta C)$ می‌توان نوشت:

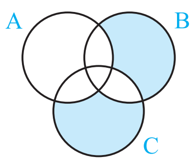
$$A\Delta(B\Delta C)=(A-(B\Delta C))\cup((B\Delta C)-A)$$



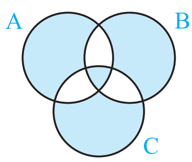
$B\Delta C$

$\Rightarrow$ 

$A-(B\Delta C)$

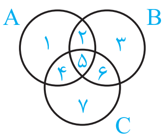
و 

$(B\Delta C)-A$

$\overset{\cup}{\Longrightarrow}$ 

$A\Delta(B\Delta C)$

۳۷ **۲** برای حل این مسأله، شما را با روش عددگذاری به‌صورت مقابل آشنا می‌کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases}(A\cup C)-(B\cap C)=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷\}-\{۵,۶\}=\{۱,۲,۴,۷\}\\ C\cap(A\cup C)=\{۴,۵,۶,۷\}\cap\{۱,۲,۴,۵,۶,۷\}=\{۴,۵,۶,۷\}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$[(A\cup C)-(B\cap C)]\cap[C\cap(A\cup C)]=\{۴,۷\}=C-B$$

۳۸ **۴** $A=\{۱,۲,\{۱,۲,۳\}\}$، $B=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\}\}$ و $C=\{۱,۲,۳\}$ هستند، پس داریم:

۱) $A-B=\{\{۱,۲,۳\}\}\neq C\Rightarrow$ نادرست است.

۲) $B-C=\{\{۱,۲\}\}\neq\varnothing\Rightarrow$ نادرست است.

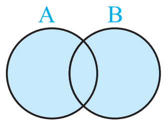
۳) $B-C=\{\{۱,۲\}\}\neq\{۱,۲\}\Rightarrow$ نادرست است.

۴) $A-B=\{\{۱,۲,۳\}\}=\{C\}\Rightarrow$ درست است.

۳۹ ۴ روش اول:

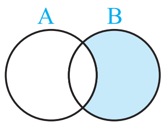
$$\begin{cases} A=[۴,۸) \\ A\cap B=(۵,۸) \end{cases} \Rightarrow B=(۵,b)$$
$$\Rightarrow B=(۵,۹]$$
$$\begin{cases} A=[۴,۸) \\ A\cup B=[۴,۹] \end{cases} \Rightarrow B=(a,۹]$$

روش دوم: *اول نمودار وِن زیر رو ببینید:*



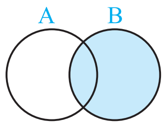
$A\cup B$

$\Rightarrow$



$(A\cup B)-A$

$\Rightarrow$



$[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

حالا با این شکل‌ها و چیزایی که دیدید می‌ریم سراغ حل این تست:

$$B=[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)=([۴,۹]-[۴,۸))\cup(۵,۸)=[۸,۹]\cup(۵,۸)=(۵,۹]$$

۴۰ ۴ ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد، مجموعهٔ **متناهی (باپایان)** می‌نامیم و مجموعه‌ای را که نتوانیم تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کنیم، مجموعه‌ای **نامتناهی (بی‌پایان)** می‌نامیم.

مثال متناهی و نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\mathbb{N}$: نامتناهی

ب) $\mathbb{Z}$: نامتناهی

ج) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$: نامتناهی

د) $\mathbb{W}-\mathbb{N}$: متناهی

ه) **مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی**: متناهی

و) $(۰,۲)$: نامتناهی

ز) **مجموعهٔ درخت‌های جنگل‌های آمازون**: متناهی

ح) **مجموعهٔ تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات**: نامتناهی

ط) **مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد**: نامتناهی

نکته اگر A یک مجموعهٔ متناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه:

الف) $A\cap B$ و $A-B$ متناهی است.

ب) $A\cup B$ و $B-A$ نامتناهی است.

نکته

۱ اگر $A\subseteq B$ و A متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۲ اگر $A\subseteq B$ و A نامتناهی باشد، آن‌گاه B حتماً نامتناهی است.

۳ اگر $A\subseteq B$ و B متناهی باشد، آن‌گاه A حتماً متناهی است.

۴ اگر $A\subseteq B$ و B نامتناهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

مجموعهٔ اعداد اول زوج، متناهی است، زیرا تنها عدد زوجی که اول هم هست، عدد ۲ می‌باشد، اما در مورد سایر گزینه‌ها داریم:

۱) مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج $=\{۲,۴,۶,۸,\dots\}\Rightarrow$ نامتناهی

۲) مجموعهٔ اعداد اول فرد $=\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,\dots\}\Rightarrow$ نامتناهی

۳) مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد $=\{۱,۳,۵,۷,\dots\}\Rightarrow$ نامتناهی

۴۱ ۳ (الف) مجموعهٔ متناهی است، زیرا تعداد نقاطی که مختصات صحیح داشته و داخل یک مستطیل قرار گرفته باشند، قابل شمارش بوده، اما (ب) مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا بی‌شمار نقطه با مختصات صحیح، خارج از یک مستطیل وجود دارد. هم‌چنین (ج) مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا بی‌شمار نقطه روی محیط یک مستطیل وجود دارد (حواستان باشد که در مورد (ج)، گفته نشده که مختصات نقاط، صحیح باشد.).

۴۲ ۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: ۱) مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا بی‌شمار عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۵۰۲ وجود دارد. ۲) مجموعهٔ نامتناهی است، زیرا نمی‌توانیم تعداد اعضای مجموعهٔ B را مشخص کنیم. ۳) متناهی است، زیرا تعداد اعداد صحیحی که وقتی به توان ۲ می‌رسند، کوچک‌تر از عدد ۶۰ باشند مشخص و قابل تعیین است. ۴) نامتناهی است، زیرا بین دو عدد ۱ و ۱/۲ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۴۳ ۴ می‌خواهیم $B-A$ تک‌عضوی باشد. این موضوع در گزینهٔ (۴) اتفاق می‌افتد، ببینید:

$$A=\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\dots\}\ ,\ B=\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,۴,\dots\}\Rightarrow B-A=\{۰\}$$

۴۴ **۳** می‌توان نوشت: $A=\{۳,۶,۹,۱۲,\cdots\}$ و $B=\{-۹۹,-۹۸,\cdots,۹۸,۹۹\}$. همان‌طور که می‌بینید A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ متناهی است. حالا برویم سراغ گزینه‌ها:

۱) $\underbrace{A}_{\text{نامتناهی}} - \underbrace{B}_{\text{متناهی}}$: نامتناهی

۲) $\mathbb{Z}-A=\{\cdots,۰,۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,\cdots\}$: نامتناهی

۳) $\underbrace{A}_{\text{نامتناهی}} \cap \underbrace{B}_{\text{متناهی}}$: متناهی

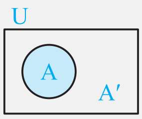
۴) $\underbrace{A}_{\text{نامتناهی}} \cup \underbrace{B}_{\text{متناهی}}$: نامتناهی

۴۵ **۳** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

مجموعهٔ مرجع و مجموعهٔ متمم

در مبحث مجموعه‌ها، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، **مجموعهٔ مرجع** می‌نامیم و آن را با **U** نشان می‌دهیم.

* هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را **متمم A** می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. بـه عبـارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند. نمودار وِن مقابل را ببینید.



$A'=U-A=\{x\,|\,x\in U, x\notin A\}$:

قوانین مجموعهٔ مرجع و متمم:

۱) $(A')'=A$:متممِ متمم یک مجموعه برابر می‌شود با خود مجموعه

۲) $A\cap A'=\varnothing \ ,\ A\cup A'=U$

۳) $(A\cap B)'=A'\cup B' \ ,\ (A\cup B)'=A'\cap B'$:قوانین دمورگان

۴) $U'=\varnothing \ ,\ \varnothing'=U$

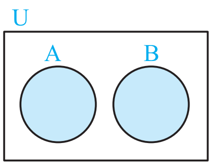
۵) $A-B=A\cap B'$

۶) $A\subseteq B \Leftrightarrow B'\subseteq A'$

$$(U'\cap A)'\cap(A\cup\varnothing')'=(\underbrace{\varnothing\cap A}_{\varnothing})'\cap(\underbrace{A\cup U}_{U})'=\varnothing'\cap U'=U\cap\varnothing=\varnothing$$

۴۶ **۱** یادتان هست که اجتماع یک مجموعهٔ نامتناهی با هر مجموعهٔ دیگری (متناهی یا نامتناهی)، حتماً نامتناهی خواهد بود. در این‌جا A مجموعه‌ای متناهی (باپایان) است، پس متمم آن یعنی A'، یک مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان) خواهد بود و در نتیجه $A'\cup B'$ همواره نامتناهی می‌باشد.

۴۷ **۴** وقتی $A\cap B=\varnothing$ و A و B هر دو مجموعه‌های غیرتهی هستند، یعنی مجموعه‌های A و B جدا از هم می‌باشند، پس طبق نمودار وِن در شکل مقابل خواهیم داشت:



$$\Rightarrow A\subseteq B' \ ,\ B\subseteq A' \ ,\ B-A=B \ ,\ A-B=A$$

۴۸ **۴** چون $B'\subseteq A'$، پس اجتماع B' و A' برابر A' می‌شود، یعنی $B'\cup A'=A'$ و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(B'\cup A')'=(A')'\Rightarrow B\cap A=A\Rightarrow A\subseteq B$$

۴۹ **۴** اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $B'\subseteq A'$ (و برعکس)، بنابرین گزینهٔ (۱) درست است. از طرفی داریم:

$$B'\subseteq A'\xrightarrow{\cap A}A\cap B'\subseteq \underbrace{A\cap A'}_{\varnothing}\Rightarrow A\cap B'=\varnothing$$

پس گزینهٔ (۳) هم درست است. همچنین:

$$A\cap B'=\varnothing\xrightarrow{\text{متمم}}(A\cap B')'=\varnothing'\Rightarrow A'\cup B=U\ \ (\text{مجموعهٔ مرجع})$$

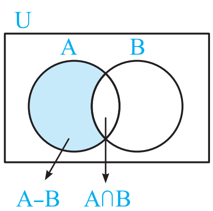
در نتیجه گزینهٔ (۲) هم درست است.

۵۰ **۳** از $A\cap B=A$ نتیجه می‌گیریم A زیرمجموعهٔ B است، پس گزینهٔ (۴) درست است. از طرفی وقتی $A\subseteq B$، آن‌گاه $B'\subseteq A'$، پس گزینـهٔ (۱) هم درست است. همچنین وقتی A زیرمجموعهٔ B است، یعنی همهٔ عضوهای A در B هم قرار دارند و در نتیجه در B' قـرار ندارنـد، پـس $A\cap B'=\varnothing$، بنابراین گزینهٔ (۲) هم درست است. اما گزینهٔ (۳) نادرست می‌باشد، زیرا:

$$A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'\Rightarrow B'\cap A'=B'$$

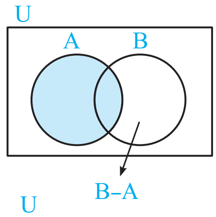
۵۱ **۴** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) $A-(A\cap B)=A-B$



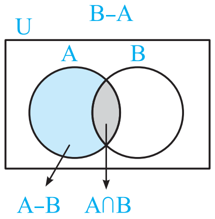
ب) $A-\varnothing=A$

ج) $A-(B-A)=A$



د) $A-A'=A\bigcap(A')'=A\bigcap A=A$

ه) $(A\bigcap B)\bigcup(A-B)=A$



بنابراین موارد (ب)، (ج)، (د) و (ه) مساوی A هستند.

۵۲ **۱** می‌دانیم $A-B=A\bigcap B'$ است و $B-A=B\bigcap A'$، از طرفی گفته‌شده $A\bigcap B'=B\bigcap A'$، یعنی $A-B=B-A$ و این یعنی $A=B$ است، در نتیجه:

$$A\bigcup B=A\bigcup A=A \;\;,\;\; A\bigcap B=A\bigcap A=A\Rightarrow A\bigcup B=A\bigcap B$$

بنابراین گزینهٔ (۱) درست است.

۵۳ **۱** **روش اول:** مجموعهٔ اعداد صحیح را به عنوان مجموعهٔ مرجع درنظر گرفته‌ایم، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}A'=\{۱,۲,۳\}\Rightarrow A=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۴,۵,۶,\cdots\}\\ B'=\{۲,۳,۴,۵\}\Rightarrow B=\{\cdots,-۱,۰,۱,۶,۷,۸,۹,\cdots\}\end{cases}\Rightarrow A\bigcup B=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱,۴,۵,۶,۷,۸,۹,\cdots\}\Rightarrow(A\bigcup B)'=\{۲,۳\}$$

روش دوم: می‌دانیم $(A\bigcup B)'$ برابر است با $A'\bigcap B'$، بنابراین:

$$(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'=\{۱,۲,۳\}\bigcap\{۲,۳,۴,۵\}=\{۲,۳\}$$

۵۴ **۴** از $A=\{x\mid x>۱\}$ نتیجه می‌گیریم $A'=\{x\mid x\le ۱\}=(-\infty,۱]$ و از $B=\{x\mid x<-۱\}$ نتیجه می‌گیریم $B'=\{x\mid x\ge -۱\}=[-۱,+\infty)$، بنابراین:

$$A'\bigcap B'=(-\infty,۱]\bigcap[-۱,+\infty)=[-۱,۱]=\{x\mid -۱\le x\le ۱\}$$

۵۵ **۲** داریم $U=\{۳a\mid a\in\mathbb{Z}\}$ و $B=\{۶a\mid a\in\mathbb{Z}\}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$U=\{\cdots,-۱۲,-۹,-۶,-۳,۰,۳,۶,۹,۱۲,\cdots\}\quad,\quad B=\{\cdots,-۱۲,-۶,۰,۶,۱۲,\cdots\}$$

$$\Rightarrow B'=U-B=\{\cdots,-۹,-۳,۳,۹,\cdots\}=\{۶a-۳\mid a\in\mathbb{Z}\}$$

۵۶ **۳** $A_n=\{۱,۲,\cdots,n\}$، پس $A_{n+1}=\{۱,۲,\cdots,n,n+۱\}$، در نتیجه $A_n\subseteq A_{n+1}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$(A_n-A_{n+1})'=(\varnothing)'=U=\mathbb{N}$$

۵۷ **۱** می‌توانیم مجموعهٔ $(B-A)'-A$ را به‌صورت $(B\bigcap A')'\bigcap A'$ بنویسیم که در این‌صورت خواهیم داشت:

$$(B'\bigcup A)\bigcap A'=(B'\bigcap A')\bigcup\underbrace{(A\bigcap A')}_{\varnothing}=B'\bigcap A'=(B\bigcup A)'$$

در نتیجه متمم مجموعهٔ $(B-A)'-A$ برابر می‌شود با:

$$((B\bigcup A)')'=B\bigcup A$$

۵۸ **۲** می‌خواهیم متمم مجموعهٔ $C\bigcup A'\bigcup B'$ را به‌دست آوریم، پس می‌نویسیم:

$$(C\bigcup A'\bigcup B')'=C'\bigcap A\bigcap B=A\bigcap B\bigcap C'$$

گزینهٔ (۱): $A\bigcap(B\bigcap C')=A\bigcap(B-C)=(A\bigcap B)-(A\bigcap C)$

گزینهٔ (۳): $A\bigcap(B\bigcap C')=A\bigcap(B-C)$

گزینهٔ (۴): $(A\bigcap B)\bigcap C'=(A\bigcap B)-C$

در نتیجه نمی‌تواند برابر مجموعهٔ نوشته‌شده در گزینهٔ (۲) باشد.

۵۹ **۱** A و B دو مجموعهٔ جدا از یک‌دیگرند، پس $A-B=A$ و $B-A=B$، بنابراین:

$$((\underbrace{A-B}_{A})-(\underbrace{B-A}_{B}))\bigcap((\underbrace{B-A}_{B})-(\underbrace{A-B}_{A}))=(A-B)\bigcap(B-A)=\varnothing$$

بنابراین متمم آن برابر $\varnothing'$ یا همان U می‌شود *(توجه کنید بچه‌ها، در این‌جا اگه A و B دو مجموعهٔ جدا از هم نباشن، بازم جواب مسأله، همین میشه. یه کم بهش فکر کنید.)*

۶۰ **۲** با توجه به قوانین مجموعه‌ها داریم:

$$\underbrace{A'}_{\text{مجموعهٔ اعدادی که بر ۵ بخش‌پذیر نمی‌باشند.}}-B'=A'\bigcap(B')'=A'\bigcap \underbrace{B}_{\text{مجموعهٔ اعدادی که بر ۲ بخش‌پذیرند.}}$$

اشتراک دو مجموعهٔ A' و B، مجموعهٔ اعدادی است که بر ۲ بخش‌پذیر بوده اما بر ۵ بخش‌پذیر نیستند.

۶۱ **۳** یادتان باشد $A-B'=B-A$ و $A'-B'=B-A$ و $B'-A'=A-B$. به دردمان می‌خورد! در این‌جا می‌خواهیم مجموعهٔ $A'\Delta B'$ را به‌دست آوریم، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$A'\Delta B'=(A'-B')\cup(B'-A')=(B-A)\cup(A-B)=A\Delta B$$

۶۲ **۲** می‌دانیم $(A'\cup B)'=A\cap B'$ و $B-A'=B\cap A=A\cap B$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$(A'\cup B)'\Delta(B-A')=(A\cap B')\Delta(A\cap B)=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]-[(A\cap B')\cap(A\cap B)]$$

$$=[A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}]-[A\cap\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]=(A\cap U)-(A\cap\varnothing)=A-\varnothing=A$$

توجه کنید که از رابطهٔ $X\Delta Y=(X\cup Y)-(X\cap Y)$ استفاده کردیم.

۶۳ **۳** همهٔ موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) $A\cap(A'\cup B)=(A\cap A')\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

ب) $(A\cup B)\cup B'=A\cup(B\cup B')=A\cup U=U$

ج) $(A'\cap B)\cup(A'\cap B')=A'\cap(B\cup B')=A'\cap U=A'$

د) $(B'\cup A)\cup\underbrace{(B\cap A')}_{X\cap Y=(X'\cup Y')'}=(B'\cup A)\cup(B'\cup A)'=U$

بنابراین موارد (ب) و (د) مساوی با U هستند.

۶۴ **۴** حواستان باشد متمم مجموعهٔ $(A-B)\cup[B\cap(A\cup B)]$ را می‌خواهیم، بنابراین داریم:

$$((A-B)\cup\underbrace{[B\cap(A\cup B)]}_{B})'=((A-B)\cup B)'=((A\cap B')\cup B)'=((A\cup B)\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U})'=(A\cup B)'=A'\cap B'$$

۶۵ **۱** می‌دانیم $A\cup(A\cap B)=A$ و $A\cap(A\cup B)=A$. حال اگر $(B\cup C')'\cap C$ را مجموعهٔ D در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$A\cup(A\cap\underbrace{(B\cup C')'\cap C}_{D})=A\cup(A\cap D)=A$$

۶۶ **۳** از تساوی‌های $D\cap C=\varnothing$ و $D\cup C=U$ نتیجه می‌گیریم مجموعهٔ D، متمم مجموعهٔ C است، یعنی $D=C'$. از طرفی داریم:

$$C=(A\cup B')-(A'\cap B')\Rightarrow C=(A\cup B')\cap(A'\cap B')'=(A\cup B')\cap(A\cup B)=A\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}=A$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$D=C'=A'$$

۶۷ **۳**

$$(A-B)'\cap(A\cup B)\cap X=(A\cap B')'\cap(A\cup B)\cap X=(A'\cup B)\cap(A\cup B)\cap X=(B\cup\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing})\cap X=B\cap X$$

با توجه به این‌که $B\cap X=\varnothing$ است، X می‌تواند $\varnothing$، B' یا $A-B$ باشد ولی $B-A$ نمی‌تواند باشد (چرا؟).

۶۸ **۲** می‌خواهیم در مورد متمم مجموعهٔ $C\cup A'\cup B'$ صحبت کنیم.

$$(C\cup A'\cup B')'=C'\cap A\cap B=A\cap B\cap C'$$

حالا می‌رویم سراغ گزینه‌ها:

۱) $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'=(A\cap B)\cap(A'\cup C')=\underbrace{(A\cap B\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B\cap C')=A\cap B\cap C'$

۲) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cap C')\cup(B\cap C')=(A\cup B)\cap C'$

۳) $A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C')=A\cap B\cap C'$

۴) $(A\cap B)-C=(A\cap B)\cap C'=A\cap B\cap C'$

همان‌طور که می‌بینید فقط گزینهٔ (۲) با مجموعهٔ مورد نظر در صورت مسأله، تفاوت دارد.

۶۹ **۱** ابتدا درسنامهٔ زیر را بخوانید.

تعداد عضوهای اجتماع، اشتراک و ...

A و B را به عنوان دو مجموعهٔ متناهی درنظر بگیرید. در این صورت:

$$\begin{cases} n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) & \text{: تعداد عضوهای اجتماع } A \text{ و } B \\ n(A-B)=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B) & \text{: تعداد عضوهای تفاضل } A \text{ و } B \end{cases}$$

هم‌چنین توجه داشته باشید که:

$$n(A')=n(U)-n(A)$$

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$

روش اول: مجموعهٔ A فقط یک عضو دارد که به فرم $\{\{\varnothing\},\{a\},a\}$ است. از طرفی مجموعهٔ B دارای دو عضو می‌باشد که a و $\varnothing$ هستند، بنابراین اجتماع این دو مجموعه، دارای سه عضو خواهد بود *(حواستون باشه که هیچ کدوم از عضوهای B با عضو A یکی نیستن).*

روش دوم: با توجه به مجموعه‌های A و B داریم: $n(A)=۱$، $n(B)=۲$ و $n(A\cap B)=۰$، پس:

$$n(A\cup B)=۱+۲-۰=۳$$

۷۰ **۴** داریم $A=\{۱,۳,۵,\dots,۵۹\}$ و $B=\{\underset{۱(۲+۱)}{۳},\underset{۳(۲+۳)}{۱۵},\underset{۵(۲+۵)}{۳۵},\underset{۷(۲+۷)}{۶۳},\dots,۵۹(۲+۵۹)\}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$A\cap B=\{۳,۱۵,۳۵\}\Rightarrow n(A\cap B)=۳$$

۷۱ **۱** $A_۲$ مجموعهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ است، پس داریم:

$$A_۲=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}\}$$

از طرفی $B_۲$ هم مجموعهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $B=\{a,b,c,e,f\}$ است، بنابراین:

$$B_۲=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,c\},\{b,e\},\{b,f\},\{c,e\},\{c,f\},\{e,f\}\}$$

$$\Rightarrow A_۲\cap B_۲=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,e\},\{c,e\}\}\Rightarrow \text{شش عضو دارد.}$$

۷۲ **۱** با توجه به این‌که $A_k=\{k,k+۱,\dots,۲k-۱,۲k\}$ است، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}A_{۱۵}=\{۱۵,۱۶,\dots,۲۹,۳۰\}\\A_{۱۶}=\{۱۶,۱۷,\dots,۳۱,۳۲\}\\\vdots\\A_{۲۰}=\{۲۰,۲۱,\dots,۳۹,۴۰\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_{۱۵}\cup A_{۱۶}\cup\dots\cup A_{۲۰}=\{۱۵,۱۶,\dots,۴۰\}\\A_{۱۵}\cap A_{۱۶}\cap\dots\cap A_{۲۰}=\{۲۰,۲۱,\dots,۳۰\}\end{cases}$$

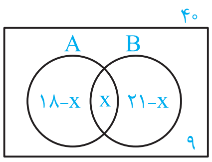
بنابراین داریم:

$$(A_{۱۵}\cup A_{۱۶}\cup\dots\cup A_{۲۰})-(A_{۱۵}\cap A_{۱۶}\cap\dots\cap A_{۲۰})=\{۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۳۱,\dots,۴۰\}\Rightarrow \text{۱۵ عضو دارد.}$$

۷۳ **۳** با توجه به معلومات مسأله می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}n(A\cup B)=n(A)+n(B)=۱۲\\n(A\cup C)=n(A)+n(C)=۱۰\\n(B\cup C)=n(B)+n(C)=۱۴\end{array}\right\}\xrightarrow{+}۲n(A)+۲n(B)+۲n(C)=۳۶\xrightarrow{\div ۲}n(A)+n(B)+n(C)=۱۸$$

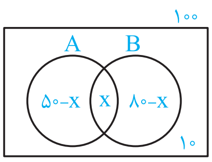
از آن‌جا که $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$ است، پس $n(A\cup B\cup C)=۱۸$.



۷۴ **۴** مجموعهٔ افرادی که در برنامهٔ هنری شرکت کرده‌اند را A و مجموعهٔ افرادی که در برنامهٔ علمی شرکت کرده‌اند را B می‌نامیم. حال اگر $A\cap B$ را برابر x بگیریم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\Rightarrow n(A\cup B)=۴۰-۹=۳۱\Rightarrow ۳۱=(۱۸-x)+x+(۲۱-x)\Rightarrow ۳۱=۳۹-x\Rightarrow x=۸$$

بنابراین ۸ نفر در هر دو برنامهٔ هنری و علمی شرکت کرده‌اند.

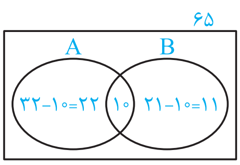


۷۵ **۱** گزینهٔ (۲) مجموعهٔ افرادی که علاقمند به والیبال هستند را A و مجموعهٔ افرادی که علاقمند به فوتبال هستند را B می‌نامیم. حال اگر $A\cap B$ را برابر x بگیریم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\Rightarrow n(A\cup B)=۱۰۰-۱۰=۹۰\Rightarrow ۹۰=(۵۰-x)+x+(۸۰-x)\Rightarrow ۹۰=۱۳۰-x\Rightarrow x=۴۰$$

حال باید مقدار $۸۰-x$ را پیدا کنیم:

$$۸۰-x=۸۰-۴۰=۴۰$$



۷۶ **۱** گزینهٔ (۱) مجموعهٔ افرادی که ورزشکار هستند را A و مجموعهٔ افرادی که دانشجو هستند را B می‌نامیم. حال با توجه به معلومات مسأله، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \text{تعداد مسافرینی که نه ورزشکارند و نه دانشجو می‌باشند}=۶۵-(۲۲+۱۰+۱۱)=۲۲$$