

فهرست



۷

۲۷

فصل اول: منطق و استدلال ریاضی

پاسخنامه فصل اول

۴۰

۶۴

فصل دوم: تابع

پاسخنامه فصل دوم



۷۹

۸۹

فصل سوم: تحلیل داده‌ها

پاسخنامه فصل سوم

۹۵

۱۰۲

۱۰۶

۱۱۱

۱۱۹

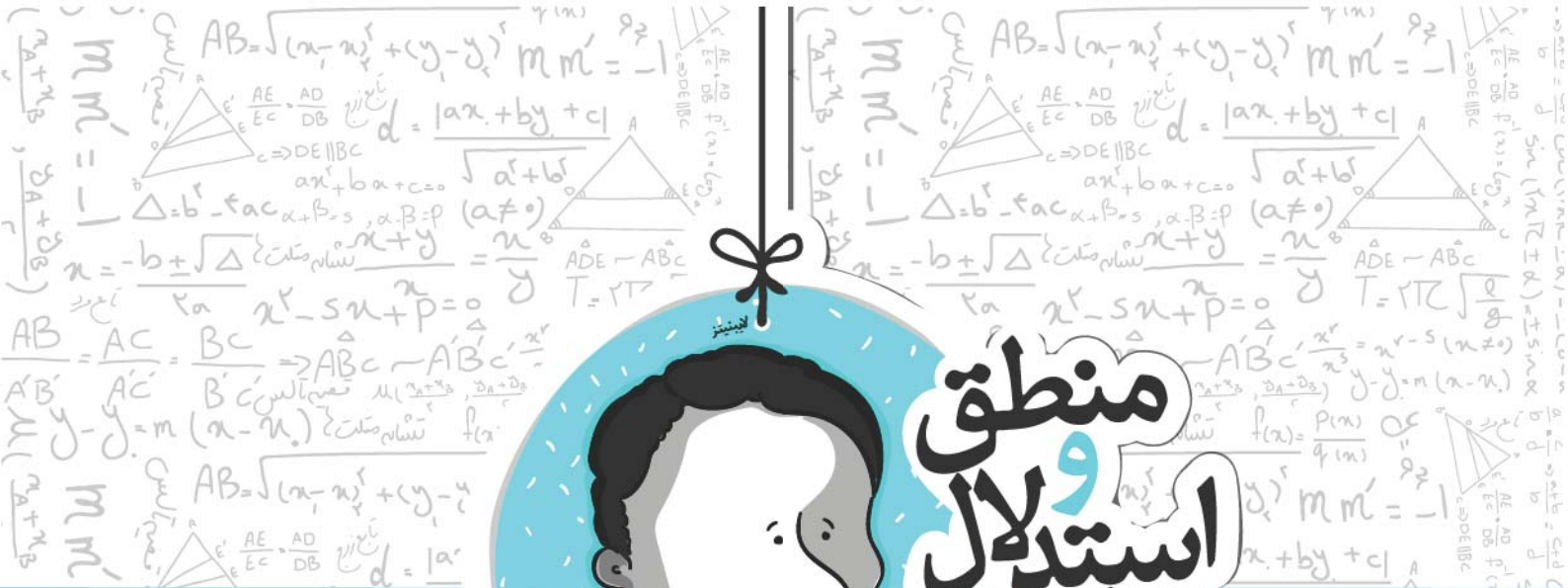
خلاصه فصل‌ها

امتحان‌های نیم‌سال اول

پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال اول

امتحان‌های نیم‌سال دوم

پاسخنامه امتحان‌های نیم‌سال دوم



۱ منطق ریاضی و گزاره‌ها

تعریف منطق

منطق در لغت به معنی کلمه و گفتار است (از نطق می‌آید). ولی از نظر فلاسفه و منطق‌دانان، به معنی قانون درست فکر کردن است. به عبارت دیگر می‌توان گفت:

۱ منطق، استدلال‌ها را بررسی می‌کند و درستی یا نادرستی آن‌ها را مشخص می‌کند؛ زیرا اگر برای اثبات یک موضوع، استدلال‌های ما نادرست باشند نتیجه به دست آمده هم، قابل قبول نخواهد بود.

۲ منطق، ابزاری است از نوع قاعده و قانون که به کار بردن آن، ذهن را از خطای در تفکر مصون نگه می‌دارد.

نکته اولین نفری که قواعد ذهن انسان را به دست آورد و با ترتیبی خاص، دسته‌بندی کرد، ارسطو بود.

تعریف منطق ریاضی

به نظر شما کاربرد دستور زبان فارسی چیست؟ حتماً پاسخ می‌دهید که دستور زبان فارسی، علمی است که روش درست گفتن و درست نوشتن را به ما می‌آموزد. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است. به عبارت دیگر، منطق ریاضی روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی، گزاره، جمله‌ای است خبری که می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد هر چند که ممکن است از درستی یا نادرستی آن، اطلاعی نداشته باشیم. مثلاً:

«۲ عددی اول است.» ← یک گزاره با ارزش درست است.

« $5^2 > 3^3$ » ← یک گزاره با ارزش نادرست است چون $25 < 27$ است.

«بیشتر درس بخوان.» ← گزاره نیست. (جمله امری است.)

«چه ماشین زیبایی!» ← گزاره نیست. (جمله عاطفی است.)

«شما امسال کنکور می‌دهید؟» ← گزاره نیست. (جمله پرسشی است.)

سؤال (شاگرد): بیفشید مگه $3^3 > 5^2$ جمله فبری محسوب می‌شه؟ من که کلمه فارسی توش نمی‌بینم!

دبیر: فب شما ($3^3 > 5^2$) رو چه پوری می‌فونی؟ مگه نمی‌گی، « 5^2 بزرگ‌تر از 3^3 است.» پس دیدی که ($5^2 > 3^3$) یه جمله فبریه و هتماً لازم نیست جمله، فارسی باشه. فیلی وقتاً از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم.

تذکره مهم در بعضی از جملات خبری، نمی‌توانیم درباره درستی یا نادرستی آن‌ها اظهار نظر کنیم؛ لذا آن‌ها را گزاره محسوب نمی‌کنیم؛ مثلاً جمله خبری «متوازی‌الاضلاع، زیباترین شکل هندسی است.» گزاره محسوب نمی‌شود؛ چون زیبایی، موضوعی سلیقه‌ای است و اصولاً از نظر منطقی ریاضی، جمله مذکور، قابل ارزش گذاری نیست.

مثال و پاسخ

مثال کدام یک از جملات و عبارات زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

- الف** کباب، خوشمزه تر از پیتزا است. **ب** عدد $\sqrt{3}$ گویا است.
- ب** افلاطون، شاکرد سقراط بود. **ن** اصالت شما برای کدام شهر است؟
- ن** عدد $(-2)^n$ عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$) **ج** $-10 \geq -3$
- ج** $0/1 = 0/2 \times \frac{1}{2}$ **ح** کوچک ترین عدد طبیعی دورقمی مربع کامل، عدد ۱۶ است.

پاسخ الف گزاره نیست. (برای مقایسه مزه غذاها نمی توانیم ارزش گذاری کنیم).

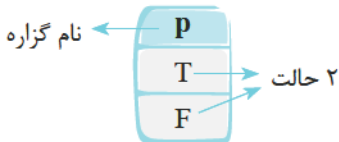
- ب** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون $\sqrt{3}$ گنگ است. **ب** گزاره است و ارزش آن، درست است.
- ن** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون اگر Ω زوج باشد، حاصل $(-2)^n$ مثبت می شود و اگر Ω فرد باشد، حاصل $(-2)^n$ منفی می شود. **ب** گزاره است و ارزش آن، درست است.
- ج** گزاره است و ارزش آن، نادرست است؛ چون -10 کوچک تر از -3 است.

ج گزاره است و ارزش آن، درست است زیرا: $\frac{x}{10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{10} = 0/10$

ح گزاره است و ارزش آن، درست است؛ چون اولاً ۱۶ مربع کامل است؛ یعنی جذر کامل دارد ($\sqrt{16} = 4$) و ثانیاً ۱۶ کوچک ترین عدد طبیعی دورقمی است که این خاصیت را دارد.

جبر گزاره‌ها (حساب گزاره‌ها)

در منطق ریاضی، هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی کوچک مانند p, q, r, s ... نمایش می دهیم. ضمناً بعضی گزاره‌ها خود، ترکیبی از دو یا چند گزاره دیگر هستند که به آن‌ها گزاره‌های ترکیبی (مرکب) می گوئیم. کمی جلوتر با انواع گزاره‌های ترکیبی آشنا می شوید. جبر گزاره‌ها کارش این است که به وسیله یک سری قراردادهای و نمادگذاری‌ها ارزش یک گزاره را تعیین می کند.



در جدول های زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده اند. ارزش درست یک گزاره را با «د» یا «T» و ارزش نادرست آن را با «ن» یا «F» نمایش می دهیم. (True یعنی درست و False یعنی نادرست).

$2^1 = 2 =$ تعداد حالت های ارزشی یک گزاره

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

$2^3 = 8 =$ تعداد حالت های ارزشی سه گزاره

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

$2^2 = 4 =$ تعداد حالت های ارزشی دو گزاره

نتیجه اگر تعداد گزاره‌ها n باشد، در جدول ارزشی آن‌ها، تعداد حالت‌ها برابر با 2^n خواهد بود؛ مثلاً اگر تعداد گزاره‌ها ۴ باشد، در جدول ارزشی مربوط به آن‌ها $2^4 = 16$ حالت مختلف وجود دارد.

نقیض یک گزاره

P	~ P
T	F
F	T

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش آن گزاره باشد. نقیض یک گزاره مثل p را با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم. $\sim p$ را این‌طور می‌خوانیم: «چنین نیست که p »، یا «نقیض p ». جدول ارزش نقیض یک گزاره نسبت به خود آن گزاره به شکل روبه‌رو است:

اگر گزاره ساده p به شکل یک جمله فارسی باشد، برای ساختن نقیض آن، بهترین روش این است که فعل جمله را نقیض کنیم؛ البته این کار، تنها راه ساختن نقیض نیست؛ مثلاً نقیض گزاره «۶ عددی زوج است» را به ۳ صورت می‌توان بیان کرد:

- نقیض ← چنین نیست که عدد ۶ عددی زوج باشد.
- نقیض ← عدد ۶ عددی زوج است. (بهترین جمله)
- نقیض ← عدد ۶ عددی فرد است.

تذکره مهم: گاهی اوقات، گزاره ساده موردنظر، شامل یک نماد ریاضی است که نقیض این نماد طبق جدول زیر، تعیین می‌شود:

نماد ریاضی	<	>	≤	≥	=	≠	∈	∉	⊆	⊄
نقیض نماد	≥	≤	>	<	≠	=	∉	∈	⊄	⊆

مثلاً نقیض گزاره $5x + 2 = \frac{1}{3}$ برابر است با: $5x + 2 \neq \frac{1}{3}$ و یا نقیض گزاره $N \subseteq \mathbb{R}$ عبارت است از: $N \not\subseteq \mathbb{R}$ ؛ همچنین نقیض گزاره $8 \geq 3$ برابر است با $8 < 3$.

مثال و پاسخ

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید: سپس ارزش درستی هر گزاره و نقیضش را تعیین کنید:

پ $2^3 + 2^4 = 2^5$

الف ۵۱ عددی اول است.

ب $(4 \times 9) > (5 \times 6)$

پ کسر $\frac{5x}{x^2 - 3}$ گویا است.

ج a عددی مثبت است.

ث $4 \in \mathbb{N}$

پاسخ: **الف** ۵۱ عددی اول است. ← نقیض ← ۵۱ عددی اول نیست. (چنین نیست که ۵۱ عددی اول باشد).
 نادرست (F) ← درست (T)

پ می‌دانیم که: $2^3 = 8$ ، $2^4 = 16$ و $2^5 = 32$ ؛ لذا $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 \neq 32 = 2^5$ ؛ بنابراین گزاره داده‌شده نادرست است و نقیض آن برابر است با: $2^3 + 2^4 \neq 2^5$ و ارزش گزاره نقیض، درست است.

پ کسر $\frac{5x}{x^2 - 3}$ گویا است. ← نقیض ← کسر $\frac{5x}{x^2 - 3}$ گویا نیست.
 درست (T) ← نادرست (F)

ب $36 > 30$ ← نقیض ← $36 \leq 30$
 درست (T) ← نادرست (F)

ث $4 \in \mathbb{N}$ ← نقیض ← $4 \notin \mathbb{N}$
 درست (T) ← نادرست (F)

ج a عددی مثبت است. ← نقیض ← a عددی مثبت نیست. (چنین نیست که a عددی مثبت باشد).
 نامعلوم ← نامعلوم

a عددی مثبت است.	a عددی مثبت نیست.
T	F
F	T

ارزش گزاره «a عددی مثبت است.» معلوم نیست؛ چون مقدار a به ما داده نشده است؛ یعنی با توجه به مقدار a، گزاره مورد نظر، می تواند درست یا نادرست باشد.

سؤال (شالگرد): استاد نمی شه بگیم نقیض گزاره «a عددی مثبت است.» می شه؛ «a عددی منفی است.»؟

دبیر، به نظرت آیا هر عددی که مثبت نباشه، منفیه؟ فیر، صفر مثبت نیست ولی منفی هم نیست. به عبارت دیگه، وقتی a مثبت نباشه، یا منفیه یا صفر ولی «a عددی منفی است.» صفر رو شامل نمی شه. پس نقیض گزاره «a عددی مثبت است» عبارت است از: «a عددی مثبت نیست» یا «a عددی منفی یا صفر است.»

گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره p و q یکسان باشد به آن‌ها گزاره‌های هم‌ارز می‌گوییم و این موضوع را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم؛ یعنی p هر ارزشی داشته باشد (درست یا نادرست) q هم همان ارزش را دارد؛ مثلاً گزاره‌های «۲۵ عددی مربع کامل است.» و « $-3 \in \mathbb{Z}$ » هم‌ارز هستند؛ زیرا هر دوی آن‌ها ارزش درست (T) دارند.
هم‌چنین گزاره‌های « $\sqrt{3} > 3$ » و « $(-5)^2 = -25$ » هم‌ارز می‌باشند؛ چون هر دوی آن‌ها دارای ارزش نادرست (F) هستند. واضح است که اگر $p \equiv q$ باشد، نقیض‌های آن‌ها نیز هم‌ارزند؛ یعنی: $\sim p \equiv \sim q$.

مثال و پاسخ

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را به شکل هم‌ارزی بنویسید.

الف $(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$

ب $2^{10} > 2^{14}$

پ $x = y$

پاسخ

الف $\sim [(\sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}] \equiv (\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$

ب $\sim (2^{10} > 2^{14}) \equiv (2^{10} \leq 2^{14})$

پ $\sim (x = y) \equiv (x \neq y)$

تکرار: نقیض نقیض یک گزاره، هم‌ارز با همان گزاره است؛ یعنی: $\sim(\sim p) \equiv p$

(این موضوع شما رو یاد چی میندازه؟ بله! منفی در منفی، می‌شود مثبت.)

مثال: ۴ عددی مربع کامل است. نقیض ← ۴ عددی مربع کامل نیست. نقیض ← گزاره $\sim p$
گزاره p

سؤال‌های امتحانی

۱- کدام یک از جملات یا عبارتهای زیر، گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید:

الف) امروز به سینما نرو.

ب) 10^4 عدد بسیار بزرگی است.

پ) میانۀ داده‌های ۱.۳، ۴.۸، ۱۷.۲۰، ۳۱.۵۴ عدد $12/5$ است.

ت) از نمودار خبایی برای نمایش هم‌زمان ۲ متغیر استفاده می‌شود.

ث) عدد طبیعی a، زوج است.

ج) عدد $(-3)^{n+1}$ عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

چ) بزرگ‌ترین عدد اول دورقمی، برابر ۸۹ نیست.

ح) عبارت $\frac{|x|}{3x^2 + 5x}$ یک عبارت گویا نیست.

خ) رابطه $f = \{(4, 5), (2, 1), (10, 20)\}$ یک تابع است.

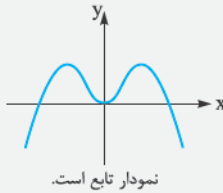
د) بُرد تابع $y = 3$ برابر است با کل اعداد حقیقی. (مفهوم علاقه‌مندان)

ذ) نمودار سهمی $y = 3 - x^2$ از نواحی دوم و سوم نمی‌گذرد. (مفهوم علاقه‌مندان)

ر) تعداد هلی‌کوپترهای ارتش‌های کشورهای مختلف، متغیری کمی با مقیاس نسبتی است.

ز) واریانس، جذر انحراف معیار است.

۲- جدول زیر را کامل کنید:

گزارهٔ p	ارزش p	گزارهٔ ~ p	ارزش ~ p
$10^3 + 10^4 = 10^7$			
مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است.			
		$-8 \geq -10$	
			
مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر با 2^4 است.			
طول رأس سهمی $y = x^2 - 8x + 5$ برابر با $x = 3$ است. (مفهوم علاقه‌مندان)			
		در تجزیهٔ عبارت $4x^2 - 8x - 21$ عامل $(2x + 3)$ وجود ندارد. (مفهوم علاقه‌مندان)	
در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰، ۲۸۰۰ و ۵ شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین، برای نمایش محل تمرکز داده‌ها است.			
مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است.			
قرینهٔ هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است.			
معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، از خود آن عدد کوچک‌تر است.			
مجموع دو عدد $1 + \sqrt{3}$ و $1 - \sqrt{3}$ ، عددی گنگ است.			

گزاره‌های عطفی و فصلی



ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها، به شکل‌های مختلفی می‌توانیم گزاره‌های ساده را با هم ترکیب کنیم تا گزاره‌های مرکب ساخته شوند. در کتاب ریاضی‌تان، ترکیب گزاره‌ها را با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر ... آن‌گاه ...»، «اگر ... آن‌گاه ... و برعکس» انجام می‌دهیم. در این درس‌نامه می‌خواهیم ارزش گزاره‌های عطفی و فصلی را تعیین کنیم. ابتدا گزارهٔ عطفی را بررسی می‌کنیم.

ترکیب عطفی دو گزاره

گر دو گزارهٔ ساده را با حرف «و» به هم مربوط کنیم، گزارهٔ مرکبی ساخته می‌شود که آن را ترکیب عطفی آن دو گزاره می‌نامیم. ترکیب عطفی p و q را با نماد $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم و آن را «p و q» می‌خوانیم. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{گزارهٔ } p: 5 \text{ عددی فرد است.} \\ \text{گزارهٔ } q: 2/3 \text{ عددی صحیح است.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{گزارهٔ } p \wedge q: 5 \text{ عددی فرد است و } 2/3 \text{ عددی صحیح است.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{گزارهٔ } p: 2 \text{ عددی زوج است.} \\ \text{گزارهٔ } q: 2 \text{ عددی اول است.} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{گزارهٔ } p \wedge q: 2 \text{ عددی زوج است و } 2 \text{ عددی اول است. (به طور خلاصه می‌توان گفت } 2 \text{ عددی زوج و اول است.)}$$

جدول ارزش درستی $p \wedge q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

→ فقط وقتی درستی است که هم p و هم q درست باشند.

→ اگر حداقل یکی از دو گزاره p و q نادرست باشند؛ $p \wedge q$ نادرست خواهد بود.

مثال و پاسخ

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است جدول ارزش گذاری رسم کنید.

الف: تهران پایتخت ایران است و جاکارتا پایتخت مالزی است.

پ: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ و $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$

ت: ۱۱۰ عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است.

ث: رابطه f تابع است و رابطه $g = \{(1, 2), (3, 4)\}$ تابع است.

پاسخ: **الف:** تهران پایتخت ایران است و جاکارتا پایتخت مالزی است. \Leftarrow کل گزاره، نادرست (F) است.

پ: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$ و $\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$ \Leftarrow کل گزاره، درست (T) است.

ت: ۱۱۰ عددی مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول برابر ۳ است. \Leftarrow کل گزاره، نادرست (F) است.

(۱۱۰ جذر کامل ندارد. F) (۲ کوچک‌ترین عدد طبیعی اول است. F)

ث: رابطه f تابع است و رابطه $g = \{(1, 2), (3, 4)\}$ تابع است.

(چون f به ماداده نشده) نامعلوم (عضوهای اول زوجها مختلفاند). T

باید برای گزاره عطفی بالا جدول ارزش گذاری رسم کنیم، چون وضعیت ارزش f مشخص نیست:

f تابع است و g تابع است.	g تابع است.	f تابع است.
T	T	T
F	T	F

پس اگر f تابع باشد، کل گزاره عطفی درست است و اگر f تابع نباشد، کل گزاره عطفی، نادرست است.

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر دو گزاره ساده را با حرف «یا» به هم مربوط کنیم، گزاره مرکب حاصل، ترکیب فصلی آن دو گزاره نام دارد. ترکیب فصلی دو گزاره p و q را به شکل $p \vee q$ نمایش داده و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم؛ مثلاً:

گزاره p : عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش پذیر است. گزاره q : مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است. \Leftarrow گزاره $p \vee q$: عدد ۱۲۰ بر ۵ بخش پذیر است یا مربع عدد ۱۰، برابر ۲۰ است.

گزاره p : تهران در ایران است. گزاره q : تهران در آسیا است. \Leftarrow گزاره $p \vee q$: تهران در ایران است یا تهران در آسیا است. (به طور خلاصه تهران در ایران یا آسیا است).

جدول ارزش‌گذاری $p \vee q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$p \vee q$ وقتی درست است که حداقل یکی از دو گزاره درست باشند.

$p \vee q$ فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

مثال و پاسخ

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. هر جا که لازم است از جدول ارزش‌گذاری استفاده کنید:

الف) ۱۳ عدد اول یا مربع کامل است.

ب) معادله $x^2 - 16 = 0$ دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است.

پ) $(5^\circ \neq 1)$ و $(3 > 10)$ **ت)** ۱ عدد اول است یا x زوج است.

پاسخ: **الف)** ۱۳ عدد اول یا مربع کامل است. \Leftrightarrow کل گزاره، درست (T) است.
 (۱۳ جذر کامل ندارد.) F T

ب) ابتدا معادله داده شده را حل می‌کنیم:
 ضمناً ۴۹ بر ۷ بخش پذیر است لذا:

معادله $x^2 - 16 = 0$ دو ریشه دارد یا ۴۹ مضرب ۷ است. \Leftrightarrow کل گزاره، درست (T) است.

پ) می‌دانیم هر عدد به توان صفر برسد، جواب برابر ۱ می‌شود؛ لذا: $5^\circ = 1$

$(5^\circ \neq 1)$ و $(3 > 10)$ \Leftrightarrow کل گزاره، نادرست (F) است.

ت) می‌دانیم ۱ عددی اول نیست (یک فقط فرد است نه اول). ولی در مورد ارزش گزاره « x زوج است.» نمی‌توانیم اظهار نظر قطعی کنیم؛ چون مقدار x را نمی‌دانیم؛ لذا باید جدول ارزش‌گذاری رسم کنیم:

۱ عدد اول است یا x زوج است.	x زوج است.	۱ عدد اول است یا x زوج است.
F	T	T
F	F	F

مثال و پاسخ

مثال: جدول ارزش‌گذاری گزاره $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را تشکیل دهید.

همیشه جدول را از چپ به راست تشکیل می‌دهیم.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

خاصیت‌های ترکیب عطفی و ترکیب فصلی دو گزاره P و Q

یک سری قانون برای ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره وجود دارند که یادگیری آن‌ها سرعت محاسبات را افزایش می‌دهد. البته تمام این قوانین و فرمول‌ها را می‌توانیم به کمک رسم جدول ارزش‌گذاری، اثبات کنیم ولی ما فقط آن‌هایی را ثابت می‌کنیم که ممکن است در مدارس جنبه امتحانی داشته باشند. (در تمام فرمول‌های زیر، منظور از T گزاره همیشه درست و منظور از F گزاره همیشه نادرست است.)

	قوانین مربوط به ترکیب عطفی	قوانین مربوط به ترکیب فصلی
فقط این‌ها را فقط کنید	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
	$p \wedge T \equiv p$ یا $T \wedge p \equiv p$	$p \vee T \equiv T$ یا $T \vee p \equiv T$
	$p \wedge F \equiv F$ یا $F \wedge p \equiv F$	$p \vee F \equiv p$ یا $F \vee p \equiv p$
	$p \wedge \sim p \equiv F$ یا $\sim p \wedge p \equiv F$	اجتماع نقیضین $p \vee \sim p \equiv T$ یا $\sim p \vee p \equiv T$
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	جابجایی $p \vee q \equiv q \vee p$
مفروضه علاقه‌مندان	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	شرکت‌پذیری $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	توزیع‌پذیری $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	دِمرگان $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	جذب $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
	$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	شبه‌جذب $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

همان‌طور که گفتیم تمام این فرمول‌ها توسط جدول ارزش‌گذاری، قابل اثبات است؛ مثلاً قانون جذب $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ را اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

ملاحظه می‌کنید که ارزش گزاره $p \wedge (p \vee q)$ همیشه با ارزش p برابر است. برخی دیگر از فرمول‌های بالا را در تمرین‌ها اثبات کرده‌ایم.

مثال و پاسخ

مثال: بدون رسم جدول، طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید: (T و F به ترتیب گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست هستند.)

$\sim p \wedge F \equiv ?$ **پ**

$\sim p \vee \sim F \equiv ?$ **الف**

$(\sim p \wedge F) \vee (\sim p \vee T) \equiv ?$ **ب**

$\sim (\sim p) \wedge \sim p \equiv ?$ **پ**

$q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv ?$ **ج** (مفروضه‌ها علاقهمندان)

$(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv ?$ **د** (مفروضه‌ها علاقهمندان)

پاسخ: دقت کنید که نفیض F می شود T و نفیض T می شود F؛ لذا خواهیم داشت:

الف $\sim p \vee \sim F \equiv \sim p \vee T \equiv T$

پ $\sim p \wedge F \equiv F$

ب $\underbrace{\sim(\sim p)}_P \wedge \sim p \equiv \underbrace{p \wedge \sim p}_{\text{اجتماع نفیضین}} \equiv F$

ت $\underbrace{(\sim p \wedge F)}_F \vee \underbrace{(\sim p \vee T)}_T \equiv F \vee T \equiv T$

ث $(F \vee \sim p) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$ (شبه جذب)
 ج $q \vee \sim(p \vee \sim q) \equiv q \vee (\sim p \wedge q) \equiv q$ (جذب)
 دمرگان

سؤال‌های امتحانی

۳- در جدول زیر، روبه‌روی گزاره‌های داده‌شده ارزش آن‌ها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده‌شده با یک یا دو گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	۷۵ عددی اول است و $(-۳)^۴$ عددی منفی نیست.		
۲ و رنگ چشم افراد، متغیر کیفی اسمی است.	✓	
۳	مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) طبیعی عدد ۱۲ عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ و		✓
۴	۱۲۱ مضرب ۱۱ است و $\frac{1}{۲} > \frac{1}{۳}$		
۵ و	✓	
۶	همه سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شوند و سوره بقره طولانی‌ترین سوره قرآن است.		
۷	مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی است و $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$		
۸	$\sqrt{9+100} = 3+10$ و $(\frac{-۲}{۳})^{-۳} \times 3^{-۳} = \frac{1}{۸}$		
۹	$(a-b)^۳ = a^۳ - 3a^۲b + 3ab^۲ - b^۳$ و $(a-b)^۲ = a^۲ - 2ab + b^۲$		
۱۰	(شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است) ۸ (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی‌های مخرب است.) (مفهوم علاقه‌مندان)		
۱۱	$(-۵ \neq -\sqrt{(-۵)^۲}) \wedge ((\frac{۲}{۳})^۰ = 1)$		
۱۲	عدد ۲ زوج و اول است.		
۱۳	نمودار خط $x = ۳$ از ناحیه اول و چهارم می‌گذرد. (مفهوم علاقه‌مندان)		

۴- در جدول زیر، روبه‌روی گزاره‌های داده‌شده، ارزش آن‌ها را با علامت ✓ مشخص کرده و همچنین با توجه به ارزش داده‌شده، با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ عبارتی گویا است یا ۹۱ عددی مرکب است.		
۲	قرآن ۱۱۸ سوره دارد یا	✓	

✓		۳	ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست یا
	✓	۴ یا معادله $x^2 + x + 3 = 0$ دو ریشه دارد.
		۵	افلاطون، شاگرد سقراط بود یا هفته هفت روز دارد.
		۶	اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱۲۱) هستند یا سهمی $f(x) = x^2 + 1$ ماکزیمم دارد. (مفروض علاقه‌مندان)
		۷	در تابع $f(t) = \sqrt{t+1}$ متغیر مستقل برابر $f(t)$ است یا وزن افراد، متغیر کمتی فاصله‌ای است.
		۸	رابطه  تابع است یا نمودار میله‌ای، یک نمودار تک‌متغیره است.
		۹	$(\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q})$
		۱۰	$(\frac{3^2 \times 3^{-2}}{3^{-5} \times 3^4} \times \frac{6^7}{8^5} = 2) \vee (\sqrt{x^2} = x)$ (مفروض علاقه‌مندان)
		۱۱	عدد ۱۹ زوج یا مربع کامل است.
		۱۲	عدد ۲۴ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

۵- با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

- الف) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (ب) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (پ) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 ت) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ث) $p \vee (p \wedge q) \equiv q$ (ج) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
 چ) $(p \vee \sim p) \equiv T$ (ح) $(p \wedge \sim p) \equiv F$ (خ) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$
 د) $p \wedge (\sim p \wedge \sim q) \equiv T$ (ذ) $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

۶- اگر $p \wedge q$ گزاره‌ای درست باشد ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۷- اگر $p \wedge q \equiv F$ باشد ثابت کنید که:

$(\sim p \vee q) \wedge p \equiv F$ (مفروض علاقه‌مندان)

۸- اگر گزاره $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر چیست؟

- الف) $(q \vee r) \vee p$ (ب) $\sim (p \wedge q) \wedge \sim r$

۳ گزاره شرطی و دو شرطی

تکبیب شرطی دو گزاره

اگر بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد « \Rightarrow » استفاده کرده و می‌نویسیم: $p \Rightarrow q$ و آن را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- اگر p آن‌گاه q .
- p نتیجه می‌دهد q را.
- q از p نتیجه می‌شود.
- p شرط کافی است برای q
- q شرط لازم است برای p

ضمناً در گزاره « $p \Rightarrow q$ » به p مقدم و به q تالی می‌گوییم.

مثلاً گزاره شرطی «اگر یک چهارضلعی، مستطیل باشد، آن‌گاه قطرهایش با هم برابرند.» را به شکل‌های زیر هم می‌توان بیان کرد:

- مستطیل بودن یک چهارضلعی، نتیجه می‌دهد مساوی بودن قطرهای آن را.

● مستطیل بودن یک چهارضلعی، شرط کافی است برای مساوی بودن قطرهای آن.

● (دو قطرش با هم برابرند) \Rightarrow (چهارضلعی، مستطیل است).

● مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی، شرط لازم است برای مستطیل بودن آن.

در گزاره شرطی بالا p و q به هم وابسته هستند؛ یعنی با فرض درست بودن گزاره «چهارضلعی، مستطیل است.» درستی یا نادرستی گزاره «قطرهای چهارضلعی با هم برابرند» را بررسی می‌کنیم؛ ولی در علم منطق، گاهی p و q ربطی به هم ندارند که در این صورت باید ارزش تک تک آن‌ها را تعیین کنیم؛ مثلاً اگر $۵ > ۳$ باشد، آن گاه تهران پایتخت ایران است. ملاحظه می‌کنید که گزاره‌های p و q ارتباطی به هم ندارند؛ پس نمی‌توانیم گزاره p (نادرست) گزاره q (درست) بدون بررسی بگوییم p درست است. (دیدید که $۵ > ۳$ نادرست بود؛ یعنی تماماً باید بررسی کنیم و پیشم بسته نمی‌گیریم p درست؛ ولی آله p و q به هم وابسته بودن، پیشم بسته نمی‌گیریم p درست و فقط q رو بررسی می‌کنیم.)

جدول ارزش گذاری $(p \Rightarrow q)$ به صورت مقابل است:

مقدم p	تالی q	$(p \Rightarrow q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$(p \Rightarrow q)$ فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد. \rightarrow

به دو ردیف آخر جدول بالا دقت کنید. ملاحظه می‌کنید که در هر دو حالت، مقدم ارزش نادرست دارد ولی ارزش $(p \Rightarrow q)$ درست است. در این دو حالت، می‌گوییم گزاره شرطی به انتهای مقدم، درست است. یعنی به خاطر نادرست بودن مقدم، می‌گوییم تالی چه درست باشد چه نادرست، کل گزاره درست است.

مثال و پاسخ

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر ۱۳ اول است، آن گاه ۲۵ مربع کامل است.

ب) اگر $۴^۲ = ۸$ ، آن گاه $۷ > ۳$.

پ) اگر چهارمین فصل سال، پاییز است؛ آن گاه اسفند ۳۱ روز دارد.

ت) اگر x عددی زوج باشد؛ آن گاه بر ۲ بخش پذیر است.

پاسخ: پس $(p \Rightarrow q)$ درست است.

الف) $(۱۳ \text{ اول است}) \Rightarrow (۲۵ \text{ مربع کامل است})$

ب) $(۴^۲ = ۸) \Rightarrow (۷ > ۳)$

پس $(p \Rightarrow q)$ به انتهای مقدم، درست است.

پ) $(\text{چهارمین فصل سال، پاییز است}) \Rightarrow (\text{اسفند ۳۱ روز دارد})$

پس $(p \Rightarrow q)$ به انتهای مقدم، درست است.

ت) $(x \text{ بر } ۲ \text{ بخش پذیر است}) \Rightarrow (x \text{ عددی زوج است})$

پس $(p \Rightarrow q)$ درست است. دقت کنید که در این گزاره شرطی، مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا p را چشم بسته درست فرض

کرده‌ایم؛ ولی تالی را پس از بررسی، گفتیم که درست است. (می‌دونید که هر عدد زوجی بر ۲ بخش پذیره؛ پس تالی درسته)

پاسخ: پس $(p \Rightarrow q)$ نادرست است.

الف) $(۴ \text{ زوج است}) \Rightarrow (۸ \text{ عدد اول است})$

پس $(p \Rightarrow q)$ نادرست است.

مثال و پاسخ

مثال: اگر گزاره‌های نادرست، q گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. (مشابه تمرین کتاب صفحه ۱۱)

$$(\sim p \vee q) \Rightarrow r$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge r$$

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r)$$

چون p همیشه نادرست است، می‌توانیم به جایش از F استفاده کنیم. q هم همواره درست است؛ پس به جای آن از T استفاده می‌کنیم:

پاسخ:

$$(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv \underbrace{(F \Rightarrow T)}_T \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$$

$$(\sim p \vee q) \Rightarrow r \equiv \underbrace{(T \vee T)}_T \Rightarrow r \equiv T \Rightarrow r \equiv r$$

تذکره: در گزاره $(T \Rightarrow r)$ اگر r درست باشد، به گزاره $(T \Rightarrow T)$ می‌رسیم که درست است؛ ولی اگر r نادرست باشد به گزاره $(T \Rightarrow F)$ می‌رسیم که نادرست است؛ پس همه چیز، بستگی به ارزش r دارد؛ به همین دلیل گفتیم ارزش $(T \Rightarrow r)$ با ارزش r برابر است.

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv F \Rightarrow \underbrace{(T \wedge r)}_r \equiv F \Rightarrow r \equiv T$$

گزاره $(F \Rightarrow r)$ به انتفای مقدم، همیشه درست است؛ یعنی r چه درست باشد چه نادرست، ارزش کل گزاره $(F \Rightarrow r)$ درست است.

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv \underbrace{(F \Rightarrow r)}_T \Rightarrow T \equiv T \Rightarrow T \equiv T$$

T به انتفای مقدم

P	q	~p	p ⇒ q	~p ∨ q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

نکته مهم: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند؛ آن‌گاه رابطه هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ در همواره برقرار است. برای اثبات این فرمول از جدول ارزش‌گذاری استفاده می‌کنیم:

(در مدرسه نیاز به حفظ فرمول نیست، فقط اثبات به کمک جدول از شما فوایسته می‌شه.)

عکس یک گزاره شرطی: در گزاره $(p \Rightarrow q)$ اگر جای مقدم و تالی را با هم عوض کنیم، به گزاره $(q \Rightarrow p)$ می‌رسیم که به آن، عکس گزاره $(p \Rightarrow q)$ می‌گوییم.

عکس نقیض گزاره شرطی: به گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

مثال و پاسخ

مثال: به کمک جدول ارزش‌گذاری، ثابت کنید هر گزاره‌ای به شکل $(p \Rightarrow q)$ با عکس نقیض خود یعنی $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارز است.

پاسخ: می‌خواهیم درستی هم‌ارزی $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow p \Rightarrow q$ را اثبات کنیم:

P	q	~p	~q	p ⇒ q	~q ⇒ ~p
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ترکیب دوشروطی گزاره‌های p و q: در ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ دیدیم که از گزاره p گزاره q را نتیجه گرفتیم. حال می‌خواهیم هم از p گزاره q را نتیجه بگیریم و هم از q گزاره p را. به چنین گزاره مرکبی ترکیب دوشروطی p و q می‌گوییم و آن را با نماد $(p \Leftrightarrow q)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت ساده‌تر، گزاره $(p \Leftrightarrow q)$ همان گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ می‌باشد. یعنی ترکیب عطفی دو گزاره شرطی است.

ضمناً گزاره $(p \Leftrightarrow q)$ را به شکل‌های زیر می‌خوانیم:

- p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را.
- اگر p آن‌گاه q و اگر q آن‌گاه p .
- p شرط لازم و کافی است برای q .

مثلاً گزاره « اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه‌اش با هم مساوی‌اند و برعکس. » را می‌توان به شکل‌های زیر هم بیان کرد:

- مثلث، متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه‌اش با هم مساوی باشند.
- متساوی‌الساقین بودن یک مثلث نتیجه می‌دهد مساوی بودن دو زاویه‌اش را و مساوی بودن دو زاویه یک مثلث، نتیجه می‌دهد متساوی‌الساقین بودن آن مثلث را.
- متساوی‌الساقین بودن یک مثلث، شرط لازم و کافی است برای مساوی بودن دو زاویه آن.

● (دو زاویه‌اش با هم برابرند.) \Leftrightarrow (مثلث، متساوی‌الساقین است.)

جدول ارزش‌گذاری گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

نتیجه جدول: گزاره $(p \Leftrightarrow q)$ فقط وقتی درست (T) است که دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند؛ یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

مثال پاسخ

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف) اگر $\sqrt{3}$ گنگ است؛ آن‌گاه ۳ عددی طبیعی است و برعکس.

ب) رابطه $f = \{(1, a), (2, 3), (1, b)\}$ تابع است اگر و تنها اگر $a = b$.

پ) اگر دو عدد مساوی باشند؛ آن‌گاه مربع‌هایشان نیز مساوی‌اند و برعکس.

ت) $(15 < 7) \Leftrightarrow (3^3 = 27)$.

ث) طبیعی بودن عدد (-3) شرط لازم و کافی است برای گنگ بودن عدد $3/8$.

ج) منفی بودن دلتا نتیجه می‌دهد ریشه‌نداشتن معادله درجه دوم را و ریشه‌نداشتن معادله درجه دوم، نتیجه می‌دهد منفی بودن دلتا را.

پاسخ: الف)

$(\underbrace{3 \text{ عددی طبیعی است.}}_T) \Leftrightarrow (\underbrace{\sqrt{3} \text{ گنگ است.}}_T)$

دو گزاره، هم‌ارزش‌اند؛ پس کل گزاره بالا، درست (T) است.

ب) دقت کنید که در این سؤال، p و q به هم وابسته هستند؛ ضمناً چون گزاره مورد نظر، دوشروطی است، یک بار $(p \Rightarrow q)$ و بار دیگر $(q \Rightarrow p)$ را در نظر می‌گیریم. در هر دو حالت هم، مقدم را درست فرض می‌کنیم و فقط ارزش تالی را مشخص می‌کنیم. اگر در هر دو حالت، تالی‌ها نیز درست بودند، $p \Leftrightarrow q$ درست خواهد بود. می‌دانید اگر f تابع باشد، چون زوج‌های $(1, a)$ و $(1, b)$ عضو اولشان مساوی است، عضوهای دومشان هم باید مساوی باشند؛ یعنی $a = b$.

تالی درست است. مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.

حالت ۱ $f = \{(1, a), (2, 3), (1, b)\} \Rightarrow a = b$ تابع است

حالت ۲ $f = \{(1, a), (2, 3), (1, b)\} \Rightarrow a = b$ تابع است

تالی درست است. مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم.

پس الان فهمیدیم که $(p \Rightarrow q)$ درست است و $(q \Rightarrow p)$ هم درست است؛ لذا $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ هم درست است. به طور ساده‌تر، چون در دو حالت بالا تالی‌ها درست بودند، نتیجه گرفتیم که $p \Leftrightarrow q$ نیز درست است.

شگرد، من نفهمیدم چه وقت باید دو حالت بالا رو در نظر بگیریم استاد؟ چرا در قسمت الف) این کارو نکردین؟

دو گزاره (الف) دو گزاره « $\sqrt{3}$ گنگ است.» و « 3 عددی طبیعی است.» ارتباطی با هم نداشته‌اند، به همین دلیل برای بررسی درستی یا نادرستی $p \Leftrightarrow q$ نیازی به ایجاد ۲ حالت جدا از هم نبوده و لی در قسمت (ب) p و q با هم ارتباط داشته‌اند، به همین دلیل، دو حالت $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با فرض درستی مقدم‌ها جداگانه بررسی کردیم. در هر دو حالت، کافی بود که تالی‌ها درست باشند.

ب باز هم p و q به هم وابسته‌اند؛ پس مانند قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

تالی، درست است \Rightarrow مربع‌هایشان مساوی‌اند \Rightarrow دو عدد مساوی باشند: حالت ۱
 مقدم را درست فرض می‌کنیم

تالی، نادرست است \Rightarrow آن دو عدد مساوی‌اند \Rightarrow مربع‌های دو عدد مساوی باشند: حالت ۲
 مقدم را درست فرض می‌کنیم

در حالت (۲) تالی نادرست شد؛ پس کل گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است. دقت دارید که ممکن است مربع‌های دو عدد مساوی باشند، ولی خود آن دو عدد، مساوی نباشند؛ مثلاً (-3) و $(+3)$ مربع‌هایشان برابرند (۹)؛ ولی خودشان برابر نیستند.

ت $(3^3 = 27) \Leftrightarrow (15 < 7)$
 T F

دو گزاره ارتباطی با هم ندارند؛ پس نیازی نیست دو حالت جداگانه برای بررسی درستی یا نادرستی $p \Leftrightarrow q$ در نظر بگیریم. خیلی سریع می‌گوییم $p \Leftrightarrow q$ نادرست است؛ چون p و q هم‌ارزش نیستند.

ث $(3/8 \text{ عددی گنگ است.}) \Leftrightarrow (-3 \text{ عددی طبیعی است.})$
 F F

باز هم دو گزاره، ارتباطی با هم ندارند؛ پس می‌گوییم چون دو گزاره p و q هم‌ارزش‌اند؛ لذا $p \Leftrightarrow q$ درست است.

ج (معادله درجه دوم ریشه ندارد) \Leftrightarrow (دلته منفی باشد)

تالی‌ها درست‌اند پس کل گزاره هم درست است. \rightarrow

مقدم را خودمان T فرض می‌کنیم. \Rightarrow (معادله درجه دوم، ریشه ندارد.) \Rightarrow (دلته منفی باشد): حالت ۱

مقدم را خودمان T فرض می‌کنیم. \Rightarrow (دلته منفی است.) \Rightarrow (معادله درجه دوم، ریشه ندارد): حالت ۲

یادآوری از سال قبل می‌دانید اگر در معادله درجه دوم، دلته یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ منفی باشد، معادله جواب ندارد. هم‌چنین اگر معادله درجه دومی، جواب نداشته باشد، حتماً دلته آن منفی بوده است.

سؤال‌های امتحانی

۹- جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	اگر $(5^2 + 1)$ زوج است؛ آن‌گاه 100 مربع کامل است.		
۲	اگر؛ آن‌گاه 96 اول است.	✓	
۳	اگر 50 مضرب 10 است؛ آن‌گاه		✓
۴	اگر x عددی اول باشد؛ آن‌گاه x^2 هم عددی اول است.		
۵	اگر $\sqrt{16}$ مربع کامل است؛ آن‌گاه $3^3 > 3^2$.	✓	
۶	اگر 25 مربع کامل آن‌گاه $\sqrt{3}$ عددی گنگ		
۷	اگر a عدد صحیح زوج یا فرد باشد؛ آن‌گاه عدد 1 اول است.		
۸	اگر k عددی فرد باشد؛ آن‌گاه k^2 نیز فرد است.		

۹	زوج بودن عدد ۱۰ نتیجه می دهد زوج بودن مربع هر عدد فرد را.
۱۰	$(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-2} = 3 \Rightarrow (\sqrt{2-\sqrt{5}})^2 = 2-\sqrt{5}$ (مفصوص علاقه مندان)
۱۱	$(3^{-10} < 3^{-1}) \Rightarrow$ حجم کره $= \frac{4}{3}\pi R^3$ (مفصوص علاقه مندان)
۱۲	اگر مُد داده های ۱، ۱، ۲، ۳، ۴ برابر ۱ باشد آن گاه حاصل $\frac{x^2 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + x)(x^2 - 4)}$ برابر با $\frac{1}{x+2}$ است. (مفصوص علاقه مندان)
۱۳	اگر عدد ۵ اول و عدد ۱۰- طبیعی باشد؛ آن گاه عدد $\frac{1}{8}$ گنگ است.
۱۴	جمعه ها بانک ها تعطیل هستند. $\Rightarrow [(-20 \geq -12) \wedge ((-5)^2 = -125)]$
۱۵	دمای هوای شهرها متغیر کمتی نسبتی است. \Rightarrow [میان، نقطه وسط داده های مرتب شده است] $(2^{-5} = -32) \vee$
۱۶	\Rightarrow [خط $y = 3$ افقی است] \wedge [در نقاط سربه سر، سود کار خانه صفر است] مقدار پارامتر همیشه با مقدار آماره برابر است (مفصوص علاقه مندان)
۱۷	$\sim (2^3 = 18) \Rightarrow \sim (4 \notin \mathbb{N})$
۱۸	$\sim [(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (IQR = Q_3 - Q_1)] \Rightarrow$ (۲ فرد است) (مفصوص علاقه مندان) دامنه میان چارکی
۱۹	در یک سری از داده ها، اگر داده دور افتاده داشته باشیم؛ آن گاه شاخص مرکزی میانه بهتر از میانگین است.
۲۰	اگر در معادله $x^2 + 3kx - 2k = 0$ حاصل ضرب ریشه ها برابر ۴ باشد، آن گاه مقدار k برابر ۲ است. (مفصوص علاقه مندان)

۱- جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	اگر عبارت $\frac{2x}{x-1}$ گویا باشد؛ آن گاه $\sqrt{3}$ گنگ است و برعکس.		
۲	اگر x عددی فرد باشد، $(x+1)$ عددی زوج است و برعکس.		
۳	اول بودن عدد ۳۷ شرط لازم و کافی است برای مرکب بودن عدد ۱۷.		
۴	گویا بودن عدد $\frac{1}{6}$ شرط لازم و کافی است برای	✓	
۵	اگر آن گاه تقریباً ۲۵ درصد داده های آماری، کوچکتر از چارک اول هستند و برعکس.		✓
۶	اگر ۱۲۱ مضرب ۳ آن گاه فردوسی، ریاضی دان و برعکس.	✓	
۷	اگر واریانس داده ها صفر باشد، آن گاه داده ها با هم برابرند و برعکس.		
۸	اگر دو عدد فرد باشند، آن گاه مجموع آن ها زوج است و برعکس.		
۹	$[(x=3) \wedge (y=-1)] \Leftrightarrow f = \{ (5, x-y), (1, 2), (5, 4), (1, x+y) \}$ تابع است.		
۱۰	(در منحنی نرمال ۹۶٪ داده ها در بازه $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ قرار دارند.) \Leftrightarrow (مجموع ریشه های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ برابر ۱ است.) (مفصوص علاقه مندان)		
۱۱	(نمودار خط $y = -2x - 1$ از ناحیه سوم نمی گذرد) \Leftrightarrow (در نمودار جعبه ای، میانه همیشه وسط جعبه قرار دارد) (مفصوص علاقه مندان)		
۱۲	حاصل $\frac{a^2 + 2a}{a^2 - 4} + \frac{4 - a}{2 - a}$ برابر ۲ است) \Leftrightarrow (در تجزیه شده $(x^5 - 81x)$ عامل $(x-3)$ وجود ندارد) (مفصوص علاقه مندان)		
۱۳	$(a \times b = 0) \Leftrightarrow [(a = 0) \wedge (b = 0)]$		

۱۱- با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی یا نادرستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

- الف) $(p \Rightarrow p) \equiv T$ ب) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$ پ) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim p) \equiv F$
 ت) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q \equiv F$ ث) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$ ج) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow q$
 چ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p \equiv T$

۱۲- اگر p, q, r سه گزاره دلخواه باشند، جدول ارزش گذاری گزاره‌های زیر را رسم کنید:

- الف) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ ب) $[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow r)]$

۱۳- اگر گزاره‌های درست، q گزاره‌های نادرست و r گزاره‌های دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را بدون رسم جدول، تعیین کنید. (جواب هم‌ارزی‌ها را بنویسید.)

- الف) $(q \Leftrightarrow p) \vee r \equiv ?$ ب) $(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv ?$ پ) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv ?$
 ت) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv ?$ ث) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv ?$ ج) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv ?$
 چ) $(q \vee \sim r) \Rightarrow p \equiv ?$ ح) $\sim (\sim q \vee \sim r) \Rightarrow r \equiv ?$ خ) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \equiv ?$
 د) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv ?$ ذ) $\sim (\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv ?$ ر) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim r \equiv ?$

۱۴- اگر گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow p$ نادرست باشد ارزش $p \wedge \sim q$ را به دست آورید.

۱۵- اگر گزاره $(q \vee r) \Rightarrow p$ نادرست باشد ارزش گزاره $(p \wedge s)$ را تعیین کنید. (p, q, r, s چهار گزاره دلخواه هستند.)

۱۶- بدون استفاده از جدول ارزش گذاری، ثابت کنید که: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$ (مفروضه‌ها علاقه‌مندان)

۱۷- اگر $p \Rightarrow q$ نادرست و $\sim s \Rightarrow \sim r$ نیز نادرست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید: (s و r دو گزاره دلخواه هستند.)

- الف) $(s \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow p)$ ب) $q \Rightarrow (p \vee \sim s)$

۱۸- اگر $p \wedge q \equiv T$ باشد، ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)$ را تعیین کنید.

۴ استدلال ریاضی

در سه درس‌نامه قبلی با انواع گزاره‌ها و ارزش گذاری آن‌ها آشنا شدید. در این درس‌نامه می‌خواهیم چند روش مهم برای استدلال کردن را آموزش دهیم. البته این روش‌ها را در درس منطق خود نیز مشاهده کرده‌اید؛ پس بحث جدیدی نیست. قبل از این که وارد بحث استدلال‌ها شویم، باید نحوه تبدیل گزاره‌های فارسی به نمادهای ریاضی را یاد بگیرید. سال گذشته در مبحث معادلات درجه اول، درجه دوم و معادلات گویا، متغیر را X می‌گرفتیم و با توجه به توضیحات مسئله، یک معادله می‌ساختیم. در معادلاتی که پارسال خواندید، معمولاً فقط یک متغیر مثل X وجود داشت؛ ولی در گزاره‌های ریاضی، ممکن است دو یا چند متغیر هم وجود داشته باشد.

مثال و پاسخ

مثال: گزاره‌های فارسی زیر را به نمادهای ریاضی تبدیل کنید:

الف) ثلث عددی برابر است با ۴ برابر مربع آن عدد.

ب) ۳ درصد قیمت فروش خودرو، برابر سود آن است.

پ) قدر مطلق تفاضل دو عدد حقیقی، بزرگ‌تر از حاصل ضرب آن دو عدد است.

ت) مجموع دو عدد گویا، کوچک‌تر از مجموع مربعات آن‌ها است.

پاسخ: **الف)** عدد موردنظر را X فرض کرده؛ لذا ثلث آن می‌شود $\frac{X}{3}$ و مربع آن می‌شود X^2 ؛ پس چنین می‌نویسیم: $\frac{X}{3} = 4X^2$

ب) اگر قیمت فروش و قیمت خرید خودرو را به ترتیب X و Y فرض کنیم، می‌دانیم سود برابر است با $(X - Y)$ ؛ از طرفی گفته شده، سود برابر با $\frac{3}{100}X$ قیمت فروش است؛ یعنی برابر با $\frac{3}{100}X$ ؛ پس می‌توان این‌طور نوشت:

$$X - Y = \frac{3}{100}X$$

پ) این دو عدد حقیقی را X و Y می‌نامیم (\mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی است).

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x - y| > x \cdot y \quad \text{یا} \quad |y - x| > x \cdot y$$

دقت کنید که در ریاضی، عبارتهای $|x - y|$ و $|y - x|$ فرقی با هم ندارند.

ت) اگر این دو عدد گویا را X و Y بنامیم خواهیم داشت: (\mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا است).

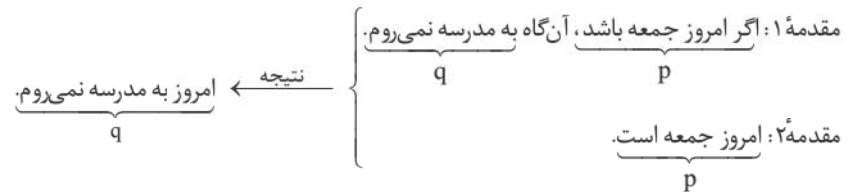
$$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y < x^2 + y^2$$

استدلال استثنایی (قیاس استثنایی)

این استدلال را به شکل‌های زیر می‌توان بیان کرد (∴ نماد نتیجه‌گیری است):

مقدمه ۱: اگر الف آن‌گاه ب مقدمه ۲: الف ∴ ب	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ <p style="text-align: center;"> \downarrow نتیجه \downarrow مقدمه ۲ \downarrow مقدمه ۱ </p>	مقدمه ۱: مقدمه ۱ مقدمه ۲: مقدمه ۲ ∴ نتیجه
--	---	---

به مثال زیر دقت کنید:



نکته نتیجه استدلال استثنایی در صورتی قرص و محکم است که مقدمه ۱ از نظر علمی و منطقی درست باشد. در غیر این صورت، به نتیجه آن اعتمادی نیست. البته صرف‌نظر از نتیجه، این روش استدلال کردن، همیشه درست است. به مثال زیر توجه کنید:

مقدمه ۱: اگر روزی ۱۰ صفحه درس بخوانید، آن‌گاه در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شوید. $\left\{ \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right.$

مقدمه ۲: علی روزی ۱۰ صفحه درس می‌خواند. p

نتیجه ← علی در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شود.

گفتیم این نوع استدلال، از لحاظ ساختاری درست است؛ ولی نمی‌توانیم بگوییم نتیجه به دست آمده حتماً درست است؛ چون مقدمه ۱ ممکن است درست نباشد؛ یعنی نمی‌توان به طور قطعی گفت هر کس روزی ۱۰ صفحه درس بخواند، در رشته حقوق دانشگاه تهران قبول می‌شود. شاید یک نفر با روزی ۵ صفحه و فردی دیگر با روزی ۱۰۰ صفحه مطالعه، بتواند در این رشته قبول شود.

مثال و پاسخ

مثال از مقدمه ۱ و ۲ که در زیر آمده، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این نتیجه حتماً درست است؟

مقدمه ۱: اگر قیمت کاغذ بالا برود، آن‌گاه قیمت کتاب زیاد می‌شود.

مقدمه ۲: کاغذ گران شد.

پاسخ نتیجه این است که قیمت کتاب هم گران می‌شود. بله این نتیجه درست است؛ چون مقدمه ۱ از نظر منطقی درست است.

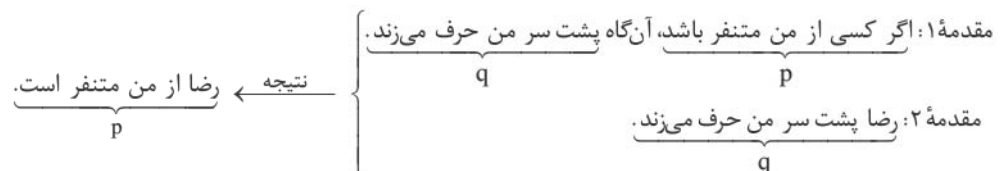
مغالطه: گاهی اوقات از استدلال استثنایی به شکلی نادرست استفاده می‌شود که به آن مغالطه یا سفسطه یا مغلطه می‌گوییم. در مغالطه، نحوه نتیجه‌گیری به این صورت است:

مقدمه ۱: $p \Rightarrow q$

مقدمه ۲: q

∴ p

به عنوان مثال:



نتیجه به دست آمده، ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی این نوع استدلال در علم منطق، نادرست است.

البته نتیجه مغالطه گاهی اوقات درست است؛ به مثال زیر توجه کنید:

مقدمه ۱: اگر کسی در امتحان به تمام سؤالات، جواب درست بدهد، آن‌گاه نمره‌اش ۲۰ می‌شود.

مقدمه ۲: نمره علی در ریاضی ۲۰ شده است.

نتیجه‌گیری طبق مغالطه: علی به تمام سؤالات درس ریاضی، درست جواب داده است.

ملاحظه می‌کنید که نتیجه حاصل در این مثال، قطعاً درست است؛ ولی باز هم تأکید می‌کنم که طبق قرارداد کتاب درسی‌تان، این نوع استدلال کردن، نادرست است. (در این زمینه، میان دانشمندان علم منطق هم اختلاف نظر وجود دارد.)

مثال و پاسخ

مثال طبق مغالطه، از مقدمه ۱ و ۲ زیر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این نتیجه درست است؟ آیا این روش نتیجه‌گیری (استدلال) درست است؟

مقدمه ۱: اگر کسی در رشته ریاضی درس بخواند، آن‌گاه ذهنش خوب کار می‌کند.
مقدمه ۲: زهرا ذهنش خوب کار می‌کند.

پاسخ از مغالطه نتیجه می‌گیریم که زهرا در رشته ریاضی درس می‌خواند. این نتیجه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی این روش استدلال کردن، طبق مفاهیم کتاب درسی‌تان، نادرست است.

استفاده از عکس‌المتین یک گزاره برای اثبات آن گزاره

حتماً یادتان هست که در مواقعی که در گزاره $q \Rightarrow p$ مقدم و تالی به هم وابسته بودند، مقدم را خودمان درست (T) فرض می‌کردیم و درستی یا نادرستی تالی را بررسی می‌کردیم. گاهی اوقات اثبات به این روش کمی دشوار است. ما همواره می‌توانیم به جای اثبات $q \Rightarrow p$ ، گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را اثبات کنیم؛ زیرا ارزش گزاره‌های $q \Rightarrow p$ و $\sim p \Rightarrow \sim q$ یکسان است؛ یعنی این گزاره‌ها هم‌ارز هستند.

به عنوان مثال می‌خواهیم ثابت کنیم که «با فرض آن که $n \in \mathbb{Z}$ است، اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n هم زوج است.»
الان اثبات $q \Rightarrow p$ بسیار دشوار است؛ پس $\sim p \Rightarrow \sim q$ را اثبات می‌کنیم؛ یعنی:

n^2 هم زوج نیست (فرد است). \Rightarrow اگر n زوج نباشد (فرد باشد) باز هم مقدم را خودمان درست فرض می‌کنیم؛ یعنی الان می‌دانیم n فرد است. اعداد فرد را به شکل $2k+1$ نمایش می‌دهیم ($k \in \mathbb{Z}$)؛ لذا:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{\text{فاکتور از } 2} = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 = 2m + 1$$

پس ثابت کردیم که n^2 هم عددی فرد است. (در این‌گونه سؤالات همیشه از عدد ۲ فاکتور می‌گیریم و داخل پرانتز را m می‌نامیم. اگر به $2m$ رسیدیم، می‌گوییم عدد زوج است. اگر به $2m+1$ یا $2m-1$ رسیدیم، می‌گوییم عدد فرد است.)

یافتن محل خطا در محاسبات

خیلی وقت‌ها بدون توجه به اصول اولیه علم ریاضی، مسئله‌ای را حل می‌کنیم و به نتیجه غلط می‌رسیم. الان می‌خواهیم چند نمونه از این اشتباهات متداول را بررسی کنیم. مهم این است که خودتان بتوانید مکان وقوع خطا را پیدا کرده و بتوانید علت را توضیح دهید؛ مثلاً دانش‌آموزی ادعا می‌کند که معادله $x^2 - x = 0$ فقط یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. استدلال او (محاسبات او) به شکل زیر بوده است. می‌خواهیم مکان وقوع خطا را به وی نشان دهیم تا دیگر مرتکب آن نشود:

$x^2 - x = 0$ معادله اصلی $\xrightarrow{\text{مرحله ۱ فاکتورگیری}} x(x-1) = 0$ $\xrightarrow{\text{مرحله ۲ تقسیم دو طرف بر } x} \frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x}$ $\xrightarrow{\text{مرحله ۳ ساده‌سازی}} x-1 = 0$ $\xrightarrow{\text{مرحله ۴ جواب}} x = 1$
اشتباه او در مرحله ۲ رخ داده است. در ریاضی نمی‌توانیم دو طرف معادله را بر یک متغیر تقسیم کنیم؛ چون ممکن است آن متغیر (در این‌جا x) صفر باشد. اگر x صفر باشد، مخرج کسرها صفر شده و به عبارات‌های تعریف‌نشده می‌رسیم. اگر فرض می‌کردیم که $x \neq 0$ است (یعنی فرد طراح می‌گفت $x \neq 0$)، محاسبات این دانش‌آموز خطایی نداشت.

مثال و پاسخ

مثال دانش‌آموزی گزاره « $a < b \Rightarrow ac < bc$ » را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی‌اند به صورت زیر اثبات کرده است. ایراد این استدلال کجا است؟
 $a < b \xrightarrow{\text{مرحله ۱ جمع دو طرف با } c} a + c < b + c \xrightarrow{\text{مرحله ۲ ضرب دو طرف در } c} c(a + c) < c(b + c)$ (فرض درست)

$$\xrightarrow{\text{مرحله ۳ ضرب } c \text{ در پرانتزها}} ac + c^2 < bc + c^2 \xrightarrow{\text{مرحله ۴ حذف } c^2 \text{ از دو طرف}} ac < bc$$

پاسخ اشتباه این دانش‌آموز در مرحله ۲ است؛ چون می‌دانیم که اگر عددی مثل c مثبت باشد، با ضرب دو طرف نامعادله در c جهت عوض نمی‌شود؛ ولی اگر c منفی باشد با ضرب دو طرف نامعادله در c جهت عوض می‌شود، ولی در فرض سؤال، گفته شده c عددی حقیقی است؛ یعنی هم می‌تواند مثبت باشد، هم منفی و هم صفر؛ لذا چون تکلیف علامت c معلوم نیست، نمی‌توانیم دو طرف نامعادله $a + c < b + c$ را در c ضرب کنیم. (هتی آگه c صفر هم باشه، باز هم نمی‌تونیم دو طرف رو در c ضرب کنیم؛ چون به نامساوی $0 < 0$ می‌رسیم که اشتباهه.) اگر در صورت سؤال گفته می‌شد $c > 0$ است، اشتباه او اصلاح می‌شد.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) جمله داده شده، امری است و خبری نمی‌باشد؛ پس گزاره نیست.

ب) جمله داده شده گزاره نیست؛ چون هر کسی در مورد بسیار بزرگ بودن 10^4 می‌تواند برداشت خاصی داشته باشد؛ یعنی ممکن است یک نفر بگوید 10^4 خیلی بزرگ است و نفر دیگر بگوید 10^4 اصلاً بزرگ نیست؛ پس ارزش گذاری این جمله، امکان پذیر نبوده و لذا گزاره نیست.

پ) گزاره است و درست می‌باشد؛ زیرا: $1, 3, 4, 8, 17, 20, 31, 54$

$$\text{میانگین} = \frac{1+3+4+8+17+20+31+54}{8} = \frac{138}{8} = 17.25$$

ت) گزاره نادرست است. از نمودار حبابی معمولاً برای نمایش هم‌زمان ۳ متغیر استفاده می‌شود.

ث) گزاره است ولی ارزش آن نامعلوم است؛ یعنی درستی یا نادرستی آن، بستگی به مقدار a دارد. (الان فقط می‌دونیم a طبیعی ولی نمی‌دونیم زوجه یا فرد).

ج) گزاره نادرست است؛ چون مثلاً اگر $n = 1$ باشد؛ آن‌گاه: $(-3)^{n+1} = (-3)^2 = 9$

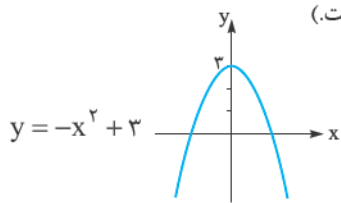
چ) گزاره درست است؛ چون بزرگ‌ترین عدد اول دورقمی، ۹۷ است.

ح) گزاره درست است؛ چون به خاطر وجود $|x|$ عبارت $\frac{|x|}{3x^2 + 5x}$ گویا نیست.

خ) گزاره درست است؛ چون عضوهای اول زوج مرتبها، همگی مختلف‌اند.

د) گزاره نادرست است؛ چون بُرد تابع $y = 3$ برابر $\{3\}$ است. (دامنه تابع $y = 3$ برابر کل اعداد حقیقی است).

ذ) گزاره نادرست است؛ زیرا این سهمی از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.



ر) گزاره درست است. چون اولاً تعداد هلی‌کوپترهای کشورها قابل مقایسه‌اند؛ ثانیاً اختلاف هر دوی آن‌ها با معنی است و ثالثاً نسبت هر دو مقدار آن‌ها نیز با معنی است.

ز) گزاره نادرست است؛ چون انحراف معیار جذر واریانس است.

-۲

ارزش $\sim p$	گزاره $\sim p$	ارزش p	گزاره p
T	$10^3 + 10^4 \neq 10^7$	F	$10^3 + 10^4 = 10^7$ توضیح: اگر به جای + علامت \times داشتیم، رابطه بالا درست می‌شد؛ یعنی: $10^3 \times 10^4 = 10^7$
F	مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت نیست.	T	مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است.
T	$-8 \geq -10$	F	$-8 < -10$
T	 توضیح: هر خط عمودی دلخواه (هر خط موازی محور عرض‌ها) نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس نمودار، تابع است.	F	 نمودار تابع نیست.
F	مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر 2^4 نیست.	T	مجموع اعداد سطر پنجم مثلث خیام برابر 2^4 است. توضیح: مجموع اعداد سطر n ام مثلث خیام 2^{n-1} است؛ پس مجموع اعداد سطر پنجم برابر $2^{5-1} = 2^4$ است.

طول رأس سهمی $y = x^2 - 8x + 5$ برابر با ۳ است. طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ توضیح: برابر $x = \frac{-b}{2a}$ است؛ لذا در گزاره داده شده خواهیم داشت: $x = \frac{-(-8)}{2(1)} = 4$	F	طول رأس سهمی $y = x^2 - 8x + 5$ برابر با ۳ نیست.	T
در تجزیه $4x^2 - 8x - 21$ عامل $(2x + 3)$ وجود دارد.	T	در تجزیه $4x^2 - 8x - 21$ عامل $(2x + 3)$ وجود ندارد. توضیح: $(2x)^2 - 4(2x) - 21 = (2x - 7)(2x + 3)$ اتحاد جمله مشترک	F
در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰۰، ۲۸۰۰۰ و ۵ برای نمایش محل تمرکز داده‌ها شاخص میانه بهتر از میانگین است. توضیح: چون داده ۵ دورافتاده است (از بقیه داده‌ها خیلی کوچک‌تر است)، شاخص میانه بهتر از شاخص میانگین است.	T	در داده‌های ۱۲۰۰۰، ۴۲۰۰۰، ۲۸۰۰۰ و ۵ برای نمایش محل تمرکز داده‌ها، میانه بهتر از میانگین نیست.	F
مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج است.	T	مجموع هر دو عدد فرد طبیعی، عددی زوج نیست. (عددی فرد است.)	F
قرینه هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد است. توضیح: مثلاً قرینه ۵ - می‌شود ۵ که کوچک‌تر از ۵ - نیست؛ پس گزاره داده شده نادرست است.	F	قرینه هر عدد حقیقی منفی، کوچک‌تر از خود آن عدد نیست.	T
معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ از خود آن عدد، کوچک‌تر است. توضیح: مثلاً معکوس ۲ می‌شود $\frac{1}{2}$ که از خود ۲ کوچک‌تر است؛ یا معکوس ۱۰ می‌شود $\frac{1}{10}$ که از خود ۱۰ کوچک‌تر است. برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ این خاصیت وجود دارد؛ پس گزاره بالا درست است.	T	معکوس هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ از خود آن عدد، کوچک‌تر نیست.	F
مجموع دو عدد $1 + \sqrt{3}$ و $1 - \sqrt{3}$ عددی گنگ است. توضیح: جمع این دو عدد گویا است؛ زیرا: $1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2$	F	مجموع دو عدد $1 + \sqrt{3}$ و $1 - \sqrt{3}$ عددی گنگ نیست.	T

۳- ردیف ۱: ۷۵ عددی اول است و $(-3)^4$ عددی منفی نیست. \Leftarrow در کل نادرست است.

ردیف ۲: چون «گزاره رنگ چشم افراد، کیفی اسمی است.» گزاره‌ای درست است؛ پس باید در جای خالی، گزاره‌ای درست قرار دهیم تا ارزش کل گزاره عطفی درست شود. در جای خالی، هر گزاره درست دلخواهی می‌توان قرار داد؛ مانند:

«۲ عددی اول است.»

ردیف ۳: گزاره «مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲» درست است؛ پس برای آن که کل گزاره عطفی نادرست باشد باید در جای خالی، یک گزاره نادرست دلخواه قرار دهیم؛ مثلاً:

«۵ عددی زوج است.»

ردیف ۴: ۱۲۱ مضرب ۱۱ است و $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ \Leftarrow کل گزاره درست است.

ردیف ۵: باید دو گزاره دلخواه درست مثال بزنیم تا کل گزاره، درست شود. ۴ عددی طبیعی است و $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

ردیف ۶: همه سوره‌های قرآن با بسم‌الله شروع می‌شوند و سوره بقره طولانی‌ترین سوره قرآن است. \Leftarrow پس در کل، گزاره نادرست است.

T

F (سوره توبه با بسم‌الله شروع نمی‌شود.)

ردیف ۷: مجموعه تهی $\{\emptyset\}$ است و $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N} \Leftarrow$ پس کل گزاره نادرست است.
 F (مجموعه $\{\emptyset\}$ یک F (صفر، عدد طبیعی نیست).
 عضو دارد و تهی نیست.)

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3^3} = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{9}\right)^3 = -\frac{8}{729}$$

ردیف ۸: $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \times 3^{-3} = \frac{1}{8}$ و $\sqrt{9+100} = 3+10 \Leftarrow$ در کل نادرست است.
 F (بین ۹ و ۱۰۰ جمع است و نمی‌توانیم آن‌ها را تک‌تک از رادیکال خارج کنیم، اگر ضرب یا تقسیم بود می‌شد.)

ردیف ۹: هر دو اتحاد داده شده درست هستند؛ پس کل گزاره درست است.

ردیف ۱۰: گزاره «شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است.» نادرست است.

(شیب هر خط موازی محور عرض‌ها صفر است) \wedge (یکی از معایب سرشماری، عدم امکان استفاده در بررسی‌های مخرب است) \wedge (شیب هر خط عمودی، تعریف نشده است.)

پس در کل، این گزاره نادرست است.

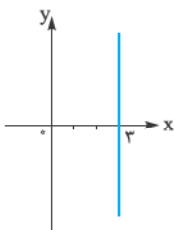
ردیف ۱۱: $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ و $\sqrt{(-5)^2} = 5 \neq -5 \Leftarrow$ پس این گزاره، در کل نادرست است. دقت کنید که هر عدد به توان صفر برسد جواب ۱ است.

$$-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$$

ضمناً:

ردیف ۱۲: عدد ۲، هم زوج است و هم اول؛ پس گزاره مورد نظر، درست است.

ردیف ۱۳: نمودار خط $x = 3$ به شکل مقابل است:



ملاحظه می‌کنید که این خط از نواحی اول و چهارم می‌گذرد؛ پس گزاره داده شده، درست است.

ردیف ۱۴: کسر $\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ گویا است یا ۹۱ عددی مرکب است. \Leftarrow کل گزاره، درست است.
 T (۹۱ بر ۷ و ۱۳ بخش پذیر است.)

ردیف ۱۵: قرآن ۱۱۸ سوره دارد یا آخرین پیامبر الهی، حضرت محمد (ص) بود. \Leftarrow کل گزاره، درست است.
 T (قرآن ۱۱۴ سوره دارد)

طبق فرض سؤال، کل گزاره باید درست باشد به همین علت، یک گزاره ساده درست، در جای خالی قرار دادیم؛ چون می‌دانیم که $T \vee F \equiv T$

ردیف ۱۶: ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست یا ۲ عددی فرد است. \Leftarrow کل گزاره نادرست است.
 F

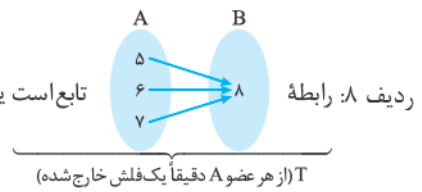
ردیف ۱۷: ۳ عددی اول است یا معادله $x^2 + x + 3 = 0$ دو ریشه دارد. \Leftarrow کل گزاره درست است.
 T (دلتای معادله منفی است پس ریشه ندارد.)

در جای خالی، گزاره درست قرار دادیم؛ زیرا می‌دانیم که: $T \vee F \equiv T$

ردیف ۱۸: افلاطون شاگرد سقراط بود یا هفته هفت روز دارد. \Leftarrow کل گزاره درست است.
 T

ردیف ۱۹: اعداد سطر سوم مثلث خیام (۱ ۲ ۱) هستند یا سهمی $y = x^2 + 1$ ماکزیمم دارد. \Leftarrow کل گزاره درست است.
 T (ضریب x^2 مثبت است؛ پس سهمی مینیمم دارد.)

ردیف ۲۰: در تابع $f(t) = \sqrt{t+1}$ متغیر مستقل $f(t)$ است یا وزن افراد، کمی فاصله‌ای است. \Leftarrow پس کل گزاره نادرست است.
 F (متغیر مستقل و $f(t)$ متغیر وابسته است.) F (وزن، متغیر کمی نسبتی است.)



تابع است یا نمودار میله‌ای، یک نمودار تک متغیره است. \Leftarrow کل گزاره، درست است.

ردیف ۹: $(\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}) \vee (\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q})$ \Leftarrow کل گزاره، درست است.

ردیف ۱۰: می‌دانیم $\sqrt{x^2} = |x|$ یعنی هرگاه عبارتی از رادیکال با فرجه زوج خارج شود، باید از قدرمطلق استفاده کنیم؛ پس چون یک گزاره از دو گزاره ساده داده شده درست است، می‌توانیم گزاره دیگر را بررسی نکنیم و بلافاصله بگوییم ارزش کل گزاره فصلی درست است ولی برای تمرین بیشتر، گزاره دیگر را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{(2 \times 3)^5}{(2^3)^5} = \frac{2^3 \times 3^5}{3^2 \times 3^4} \times \frac{2^5 \times 3^5}{2^{15}} = \frac{2^8 \times 3^5}{3^6 \times 2^{15}} = 3$$

کل گزاره درست است. $\Rightarrow (\frac{2^3 \times 3^{-2}}{2^{-5} \times 3^4} \times \frac{(2 \times 3)^5}{(2^3)^5} = 3) \vee (\sqrt{x^2} = |x|)$

ردیف ۱۱: عدد ۱۹ زوج یا ۱۹ مربع کامل است. \Leftarrow در کل، نادرست است.

ردیف ۱۲: عدد ۲۴ بر ۳ بخش پذیر است یا ۲۴ بر ۵ بخش پذیر است. \Leftarrow در کل، درست است.

۵- الف)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

پس هم‌ارزی داده شده، درست است. (قانون دمرگان است.)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

لذا هم‌ارزی موردنظر، درست است. (قانون دمرگان است.)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

هم‌ارزی داده شده، درست است.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

(ت)

همارزی داده شده، درست است.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

(ث)

پس همارزی $p \vee (p \wedge q) \equiv q$ نادرست است.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$p \wedge q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

(ج)

همارزی داده شده، درست است.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

(چ)

پس همارزی $(p \vee \sim p) \equiv T$ درست است.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

(ح)

پس همارزی $(p \wedge \sim p) \equiv F$ درست است.

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

(خ)

پس همارزی داده شده، درست است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F

(د)

پس همارزی داده شده نادرست است.

(د)

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

پس هم ارزی داده شده، درست است.

$$p \vee (q \wedge r) \equiv T \vee (T \wedge r) \equiv T \vee r \equiv T$$

۶- $p \wedge q$ درست است؛ پس هم p درست است هم q ؛ لذا:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

۷-

$$(\sim p \vee q) \wedge p \equiv p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \equiv F$$

خاصیت توزیع پذیری
جایجا می کنیم

۸- گفته شده ارزش $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$ نادرست است؛ پس هم $\sim p$ نادرست است و هم $(p \wedge \sim q)$. از نادرستی $\sim p$ نتیجه می گیریم که p درست است؛ لذا برای آن که $(p \wedge \sim q)$ نادرست باشد، باید $\sim q$ نادرست باشد؛ پس خود q درست است، پس در کل می توان گفت:

$$\begin{cases} p \equiv T \\ \sim p \equiv F \\ q \equiv T \\ \sim q \equiv F \end{cases}$$

ارزش r نامعلوم است.
(مهم هم نیست.)

$$(q \vee r) \vee p \equiv (T \vee r) \vee T \equiv T \vee T \equiv T$$

$$\sim(p \wedge q) \wedge \sim r \equiv \sim(T \wedge T) \wedge \sim r \equiv \sim T \wedge \sim r \equiv F \wedge \sim r \equiv F$$

۹- در تمام ردیف ها، دقت کنید که در گزاره شرطی، فقط اگر به $T \Rightarrow F$ رسیدیم، گزاره شرطی نادرست خواهد بود.

$$\underbrace{(5^2 + 1)}_T \Rightarrow \underbrace{100 \text{ مربع کامل است}}_T \rightarrow \text{کلاً درست است.}$$

ردیف ۱:

$$\underbrace{2 \text{ فرد است}}_F \Rightarrow \underbrace{96 \text{ اول است}}_F$$

ردیف ۲:

(۹۶ مرکب است؛ چون مثلاً بر ۲ بخش پذیر است.)

پس در جای خالی، گزاره ای نادرست قرار دادیم (۲ فرد است)؛ چون می دانیم ارزش $F \Rightarrow F$ برابر T است.

$$\underbrace{50 \text{ مضرب } 10 \text{ است}}_T \Rightarrow \underbrace{3 \text{ عددی گنگ است}}_F$$

ردیف ۳:

در جای خالی، گزاره نادرست (۳ عددی گنگ است) را قرار دادیم تا به $T \Rightarrow F$ برسیم؛ چون می دانیم که $T \Rightarrow F \equiv F$.

ردیف ۴: مقدم و تالی به هم وابسته هستند؛ پس مقدم را خودمان درست فرض می کنیم و تالی را بررسی می کنیم. اگر x عددی اول مثل ۳ باشد،

آن گاه x^2 دیگر اول نیست؛ چون x^2 برابر ۹ می شود که مرکب است. در مورد تمام اعداد اول دیگر هم، همین اتفاق می افتد؛ پس:

$$\underbrace{x \text{ اول است}}_T \Rightarrow \underbrace{x^2 \text{ اول است}}_F \rightarrow \text{کلاً نادرست است.}$$

$$\underbrace{\sqrt{16} \text{ مربع کامل است}}_T \Rightarrow \underbrace{3^2 > 2^3}_T \rightarrow \text{کلاً درست است.}$$

ردیف ۵:

(عدد ۴ مربع کامل است.)

ردیف ۶: گفته شده، گزاره $p \Rightarrow q$ باید نادرست باشد؛ پس گزاره p باید درست و q باید نادرست باشد. پس در جای خالی اول، کلمه «است» و

در جای خالی بعدی، کلمه «نیست» قرار می دهیم.

$$\underbrace{(a \text{ عدد صحیح زوج یا فرد است})}_T \Rightarrow \underbrace{(a \text{ عدد اول است})}_F \rightarrow \text{کلاً نادرست است.}$$

ردیف ۷:

(عدد ۱ نه اول است نه مرکب.) (چون یک عدد صحیح بالاخره یا زوج است یا فرد.)

ردیف ۸: مقدم و تالی به هم وابسته هستند؛ پس خودمان مقدم را درست فرض می کنیم و فقط درستی یا نادرستی تالی را بررسی می کنیم:

$$\underbrace{(k \text{ عددی فرد است})}_T \Rightarrow \underbrace{(k^2 \text{ فرد است})}_T \rightarrow \text{کلاً درست است.}$$

خودمان T فرض می کنیم.

$$5^2 = 25, (-3)^2 = 9$$

توجه دارید که هر عدد فردی را که به توان ۲ برسانید، جواب باز هم فرد می شود؛ مثلاً:

ردیف ۹:

کلاً نادرست است. \rightarrow مربع هر عدد فرد زوج است \Rightarrow عدد ۱۰ زوج است

ردیف ۱۰: می‌دانید که $\sqrt{x^2} = |x|$; لذا:

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-2} = (\sqrt{3})^{4-2} = (\sqrt{3})^2 = |3| = 3$$

کلاً درست است. $\rightarrow (\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^{-2} = 3$ متن سؤال

ردیف ۱۱: می‌دانیم که: $3^{-1} = \frac{1}{3}$ و $3^{-1} = \frac{1}{3}$; پس مخرج کسر $\frac{1}{3}$ بزرگ‌تر از مخرج کسر $\frac{1}{3}$ بوده و لذا $\frac{1}{3} > \frac{1}{3}$.

کلاً درست است. \rightarrow حجم کره $= \frac{4}{3}\pi R^3$ متن سؤال

ردیف ۱۲:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + x)(x^2 - 4)} = \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}$$

اتحاد مزدوج فاکتوراز x

از طرفی مُد داده‌های ۱، ۱، ۲، ۳، ۴ برابر ۱ است؛ لذا:

کلاً نادرست است. \rightarrow حاصل $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + x)(x^2 - 4)}$ برابر با $\frac{1}{x+2}$ است (مد داده‌های (۱، ۱، ۲، ۳، ۴) برابر است)

ردیف ۱۳:

کلاً درست است. \rightarrow (عدد ۱/۸ گنگ است) \wedge (۱۰ - طبیعی است) \wedge (عدد ۵ اول است)

ردیف ۱۴:

کلاً درست است. \rightarrow (جمعه‌ها بانکها تعطیل اند) \wedge ((-۵)^۳ = -۱۲۵) \wedge (-۲ \geq -۱۲)

ردیف ۱۵:

کلاً نادرست است. \rightarrow (دمای هوای شهرها، متغیر کمی نسبتی است) \vee (میان، نقطه وسط داده‌های مرتب شده است) \vee (۳^{-۵} = -۳۲)

تذکره دمای هوای شهرها، متغیر کمی فاصله‌ای است.

ردیف ۱۶: سال گذشته خواندید که پارامتر و آماره، لزوماً مساوی نیستند. ضمناً در نقاط سربسر، سود کارخانه صفر است و هر خط به شکل $y = k$ افقی است.

(خط $y = 3$ افقی است) \wedge (در نقاط سربسر، سود کارخانه صفر است) \Rightarrow (مقدار پارامتر، همیشه با مقدار آماره برابر است)

پس گزاره بالا در کل، درست است.

ردیف ۱۷:

$$\sim (2^3 = 18) \Rightarrow \sim (4 \notin \mathbb{N})$$

کلاً درست است. $\Rightarrow 2^3 \neq 18 \Rightarrow 4 \in \mathbb{N}$

اگر گزاره‌های داخل پرانتزها را نقیض کنیم خواهیم داشت:

ردیف ۱۸: مقدم را باید نقیض کنیم. برای این کار از قانون دمرگان استفاده می‌کنیم؛ یعنی \sim را به تک تک گزاره‌ها اثر می‌دهیم و « \wedge » تبدیل به « \vee » می‌شود:

پس کلاً درست است. \rightarrow (۲ فرد است) $\Rightarrow (\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z} \vee IQR \neq Q_3 - Q_1) \Rightarrow (\sim (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}) \vee \sim (IQR = Q_3 - Q_1))$

ردیف ۱۹: مقدم و تالی به هم وابستگی دارند؛ لذا مقدم را T فرض کرده و فقط تالی را بررسی می‌کنیم:

کلاً درست است. \rightarrow (میان بهتر از میانگین است) \Rightarrow (اگر داده دور افتاده داشته باشیم خودمان T فرض می‌کنیم)

ردیف ۲۰: ابتدا با توجه به این که حاصل ضرب ریشه‌ها ۴ است، خودمان مقدار k را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + 3kx - 2k = 0 \Rightarrow \frac{-2k}{1} = 4 \Rightarrow k = -2$$

در معادله $x^2 + 3kx - 2k = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۴ است خودمان T فرض می‌کنیم $\Rightarrow (k=2)_F$ کلاً نادرست است.

۱۰- ردیف ۱: اگر $\frac{2x}{x-1}$ گویا باشد، آن گاه $\sqrt{3}$ گنگ است و برعکس \leftarrow کاملاً درست است. (دو گزاره هم‌ارزش هستند).

ردیف ۲: اگر x عددی فرد باشد، آن گاه $(x+1)$ عددی زوج است و برعکس.

باید دو حالت را در نظر بگیریم؛ چون دو گزاره ساده بالا به هم ارتباط دارند:

حالت ۱: $(x+1)$ زوج است $\Rightarrow x$ فرد باشد \leftarrow خودمان T فرض می‌کنیم
حالت ۲: x فرد است $\Rightarrow (x+1)$ زوج است \leftarrow خودمان T فرض می‌کنیم
کلاً درست است.

در هر دو حالت، تالی‌ها درست شدند؛ زیرا در حالت اول اگر x فرد باشد، مثلاً ۳ باشد، $(x+1)$ می‌شود ۴ که زوج است (به x هر عدد فردی بدهید $x+1$ زوج می‌شود) برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی اگر $x+1$ زوج باشد، x فرد است؛ مثلاً اگر $x+1=6$ باشد، آن گاه $x=5$.

ردیف ۳: اول بودن عدد ۳۷ شرط لازم و کافی است برای مرکب بودن ۱۷ \leftarrow کلاً نادرست است. (دو گزاره هم‌ارزش نیستند).

ردیف ۴: برای آن که کل گزاره دوشرطی درست شود، باید در جای خالی، گزاره‌ای دلخواه ولی درستی را قرار دهیم تا ارزش هر دو گزاره، یکسان شود.

گویا بودن عدد $1/6$ شرط لازم و کافی است برای زوج بودن عدد ۸ \leftarrow کلاً درست است.

ردیف ۵: می‌خواهیم ارزش کل گزاره نادرست شود. از طرفی ارزش گزاره «۲۵ درصد داده‌های آماری کوچک‌تر از چارک اول هستند» درست است؛ پس در جای خالی باید گزاره‌ای نادرست قرار دهیم تا دو گزاره، هم‌ارزش نشوند. ما به دلخواه در جای خالی، گزاره « $\sqrt{5}$ عددی گویا است» را قرار می‌دهیم. ردیف ۶: چون ارزش کل گزاره باید درست باشد، دو گزاره ساده ما، باید هم‌ارزش باشند (یا هر دو درست یا هر دو نادرست).

می‌دانیم ۱۲۱ بر ۳ بخش پذیر نیست و فردوسی هم شاعر بوده است نه ریاضی‌دان؛ پس این سؤال ۲ جواب دارد. (هر کدام را که بنویسید اشکالی ندارد).

اگر ۱۲۱ مضرب ۳ است، آن گاه فردوسی، ریاضی‌دان بوده است. \leftarrow کلاً درست

اگر ۱۲۱ مضرب ۳ نیست، آن گاه فردوسی، ریاضی‌دان نبوده است. \leftarrow کلاً درست

ردیف ۷: اگر واریانس داده‌ها صفر باشد آن گاه داده‌ها با هم برابرند و برعکس.

باید ۲ حالت در نظر بگیریم؛ چون گزاره‌های ساده موجود در گزاره دوشرطی بالا به هم وابستگی دارند:

حالت ۱: داده‌ها برابرند $\Rightarrow (=0)$ واریانس \leftarrow خودمان T فرض می‌کنیم
حالت ۲: $(=0)$ واریانس \Rightarrow داده‌ها برابر باشند \leftarrow خودمان T فرض می‌کنیم
کلاً درست است.

ردیف ۸: باز هم دو گزاره ساده وابسته به هم داریم؛ لذا:

حالت ۱: مجموع آن‌ها زوج است \Rightarrow دو عدد فرد باشند \leftarrow خودمان T
حالت ۲: دو عدد فرد هستند \Rightarrow مجموع دو عدد زوج باشد \leftarrow خودمان F
کلاً نادرست است.

در حالت ۱ همیشه تالی درست است؛ ولی در حالت ۲ ممکن است مجموع دو عدد زوج باشد، ولی خود آن دو عدد فرد نباشند؛ مثلاً اگر مجموع دو عدد برابر ۱۰ باشد، آن گاه خود آن دو عدد می‌توانند ۴ و ۶ باشند.

ردیف ۹: می‌دانیم اگر f تابع باشد، عضوهای اول زوج مرتبها نباید مساوی باشند یا اگر مساوی بودند، عضوهای دومشان هم مساوی باشند. اگر در f به جای x و y به ترتیب ۳ و ۱- که داده شده را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f = \left\{ \underbrace{(\underline{5}, \underline{4}), (\underline{1}, \underline{2})}_{\text{تکراری}}, \underbrace{(\underline{5}, \underline{4}), (\underline{1}, \underline{2})}_{\text{تکراری}} \right\} \Rightarrow \text{پس } f \text{ تابع است.}$$

پس کل گزاره دوشرطی داده شده درست است. (آنگاه مثل قسمت‌های ۷ و ۸ دو حالت پرارش تشکیل بدین تالی‌ها درست می‌شود).

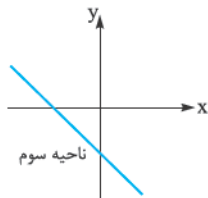
ردیف ۱۰: در منحنی نرمال ۹۶٪ داده‌ها در بازه $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ قرار دارند. \Leftrightarrow (مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ برابر ۱ است)

پس کلاً درست است. توجه کنید که مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم از رابطه $x' + x'' = \frac{-b}{a}$ به دست می‌آید؛ پس در معادله $x^2 - x - 2 = 0$ داریم:

$$x' + x'' = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

ردیف ۱۱: (نمودار خط $y = -2x - 1$ از ناحیه سوم نمی‌گذرد) \Leftrightarrow (در نمودار جعبه‌ای، میانه همیشه وسط جعبه قرار دارد)

پس کلاً درست است. حواستان باشد که در نمودار جعبه‌ای، میانه لزوماً در وسط جعبه نیست. ضمناً اگر نمودار خط $y = -2x - 1$ را به روش سریع رسم کنیم به شکل روبه‌رو خواهیم رسید:



ردیف ۱۲: ابتدا عبارت $x^5 - 81x$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\underbrace{x^5 - 81x}_{\text{فاکتوراز:}} = x \underbrace{(x^4 - 81)}_{\text{مزدوج}} = x \underbrace{(x^2 - 9)}_{\text{مزدوج}} (x^2 + 9) = x(x-3)(x+3)(x^2 + 9)$$

پس عامل $(x-3)$ در تجزیه شده این عبارت وجود دارد. حال جمع داده شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{a^2 + 2a}{(a-2)(a+2)} - \frac{4-a}{a-2} = \frac{a^2 + 2a - (4-a)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a^2 + 2a - 4a - 8 + a^2 + 2a}{(a-2)(a+2)} = \frac{2a^2 - 8}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{2(a^2 - 4)}{(a-2)(a+2)} = \frac{2(a-2)(a+2)}{(a-2)(a+2)} = 2$$

پس کل گزاره مرکب، نادرست است؛ چون دو گزاره ساده آن، هم‌ارزش نیستند.

ردیف ۱۳: اگر گزاره داده شده را $p \Leftrightarrow q$ فرض کنیم، گزاره‌های ساده p و q به هم وابسته هستند؛ لذا ۲ حالت جداگانه در نظر می‌گیریم. یک بار $p \Rightarrow q$ و یک بار $q \Rightarrow p$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۱: } a \times b = 0 \Rightarrow (a=0) \wedge (b=0) \\ \text{خودمان } T \text{ فرض می‌کنیم} \\ \text{حالت ۲: } (a=0) \wedge (b=0) \Rightarrow a \times b = 0 \\ \text{خودمان } T \text{ فرض می‌کنیم} \end{array} \right\} \rightarrow \text{در کل نادرست است.}$$

توجه کنید که ممکن است $a \times b = 0$ باشد؛ ولی فقط a یا فقط b صفر باشند؛ یعنی لزومی ندارد a و b هم‌زمان صفر باشند. به همین دلیل در حالت (۱)، تالی نادرست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
F	F	T

(۱۱- الف)

هم‌ارزی داده شده، درست است.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

(ب)

هم‌ارزی داده شده، درست است.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee \sim p$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim p)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	T

(پ)

هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

(ت)

هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T

(ث)

پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	F
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	F

(ج)

پس هم‌ارزی داده‌شده، نادرست است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T

(چ)

پس هم‌ارزی داده‌شده، درست است.

(۱۲- الف)

p	q	r	$q \Leftrightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	T

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$q \wedge (p \Rightarrow r)$	$[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \wedge (p \Rightarrow r)]$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F	T

(ب)

الف) $(q \Leftrightarrow p) \vee r \equiv (F \Leftrightarrow T) \vee r \equiv F \vee r \equiv r$

ب) $(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv (F \Leftrightarrow F) \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$

پ) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (T \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ت) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \sim(T \vee F) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ث) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge \sim q) \equiv (r \Leftrightarrow T) \Rightarrow (T \wedge T) \equiv r \Rightarrow T \equiv T$

ج) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv (T \vee F) \Leftrightarrow (T \wedge F) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

چ) $(q \vee \sim r) \Rightarrow p \equiv (F \vee \sim r) \Rightarrow T \equiv \sim r \Rightarrow T \equiv T$

ح) $\sim(\sim q \vee \sim r) \Rightarrow r \equiv \sim(T \vee \sim r) \Rightarrow r \equiv F \Rightarrow r \equiv T$

خ) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p) \equiv (T \Rightarrow T) \Leftrightarrow (F \Leftrightarrow T) \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F$

د) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (T \Rightarrow F) \Leftrightarrow (T \Rightarrow F) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$

ذ) $\sim(\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv \sim(T \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Rightarrow T) \equiv r \Rightarrow T \equiv T$

ر) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim r \equiv (T \Rightarrow F) \wedge \sim r \equiv F \wedge \sim r \equiv F$

۱۴- از نادرستی گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow p$ نتیجه می‌گیریم که مقدم آن یعنی p درست و تالی آن یعنی $(p \wedge q)$ نادرست است؛ پس الان p ارزش درست دارد و برای آن که $(p \wedge q)$ ارزش نادرست داشته باشد، باید q حتماً نادرست باشد. چون می‌دانیم حاصل $T \wedge F$ برابر F می‌شود:

$p \wedge \sim q \equiv T \wedge T \equiv T$

۱۵- چون $(q \vee r) \Rightarrow p$ نادرست است؛ پس p درست و $(q \vee r)$ نادرست است. هم‌چنین از نادرستی $(q \vee r)$ نتیجه می‌گیریم که هم q نادرست است و هم r. حال به سراغ گزاره مطلوب می‌رویم:

$r \Rightarrow (p \wedge s) \equiv F \Rightarrow (T \wedge s) \equiv T$
ارزش s نامعلوم است

۱۶- در درس‌نامه گفتیم که: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ پس گزاره شرطی را به فصلی تبدیل می‌کنیم:

این دورا کنار هم می‌نویسیم
دمرگان
این دورا کنار هم می‌نویسیم

$$\begin{aligned} & \equiv [(\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q)] \equiv [(\underbrace{\sim p \vee p}_T) \vee (\underbrace{\sim q \vee q}_T)] \equiv T \end{aligned}$$

مقدم، هر چه باشد نقیض می‌شود

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$