

دنباله هندسی

درس
۳

مثال الگوی دنباله $1, 3, 9, 27, 81, \dots$ را به دست آورید.

پاسخ

$$1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} 27 \xrightarrow{\times 3} 81$$

پس می‌توانیم بگوییم هر جمله، از ضرب یک عدد ثابت غیرصفر در جمله قبیل به دست آمده است. به چنین دنباله‌هایی می‌گوییم **دنباله هندسی** و به عدد ثابتی که در اینجا ۳ است، می‌گوییم **نسبت مشترک** دنباله هندسی که معمولاً آن را با r نشان می‌دهند.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 \times r$$

$$a_3 = a_2 \times r = \underbrace{a_1 \times r}_{a_2} \times r = a_1 \times r^2$$

$$a_4 = a_3 \times r = \underbrace{a_1 \times r^2}_{a_3} \times r = a_1 \times r^3$$

⋮

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

پس اعضای این دنباله به شکل $a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots$ هستند.

دنباله هندسی: یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت $a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots$ است که در آن $a_1 \neq 0$ «جمله اول» و $r \neq 0$ «نسبت مشترک» دنباله

است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید. رابطه بازگشتی این دنباله به صورت $a_{n+1} = a_n \times r, a_1 = a$ است.

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

برای به دست آوردن نسبت مشترک کافی است هر جمله را تقسیم بر جمله قبیلش کنید:

مثال دنباله هندسی‌ای بنویسید که جمله اول آن ۲ و نسبت مشترک آن ۳ باشد.

پاسخ نمایش دنباله اعداد:

$$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{\times 3} 54 \Rightarrow 2, 6, 18, 54, \dots$$

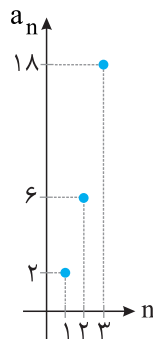
$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{\substack{a_1=2 \\ r=3}} a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

نمایش ضابطه تابعی دنباله:

$$a_{n+1} = r a_n, a_1 = a \xrightarrow{\substack{a_1=2 \\ r=3}} a_{n+1} = 3 a_n, a_1 = 2$$

نمایش رابطه بازگشتی دنباله:

نمایش نمودار دنباله:



در فصل بعدی می‌خوانید که این نقاط روی نمودار یک تابع نمایی که یک تابع غیرخطی است قرار دارند. پس دنباله هندسی یک الگوی غیرخطی است ولی دنباله حسابی یک الگوی خطی بود.

مثال نمایش‌های مختلف دنباله $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \dots$ را بنویسید.

پاسخ جمله اول $a_1 = 1$ است. برای به دست آوردن نسبت مشترک، یک جمله را تقسیم بر جمله قبیلش می‌کنیم (فرقی نمی‌کند کدام جمله).

$$r = \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5} \quad \text{یا} \quad r = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow[r=\frac{1}{5}]{a_1=1} a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

نمایش ضابطه تابعی دنباله:

$$a_{n+1} = r a_n, a_1 = a \xrightarrow[r=\frac{1}{5}]{a_1=1} a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n, a_1 = 1$$

نمایش رابطه بازگشتی دنباله:

مثال نمایش‌های مختلف دنباله $a_n = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ را بنویسید.

پاسخ

$$a_n = \underbrace{100}_{a_1} \left(\underbrace{\frac{1}{4}}_r\right)^{n-1} \Rightarrow a_1 = 100, r = \frac{1}{4}$$

$$100 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{100}{4} = 25 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} \frac{25}{4} = 6.25 \Rightarrow 100, 25, 6.25, \dots$$

نمایش دنباله اعداد:

$$a_{n+1} = r a_n, a_1 = a \xrightarrow[r=\frac{1}{4}]{a_1=100} a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n, a_1 = 100$$

نمایش رابطه بازگشتی دنباله:

دنباله‌ای که در آن $r > 1$ باشد، دنباله افزایشی و دنباله‌ای که در آن $0 < r < 1$ باشد، دنباله کاهش می‌یابد. اگر $r = 1$ باشد، دنباله ثابت است.



پاتخته

در دنباله $4, -2, 1, \dots$ چندمین جمله برابر $\frac{1}{16}$ است؟

پاسخ

سعی می‌کنیم الگوی این اعداد را پیدا کنیم:

$$4 \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{2}\right)} -2 \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{2}\right)} 1 \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{2}\right)} \frac{-1}{2}$$

چون عدد ثابتی در هر جمله ضرب شده است، پس دنباله هندسی است. برای نوشتن ضابطه دنباله هندسی، به جمله اول و نسبت مشترک نیاز داریم. برای به دست آوردن نسبت مشترک، یک جمله را تقسیم بر جمله قبلی می‌کنیم:

$$r = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow[r=\frac{-1}{2}]{a_1=4} a_n = 4 \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$$

حال که ضابطه را به دست آوردیم، برابر با عددی که گفته است قرار می‌دهیم:

$$4 \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16 \times 4} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^4 \times 2^2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{-1}{2}\right)^6} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^6 \Rightarrow n-1=6 \Rightarrow n=7$$

مثال اگر جمله چهارم و هشتم یک دنباله هندسی، به ترتیب برابر $\frac{\lambda}{27}$ و $\frac{128}{2187}$ باشد، جمله اول این دنباله چند است؟

پاسخ

در این مدل سؤالات باید با استفاده از اطلاعاتی که به ما داده است، مجهول مسئله را به دست آوریم:

$$\begin{cases} a_4 = \frac{\lambda}{27} \\ a_8 = \frac{128}{2187} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 = \frac{\lambda}{27} \\ a_1 r^7 = \frac{128}{2187} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 = \frac{\lambda}{27} \\ r^4 (a_1 r^3) = \frac{128}{2187} \end{cases} \Rightarrow r^4 \left(\frac{\lambda}{27}\right) = \frac{128}{2187}$$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{128}{2187} \times \frac{27}{\lambda} = \frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$a_1 r^3 = \frac{\lambda}{27} \xrightarrow[r=\frac{2}{3}]{r=\frac{2}{3}} a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{\lambda}{27} \Rightarrow a_1 \left(\frac{8}{27}\right) = \frac{\lambda}{27} \Rightarrow a_1 = 1$$

مثال جمله سوم یک دنباله هندسی 27 و جمله پنجم همین دنباله 243 است. جمله هفتم این دنباله را به دست آورید.

$$\begin{cases} a_3 = 27 \\ a_5 = 243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^2 = 27 \\ a_1 r^4 = 243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^2 = 27 \\ r^2 (a_1 r^2) = 243 \end{cases} \Rightarrow r^2 (27) = 243 \Rightarrow r^2 = \frac{243}{27} = 9$$

پاسخ

$$a_7 = a_1 r^6 = r^2 (a_1 r^4) = r^2 (243) = 9 \times 243 = 2187$$

در یک دنباله هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جمله اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ است. مجموع این ۶ جمله کدام است؟ (قارچ از کشور ۹۴)

۱۱۵ **۴**

۱۲۴ **۳**

۱۲۸ **۲**

۱۳۳ **۱**

پاسخ با استفاده از اطلاعاتی که داریم، سعی می‌کنیم خواسته مسئله را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 81 \\ a_5 + a_6 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r = 81 \\ a_1 r^4 + a_1 r^5 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r = 81 \\ r^4 (a_1 + a_1 r) = 16 \end{cases} \Rightarrow r^4 (81) = 16 \Rightarrow r^4 = \frac{16}{81} \Rightarrow r^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 81 + a_3 + a_4 + 16 = 97 + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 97 + r^2 (a_1 + a_1 r)$$

$$= 97 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (81) = 97 + \frac{4}{9} \times 81 = 97 + 4 \times 9 = 97 + 36 = 133$$

گزینه «۱» صحیح است.

چند نکته در مورد دنباله‌های هندسی

۱ محاسبه نسبت مشترک با داشتن دو جمله: اگر a_m و a_n دو جمله از یک دنباله هندسی باشند، نسبت مشترک دنباله از رابطه $r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$ به دست می‌آید.

مثال اگر جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب برابر ۸ و -64 باشند، نسبت مشترک این دنباله برابر است با:

$$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \xrightarrow[n=6, m=3]{a_6=-64, a_3=8} r^{6-3} = \frac{a_6}{a_3} = \frac{-64}{8} = -8 = (-2)^3 \Rightarrow r^3 = (-2)^3 \Rightarrow r = -2$$

۲ شرط تشکیل دنباله هندسی: برای اینکه سه عدد a, b, c تشکیل دنباله هندسی دهند، باید $b^2 = ac$ یا $b = \pm\sqrt{ac}$ باشد. به b واسطه هندسی بین a و c می‌گوییم.

مثال x چه عددی باشد تا اعداد $\sqrt{2}, x, 2\sqrt{2}$ نشان‌دهنده یک دنباله هندسی باشند؟

پاسخ x باید واسطه هندسی بین $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ باشد.

مثال اگر $x, x+2, x+3$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ باید $x+2$ واسطه هندسی x و $x+3$ باشد.

۳ اگر جملات یک دنباله را در عددی ضرب کنیم، نسبت مشترک تغییری نمی‌کند.

مثال اگر هر یک از جملات یک دنباله هندسی ۴ برابر شوند، نسبت مشترک تغییری نمی‌کند.

۴ در یک دنباله هندسی، اگر $n+m=p+q$ ، آنگاه $a_n \times a_m = a_p \times a_q$.

مثال در یک دنباله هندسی، اگر جمله پنجم و هشتم به ترتیب برابر $\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{128}$ باشند، حاصل ضرب جملات دوم و یازدهم چند است؟

پاسخ چون $5+8=2+11$ پس: $a_2 \times a_{11} = a_5 \times a_8 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{128} = \frac{1}{2048}$

۵ درج واسطه هندسی: اگر m عدد را میان دو عدد a و b قرار دهیم به گونه‌ای که این $m+2$ عدد، تشکیل دنباله هندسی بدهند، نسبت مشترک این دنباله از رابطه $r^{m+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید.

مثال بین ۳ و ۸۱ چند عدد باید قرار دهیم تا یک دنباله هندسی با نسبت مشترک ۳ حاصل شود.

پاسخ فرقی نمی‌کند کدام را a یا b بگیریم. $r^{m+1} = \frac{b}{a} \xrightarrow[a=3, b=81]{r=3} r^{m+1} = \frac{81}{3} = 27 = 3^3 \Rightarrow m+1=3 \Rightarrow m=2$

مثال بین دو عدد ۱۰۰ و $\frac{25}{64}$ ، سه واسطه هندسی قرار داده‌ایم، جمله وسط این دنباله چند است؟

پاسخ $r^{m+1} = \frac{b}{a} \xrightarrow[a=100, b=\frac{25}{64}]{m=3} r^{3+1} = \frac{\frac{25}{64}}{100} = \frac{25}{64 \times 100} = \frac{1}{256} = \frac{1}{4^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2 \Rightarrow r^4 = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2 \Rightarrow r = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow 100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$$

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

مجموع n جمله اول دنباله هندسی $a_n = a_1 r^{n-1}$ ، از رابطه مقابل به دست می آید:

مثال مجموع جملات دنباله $\frac{1}{80}, \frac{1}{40}, \frac{1}{20}, \dots, \frac{1}{5}$ را به دست آورید.

$$r = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{40}} = \frac{40}{20} = \frac{1}{2}, a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{80}, r = \frac{1}{2}} \frac{1}{80} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

پاسخ به n نیاز داریم، باید بینیم $\frac{1}{80}$ جمله چندم است.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{80} \times \frac{40}{20} = \frac{1}{40} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow n-1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{80}, r = \frac{1}{2}, n=6} S_6 = \frac{1}{80} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{80} \times \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{80} \times \frac{63}{32} = \frac{1}{80} \times \frac{63 \times 2}{64} = \frac{1}{80} \times \frac{63}{32} = \frac{63}{2560}$$

مثال در دنباله $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}$ ، $a_1 = \frac{1}{3}$ را به دست آورید.

$$a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

پاسخ نسبت هر دو جمله متوالی، برابر نسبت مشترک است:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{3}, n=7} S_7 = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{2187}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{2186}{2187} = \frac{1}{3} \times \frac{(2187-1) \times 3}{2 \times 2187} = \frac{6558}{8748}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

مثال اگر مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی، برابر $S_n = 3^n \times \frac{1}{3}$ باشد، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(3^n \times \frac{1}{3}\right) - \left(3^{n-1} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{3^n}{3} - \frac{3^{n-1}}{3} = \frac{3^n - 3^{n-1}}{3} = \frac{3^{n-1}(3-1)}{3} = \frac{3^{n-1}(2)}{3} = 3^{n-1}$$

پاسخ



پاتخته

مجموع جملات یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{3}$ ، شروع از ۷۶۸ و ختم به ۳ را به دست آورید.

پاسخ باید به دست آوریم ۳، چندمین جمله دنباله است.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{a_1 = 768, r = \frac{1}{3}} 3 = 768 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{768} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1 = 768, r = \frac{1}{3}, n=9} S_9 = 768 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = 768 \times \frac{1 - \frac{1}{19683}}{\frac{2}{3}} = 768 \times \frac{19682}{19683} = 768 \times \frac{511}{512} = 768 \times \frac{2 \times 511}{512} = 2^8 \times 3 \times \frac{2 \times 511}{2^9} = \frac{2^9 \times 3 \times 511}{2^9} = 3 \times 511 = 1533$$

تبدیل مسئله توصیفی به دنباله هندسی

مثال جمعیت یک روستا ۲۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه $\frac{1}{10}$ جمعیت سال قبل کاهش یابد، پس از ۳ سال چند نفر در این روستا زندگی می کنند؟

پاسخ در مسائلی که تغییرات وابسته به سال قبل است، معمولاً با دنباله هندسی روبه رو هستیم.

$$2000 \xrightarrow{-\left(\frac{1}{10}\right)2000} 2000 - 200 = 1800 \xrightarrow{-\left(\frac{1}{10}\right)1800} 1800 - 180 = 1620 \xrightarrow{-\left(\frac{1}{10}\right)1620} 1620 - 162 = 1458$$

$$\Rightarrow 2000 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 1800 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 1620 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 1458$$

پس از ۱ سال پس از ۲ سال پس از ۳ سال

۹٪ را بطور پدید آوریم؟ اگر عدد ثابتی هر سال اضافه یا کم می‌شود، دنباله‌ما دنباله حسابی بود؛ ولی چون تغییرات ثابت نیست و به سال قبل وابسته است، پس دنباله هندسی داریم. با الگویی که گفته است، اعداد دنباله را به دست می‌آوریم که به صورت $1800, 1800 \times 1.09, 1800 \times 1.09^2, \dots$ هستند. حال هر دو جمله متوالی را بر هم تقسیم می‌کنیم تا هم مطمئن شویم که دنباله هندسی است و هم نسبت مشترک را به دست آوریم:

$$r = \frac{1800}{1800} = 1 \quad \text{یا} \quad r = \frac{1620}{1800} = \frac{9}{10} \quad \text{یا} \quad r = \frac{1458}{1620} = \frac{9}{10}$$

مثال کارفرمایی به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرد دستمزد روز اول ۱۵۰۰۰ باشد و تا پایان ۶ روز کاری هفته، هر روز دستمزد او را $\frac{3}{2}$ برابر دستمزد روز قبل اضافه کند. مجموع دستمزد او در این ۶ روز کاری چقدر است؟

$$15000 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} 22500 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} 33750$$

پاسخ

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{a_1=15000, r=\frac{3}{2}, n=6} S_6 = 15000 \times \frac{1-(\frac{3}{2})^6}{1-(\frac{3}{2})} = 15000 \times \frac{1-\frac{729}{64}}{-\frac{1}{2}} = 15000 \times \frac{-\frac{665}{64}}{-\frac{1}{2}} = 15000 \times \frac{2 \times 665}{64} = \frac{15000 \times 665}{32} = \frac{1875 \times 665}{4}$$

مثال شخصی یک کولر به قیمت ۱ میلیون تومان می‌خرد. هزینه استهلاک این کولر هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. پس از چند سال قیمت کولر به ۹۲۷,۰۰۰ تومان می‌رسد؟

پاسخ

چون میزان کاهش به سال قبل بستگی دارد، پس با دنباله هندسی روبه‌رو هستیم.

$$1,000,000 \xrightarrow{-\frac{10\%}{100}(1,000,000)} 900,000 \xrightarrow{-\frac{10\%}{100}(900,000)} 810,000$$

$$1,000,000, 900,000, 810,000, \dots \Rightarrow 1,000,000 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 900,000 \xrightarrow{\times \frac{9}{10}} 810,000$$

در این مدل سؤال‌ها، برای به دست آوردن نسبت مشترک می‌توانیم بگوییم چون هر سال $\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ کاهش پیدا می‌کند، پس $\frac{9}{10}$ از آن باقی می‌ماند، بنابراین جملات در $\frac{9}{10}$ ضرب می‌شوند.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{a_1=1,000,000, r=\frac{9}{10}, a_n=729,000} 729,000 = 1,000,000 \times (\frac{9}{10})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{729,000}{1,000,000} = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow \frac{729}{1000} = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow \frac{9^3}{10^3} = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow (\frac{9}{10})^3 = (\frac{9}{10})^{n-1} \Rightarrow n-1=3 \Rightarrow n=4$$

ارزش کولر هر سال کم و کمتر می‌شود ولی یادتان بماند هیچ‌وقت صفر نمی‌شود؛ چون هر بار یک مقدار مثبت در $\frac{9}{10}$ ضرب می‌شود.

پانخته

اگر داروی شیمی‌درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی فردی در ابتدا 10^{10} سلول داشته باشد، پس از ۴ بار شیمی‌درمانی، چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

$$10^{10} \xrightarrow{-\frac{60\%}{100}(10^{10})} 10^{10} - \frac{6}{10}(10^{10}) = \frac{4}{10}(10^{10}) \xrightarrow{-\frac{60\%}{100}(\frac{4}{10}10^{10})} \frac{4}{10}(10^{10}) - \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}(10^{10})$$

پاسخ

$$= \frac{4}{10}(10^{10}) - \frac{24}{100}(10^{10}) = \frac{16}{100}(10^{10}) \Rightarrow 10^{10}, \frac{4}{10}10^{10}, \frac{16}{100}10^{10} \Rightarrow r = \frac{\frac{4}{10}10^{10}}{10^{10}} = \frac{4}{10}$$

با می‌توانستیم بگوییم هر بار ۶۰٪ از بین می‌رود، پس ۴۰٪ باقی می‌ماند؛ یعنی $\frac{4}{10} = \frac{4}{10}$ برابر می‌شود هر بار.

$$10^{10} \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})10^{10} \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})^2 10^{10} \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})^3 10^{10} \xrightarrow{\times \frac{4}{10}} (\frac{4}{10})^4 \times 10^{10} = \frac{4^4}{10^4} \times 10^{10} = 4^4 \times 10^6$$

نیمه‌عمر دارو

نیمه‌عمر یک دارو مدت‌زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه‌عمر دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهند. مثال اگر میزان اولیه یک دارو برابر 100 میلی‌گرم باشد و نیمه‌عمر دارو برابر 3 ساعت باشد، داریم:

$$100 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 50 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 25 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 12.5 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 6.25 \xrightarrow{\text{بعد از ۳ ساعت}} 3.125$$

$$100 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 50 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 25 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 12.5 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 6.25 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 3.125$$

پس هر جمله، نصف جمله قبلی است.

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

جمله عمومی نیمه‌عمر به صورت مقابل است:

که a_1 میزان اولیه دارو است و a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه‌عمر است. n تعداد نیمه‌عمرها است که برابر است با مدت‌زمان سپری شده تقسیم بر طول یک نیمه‌عمر. رابطه بازگشتی نیمه‌عمر به صورت $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, $a_1 = a$ است.

مثال اگر میزان اولیه مصرف یک دارو 150 میلی‌گرم باشد و نیمه‌عمر آن 2 ساعت باشد، بعد از 10 ساعت چند میلی‌گرم از دارو در بدن بیمار باقی می‌ماند؟

$$n = \frac{\text{مدت زمان سپری شده}}{\text{طول یک نیمه‌عمر}} = \frac{10}{2} = 5$$

پاسخ باید n را به دست آوریم:

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 150 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 150 \times \frac{1}{32} = \frac{150}{32} = \frac{75}{16} = 4.6875$$

دنباله هندسی	
$a_n = a_1 r^{n-1}$	جمله عمومی
$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ یا $r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$	نسبت مشترک
به صورت یک تابع نمایشی است.	
a, b, c تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، هرگاه $b^2 = ac$ یا $b = \pm\sqrt{ac}$ باشد. به b واسطه هندسی بین a و c گفته می‌شود.	شرط تشکیل دنباله هندسی
$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$	مجموع جملات
افزایشی $r > 1$ ← کاهشی $0 < r < 1$ ← ثابت $r = 1$	دنباله هندسی
تعداد جملات $m+2$ ← نسبت مشترک $r^{m+1} = \frac{b}{a}$	درج m واسطه هندسی بین دو عدد a و b

درج واسطه هندسی (مشابه سؤال ۱ آزمونک)
 به دست آوردن مجموع جملات با پیدا کردن مجهولات با استفاده از دو رابطه‌ای که داده است (مشابه سؤال ۲ و ۳ آزمونک).
 تبدیل مسئله توصیفی به دنباله هندسی (مشابه سؤال ۴ آزمونک)



۱- بین دو عدد ۴ و ۹۷۲ چهار عدد صحیح را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله هندسی از ۴ شروع و به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این ۶ عدد کدام است؟

- ۱) ۱۴۵۶ ۲) ۱۴۶۸ ۳) ۱۵۴۶ ۴) ۱۶۵۴

۲- در یک دنباله هندسی با جمله اول ۲۲۴ و نسبت مشترک $\frac{1}{4}$ ، جمله n ام آن ۷ است. مجموع جملات این دنباله از ۲۲۴ تا عدد ۷ و خود این اعداد کدام است؟

- ۱) ۳۶۹ ۲) ۴۲۰ ۳) ۴۴۱ ۴) ۴۵۸

۳- در یک دنباله هندسی جمله چهارم ۸ برابر جمله اول است. اگر جمله ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

- ۱) ۴۷/۲۵ ۲) ۴۷/۵ ۳) ۴۷/۷۵ ۴) ۴۸/۵

۴- به علت تورم، بر قیمت کالایی به‌طور یکنواخت هر سال ۱۰ درصد افزوده می‌شود. در سال پنجم، قیمت این کالا، چند برابر قیمت سال اول می‌شود؟

- ۱) ۱/۳۳۲ ۲) ۱/۳۷۶۱ ۳) ۱/۴۶۴۱ ۴) ۱/۴۷۵۱



۱- از فرمول درج واسطه هندسی استفاده می‌کنیم.

$$r^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^{4+1} = \frac{972}{4} \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r^5 = 3^5 \Rightarrow r = 3$$

$$4 \xrightarrow{\times 3} 12 \xrightarrow{\times 3} 36 \xrightarrow{\times 3} 108 \xrightarrow{\times 3} 324 \xrightarrow{\times 3} 972$$

$$4 + 12 + 36 + 108 + 324 + 972 = 1456$$

گزینه «۱» صحیح است.

$$224 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 112 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 56 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 28 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 14 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 7$$

۲-

$$224 + 112 + 56 + 28 + 14 + 7 = 441$$

گزینه «۳» صحیح است.

$$a_f = 8a_1, a_f = 24 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = ?$$

۳-

$$\begin{cases} a_f = 8a_1 \\ a_f = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^5 = 8a_1 \\ a_1 r^5 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^5 = 8 = 2^3 \\ a_1 r^5 = 24 \end{cases} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a_1 (2)^5 = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24$$

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3 + 6 + 12 + 24 = \frac{3+6}{4} + 45 = \frac{9}{4} + 45 = \frac{9+180}{4} = \frac{189}{4} = 47.25$$

یا می‌توانستیم بعد از به دست آمدن $a_1 = \frac{3}{4}$ و $r = 2$ از فرمول مجموع جملات استفاده کنیم.

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_6 = \frac{3}{4} \times \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{3}{4} \times \frac{1-64}{-1} = \frac{3}{4} \times \frac{-63}{-1} = \frac{3}{4} \times \frac{63}{1} = 47.25$$

گزینه «۱» صحیح است.

$$a_1 \xrightarrow{+\frac{1}{10}a_1} a_1 + \frac{1}{10}a_1 \xrightarrow{+\frac{1}{10}(a_1 + \frac{1}{10}a_1)} a_1 + \frac{1}{10}a_1 + \frac{1}{10}(a_1 + \frac{1}{10}a_1)$$

۴-

$$\Rightarrow a_1, a_1 + \frac{1}{10}a_1, a_1 + \frac{1}{10}a_1 + \frac{1}{10}a_1, \dots$$

$$\Rightarrow a_1, 1/10a_1, 1/10a_1, (1/10)^2 a_1, \dots \quad a_1 \xrightarrow{\times(1/10)} 1/10a_1 \xrightarrow{\times(1/10)} (1/10)^2 a_1$$

شاید با توجه به ظاهرش که نوشته بود افزوده می‌شود، فکر می‌کردید دنباله حسابی است، ولی چون به درصد بیان شده است وقتی می‌نویسیم می‌بینیم که به دنباله هندسی می‌رسیم. حال خواسته سؤال این است که قیمت کالا در سال پنجم چند برابر قیمت کالا در سال اول است:

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^4}{a_1} = r^4 \xrightarrow{r=(1/10)} (1/10)^4 = 1/10000$$

گزینه «۳» صحیح است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ششم - درس ۳

۱۲۸۶. کدام دنباله زیر هندسی است؟

۱۲, -۶, ۳, ...

۳, -۱۲, -۴۸, ...

۳, ۶, ۱۸, ...

۵, ۱۰, ۱۵, ...

۱۲۸۷. چند دنباله زیر هندسی است؟

۳, ۹, ۱۸, ... (ت)

۲, ۸, ۱۶, ۳۲, ... (پ)

√۲, √۶, ۳√۲, ... (ب)

۲, -۶, -۱۸, ... (الف)

صفر

۱

۲

۳

۱۲۸۸. جمله هفتم دنباله هندسی ۳, ۶, ۱۲, ... کدام است؟

۴۸۶

۳۸۴

۱۹۲

۹۶

۱۲۸۹. نصف جمله نهم دنباله هندسی ۱۶۲, ۵۴, ۱۸, ... کدام است؟

۲

۱

۲

۱

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

۱۲۹۰. در دنباله هندسی $4, -8, 16, \dots$ جمله سیزدهم چند برابر جمله دهم است؟

- ۱) ۸ ۲) -۸ ۳) ۴ ۴) -۴

۱۲۹۱. در یک دنباله هندسی با جمله اول برابر ۵ و نسبت مشترک ۲، مجموع جملات چهارم و پنجم کدام است؟

- ۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۲۴۰

۱۲۹۲. جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = \frac{6^n}{2^n}$ است. اختلاف جملات چهارم و پنجم کدام است؟

- ۱) $\frac{45}{8}$ ۲) $\frac{45}{4}$ ۳) $\frac{15}{4}$ ۴) $\frac{15}{8}$

۱۲۹۳. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $1/5$ ، حاصل $\frac{a_2 \cdot a_7}{a_3}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{27}{8}$ ۴) $\frac{81}{16}$

۱۲۹۴. جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب برابر ۵ و ۱۳۵ است. جمله اول دنباله کدام است؟

- ۱) ۴۵ ۲) ۱۵ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{5}{9}$

۱۲۹۵. در دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ ، حاصل $\frac{a_6 - a_3}{a_4 + a_8}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{36}{17}$ ۲) $\frac{28}{17}$ ۳) $-\frac{28}{17}$ ۴) $-\frac{36}{17}$

۱۲۹۶. جملات چهارم و ششم یک دنباله هندسی صعودی به ترتیب $\frac{3}{4}$ و ۶ است. جمله نهم کدام است؟

- ۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) -۲۴ ۴) -۴۸

۱۲۹۷. جمله چندم دنباله $\frac{5}{64}, \frac{5}{32}, \frac{5}{16}, \dots$ برابر ۴۰ است؟

- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۲۹۸. در دنباله هندسی با جمله اول $\frac{2}{9}$ و نسبت مشترک ۳، چند جمله کوچک‌تر از ۵۰۰ وجود دارد؟

- ۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۲۹۹. دنباله هندسی $3, 3\sqrt{2}, 6, \dots$ مفروض است. دنباله هندسی جدیدی با جملات اول و چهارم و هفتم و ... از این دنباله تشکیل می‌دهیم. جمله پنجم در دنباله جدید کدام است؟

- ۱) ۱۹۲ ۲) $192\sqrt{2}$ ۳) ۹۶ ۴) $96\sqrt{2}$

۱۳۰۰. جملات دوم و ششم یک دنباله هندسی غیرکاهشی به ترتیب برابر ۸۰ و ۵ است. جمله نهم کدام است؟

- ۱) $-\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $-\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{5}{16}$

۱۳۰۱. حاصل ضرب ۱۰ جمله اول دنباله هندسی $3, 6, 12, \dots$ کدام است؟

- ۱) $3^9 \times 2^{10}$ ۲) $3^{10} \times 2^{45}$ ۳) $3^{10} \times 2^{36}$ ۴) $3^{10} \times 2^{40}$

۱۳۰۲. بین ۳ و ۷۵ عددی را طوری قرار می‌دهیم که ۳ عدد، تشکیل دنباله هندسی صعودی دهند. مجموع ارقام این عدد کدام است؟

- ۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۳۰۳. بین $0/25$ و ۵۴ دو واسطه هندسی قرار می‌دهیم. واسطه بزرگ‌تر کدام است؟

- ۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۶

۱۳۰۴. واسطه هندسی بین دو عدد $2 + \sqrt{5}$ و $2 - \sqrt{5}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) نمی‌توان بین این دو عدد واسطه هندسی قرار داد.

۱۳۰۵. دنباله هندسی $x - 2, 6, 4x + 2, \dots$ دنباله‌ای غیرافزایشی است. x کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $2/5$ ۴) $-2/5$

۱۳۰۶. اگر $4x + 1$ و $x + 1$ و $x - 1$ سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، کوچک‌ترین مقدار قابل قبول برای x کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۳۰۷. اگر $5, x + 4, 3x + 2, y$ جملات متوالی یک دنباله هندسی غیرثابت باشد، y کدام است؟

- ۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۷۵

۱۳۰۸. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{4}$ ، مجموع چهار جمله اول چند برابر جمله دوم است؟

- ۱ $\frac{5}{4}$ ۲ $\frac{15}{2}$ ۳ $-\frac{5}{4}$ ۴ $-\frac{15}{2}$

۱۳۰۹. در یک دنباله هندسی با ۱۰ جمله، جمله اول و نسبت مشترک برابر $\sqrt{2}$ هستند. حاصل ضرب ۳ جمله آخر، چند برابر حاصل ضرب ۶ جمله اول است؟

- ۱ ۴ ۲ $4\sqrt{2}$ ۳ ۸ ۴ $8\sqrt{2}$

۱۳۱۰. کدام دنباله هندسی زیر نزولی است؟

۱ جمله اول و نسبت مشترک هر دو عددی بین ۱- و صفر باشند.

۲ جمله اول و نسبت مشترک هر دو بزرگ‌تر از یک باشند.

۳ جمله اول و نسبت مشترک هر دو کوچک‌تر از ۱- باشند.

۴ جمله اول و نسبت مشترک هر دو بین صفر و یک باشند.

۱۳۱۱. چهار عدد مثبت تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. اگر مجموع دو جمله کوچک‌تر برابر ۲۰ و مجموع دو جمله بزرگ‌تر برابر ۴۵ باشد، کوچک‌ترین عدد کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۸

۱۳۱۲. ضابطه بازگشتی دنباله هندسی ۳، ۱۵، ۷۵، ... کدام است؟

- ۱ $a_{n+1} = 5a_n, a_1 = 3$ ۲ $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 3$ ۳ $a_{n+1} = (a_n)^3, a_1 = 3$ ۴ $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, a_1 = 3$

۱۳۱۳. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی نزولی برابر ۲۶ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۲۱۶ است. نسبت مشترک کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{2}{3}$

۱۳۱۴. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ است. نفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد کدام است؟ (تبری ۹۰)

- ۱ ۴ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۷

۱۳۱۵. در یک دنباله هندسی افزایشی $a_{m+2n} = 15$ و $a_{m-2n} = \frac{3}{4}$ است. جمله m م کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۶ ۳ ۱۲ ۴ ۱۵

۱۳۱۶. در یک دنباله هندسی، هر جمله ۵۰ درصد بیشتر از جمله قبل خود است. اگر جمله چهارم این دنباله ۵۴ باشد، مجموع دو جمله اول کدام است؟

- ۱ ۱۶ ۲ ۲۸ ۳ ۴۰ ۴ ۶۴

۱۳۱۷. هزینه استهلاک کالایی ۱۰ درصد ارزش سال قبل آن کالاست. شخصی کالایی به قیمت a تومان خریده است. ارزش این کالا در سال m م چند هزار تومان است و پس از چند سال ارزش آن صفر می‌شود؟

۱ $-a\left(\frac{9}{10}\right)^n$ پس از ۱۰ سال

۲ $-a\left(\frac{9}{10}\right)^n$ هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد.

۳ $-a\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ پس از ۱۰ سال

۴ $-a\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ هیچ‌گاه به صفر نمی‌رسد.

۱۳۱۸. هزینه استهلاک کالایی ۲۰ درصد ارزش سال قبل آن کالاست. شخصی کالایی به قیمت ۲۵۰ هزار تومان خریده است. ارزش این کالا در سال چهارم چند هزار تومان است؟

- ۱ ۱۶۰ ۲ ۱۲۸ ۳ ۴۰ ۴ ۲۰

۱۳۱۹. نیمه‌عمر کافتین برای یک شخص سالم ۶ ساعت است. اگر شخصی ۱۶۰ میلی‌گرم کافتین مصرف کند، پس از دو شبانه‌روز کامل، چند میلی‌گرم کافتین در بدن او وجود دارد؟

- ۱ $1/25$ ۲ $2/5$ ۳ $0/625$ ۴ $0/5$

۱۳۲۰. هزینه استهلاک کالایی ۲۰ درصد است. پس از گذشت حداقل چند سال، ارزش آن به کمتر از نصف ارزش اولیه می‌رسد؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

۱۳۲۱. مربعی به ضلع ۶۴۰ سانتی‌متر داریم. ابتدا وسط اضلاع آن را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا ۴ مربع یکسان تشکیل شود، سپس به همین روش یکی از مربع‌های جدید را به ۴ مربع هم‌اندازه تقسیم می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم. مساحت هر مربع ایجادشده در مرحله هفتم کدام است؟

- ۱ ۲۵ ۲ $\frac{25}{4}$ ۳ ۱۰۰ ۴ $\frac{25}{64}$

۱۳۲۲. مجموع ۶ جمله اول دنباله هندسی ۲، ۶، ۱۸، ... کدام است؟

- ۱ ۳۶۴ ۲ ۲۴۲ ۳ ۷۲۸ ۴ ۴۸۴

۱۳۲۳. جمله اول یک دنباله هندسی برابر ۹۶ و نسبت مشترک آن $5/0$ است. مجموع هفت جمله اول آن کدام است؟

- ۱ $190/5$ ۲ ۱۸۹ ۳ $191/25$ ۴ ۱۹۲

۱۳۲۴. در یک دنباله هندسی، جملات دوم و پنجم به ترتیب برابر ۱۰ و ۸۰- است. مجموع هشت جمله اول این دنباله کدام است؟

- ۱ -۴۲۵ ۲ ۴۲۵ ۳ ۲۱۵ ۴ -۲۱۵

۱۳۲۵ حاصل $\frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \dots + 12 + 6 + 3 + \dots$ کدام است؟

$\frac{381}{16}$ (۴)

$\frac{427}{16}$ (۳)

$\frac{237}{16}$ (۲)

$\frac{275}{16}$ (۱)

۱۳۲۶. رابطه بازگشتی یک دنباله هندسی به صورت $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n$ است. اگر جمله دوم این دنباله برابر ۷۲ باشد، مجموع پنج جمله اول آن کدام است؟

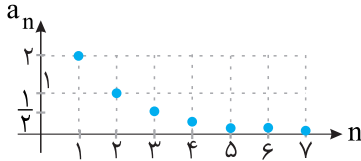
۵۷۶ (۴)

۶۳۳ (۳)

۶۹۶ (۲)

۷۲۶ (۱)

۱۳۲۷. در دنباله هندسی نمودار زیر، مجموع ۸ جمله اول کدام است؟



$\frac{255}{64}$ (۲)

$\frac{127}{32}$ (۱)

$\frac{127}{64}$ (۴)

$\frac{255}{128}$ (۳)

۱۳۲۸. در دنباله هندسی با جمله اول ۷ و نسبت مشترک ۲، چند جمله اول را جمع کنیم تا حاصل ۸۸۹ شود؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۱۳۲۹. در دنباله هندسی $6, 12, 24, \dots$ حداقل چند جمله اول را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۱۰۰۰ شود؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۱۳۳۰. مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = \frac{5 \times 3^n}{4} - \frac{5}{4}$ به دست می‌آید. اختلاف جملات چهارم و سوم کدام است؟

۸۵ (۴)

۸۰ (۳)

۹۵ (۲)

۹۰ (۱)

(فارج از کشور ۹۰)

۱۳۳۱. در یک دنباله هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله قبلی آن است. اگر مجموع ۵ جمله اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله اول کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(فارج از کشور ۹۱)

۱۳۳۲. در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{4}$ ، اگر مجموع ۸ جمله اول $63\frac{3}{4}$ باشد، جمله پنجم کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سراسری ۹۹)

۱۳۳۳. مجموع هشت جمله اول دنباله هندسی $64, 32, 16, \dots$ کدام است؟

۱۲۷ (۴)

$127/5$ (۳)

۱۲۸ (۲)

$128/5$ (۱)

(فارج از کشور ۹۹)

۱۳۳۴. جمله‌های دوم و پنجم یک دنباله هندسی، به ترتیب $\frac{1}{4}$ و ۴ هستند. مجموع هشت جمله اول دنباله کدام است؟

$67/75$ (۴)

$64/5$ (۳)

$63/75$ (۲)

$63/5$ (۱)

(سراسری ۱۳۰۰)

۱۳۳۵. اگر $x - \frac{3}{4}, y, x, z, 4x$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار $|x| + |y| + |z|$ کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

(فارج از کشور ۱۳۰۰)

۱۳۳۶. اگر $y, x-1, x, x+2, z$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۳۳۷. جمله پنجم یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک ناصفر، واسطه هندسی بین جملات سوم و نهم آن دنباله است. اگر جمله پنجم دنباله ۷ باشد، جمله صد و یکم دنباله کدام است؟

(فارج از کشور ۱۳۰۰)

۱۲۵ (۴)

۱۵۰ (۳)

۱۷۵ (۲)

۲۰۰ (۱)

۱۲۸۶. گزینه ۴ شرط دنباله هندسی آن است که نسبت هر دو جمله متوالی

مقداری ثابت باشد؛ یعنی $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: دنباله هندسی نیست: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2, \frac{a_3}{a_2} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

گزینه «۲»: دنباله هندسی نیست: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2, \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$

گزینه «۳»: دنباله هندسی نیست: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-12}{3} = -4, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-48}{-12} = 4$

گزینه «۴»: دنباله هندسی است: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

۱۲۸۷. گزینه ۳ الف) دنباله هندسی نیست:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{2} = -3, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-18}{-6} = 3$

ب) دنباله هندسی است: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \sqrt{3}$

پ) دنباله هندسی نیست: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{2} = 4, \frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{8} = 2$

ت) دنباله هندسی نیست:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{2} = \frac{36}{8} = 4.5, \frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{9} = 2$

پس فقط مورد «ب» دنباله هندسی است.

۱۲۸۸. گزینه ۲ $r = \frac{6}{3} = 2, a_1 = 3, 3, 6, 12, \dots$

$a_7 = a_1 r^6 = 3 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192$

۱۲۸۹. گزینه ۱ $r = \frac{54}{162} = \frac{1}{3}, a_1 = 162, 162, 54, 18, \dots$

$a_9 = a_1 r^8 = 162 \times (\frac{1}{3})^8 = 3^4 \times 2 \times \frac{1}{3^8} = \frac{2}{3^4} = \frac{2}{81}$

نصف جمله نهم $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{81} = \frac{1}{81}$

۱۲۹۰. گزینه ۲ $r = \frac{-8}{4} = -2, a_1 = 4, 4, -8, 16, \dots$

$\frac{a_{13}}{a_1} = \frac{a_1 r^{12}}{a_1 r^0} = r^{12} = (-2)^{12} = 4096$

دقت کنید نیازی به محاسبه a_{13} و a_1 نبود زیرا ساده شدند.

۱۲۹۱. گزینه ۲ $r = 2, a_1 = 5$

$a_5 = a_1 r^4 = 5 \times 2^4 = 5 \times 16 = 80$
 $a_8 = a_1 r^7 = 5 \times 2^7 = 5 \times 128 = 640$
 $a_5 + a_8 = 80 + 640 = 720$

۱۲۹۲. گزینه ۴ $a_n = \frac{60}{2^n} \Rightarrow a_4 = \frac{60}{2^4} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}$

$a_5 = \frac{60}{2^5} = \frac{15}{8}$

اختلاف جملات چهارم و پنجم: $a_4 - a_5 = \frac{15}{4} - \frac{15}{8} = \frac{30 - 15}{8} = \frac{15}{8}$

۱۲۹۳. گزینه ۳ $\frac{a_7 \cdot a_9}{a_3} = \frac{a_1 r^6 \cdot a_1 r^8}{(a_1 r^2)^2} = \frac{a_1^2 r^{14}}{a_1^2 r^4} = r^{10} = \frac{r^3}{2} \Rightarrow \frac{a_7 \cdot a_9}{a_3} = \frac{r^3}{2} = \frac{27}{8}$

$a_1 = -12 \Rightarrow 2(-12) + d = -18 \Rightarrow d = 6$

$a_6 + a_7 = a_1 + 5d + a_1 + 6d = 2a_1 + 11d = -24 + 11 \times 6 = -24 + 66 = 42$

۱۲۸۲. گزینه ۱ $d = ?$ تفاضل جملات متوالی و $a_7 = 13, a_9 = 90$

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}[2a_1 + 8d] = 90$
 $\Rightarrow 2a_1 + 8d = 20 \Rightarrow a_1 + 4d = 10$

$a_7 = a_1 + 6d = 13$

$\begin{cases} a_1 + 4d = 10 \\ a_1 + 6d = 13 \end{cases} \Rightarrow (a_1 + 4d) - (a_1 + 6d) = 10 - 13$

$\Rightarrow -2d = -3 \Rightarrow d = \frac{3}{2} = 1.5$

۱۲۸۳. گزینه ۳

$a_3 + a_5 + a_{13} = 75 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 12d = 75$

$\Rightarrow 3a_1 + 18d = 75 \xrightarrow{-3} a_1 + 6d = 25$

خواسته سوال $\rightarrow a_7 = a_1 + 6d = 25$

۱۲۸۴. گزینه ۱ $S_{10} = -26$ و $\frac{a_{15}}{a_6} = 6$ و $a_{11} = ?$

$\frac{1}{2}(2a_1 + 9d) = -26 \Rightarrow 10a_1 + 45d = -52$

$\frac{a_1 + 14d}{a_1 + 5d} = 6 \Rightarrow 6a_1 + 30d = a_1 + 14d$

$\Rightarrow 5a_1 + 16d = 0 \xrightarrow{\times(-2)} -10a_1 - 32d = 0$

$\begin{cases} 10a_1 + 45d = -52 \\ -10a_1 - 32d = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 13d = -52 \Rightarrow d = -4$

$10a_1 + 45(-4) = -52 \Rightarrow a_1 = 6/4$

$a_{11} = a_1 + 10d = 6/4 + 10(-4) = -13/2$

۱۲۸۵. گزینه ۴ سؤال، دو اندیشه کلیدی دارد: ۱- مجموع ۵ جمله اول ۶۰ است:

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$

$\Rightarrow 60 = 5a_1 + 10d \Rightarrow a_1 + 2d = 12$

۲- مجموع دو جمله بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جمله کوچک‌تر است:

$a_6 + a_8 = 3(a_1 + a_3 + a_5) \Rightarrow (a_1 + 5d) + (a_1 + 7d) = 3(a_1 + 3d) + 3(a_1 + 5d)$

$= 2a_1 + 12d = 3a_1 + 15d \Rightarrow a_1 = 3d$

$= 3a_1 + 3a_1 + 3d + 3a_1 + 6d \Rightarrow 7a_1 + 9d = 0$

حال با دو رابطه به دست آمده دستگاه تشکیل می‌دهیم:

$\begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ 7a_1 + 9d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ -7a_1 - 9d = 0 \end{cases} \Rightarrow -6a_1 = 12 \Rightarrow a_1 = -2$

$\xrightarrow{a_1 + 2d = 12} -2 + 2d = 12 \Rightarrow 2d = 14 \Rightarrow d = 7$

۱۲۹۴. گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} a_3 = 5 \Rightarrow a_1 r^2 = 5 \\ a_6 = 135 \Rightarrow a_1 r^5 = 135 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_6}{a_3} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{135}{5} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$a_3 = 5 \Rightarrow a_1 r^2 = 5 \xrightarrow{r=3} a_1 \times 9 = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{9}$$

$$\frac{a_6 - a_3}{a_6 + a_3} = \frac{a_1 r^5 - a_1 r^2}{a_1 r^5 + a_1 r^2} = \frac{a_1 r^2 (r^3 - 1)}{a_1 r^2 (r^3 + 1)}$$

$$= \frac{r^3 - 1}{r^3 + 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1} = \frac{\frac{1}{8} - 1}{\frac{1}{8} + 1} = \frac{-\frac{7}{8}}{\frac{9}{8}} = -\frac{7}{9}$$

۱۲۹۵. گزینه ۳

$$\left\{ \begin{aligned} a_4 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 r^3 = \frac{3}{2} \\ a_6 = 6 \Rightarrow a_1 r^5 = 6 \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{a_6}{a_4} = \frac{a_1 r^5}{a_1 r^3} = \frac{6}{\frac{3}{2}} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

۱۲۹۶. گزینه ۲

اگر $r = -2$ باشد، جملات یکی در میان مثبت و منفی می‌شود و دنباله صعودی نیست، پس $r = 2$ قابل قبول است.

$$a_4 = a_6 \times r^3 \Rightarrow a_4 = 6 \times 2^3 = 48$$

$$\frac{5}{64}, \frac{5}{32}, \frac{5}{16}, \dots \quad a_1 = \frac{5}{64}, \quad r = \frac{32}{5} = 2$$

۱۲۹۷. گزینه ۳

$$a_n = 40 \Rightarrow a_1 r^{n-1} = 40 \Rightarrow \frac{5}{64} \times 2^{n-1} = 40$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = \frac{40}{\frac{5}{64}} = 64 \times 8 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^6 \times 2^3 = 2^9 \Rightarrow n-1=9 \Rightarrow n=10$$

در مرحله آخر، به دلیل اینکه در دو طرف تساوی پایه ۲ وجود داشت، توان‌ها را برابر قرار دادیم.

$$a_1 = \frac{2}{9}, \quad r = 3 \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{2}{9} \times 3^{n-1}$$

۱۲۹۸. گزینه ۲

در جملاتی که از ۵۰۰ کوچک‌تر است، $a_n < 500$ است.

$$a_n < 500 \Rightarrow \frac{2}{9} \times 3^{n-1} < 500 \Rightarrow \frac{2}{3^2} \times 3^{n-1} < 500$$

$$\Rightarrow 2 \times 3^{n-3} < 500 \xrightarrow{\div 2} 3^{n-3} < 250$$

حال باید جواب نامعادله را با حدس و آزمایش (بررسی مقادیر n) به دست آوریم:

$$3^{7-3} = 3^4 = 81$$

مثلاً اگر $n = 7$ باشد:

$$3^{8-3} = 3^5 = 243$$

اگر $n = 8$ باشد:

واضح است که اگر $n = 9$ شود، حاصل 3^{n-3} بزرگ‌تر از ۵۰۰ خواهد شد، پس ۸ جمله اول این دنباله هندسی کوچک‌تر از ۵۰۰ است.

$$3, 3\sqrt{2}, 6, \dots \quad a_1 = 3, \quad r = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

۱۲۹۹. گزینه ۱

دنباله هندسی جدید به صورت a_1, a_2, a_3, \dots می‌باشد. نسبت مشترک دنباله جدید برابر است با:

$$r' = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 r}{a_1} = r$$

یعنی نسبت مشترک دنباله جدید برابر $r' = (\sqrt{2})^3$ است.

$$\sqrt{2}^3 = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

در دنباله هندسی جدید، جمله اول برابر ۳ و نسبت مشترک $2\sqrt{2}$ است.

$$a'_6 = a_1 (r')^5 = 3 \times (2\sqrt{2})^5 = 3 \times 2^4 \times 2^2 = 3 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192$$

۱۳۰۰. گزینه ۱

$$\left\{ \begin{aligned} a_7 = 80 \Rightarrow a_1 r^6 = 80 \\ a_8 = 5 \Rightarrow a_1 r^7 = 5 \end{aligned} \right. \xrightarrow{\div} \frac{a_8}{a_7} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^6} = \frac{5}{80} \Rightarrow r = \frac{1}{16} \Rightarrow r = \pm \frac{1}{16}$$

اگر $r = \frac{1}{16}$ باشد، از آنجا که جملات همگی مثبت می‌شوند، دنباله کاهشی است،

پس $r = -\frac{1}{16}$ قابل قبول است که باعث می‌شود جملات دنباله یکی در میان مثبت

و منفی شود.

$$a_9 = a_8 r \Rightarrow a_9 = 5 \times \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{5}{16}$$

دقت کنید در سؤالاتی که خواسته سؤال، محاسبه یک جمله است، نیازی به محاسبه a_1 نیست و می‌توان با داشتن r و مقدار یک جمله (که در صورت سؤال داده می‌شود)، مقدار جمله مورد نظر را به دست آورد.

۱۳۰۱. گزینه ۲ حاصل ضرب ۱۰ جمله اول دنباله هندسی:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{10} = a_1^{10} \cdot r^{1+2+\dots+9}$$

یادآوری: در ضرب اعداد توان‌دار با پایه یکسان، پایه را نوشته و توان‌ها را جمع می‌کنیم. حال باید $1+2+3+\dots+9$ را به دست آوریم. این مجموع را با کمک S_n دنباله حسابی به دست می‌آوریم، زیرا دنباله حسابی با اختلاف مشترک ۱ است.

$$S_n = \frac{9}{2} [2 \times 1 + 8 \times 1] = \frac{9}{2} \times 10 = 45$$

پس حاصل ضرب ۱۰ جمله اول دنباله حسابی برابر است با:

$$a_1^{10} \cdot r^{45} \quad a_1 = 3, \quad r = 2 \Rightarrow \text{جمله اول} = 3^{10} \times 2^{45}$$

۱۳۰۲. گزینه ۳ فرض می‌کنیم عدد مورد نظر x باشد. دنباله هندسی به صورت $3, x, 75$ است. طبق رابطه دنباله هندسی داریم:

$$x^2 = 3 \times 75 = 225 \Rightarrow x^2 = 15^2 \Rightarrow x = \pm 15$$

از آنجا که دنباله هندسی صعودی است $x = 15$ قابل قبول است. مجموع ارقام عدد ۱۵ برابر ۶ است.

۱۳۰۳. گزینه ۲

$$0/25, x, y, 54$$

$$a_1 = 0/25 = \frac{1}{4} \quad \xrightarrow{\div} \frac{a_1 r^3}{a_1} = \frac{54}{\frac{1}{4}}$$

$$a_4 = 54 \Rightarrow a_1 r^3 = 54$$

$$\Rightarrow r^3 = 54 \times 4 \Rightarrow r^3 = 216 \Rightarrow r = 6$$

$$\frac{1}{4}, \frac{36}{4}, \frac{36}{4}, 54$$

دنباله به صورت زیر است:

واسطه بزرگ‌تر برابر با $\frac{36}{4} = 9$ است.

۱۳۰۴. گزینه ۴ فرض می‌کنیم x واسطه هندسی بین $2 + \sqrt{5}$ و $2 - \sqrt{5}$ باشد. در این صورت داریم:

$$x^2 = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} x^2 = 4 - 5 = -1$$

از آنجا که همواره $x^2 \geq 0$ است، پس $x^2 = -1$ جواب حقیقی ندارد، بنابراین نمی‌توان بین این دو عدد واسطه هندسی قرار داد.

۱۳۰۵. گزینه ۴ در دنباله هندسی مقابل داریم:

$$(x-2)(4x+2) = 6^2 \Rightarrow 4x^2 + 2x - 8x - 4 = 36 \Rightarrow 4x^2 - 6x - 40 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2x^2 - 3x - 20 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-20) = 9 + 160 = 169$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+13}{4} = 4 \\ x = \frac{3-13}{4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

از آنجا که هر ۴ عدد مثبت می‌باشد. $r = \frac{3}{4}$ قابل قبول است.

$$a(1+r) = 20 \xrightarrow{r=\frac{3}{4}} a(1+\frac{3}{4}) = 20 \Rightarrow \frac{7}{4}a = 20 \Rightarrow a = 8$$

۱۳۱۲. **گزینه ۱** در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و نسبت مشترک r رابطه بازگشتی به صورت $a_{n+1} = r a_n$, $a_1 = 3$ است. در این دنباله جمله اول برابر ۳ و نسبت مشترک برابر ۵ است. پس رابطه بازگشتی $a_{n+1} = 5a_n$, $a_1 = 3$ است.

۱۳۱۳. **گزینه ۲** این سه جمله متوالی را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 26 \xrightarrow{-xr} a + ar + ar^2 = 26r$$

$$\xrightarrow{a=6} 6 + 6r + 6r^2 = 26r \Rightarrow 6r^2 - 20r + 6 = 0 \xrightarrow{+2} 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4(3)(3) = 64$$

$$r = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{10+8}{6} = 3 \\ r = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

از آنجا که دنباله نزولی است و جملات مثبت هستند، پس $r = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.

۱۳۱۴. **گزینه ۲** این سه جمله متوالی را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 216 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{r} + a + ar = 19 \xrightarrow{-xr} a + ar + ar^2 = 19r$$

$$\xrightarrow{a=6} 6 + 6r + 6r^2 = 19r \Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4(6)(6) = 169 - 144 = 25$$

$$r = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{13+5}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ r = \frac{13-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

اگر $r = \frac{3}{2} \Rightarrow$ جملات: ۴, ۶, ۹
اگر $r = \frac{2}{3} \Rightarrow$ جملات: ۹, ۶, ۴

در هر دو حالت تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد ۵ است.

۱۳۱۵. **گزینه ۴**

$$\begin{cases} a_{m+2n} = 150 \Rightarrow a_1 r^{m+2n-1} = 150 \\ a_{m-2n} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 r^{m-2n-1} = \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\times}$$

$$a_1 r^{m+2n-1} \cdot a_1 r^{m-2n-1} = 150 \times \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a_1^2 r^{2m-2} = 225 \Rightarrow (a_1 r^{m-1})^2 = 225$$

$$\Rightarrow a_m^2 = 225 \Rightarrow a_m = \pm 15 \xrightarrow{r>0} a_m = 15$$

۱۳۱۶. **گزینه ۳** اگر فرض کنیم جمله n ام برابر x است. جمله $(n+1)$ ام، ۵ درصد بیشتر از آن است؛ یعنی:

$$a_{n+1} = x + \frac{5}{100}x = x + \frac{x}{20} = \frac{21}{20}x$$

اگر $x = 4$ باشد، دنباله به صورت مقابل است:
۲, ۶, ۱۸, ...
که این دنباله افزایشی است، پس غیرقابل قبول است.

اگر $x = -\frac{5}{4}$ باشد، دنباله به صورت زیر است:

$$-\frac{5}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{45}{4}, \dots$$

این دنباله غیرافزایشی است و x قابل قبول است؛ یعنی $x = -2/5$.

۱۳۰۶. **گزینه ۱** جمله متوالی دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$x-1, x+1, 4x+1$$

$$(x-1)(4x+1) = (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 + x - 4x - 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(3)(-2)$$

$$= 25 + 24 = 49 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{6} = 2 \\ x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۳۰۷. **گزینه ۲** جملات متوالی یک دنباله هندسی:

$$5, x+4, 3x+2, y$$

$$5(3x+2) = (x+4)^2 \Rightarrow 15x+10 = x^2+8x+16$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=6 \end{cases}$$

$$5, 5, 5, y$$

اگر $x=1$ باشد، دنباله ثابت است و غیرقابل قبول:

$$5, 10, 20, y$$

اگر $x=6$ باشد:

$$y=40$$

نسبت مشترک این دنباله برابر ۲ است، پس:

$$r = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1, -\frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{4}, -\frac{a_1}{8}$$

۱۳۰۸. **گزینه ۳**

مجموع ۴ جمله اول:

$$a_1 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{4} - \frac{a_1}{8} = \frac{8a_1 - 4a_1 + 2a_1 - a_1}{8}$$

$$= \frac{5a_1}{8} \Rightarrow \frac{\text{مجموع ۴ جمله اول}}{\text{جمله دوم}} = \frac{5a_1}{-a_1} = -\frac{5}{4}$$

$$a_1 = \sqrt{2}, r = \sqrt{2}$$

۱۳۰۹. **گزینه ۳**

$$\frac{a_1 \cdot a_4 \cdot a_7 \cdot a_{10}}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} = \frac{a_1^7 \cdot a_1^8 \cdot a_1^9 \cdot a_1^{10}}{a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 \cdot a_1 r^3 \cdot a_1 r^4 \cdot a_1 r^5}$$

$$= \frac{a_1^3 \cdot r^{24}}{a_1^6 \cdot r^{15}} \xrightarrow{r=a_1} \frac{r^3 \cdot r^{24}}{r^6 \cdot r^{15}} = \frac{r^{27}}{r^{21}} = r^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$$

۱۳۱۰. **گزینه ۴** اگر نسبت مشترک عددی منفی باشد، جملات دنباله یکی

در میان مثبت و منفی می‌شوند، یعنی دنباله نه صعودی است و نه نزولی (رد گزینه‌های «۱» و «۳»). اگر جمله اول و نسبت مشترک هر دو بزرگ‌تر از یک باشند، دنباله صعودی است (مانند دنباله ۳, ۶, ۱۲, ... (رد گزینه «۲»). اگر جمله اول مثبت و نسبت مشترک عددی بین صفر و یک باشد، دنباله هندسی نزولی است (تأیید گزینه «۴»).

۱۳۱۱. **گزینه ۴** اعداد را به صورت a, ar, ar^2, ar^3 در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a + ar = 20 \Rightarrow a(1+r) = 20 \\ ar^2 + ar^3 = 45 \Rightarrow ar^2(1+r) = 45 \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{ar^2(1+r)}{a(1+r)} = \frac{45}{20}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r = \pm \frac{3}{2}$$

۱۳۲۰. گزینه ۲ | هزینه استهلاک ۲۰٪ است، یعنی ارزش کالا در هر سال

$\frac{4}{5}$ یا $\frac{80}{100}$ ارزش سال قبل است. اگر ارزش اولیه کالا n باشد، ارزش کالا در سال

$$v_n = a \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

مأم، جمله عمومی دنباله هندسی به صورت زیر است:

حال قرار است ارزش آن به کمتر از نصف ارزش اولیه برسد یعنی:

$$v_n < \frac{a}{2} \Rightarrow a \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \frac{a}{2} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$$

با قرار دادن n های مختلف در نامعادله فوق داریم:

$$n=2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5} > \frac{1}{2}$$

$$n=3 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} < \frac{1}{2}$$

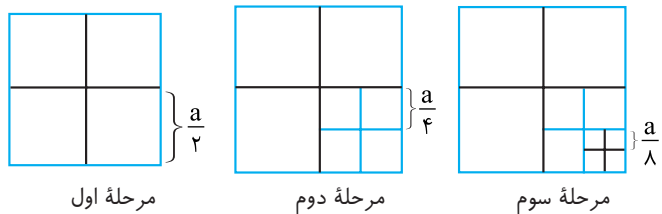
$$n=4 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} < \frac{1}{2}$$

$$n=5 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625} < \frac{1}{2}$$

یعنی از سال پنجم به بعد، ارزش کالا کمتر از نصف ارزش اولیه آن است؛ یعنی پس از گذشت حداقل ۴ سال.

۱۳۲۱. گزینه ۱ | اگر ضلع بزرگ‌ترین مربع برابر a باشد، ضلع هر مربع

تشکیل شده در مرحله اول $\frac{a}{2}$ و در مرحله دوم $\frac{a}{4}$ و در مرحله سوم $\frac{a}{8}$ و ... است.



یعنی اضلاع مربع‌های ساخته شده در هر مرحله دنباله هندسی به صورت $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \dots$ تشکیل می‌دهند که جمله اول $\frac{a}{2}$ و نسبت مشترک آن $\frac{1}{2}$ است.

$$a_v = \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{2^{v-1}} = \frac{a}{2^v} \rightarrow a=64$$

$$a_v = \frac{64}{128} = 0.5$$

طول ضلع مربع تشکیل شده در مرحله هفتم:

$$S = 5 \times 5 = 25$$

مساحت هر مربع تشکیل شده در مرحله هفتم:

$$2, 6, 18, \dots \quad a_1 = 2, \quad r = 3$$

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} = 2 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 2 \times \frac{1-729}{-2} = 729 - 1 = 728$$

$$a = 96, \quad r = \frac{1}{2} \Rightarrow S_n = 96 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_v = 96 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^v}{\frac{1}{2}} = 2 \times 96 \times \left(1 - \frac{1}{128}\right) = 2 \times 96 \times \frac{127}{128} = 190.5$$

$$\begin{cases} a_7 = 10 \Rightarrow a_1 r^6 = 10 \\ a_8 = -8 \Rightarrow a_1 r^7 = -8 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^7}{a_1 r^6} = \frac{-8}{10} \Rightarrow r = -\frac{4}{5} \Rightarrow r^3 = -\frac{64}{125} \Rightarrow r = -\frac{4}{5}$$

$$a_1 r = 10 \xrightarrow{r = -\frac{4}{5}} -2a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = -5$$

$$S_8 = a_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = -5 \times \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^8}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = -5 \times \frac{1 - \frac{256}{625}}{\frac{1}{5}} = -5 \times \frac{369}{125} = -18.45$$

نسبت مشترک برابر است با:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{2}x}{x} = \frac{3}{2}$$

$$a_7 = 54 \Rightarrow a_1 r^6 = 54 \xrightarrow{r = \frac{3}{2}} a_1 \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 54$$

$$\Rightarrow \frac{27}{8} a_1 = 54 \Rightarrow a_1 = 54 \times \frac{8}{27} = 16$$

$$a_1 + a_7 = a_1 + a_1 r^6 = 16 + 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 16 + 24 = 40$$

۱۳۱۷. گزینه ۴ | با توجه به آنکه هزینه استهلاک ۱۰٪ قیمت سال قبل

است، ارزش این کالا در هر سال $\frac{9}{10}$ یا $\frac{90}{100}$ ارزش سال قبل است. اگر ارزش این

کالا در سال اول (ابتدای خرید) a باشد، ارزش آن در سال دوم $\frac{9}{10}a$ و در سال

سوم $\left(\frac{9}{10}\right)^2 a$ و ... است، یعنی ارزش این کالا یک دنباله هندسی با جمله اول a و

نسبت مشترک $\frac{9}{10}$ است، پس ارزش آن در سال n برابر است با:

$$v_n = a \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

ارزش این کالا با گذشت زمان کم می‌شود اما هیچ وقت به صفر نمی‌رسد، زیرا

برای آنکه $v_n = 0$ شود یا باید $a = 0$ باشد یا $\frac{9}{10}$ که هیچ کدام صفر نیست، پس

همواره $v_n \neq 0$ است.

۱۳۱۸. گزینه ۲ | ارزش اولیه کالا ۲۵۰ هزار تومان است. از آنجا که هزینه

استهلاک ۲۰٪ است، یعنی ارزش این کالا در هر سال $\frac{80}{100}$ یا $\frac{4}{5}$ ارزش سال قبل

است، در نتیجه ارزش کالا در سال n م، جمله دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$a_n = 250 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \text{ارزش کالا در سال چهارم} = 250 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$= 250 \times \frac{64}{125} = 2 \times 64 = 128$$

ارزش کالا در سال چهارم ۱۲۸ هزار تومان است.

۱۳۱۹. گزینه ۳ | نیمه عمر کافتین ۶ ساعت است، یعنی پس از مصرف کافتین،

هر ۶ ساعت، مقدار آن در بدن نصف می‌شود.

روش اول نوشتن جملات دنباله:



پس از ۴۸ ساعت یعنی $\left(\frac{48}{6} = 8\right)$ بار مقدار آن نصف شود.

روش دوم میزان کافتین در بدن در هر ۶ ساعت، یک دنباله هندسی با نسبت

مشترک $\frac{1}{2}$ است.

پس ابتدا زمان داده شده را به نیمه عمر تقسیم می‌کنیم تا ببینیم در مدت

خواسته شده چند نیمه عمر طی می‌شود:

$$\frac{48}{6} = 8$$

پس بعد از ۸ نیمه عمر میزان دارو را به دست می‌آوریم. دقت کنید که پس از ۸

نیمه عمر، یعنی جمله نهم دنباله هندسی:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{\substack{a_1 = 160 \\ r = \frac{1}{2}}} a_n = 160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_9 = 160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{160}{256} = \frac{5}{8} = 0.625$$

پس جمله اول دنباله هندسی برابر ۵ و نسبت مشترک برابر ۳ است.

$$a_5 - a_3 = ar^4 - ar^2 = 5 \times 3^4 - 5 \times 3^2 = 5 \times 27 - 5 \times 9 = 90$$

۱۳۳۱. جمله اول در صورت سؤال دقیقاً تعریف نسبت مشترک

است، پس نسبت مشترک $\frac{2}{3}$ است.

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow \frac{211}{27} = a_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{211}{27} = a_1 \times \frac{1-\frac{32}{243}}{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{211}{27} = 3a_1 \left(\frac{211}{243}\right) \xrightarrow{\div 211} \frac{1}{27} = \frac{3a_1}{243} \Rightarrow 81a_1 = 243 \Rightarrow a_1 = 3$$

۱۳۳۲. گزینه پ

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow 63 \times \frac{3}{4} = a_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{255}{4} = a_1 \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{255}{4} = 2a_1 \left(\frac{255}{4}\right) \xrightarrow{\div 255} \frac{1}{4} = \frac{2a_1}{4} \Rightarrow 8a_1 = 255 \Rightarrow a_1 = 32$$

$$a_8 = a_1 r^7 = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 32 \times \frac{1}{128} = 2$$

$$a_1 = 64, \quad r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

۱۳۳۳. گزینه پ

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_8 = 64 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 64 \times \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = 128 \times \frac{255}{256} = 127/5$$

$$a_7 = \frac{1}{2}, \quad a_8 = 4, \quad S_8 = ?$$

$$a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{2}, \quad a_8 = a_1 r^7 = 4 \Rightarrow a_1 r^7 (r) = 4$$

$$\xrightarrow{a_1 r = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} r^7 = 4 \Rightarrow r^7 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$a_1 r = \frac{1}{2} \xrightarrow{r=2} a_1 \times 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$$

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_8 = \frac{1}{4} \times \frac{1-(2)^8}{1-2} = \frac{1}{4} \times \frac{1-256}{-1} = \frac{-255}{-4} = 63/4$$

$$x^2 = 4x(x - \frac{3}{4}) \Rightarrow x = 4x - 6 \Rightarrow x = 2$$

۱۳۳۴. گزینه پ

$$y=1, \quad x=2, \quad z=4 \Rightarrow |x|+|y|+|z|=7$$

$$x^2 = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x = 2$$

۱۳۳۵. گزینه پ

$$y, 1, 2, 4, z \Rightarrow r=2 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right), \quad z=8$$

$$xyz = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 = 8$$

$$a_8 = a_p \times a_q \xrightarrow{a_8=7} 49 = a_p \times a_q$$

۱۳۳۶. گزینه پ

$$\Rightarrow 49 = (a+2d)(a+8d) \Rightarrow 49 = a^2 + 10ad + 16d^2 (*)$$

از طرفی چون داریم $a_8 = 7$ ، پس:

$$a + 7d = 7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^2 + 14ad + 49d^2 = 49$$

$$7ad = 0 \xrightarrow{d \neq 0} a = 0, \quad 7d = 7$$

در رابطه (*) جایگذاری می‌کنیم:

$$a_{10} = a + 9d = 0 + 9 \times 7 = 63$$

$$12 + 6 + 3 + \dots + \frac{3}{16} \quad \text{گزینه ۴} \quad ۱۳۲۵$$

مجموع جملات یک دنباله هندسی را می‌خواهیم به دست آوریم:

$$a = 12, \quad r = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{3}{16} = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^6} \Rightarrow n = 7$$

$$S_7 = a \times \frac{1-r^7}{1-r} = 12 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = 12 \times \frac{1-\frac{1}{128}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 24 \times \frac{127}{128} = 3 \times \frac{127}{16} = \frac{381}{16}$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n \Rightarrow r = \frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۳} \quad ۱۳۲۶$$

$$a_7 = 72 \Rightarrow a_1 r^6 = 72 \xrightarrow{r=\frac{3}{2}} \frac{3}{2} a_1 = 72 \Rightarrow a_1 = 48$$

$$S_8 = 48 \times \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^8}{1-\frac{3}{2}} = 48 \times \frac{1-\frac{243}{256}}{-\frac{1}{2}} = -96 \times \frac{-211}{256} = 633$$

۱۳۲۷. گزینه پ طبق نمودار داده‌شده، دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \quad a = 2, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$S_8 = a \frac{1-r^8}{1-r} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = 4 \times \frac{255}{256} = \frac{255}{64}$$

$$a = 7, \quad r = 2 \Rightarrow S_n = 7 \times \frac{1-2^n}{1-2} \quad \text{گزینه ۱} \quad ۱۳۲۸$$

$$\Rightarrow 889 = 7 \times \frac{1-2^n}{-1} \xrightarrow{\div 7} 127 = -(1-2^n)$$

$$\Rightarrow 127 = -1 + 2^n \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow n = 7$$

$$6, 12, 24, \dots \quad a = 6, \quad r = 2 \quad \text{گزینه ۲} \quad ۱۳۲۹$$

$$S_n = 6 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 6 \times \frac{1-2^n}{-1} = -6(1-2^n)$$

$$S^n > 1000 \Rightarrow -6 + 6 \times 2^n > 1000 \Rightarrow 6 \times 2^n > 1006$$

$$\xrightarrow{\div 6} 2^n > \frac{1006}{6} \Rightarrow 2^n > 167/3$$

با توجه به توان‌های عدد ۲، می‌دانیم که $2^7 = 128$ و $2^8 = 256$ ، پس حداقل مقدار n برابر ۸ است.

$$S_n = \frac{5 \times 3^n}{2} - \frac{5}{2} \quad \text{گزینه ۱} \quad ۱۳۳۰$$

$$S_1 = a_1 = \frac{5 \times 3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{5 \times 3^2}{2} - \frac{5}{2} = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} = 20$$

$$a_1 + a_2 = 20 \Rightarrow 5 + a_2 = 20 \Rightarrow a_2 = 15$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{15}{5} = 3$$