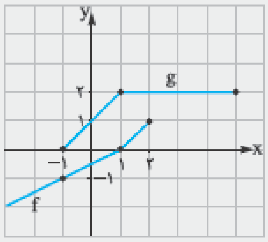
فهرست

حالا دامنهٔ تابع را محاسبه می‌کنیم. باید عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$-x^2-x+2\geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2+x-2\leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)\leq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 1 \xrightarrow{(*)} 0<x\leq 1 \Rightarrow \text{دامنه}=(0,1]$$

تست **اگر نمودار توابع f و g به صورت مقابل باشد. آن‌گاه $f+g$ شامل کدام ضابطه است؟**



۱) $x+1, x\geq 1$

۲) $2x, -1\leq x\leq 1$

۳) $\frac{1}{2}(3x+1), -1\leq x\leq 1$

۴) $x+2, 1\leq x\leq 2$

پاسخ **گزینهٔ «۳»** به ازای $-1\leq x\leq 1$ تابع g خطی است که از دو نقطهٔ $(1,2)$ و $(-1,0)$ می‌گذرد. پس:

$$\begin{cases}(-1,0)\in g\\(1,2)\in g\end{cases} \Rightarrow y-0=\frac{0-2}{-1-1}(x-(-1)) \Rightarrow y=x+1 \Rightarrow g(x)=x+1, -1\leq x\leq 1$$

به ازای $1\leq x\leq 5$، تابع g تابع ثابت $y=2$ است، پس:

$$g(x)=\begin{cases}x+1 & -1\leq x\leq 1\\ 2 & 1\leq x\leq 5\end{cases}$$

به ازای $1\leq x\leq 2$ تابع f خطی است که از دو نقطهٔ $(1,0)$ و $(2,1)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases}(1,0)\in f\\(2,1)\in f\end{cases} \Rightarrow y-0=\frac{0-1}{1-2}(x-1)$$

$$\Rightarrow y=x-1 \Rightarrow f(x)=x-1, 1\leq x\leq 2$$

به ازای $x\leq 1$ تابع f خطی است که از دو نقطهٔ $(1,0)$ و $(-1,-1)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases}(1,0)\in f\\(-1,-1)\in f\end{cases} \Rightarrow y-0=\frac{0-(-1)}{1-(-1)}(x-1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x-1), x\leq 1 \Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}x-1+2=x+1 & ,1\leq x\leq 2\\ \frac{1}{2}(x-1)+x+1=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} & ,-1\leq x\leq 1\end{cases}$$

دقت کنید دامنهٔ $f+g$ که از اشتراک دامنه‌های f و g به دست می‌آید برابر $-1\leq x\leq 2$ است.

ترکیب توابع

گفتیم تابع همانند یک ماشین عمل می‌کند و اعضای دامنه را می‌گیرد و با انجام عملیات ریاضی بر روی آن (با توجه به دستور ریاضی تابع)، محصول نهایی که همان برد تابع است را تولید می‌کند.

به عنوان نمونه مطابق شکل مقابل، تابعی مانند g را در نظر بگیرید. اگر ورودی این تابع x باشد، محصولی که از آن خارج می‌شود، $g(x)$ خواهد بود.

$$\xrightarrow{x} \boxed{g} \longrightarrow g(x)$$

حالا فرض کنید خروجی تابع g، *حیف و میل نشود!* و این خروجی، تابع دیگری مانند f را تغذیه کند (خروجی g برای f در حکم ورودی است)، در این صورت مطابق شکل مقابل، محصول نهایی تابع به نام $f(g(x))$ خواهد بود.

$$\xrightarrow{x} \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \longrightarrow f(g(x))$$

بنابراین از ترکیب دو تابع f و g آش لذیذی (البته برای طراحان) به صورت $f(g(x))$ (یا $g(f(x))$) پخته می‌شود. این ترکیبات را به صورت مقابل هم نمایش می‌دهند:

$$f(g(x))=fog(x)$$

به طریق مشابه:

$$g(f(x))=gof(x)$$

اما برای تشکیل تابع fog (یا gof) چگونه باید عمل کنیم؟ پاسخ به این سؤال را در دو حالت برای تابع fog بررسی می‌کنیم.

۱ حالت زوج‌مرتبی: اگر توابع f و g به صورت زوج‌مرتبی باشند، برای تشکیل تابع fog از دامنهٔ تابع داخلی (تابع g)، استفاده می‌کنیم و تشکیل‌شدن fog را بررسی می‌کنیم.

مثال **اگر $f=\{(0,-2),(3,1),(-1,2)\}$ و $g=\{(-4,0),(2,3),(5,1)\}$، آن‌گاه تابع $\frac{fog}{g}$ را بیابید.**

پاسخ اول تابع fog را تشکیل می‌دهیم. برای این کار از دامنهٔ تابع داخلی، یعنی تابع g استفاده می‌کنیم. دامنهٔ تابع g برابر $\{-4,2,5\}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases}x=-4: f(g(-4))=f(0)=-2 \Rightarrow (-4,-2)\in fog\\ x=2: f(g(2))=f(3)=1 \Rightarrow (2,1)\in fog\\ x=5: f(g(5))=f(1): \text{تعریف‌نشده}\end{cases} \Rightarrow fog=\{(-4,-2),(2,1)\}$$

روش سریع‌ترش هم این‌طوریه: $(۲,۳)\in g,(۳,۱)\in f \Rightarrow (۲,۱)\in fog$ $\qquad$ $(-۴,۰)\in g,(۰,-۲)\in f \Rightarrow (-۴,-۲)\in fog$

$(۵,۱)\in g,$ در تابع f زوج‌مرتبی با مؤلفهٔ اول یک نداریم $\Rightarrow$ تشکیل نمی‌شود.

حالا باید تابع $\frac{fog}{g}$ را تشکیل دهیم. پس دامنهٔ تابع را می‌یابیم:

$$D_{\frac{fog}{g}}=D_{fog}\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}=\{-۴,۲\}\cap\{-۴,۲,۵\}-\{-۴\}=\{۲\}\Rightarrow \frac{fog}{g}(۲)=\frac{fog(۲)}{g(۲)}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow \frac{fog}{g}=\{(۲,\frac{۱}{۳})\}$$

۲ حالت ضابطه‌ای: اگر f و g به صورت ضابطه باشند، برای تشکیل تابع fog باید به جای هر x در تابع بیرونی (تابع f)، ضابطهٔ تابع داخلی (تابع g) را قرار می‌دهیم.

تست اگر $f(x)=\frac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$ باشد، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) x $\qquad$ ۲) $-x$ $\qquad$ ۳) $-x-۱$ $\qquad$ ۴) $x+۱$

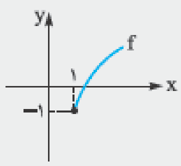
پاسخ گزینهٔ «۳» با توجه به ضابطه‌های f و g داریم:

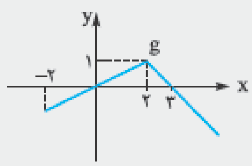
$$g(f(x))=g(\frac{۲x+۳}{۲-x})=\frac{۱-۳(\frac{۲x+۳}{۲-x})}{\frac{۲x+۳}{۲-x}+۲}=\frac{\frac{۲-x-۶x-۹}{\cancel{۲-x}}}{\frac{۲x+۳+۴-۲x}{\cancel{۲-x}}}=\frac{-۷x-۷}{۷}=\frac{-۷(x+۱)}{۷}=-x-۱$$

محاسبهٔ دامنهٔ ترکیب توابع: مطابق ماشین شکل مقابل، برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع fog، ابتدا باید x اجازهٔ ورود به تابع g را داشته باشد ($x\in D_g$)، سپس $g(x)$ باید وارد تابع f شود؛ پس باید این اجازه را داشته باشد؛ در نتیجه باید: $g(x)\in D_f$؛ پس:

$$\xrightarrow{x}\boxed{g}\xrightarrow{g(x)}\boxed{f}\longrightarrow f(g(x)) \qquad D_{fog}=\{x\in D_g\,,g(x)\in D_f\}$$

تست نمودار توابع f و g به صورت زیر است. دامنهٔ تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟





۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) بی‌شمار

پاسخ گزینهٔ «۲» با استفاده از تعریف، دامنه تابع fog را می‌یابیم. فقط قبل از هر کاری باید دامنهٔ توابع f و g را محاسبه کنیم. با توجه به نمودارها:

$D_g:x\geq -۲\ ,\ D_f:x\geq ۱$

طبق تعریف: $D_{fog}=\{x\in D_g\,,g(x)\in D_f\}\Rightarrow D_{fog}=\{x\geq -۲,\underbrace{g(x)\geq ۱}_{(*)}\}$ (۱)

برای حل نامعادلهٔ (*) به نمودار g رجوع می‌کنیم. با توجه به نمودار، مقادیر تابع g کوچک‌تر یا مساوی ۱ هستند. پس نامعادلهٔ $g(x)\geq ۱$ زمانی جواب دارد که:

$g(x)=۱ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} x=۲$

پس با توجه به (۱): $D_{fog}=\{x\geq -۲,x=۲\}\Rightarrow D_{fog}:x=۲$

پس دامنهٔ fog تنها شامل یک عدد صحیح است.

تست اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ *(تجربی خارج ۸۶)*

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ $\qquad$ ۲) $\mathbb{R}-\{۰,۸\}$ $\qquad$ ۳) $\mathbb{R}-\{۰\}$ $\qquad$ ۴) $(۰,+\infty)$

پاسخ گزینهٔ «۱» **راه اول:** ابتدا دامنهٔ هر یک از توابع f و g را می‌یابیم: $D_g=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

ریشه‌های مخرج برابرند با: $x^۲-۴x=۰\Rightarrow x(x-۴)=۰\Rightarrow x=۰,x=۴\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰,۴\}$ یا $D_g:x\neq ۰,۴$

$D_f:\text{عبارت زیررادیکال}\geq ۰\Rightarrow x+|x|\geq ۰$

از آن‌جا که $x+|x|$ هیچ‌گاه منفی نمی‌شود؛ پس: $D_f=\mathbb{R}$ (توجه کنید که $x+|x|$ به ازای $x>0$، همواره مثبت و به ازای $x\le 0$ مقدار صفر دارد؛ چون $x+\underbrace{|x|}_{-}=x-x=0$)؛ بنابراین:

$$D_{gof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_g\}\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R},\sqrt{x+|x|}\neq 0,\sqrt{x+|x|}\neq 4\}\ (*)$$

هر یک از دو نامعادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{x+|x|}\neq 0\Rightarrow x+|x|\neq 0\Rightarrow x>0$$

(اشاره شد که به ازای $x\le 0$ عبارت $x+|x|$ برابر صفر می‌شود.)

$$\sqrt{x+|x|}\neq 4\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+|x|\neq 16\Rightarrow x\neq 8$$

بنابراین با توجه به $(*)$:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R},x>0,x\neq 8\}=(0,8)\cup(8,+\infty)$$

راه دوم: از گزینه‌ها استفاده می‌کنیم. $x=8$ در ۱ و ۲ نیست و در دو گزینهٔ دیگر قرار دارد. $x=8$ را در تابع gof قرار می‌دهیم:

$$x=8:(gof)(8)=g(f(8))$$

با توجه به ضابطهٔ f، $f(8)=\sqrt{8+|8|}=\sqrt{16}=4$؛ بنابراین:

$$g(f(8))=g(4)=\frac{1}{4^2-4(4)}\ \text{تعریف‌نشده:}$$

پس یکی از ۱ یا ۲ درست است. حالا یک عدد منفی قرار می‌دهیم:

$$x=-1:g(f(-1))=g(\sqrt{-1+|-1|})=g(0)=\frac{1}{0}\ \text{تعریف‌نشده:}$$

در نتیجه ۲ هم که شامل -1 است، جواب نیست.

محاسبه f یا g از روی ضابطهٔ fog: گاهی اوقات تابع fog و یکی از توابع f یا g را می‌دهند و تابع دیگر را می‌خواهند. پس بسته به نوع ضابطه‌هایی که در اختیار داریم، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

الف تابع fog و تابع درونی g را داریم و تابع بیرونی f را می‌خواهیم.

۱ معمول‌ترین روش این است که $g(x)$ را برابر t قرار دهیم، سپس x را برحسب t محاسبه کنیم.

و در نهایت در تابع fog هر جا x دیدیم، به جای آن، معادله آن را برحسب t می‌نویسیم.

تست اگر $f(x)=\frac{x}{2-x}$ و $(gof)(x)=\frac{1}{2}x$، ضابطهٔ تابع g برابر کدام است؟ *(ریاضی خارج ۸۴)*

۱) $\frac{x}{x+1}$ ۲) $\frac{x-1}{x}$ ۳) $\frac{x}{x-1}$ ۴) $\frac{x+1}{x}$

پاسخ **گزینهٔ «۱»** **راه اول**: تابع gof و تابع درونی f را داریم، پس با فرض $f(x)=t$ و محاسبهٔ x برحسب t، ضابطهٔ g را می‌یابیم:

$$\begin{cases}g(f(x))=\frac{1}{2}x\\ f(x)=\frac{x}{2-x}\end{cases}\Rightarrow g(\frac{x}{2-x})=\frac{1}{2}x\quad(*)$$

تابع gof و تابع درونی f را داریم. پس با فرض $f(x)=t$ و محاسبهٔ x برحسب t، ضابطهٔ g را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{x}{2-x}=t\Rightarrow x=2t-xt\Rightarrow x+xt=2t\Rightarrow x(1+t)=2t\Rightarrow x=\frac{2t}{1+t}$$

با جای‌گذاری در $(*)$، ضابطهٔ g را می‌یابیم:

$$g(t)=\frac{1}{2}(\frac{2t}{1+t})=\frac{t}{1+t}\Rightarrow g(x)=\frac{x}{x+1}$$

راه دوم: از گزینه‌ها و روش مقداردهی استفاده می‌کنیم:

$$g(f(x))=\frac{1}{2}x\xrightarrow{x=1}g(f(1))=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

با توجه به ضابطهٔ f، $f(1)=\frac{1}{2-1}=1$ و در نتیجه:

$$g(f(1))=\frac{1}{2}\Rightarrow g(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow(1,\frac{1}{2})\in g$$

این نقطه تنها در تابع ۱ صدق می‌کند:

$$g(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow g(1)=\frac{1}{2}\ ✓$$

۲ اگر با قراردادن $g(x)=t$، یافتن رابطهٔ x برحسب t دشوار باشد، باید از اتحاد، تجزیه، روابط جبری یا مثلثاتی استفاده کنیم و طرف راست را برحسب $g(x)$ بنویسیم.

تست اگر $f(\frac{x^2-1}{x})=\frac{x^6-1}{x^3}$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f کدام است؟

۱) x^3-3x ۲) x^3+3x ۳) x^3-x ۴) x^3+x

پاسخ گزینهٔ «۲» تابع درونی را داریم؛ پس: $\frac{x^2-1}{x}=t$

اما پیدا کردن رابطهٔ x برحسب t و بعد هم جای‌گذاری، بسیار کار سختی است. پس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\frac{x^2-1}{x}=t \Rightarrow x-\frac{1}{x}=t\\ \frac{x^6-1}{x^3}=x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})^3+3(x-\frac{1}{x})((x)(\frac{1}{x}))=(x-\frac{1}{x})^3+3(x-\frac{1}{x})\end{cases}$$

(در سطر دوم از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)^3+3(a-b)(ab)$ استفاده کردیم.)

پس: $$f(\frac{x^2-1}{x})=\frac{x^6-1}{x^3} \Rightarrow f(\underbrace{x-\frac{1}{x}}_{t})=(\underbrace{x-\frac{1}{x}}_{t})^3+3(\underbrace{x-\frac{1}{x}}_{t}) \Rightarrow f(t)=t^3+3t \Rightarrow f(x)=x^3+3x$$

ب) تابع fog و تابع بیرونی f را داریم و تابع درونی g را می‌خواهیم.

در این حالت ابتدا به جای xهای تابع f، $g(x)$ قرار می‌دهیم و تابع $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ می‌نویسیم. از آن‌جا که تابع fog را هم داریم، با معادل قرار دادن این دو ضابطه، تابع g را می‌یابیم.

تست اگر $f(x)=\frac{x+1}{x}$، آن‌گاه تابع g کدام باشد تا $fog(x)+f(x)=0$ باشد؟

۱) $-x$ ۲) $\frac{-x}{2x+1}$ ۳) $\frac{x}{2x+1}$ ۴) x

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا به جای xهای تابع f، $g(x)$ قرار می‌دهیم تا $f(g(x))$ تشکیل شود.

$$f(x)=\frac{x+1}{x} \Rightarrow f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)}$$

حالا این عبارت را در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$f(g(x))+f(x)=0 \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)}+\frac{x+1}{x}=0 \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)}=-\frac{x+1}{x} \Rightarrow 1+\frac{1}{g(x)}=-\frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g(x)}=\frac{-x-1}{x}-1 \Rightarrow \frac{1}{g(x)}=\frac{-x-1-x}{x} \Rightarrow \frac{1}{g(x)}=\frac{-2x-1}{x} \Rightarrow g(x)=\frac{x}{-2x-1}=\frac{-x}{2x+1}$$

نکته برای حل معادلهٔ $f(g(x))=k$ بهترین روش این است که ابتدا معادلهٔ $f(x)=k$ را حل کنید. سپس $g(x)$ را برابر ریشه‌های این معادله قرار دهید.

تست اگر $f(x)=x^2+2x+2$ و $g(x)=x^4-3x^2+1$، آن‌گاه معادلهٔ $f(g(x))=1$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۴» براساس نکتهٔ گفته‌شده، ابتدا باید معادلهٔ $f(x)=1$ را حل کنیم:

$$f(x)=1 \Rightarrow x^2+2x+2=1 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

بعد قرار بر این شد که $g(x)$ را برابر ریشهٔ این معادله قرار دهیم. در نتیجه:

$$x^4-3x^2+1=-1 \Rightarrow x^4-3x^2+2=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1\\ x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow$$ معادله چهار جواب دارد.

محاسبهٔ برد تابع مرکب: فرض کنید می‌خواهیم برد تابع fog را بیابیم. برای این کار باید ابتدا برد تابع داخلی، یعنی g را محاسبه کنیم. سپس مجموعهٔ برد تابع g را به عنوان ورودی برای تابع f در نظر می‌گیریم. (هر چند که ممکن است برخی مقادیر، مجوز ورود نداشته باشند، اما نیازی به توجه به این مسائل نیست) و با توجه به این، مجموعه برد تابع f را می‌یابیم. مجموعهٔ نهایی حاصل، همان برد تابع fog خواهد بود.

تست اگر $f(x)=2-x^2$ و $g(x)=2^{x+1}$، برد تابع gof کدام است؟

۱) $[16,+\infty)$ ۲) $[8,+\infty)$ ۳) $(0,8]$ ۴) $(0,16]$

پاسخ گزینهٔ «۳» گفتیم اول برد تابع داخلی که این‌جا تابع f است را محاسبه کنیم. پس با توجه به ضابطهٔ f، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x^2 \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -x^2 \leq 0 \xrightarrow{+2} 2-x^2 \leq 2$$

این مجموعه یعنی بازهٔ $(-\infty,۲]$ را برای تابع g به عنوان ورودی فرض می‌کنیم. پس برد تابع $g(x)=۲^{x+۱}$ را به ازای $x\in(-\infty,۲]$ محاسبه می‌کنیم:

$$x\in(-\infty,۲]\Rightarrow x\le ۲\xrightarrow{+۱}x+۱\le ۳\Rightarrow ۲^{x+۱}\le ۲^۳=۸\xrightarrow{۲^{x+۱}>۰}۰<۲^{x+۱}\le ۸\Rightarrow R_{gof}=(۰,۸]$$

تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع fog: اگر f و g توابعی یکنوا باشند، برای بررسی یکنوایی تابع fog می‌توانید از تعریف یکنوایی تابع برای تابع داخلی استفاده کنید و سپس تابع بیرونی را تأثیر دهید.

تست اگر f تابعی صعودی و g تابعی نزولی باشند، آن‌گاه fog الزاماً چگونه تابعی است؟

۱) صعودی
۲) نزولی
۳) هم صعودی و هم نزولی
۴) نه صعودی و نه نزولی

پاسخ **گزینهٔ «۲»** اگر $x_۱$ و $x_۲$ عضو دامنهٔ fog باشند؛ به طوری که $x_۱\le x_۲$، آن‌گاه برای تشکیل تابع fog ابتدا باید از طرفین نامساوی $x_۱\le x_۲$، g بگیریم. چون g تابعی نزولی است، بنابراین جهت نامعادله عوض می‌شود:

$$x_۱\le x_۲\Rightarrow g(x_۱)\ge g(x_۲)$$

حالا باید از طرفین، f بگیریم؛ f تابعی صعودی است، پس علامت تغییر نمی‌کند:

$$g(x_۱)\ge g(x_۲)\Rightarrow f(g(x_۱))\ge f(g(x_۲))$$

و در نهایت چون از $x_۱\le x_۲$ رسیدیم به این‌که $f(g(x_۱))\ge f(g(x_۲))$؛ پس fog تابعی نزولی است.

روش سریع: در بررسی صعودی یا نزولی بودن ترکیب توابع، می‌توانید به این صورت عمل کنید که تابع **صعودی** را با علامت «+» و تابع **نزولی** را با علامت «−» در نظر بگیرید، سپس از ضرب علامت‌ها استفاده کنید و صعودی و نزولی بودن fog را بررسی کنید.

در مثال قبل چون f صعودی و g نزولی بود؛ بنابراین:

$$\overset{fog}{(+)(-)}\xrightarrow{\text{ضرب}}(-)\Rightarrow \text{fog نزولی است.}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

اعمال روی توابع

۹۸۴- اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۲}$. مقدار $(۲f-g)(۳)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۹۸۵- اگر $f(x)=\begin{cases}x-۵ & x\ge -۱\\ \sqrt{-x} & x<-۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & x\ge ۱\\ x+۳ & x<۱\end{cases}$ مقدار تابع $f-g$ در $x=(f+g)(۱)$ کدام است؟

۱) -۴
۲) ۴
۳) -۳
۴) ۳

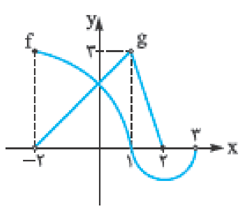
۹۸۶- اگر $f=\{(-۲,۲),(۰,-۲),(۲,۰)\}$ آن‌گاه تابع $\dfrac{۲}{f^۲}$ کدام است؟

۱) $\{(-۲,\frac{۱}{۲})\}$
۲) $\{(-۲,\frac{۱}{۲}),(۰,\frac{۱}{۲})\}$
۳) $\{(۴,\frac{۱}{۲}),(۰,\frac{۱}{۲})\}$
۴) $\{(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})\}$

۹۸۷- اگر $f=\{(۱,۳),(۲,۰),(-۱,۲)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۱,-۲),(۳,۴)\}$ آن‌گاه حداکثر عرض تابع $\dfrac{۲}{f}-\dfrac{۱}{g}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$
۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $-\frac{۲}{۳}$

۹۸۸- نمودار توابع f و g مطابق شکل مقابل است. دامنهٔ تابع $\dfrac{g}{f-g}$ کدام است؟



۱) $(-۲,۲]-\{۰,۱\}$
۲) $(-۲,۲)-\{۱\}$
۳) $(-۲,۳)-\{۰,۱\}$
۴) $(-۲,۳)-\{۱\}$

۹۸۹- اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۳}}$ و $g(x)=\dfrac{x-۱}{\sqrt{x+۳}}$. دامنهٔ تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) $(-۳,+\infty)-\{۱\}$
۲) $\mathbb{R}-\{۱\}$
۳) $(-۳,+\infty)$
۴) $(-۳,+\infty)-\{۰\}$

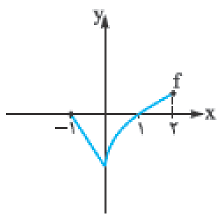
۹۹۰- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۳}}+\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام فاصله است؟ (ق.م)

۱) $[۰,۱]$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۲,۳)$

۹۹۱- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x(x^{۲}-۱)}}{\sqrt{|x|+x}}$ کدام است؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $[۱,+\infty)$

۹۹۲- اگر نمودار f به صورت روبه‌رو باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x)}{f(۲-x)}$ کدام است؟



۱) $[۰,۲]-\{۱\}$

۲) $(-۱,۱)$

۳) $[-۱,۳)-\{۱\}$

۴) $(-۱,۲)-\{۰\}$

۹۹۳- تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}$ کدام‌یک از ویژگی‌های زیر را دارا است؟

۱) معکوس‌ناپذیر ۲) ثابت ۳) همانی ۴) مثبت

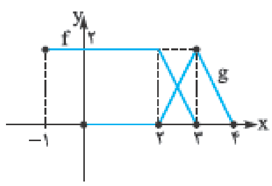
۹۹۴- اگر $f(x)=x[x]$ و $g(x)=۲[x]$، برد تابع $\frac{f}{g}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۹۵- اگر $f(x)=۱+\sqrt{۱-x^{۲}}$ و $g(x)=۱-\sqrt{۱-x^{۲}}$، برد تابع $f.g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{۱\}$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[۰,+\infty)$

۹۹۶- اگر نمودار توابع f و g به صورت مقابل باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $f+g$ و محور xها کدام است؟



۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۲

ترکیب توابع

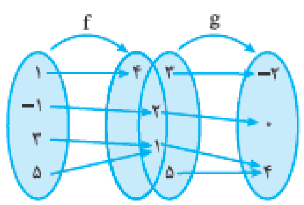
۹۹۷- اگر $f=\{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۱,۰)\}$ و $g=\{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$ آن‌گاه کدام زوج مرتب در تابع fog قرار ندارد؟

۱) $(۲,۷)$ ۲) $(۴,۴)$ ۳) $(۳,۰)$ ۴) $(۶,-۵)$

۹۹۸- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f=\{(x,۲x-۱),x\in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟ (تجربی ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۹۹- با توجه به شکل روبه‌رو، توابع fog و gof به ترتیب چند زوج مرتب دارند؟



۱) صفر ـ ۳

۲) ۳ ـ صفر

۳) ۲ ـ ۱

۴) ۱ ـ ۲

۱۰۰۰- توابع $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۲),(b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشند. دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۴,۳)$ ۳) $(۴,۵)$ ۴) $(۵,۴)$

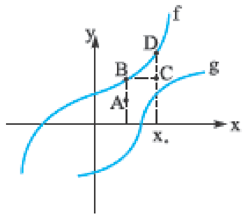
۱۰۰۱- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$، $g=\{(۱,۲),(۵,۴),(۶,۵),(۲,۳)\}$ و $g(f(a))=۵$ آن‌گاه عدد a کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۰۲- دو تابع f و g به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟ (ریاضی خارج ۸۵)

۱) $f \cup g$ ۲) $f \cap g$ ۳) $f - g$ ۴) fog

۱۰۰۳- با توجه به شکل مقابل، کدام‌یک از نقاط زیر می‌تواند مربوط به مختصات نقطهٔ $(fog)(x_0)$ باشد؟



۱) A

۲) B

۳) C

۴) D

۱۰۰۴- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+4} & x>3 \\ 2x+3 & x\le 3 \end{cases}$، مقدار $f(f(5))+f(f(1))$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰۰۵- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1$، آن‌گاه حاصل $(fog)(1-\sqrt{2})-(gof)(1-\sqrt{2})$ کدام است؟ (تجربی ۸۹)

۱) $4(1-\sqrt{2})$ ۲) $4(\sqrt{2}-1)$ ۳) ۴ ۴) $2\sqrt{2}$

۱۰۰۶- اگر $f(x)=x^2+x-1$ و $g(\sqrt{x})=\frac{2x-1}{x+3}$، آن‌گاه حاصل $f(g(2))$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{25}$ ۲) $-\frac{1}{25}$ ۳) ۱ ۴) ۵

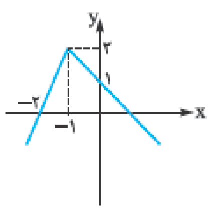
۱۰۰۷- اگر $f(x)=\frac{x^2+4x+9}{x^2+4x+5}$ باشد، $fof(\sqrt{3}-2)$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{11}$ ۲) $\frac{17}{13}$ ۳) $\frac{21}{17}$ ۴) ۲

۱۰۰۸- اگر $f(x)=4x^2-2[x]$ و $g(x)=\frac{x}{1-x}$، حاصل $f(-\frac{1}{2}g(\sqrt{2}))$ کدام است؟

۱) $4(1+\sqrt{2})$ ۲) $4(1-\sqrt{2})$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $-4\sqrt{2}$

۱۰۰۹- اگر نمودار تابع f به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $fof(3)$ کدام است؟



۱) ۱-

۲) ۲-

۳) صفر

۴) ۳-

۱۰۱۰- اگر $f(x)=2-|x-2|$، ضابطهٔ تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) x ۲) $4-x$ ۳) $f(x)$ ۴) $2-f(x)$

۱۰۱۱- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) 2x

۱۰۱۲- اگر f یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ و g یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ باشند. $gof(x)=(k-1)x^n+x^2-1$، به ازای کدام مقدار k، تابع gof خط $y=2$ را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع می‌کند؟

۱) ۱- ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۵

۱۰۱۳- اگر $f(x)=x^2+x-2$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ مجموعهٔ طول نقاطی از منحنی fog که در زیر محور xها قرار گیرند، برابر کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $(-5,1)$ ۲) $(-1,5)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,5)$

۱۰۱۴- اگر $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$، تابع $g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)$ چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ثابت ۲) همانی ۳) یک‌به‌یک ۴) مثبت

۱۰۱۵- اگر $f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\sqrt{4x+1}$ باشند. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادله $y=3$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۴/۵ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۰۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}-1 & x\geq 1\\ 2 & x<1\end{cases}$ ، حاصل $f(f(2-\sin^2 x))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $|\cos x|$ ۴) ۲

۱۰۱۷- اگر $f(x)=x^2-1$ ، نمودار تابع $y=fof(x)$ با محور xها کدام وضعیت را دارد؟ (ریاضی ۸۳)

۱) یک نقطهٔ تلاقی ـ دو نقطهٔ تماس ۲) دو نقطهٔ تلاقی ـ یک نقطهٔ تماس

۳) سه نقطهٔ تلاقی ـ فاقد نقطهٔ تماس ۴) فاقد نقطهٔ تلاقی ـ دو نقطهٔ تماس

۱۰۱۸- اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟ (ریاضی ۸۶)

ورودی $\longrightarrow \boxed{2x-2} \longrightarrow \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \longrightarrow$ خروجی

۱) $\frac{11}{9}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۱۹- اگر $g(x)=2x-1$ و $(fog)(x)=\frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۲۰- اگر $f(x-3)=x^2-4x+5$ ، آن‌گاه $f(1-x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) x^2+1 ۲) x^2+3 ۳) x^2+4x+5 ۴) x^2-4x+5

۱۰۲۱- اگر $g(x)=2x-3$ و $(fog)(x)=4(x^2-4x+5)$ باشند. تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) x^2-4x+3 ۲) x^2-4x+5 ۳) x^2-2x+5 ۴) x^2-2x+3

۱۰۲۲- اگر $f(g(x))=x+|x|$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ ، $gof(1)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $\sqrt[3]{-2}$ ۴) $\sqrt[3]{3}$

۱۰۲۳- اگر $f(x\sqrt{x}+1)=x(x^2+2\sqrt{x})$ ، آن‌گاه $f(\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۰۲۴- فرض کنیم $f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}-4$ و $g(x)=x-\frac{1}{x}$ در این صورت $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2-4 ۲) x^2-2 ۳) x^2 ۴) x^2+2

۱۰۲۵- $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $(fog)(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟ (تجربی ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۲۶- اگر f و g به عنوان ماشین به صورت $\xrightarrow{x} f \Rightarrow g \Rightarrow 2x$ و $g(x)=3x+4$ باشند. آن‌گاه مقدار $f(5)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۲۷- اگر عرض از مبدأ تابع fog برابر ۲ باشد و $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$ ، آن‌گاه $g(0)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۳

۱۰۲۸- اگر $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ ، آن‌گاه تابع g کدام باشد تا $(fog)(x)=(f+g)(x)$ باشد؟

۱) $\frac{x}{2x+1}$ ۲) $\frac{-x}{2x+1}$ ۳) $\frac{x}{x^2+1}$ ۴) $\frac{2x}{x^2+1}$

۱۰۲۹- اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $f(g(x))=x^2+x-2$ ، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) x^2-1 ۲) x^2+1 ۳) x^2-2x ۴) x^2+2x

۱۰۳۰- تابع با ضابطهٔ $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog ، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۴ و $\frac{1}{9}$ ۲) ۹ و $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴

۱۰۳۱- اگر $f(x)=x^2-8x+12$ و $g(x)=\begin{cases}x^2+x & x\ge 0\\ 2x+3 & x<0\end{cases}$، آن‌گاه مجموع ریشه‌های تابع fog کدام است؟

۱) -1 ۲) $-2/5$ ۳) $2/5$ ۴) ۱

۱۰۳۲- اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=x^2+1$، آن‌گاه معادلهٔ $(gof)(x)=x^2+3x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۳۳- اگر f و g توابعی چندجمله‌ای باشند، به گونه‌ای که $f(f(x))=4x+3$ و $g(2x+3)=3x-2$، در این صورت $(gof)(-1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -5 ۳) -8 ۴) -11

۱۰۳۴- اگر $3f(2-x)-2f(2+x)=-15x+5$، آن‌گاه معادلهٔ $x^2=f(x)$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۳۵- اگر $f(\cot x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x^3+1}{x^2}$ ۲) $\frac{x^2+1}{x^3}$ ۳) $\frac{x^3-1}{x^2}$ ۴) $\frac{x^2-1}{x^3}$

۱۰۳۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-1}$ مفروض است. دامنهٔ تابع fof کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) $\{1\}$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $\varnothing$

۱۰۳۷- اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+3x}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع fog چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۳۸- اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{[x]-1}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $[1,2)$ ۳) $[1,3)$ ۴) $[1,2]$

۱۰۳۹- اگر $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۶)*

۱) $[0,1]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-(-1,1)$

۱۰۴۰- اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ و $g(x)=\log(x^2-15x)$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۵)*

۱) $(0,5]\cup[20,25)$ ۲) $[-5,0)\cup(15,20]$ ۳) $(15,20]$ ۴) $[-5,0)$

۱۰۴۱- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x)=(\frac{1}{4})^x$ باشند، دامنهٔ تابع fog کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۴)*

۱) $(-\frac{1}{2},+\infty)$ ۲) $(\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $(-2,0)$ ۴) $(-1,\frac{1}{2})$

۱۰۴۲- اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع $(f+g)of$ کدام است؟

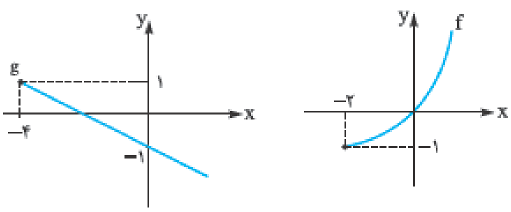
۱) $[-1,1]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $\{0\}$

۱۰۴۳- تابع $f(x)=\begin{cases}x-|x-1| & x>1\\ x^2 & x<1\end{cases}$ مفروض است. دامنهٔ تابع fof کدام ویژگی را دارد؟

۱) همهٔ اعداد طبیعی به‌جز عدد ۱ را شامل می‌شود. ۲) فقط شامل عدد ۱ نیست.

۳) فقط شامل -1 نیست. ۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح و منفی فقط -1 را شامل نمی‌شود.

۱۰۴۴- نمودار توابع f و g به صورت زیر است. دامنهٔ تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰۴۵- اگر $f(x)=[x]$، مجموعه مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟ *(تجربی خارج ۸۵)*

۱) $\{0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{-1,0,1\}$

۱۰۴۶- اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$، برد تابع fog کدام مجموعه است؟ (ق.م)

۱) $y\geq 0$ ۲) $y\geq 1$ ۳) $y\geq -1$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۰۴۷- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=x^2+x-2$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x))=-2$، آن‌گاه مجموعه مقادیر x کدام است؟

(ریاضی ۸۹)

۱) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

۱۰۴۸- اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{1-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟ (ریاضی خارج ۸۶)

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

۱۰۴۹- اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=2+\sqrt{x-1}$، برد تابع fog کدام است؟

۱) $[-\frac{5}{3},-1)$ ۲) $(-\frac{5}{3},-1]$ ۳) $[-\frac{5}{3},0)$ ۴) $(-\infty,-\frac{5}{3})$

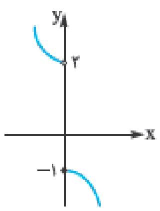
۱۰۵۰- اگر $f(x)=x-[x]$، آن‌گاه برد تابع $g(x)=f(2x-3)-2f(x)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $[-1,0]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $\{-1,0\}$ ۴) $\{0,1\}$

۱۰۵۱- اگر f تابعی نزولی و g صعودی باشد، کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

۱) $f-g$ ۲) $f+g$ ۳) $f.g$ ۴) fog

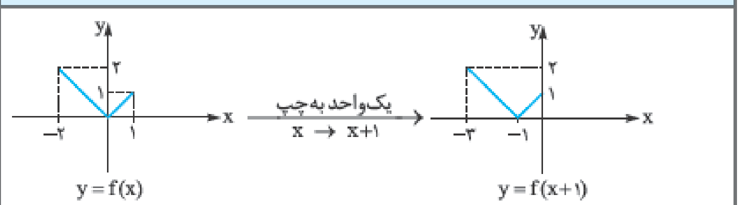
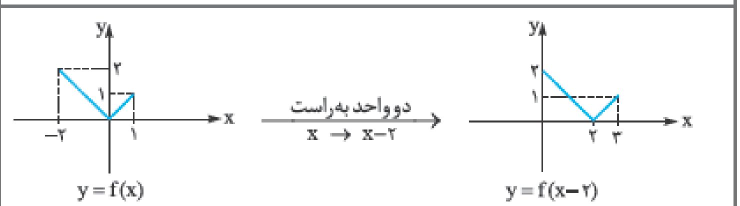
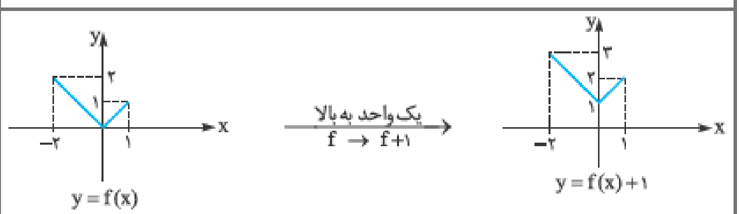
۱۰۵۲- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، در کدام فاصله، نمودار $f(x^2)$ بالاتر از نمودار $f(x+2)$ قرار می‌گیرد؟

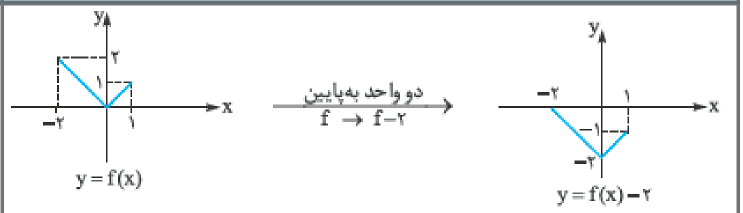
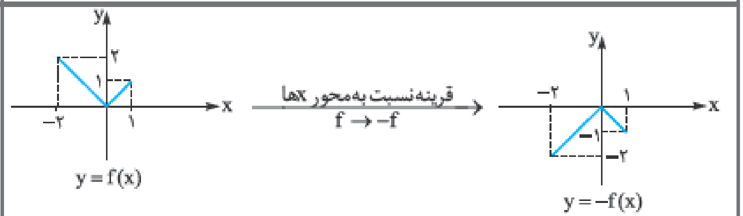
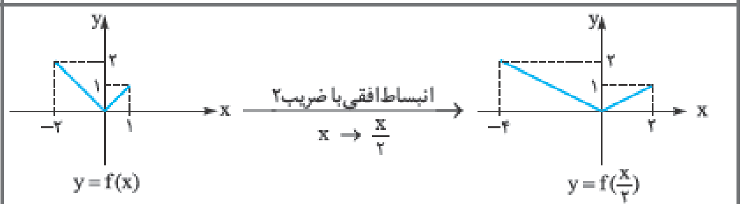
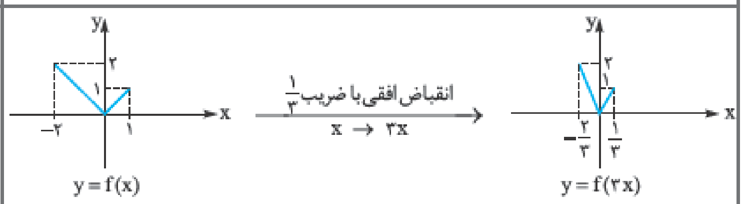
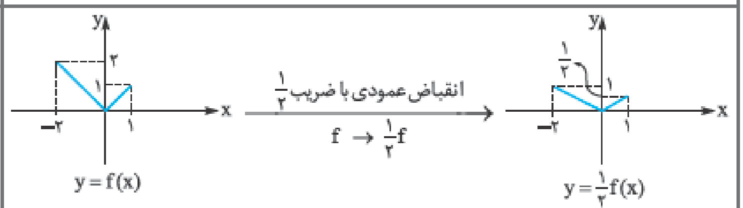
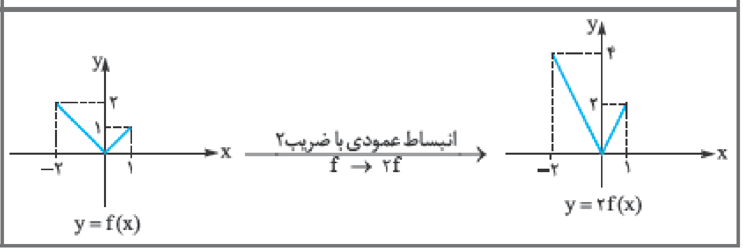


۱) $(-1,3)$
۲) $(-2,0)$
۳) $(-1,2)$
۴) $(0,3)$

تبدیل نمودار توابع

یکی از روش‌هایی که می‌توانید نمودار بسیاری از توابع را به سادگی رسم کنید، استفاده از روش‌های تبدیل نمودار توابع است. این روش‌ها عبارت‌اند از: «انتقال‌های عمودی و افقی»، «انبساط و انقباض‌های افقی و عمودی» و «قرینه‌یابی» است. همهٔ این حالات را در جدول زیر بررسی می‌کنیم: $(a>0)$

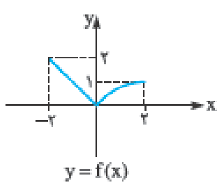
ضابطه	تغییرات روی نمودار f	مثال
$f(x+a)$	نمودار، a واحد به چپ می‌رود.	
$f(x-a)$	نمودار، a واحد به راست می‌رود.	
$f(x)+a$	نمودار، a واحد به بالا می‌رود.	

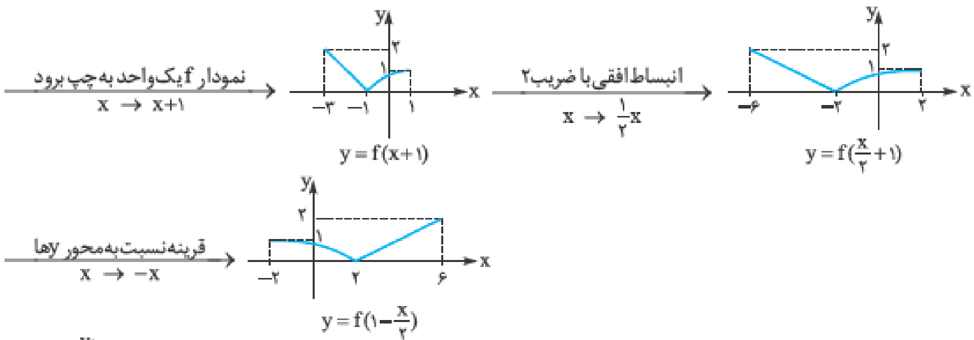
ضابطه	تغییرات روی نمودار f	مثال
$f(x)-a$	نمودار، a واحد به پایین می‌رود.	
$-f(x)$	نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود.	
$f(-x)$	نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود.	
$f(ax)$ $(۰<a<۱)$	نمودار در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{a}$ منبسط می‌شود. (طول‌ها $\frac{۱}{a}$ برابر می‌شوند.)	
$f(ax)$ $(a>۱)$	نمودار در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{a}$ منقبض می‌شود. (طول‌ها $\frac{۱}{a}$ برابر می‌شوند.)	
$af(x)$ $(۰<a<۱)$	نمودار در راستای محور yها با ضریب a منقبض می‌شود. (عرض‌ها a برابر می‌شوند.)	
$af(x)$ $(a>۱)$	نمودار در راستای محور yها با ضریب a منبسط می‌شود. (عرض‌ها a برابر می‌شوند.)	

اما در حالت‌های ترکیبی باید دو مورد زیر را مدنظر قرار دهید:

۱ رسم نمودار $f(ax+b)$:

برای رسم، ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می‌دهیم. سپس تغییرات مربوط به ضریب x را روی شکل اعمال می‌کنیم. برای مثال اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $f(۱-\frac{x}{۲})$ را رسم می‌کنیم.

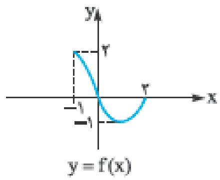


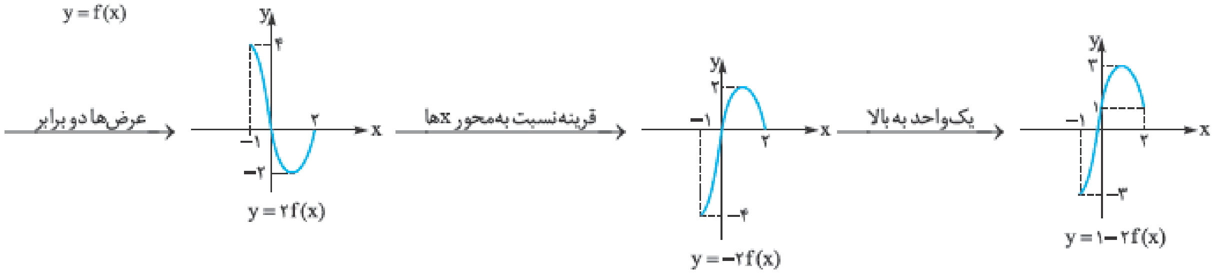


۲ رسم نمودار $af(x)+b$:

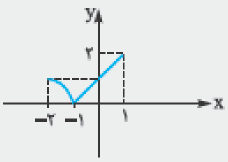
برای رسم، ابتدا ضریب a را تأثیر می‌دهیم و بعد انتقال عدد ثابت b را انجام می‌دهیم.

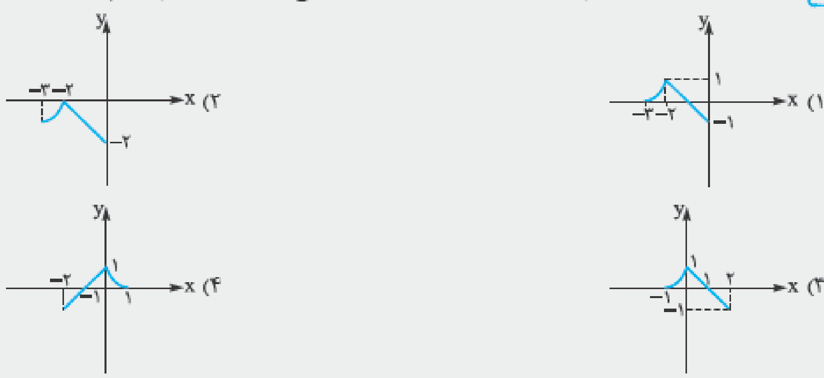
برای مثال اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=1-2f(x)$ به صورت زیر رسم می‌شود:



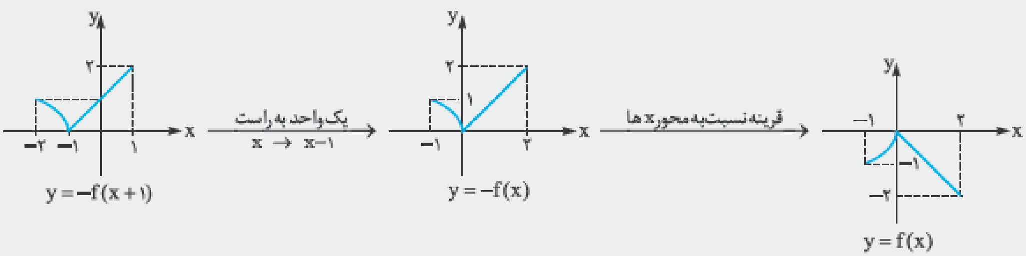


تست **اگر نمودار $y=-f(x+1)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=1+f(-x)$ کدام است؟**

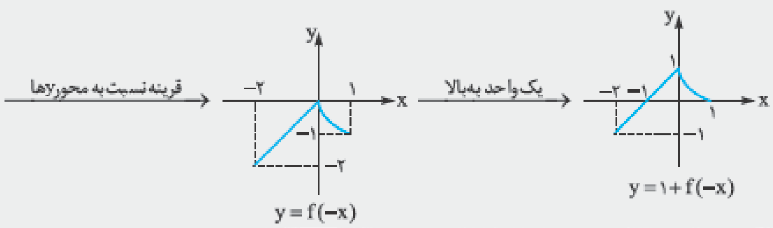




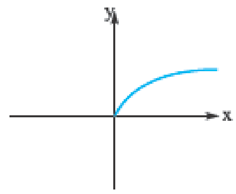
پاسخ **گزینهٔ «۴»** ابتدا از نمودار $y=-f(x+1)$ و با استفاده از انتقال و قرینه‌یابی به نمودار f می‌رسیم:



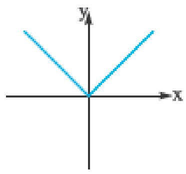
حالا باید نمودار $y=1+f(-x)$ را رسم کنیم. برای این کار نمودار $y=f(x)$ را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم:



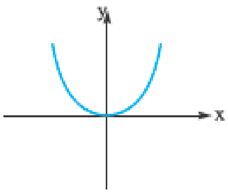
در رسم نمودارها، یک سری نمودار اصلی را باید به خاطر بسپارید. این نمودارها را در زیر آوردیم:



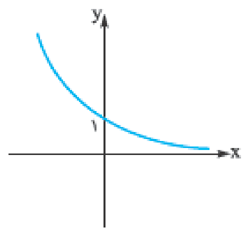
$y = \sqrt{x}$



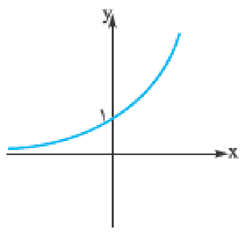
$y = |x|$



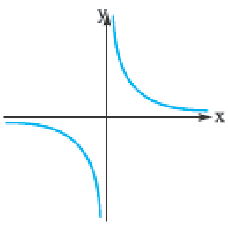
$y = x^2$



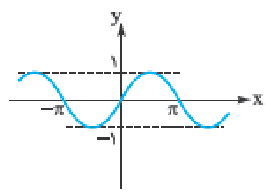
$y = a^x \quad (0 < a < 1)$



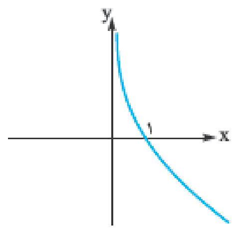
$y = a^x \quad (a > 1)$



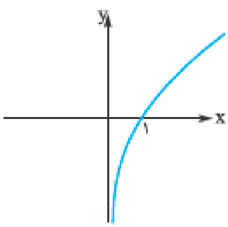
$y = \frac{1}{x}$



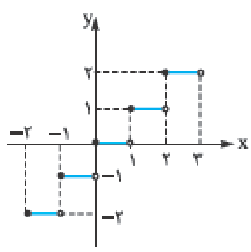
$y = \sin x$



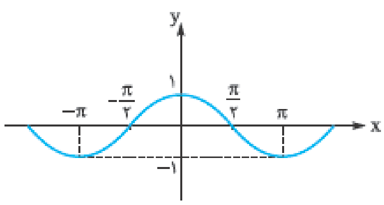
$y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$



$y = \log_a x \quad (a > 1)$

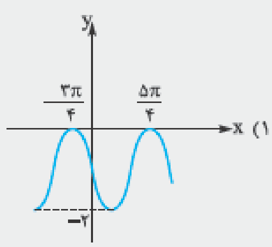


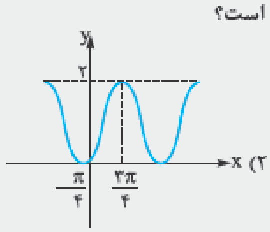
$y = [x]$

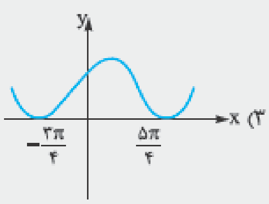


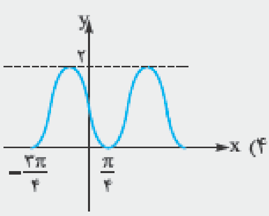
$y = \cos x$

تست نمودار تابع $y = 1 - \sin 2x$ کدام است؟

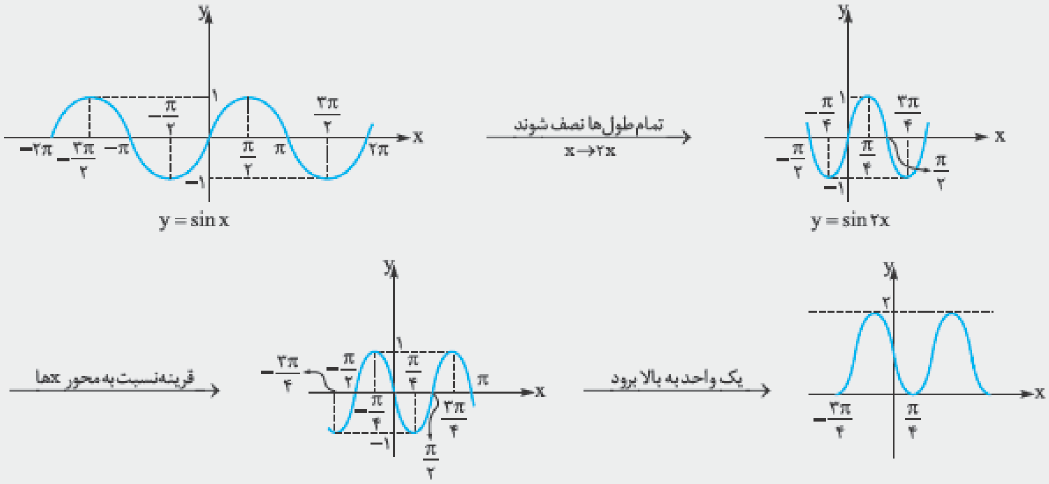
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ گزینهٔ «۴» برای رسم نمودار $y = 1 - \sin 2x$ از نمودار $y = \sin x$ کمک می‌گیریم و مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



تست برای رسم نمودار $y = 2x^2 - 4x + 3$ با استفاده از نمودار $y = x^2$ به ترتیب چه مراحلی باید صورت پذیرد؟

۱) دو واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، ۳ واحد به بالا
۲) یک واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، یک واحد به بالا
۳) دو واحد به راست، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{2}$، ۳ واحد به بالا
۴) یک واحد به راست، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{2}$، یک واحد به بالا

پاسخ گزینهٔ «۲» اول با استفاده از مربع کامل کردن، ضابطهٔ تابع $y = 2x^2 - 4x + 3$ را *جمع‌وجور* کنیم:

$$y = 2x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2(x-1)^2 + 1$$

برای رسم نمودار این تابع با استفاده از نمودار $y = x^2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = x^2 \xrightarrow[x \to x-1]{\text{یک واحد به راست}} y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}} y = 2(x-1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y = 2(x-1)^2 + 1$$

یک موضوع دیگر که حتماً باید بررسی کنیم، تحلیل وضعیت نقاط متناظر تابع و انتقال‌یافتهٔ آن است.

تست اگر نقطهٔ $(2x_0 - 1, -\frac{y_0}{2})$ روی نمودار $g(x) = k|ax + b|$ متناظر نقطهٔ (x_0, y_0) روی نمودار $f(x) = |x|$ باشد، $a + b + k$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۱-

پاسخ گزینهٔ «۲» نقطهٔ (x_0, y_0) روی نمودار تابع f قرار دارد، بنابراین:

$$f(x_0) = y_0 \quad (*)$$

هم‌چنین نقطهٔ $(2x_0 - 1, \frac{-y_0}{2})$ روی نمودار تابع g قرار دارد، پس:

$$g(2x_0 - 1) = -\frac{y_0}{2} \xrightarrow{(*)} g(2x_0 - 1) = -\frac{1}{2}f(x_0) \quad (**)$$

حالا با فرض $2x_0 - 1 = x$ داریم:

$$2x_0 = x + 1 \Rightarrow x_0 = \frac{x+1}{2}$$

$$\xrightarrow{(**)} g(x) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right) \xrightarrow{f(x)=|x|} g(x) = -\frac{1}{2}\left|\frac{x+1}{2}\right| = -\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right| = k|ax + b|$$

در نتیجه:

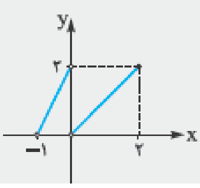
$$k = -\frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow k + a + b = \frac{1}{2}$$

تأثیر تبدیل نمودار توابع روی دامنه و برد

فرض کنیم u عبارتی خطی برحسب x باشد، در این صورت داریم:

۱ اگر دامنهٔ f بازهٔ $[a, b]$ باشد، برای یافتن دامنهٔ $cf(u) + d$ کافی است نامعادلات مضاعف $a \le u \le b$ را حل کنیم.

تست اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y = 2f(1 - \frac{x}{3})$ کدام است؟



۱) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
۲) $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) - \{1\}$
۳) $(-6, 3]$
۴) $[-3, 6) - \{3\}$

پاسخ گزینهٔ «۴» با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع f برابر است با: $D_f=(-۱,۲]-\{۰\}$

بنابراین برای محاسبهٔ دامنهٔ $y=۲f(۱-\frac{x}{۳})$ باید نامعادلات زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}-۱<۱-\frac{x}{۳}\le ۲ \xrightarrow{-(۱)} -۲<-\frac{x}{۳}\le ۱ \xrightarrow{\times(-۳)} -۳\le x<۶\\ \text{و}\\ ۱-\frac{x}{۳}\neq ۰ \Rightarrow \frac{x}{۳}\neq ۱ \Rightarrow x\neq ۳\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه}=[-۳,۶)-\{۳\}$$

۲ اگر دامنهٔ $cf(u)+d$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنهٔ تابع $y=f(x)$ با قراردادن $a\le x\le b$ و تشکیل عبارت u، دامنهٔ f را می‌یابیم.

تست اگر دامنهٔ تابع $y=f(x-۲)$ بازهٔ $[۱,۴)$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=۱-f(۲x)$ کدام است؟

۱) $[۶,۱۲)$ ۲) $[\frac{۳}{۲},۳)$ ۳) $[-\frac{۱}{۲},۱)$ ۴) $[-۲,۴)$

پاسخ گزینهٔ «۳» ابتدا با کمک دامنهٔ تابع $y=f(x-۲)$، دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را می‌یابیم:

$$۱\le x<۴ \xrightarrow{-۲} -۱\le x-۲<۲ \Rightarrow D_f=[-۱,۲)$$

حالا برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $g(x)=۱-f(۲x)$ نامعادلات روبه‌رو را حل می‌کنیم:

$$-۱\le ۲x<۲ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲}\le x<۱ \Rightarrow D_g=[-\frac{۱}{۲},۱)$$

۳ اگر برد تابع f بازهٔ $[a,b]$ باشد، برای یافتن برد $y=cf(u)+d$ کافی است برد f را ابتدا در c ضرب و سپس با d جمع کنیم.

تست اگر برد تابع f بازهٔ $(۱,۳]$ باشد، برد تابع $y=۱-۲f(۳x)$ کدام است؟

۱) $[-۵,-۱)$ ۲) $[-۳,۱)$ ۳) $(-۹,-۳]$ ۴) $(-۴,۲]$

پاسخ گزینهٔ «۱» برد f بازهٔ $(۱,۳]$ است، پس $۱<f(x)\le ۳$ و در نتیجه:

$$۱<f(۳x)\le ۳ \xrightarrow{\times(-۲)} -۶\le -۲f(۳x)<-۲ \xrightarrow{+۱} -۵\le ۱-۲f(۳x)<-۱$$

پس برد تابع داده‌شده، بازهٔ $[-۵,-۱)$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تبدیل نمودار توابع

۱۰۵۳- نمودار تابع $y=|x+۱|-۱$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۰۵۴- تابع $f(x)=x^۲$ با دامنهٔ $(-۲,۱)$ مفروض است. اگر مجموعه‌های A و B به ترتیب دامنه و برد تابع $y=f(x-۱)-۲$ باشند، $B-A$ کدام است؟

۱) $[۰,۲)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(-۲,-۱)$ ۴) $[-۲,-۱]$

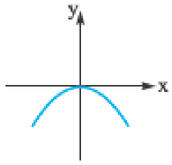
۱۰۵۵- اگر نمودار تابع $y=[۲x]$ را یک واحد به سمت چپ و سپس نمودار حاصل را .... واحد به .... منتقل کنیم، نمودار حاصل و نمودار اولیه بر هم منطبق می‌شوند.

۱) یک ـ بالا ۲) یک ـ پایین ۳) دو ـ بالا ۴) دو ـ پایین

۱۰۵۶- برای رسم نمودار تابع $y=\frac{۲^x-۴}{۲}$ با انتقال نمودار تابع $y=۲(۲^x)$ چه مراحلی طی می‌شود؟

۱) دو واحد به راست و دو واحد به پایین
۲) دو واحد به چپ و دو واحد به پایین
۳) چهار واحد به پایین و انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۴}$
۴) چهار واحد به پایین و انبساط عمودی با ضریب ۴

۱۰۵۷- اگر نقطهٔ $(-۲,-۱)$ روی سهمی مقابل را با انتقال‌های عمودی و افقی به نقطهٔ $(۱,۱)$ ببریم، تابع حاصل با چه عرضی محور yها را قطع می‌کند؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

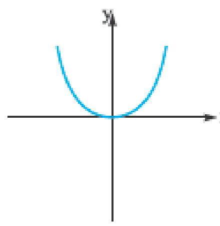
۱۰۵۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

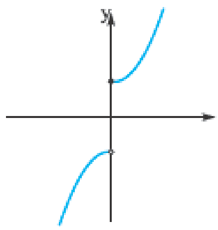
۱) دوم ۲) سوم ۳) چهارم ۴) از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

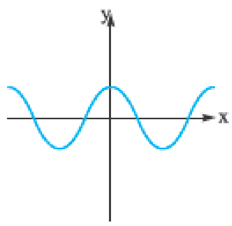
۱۰۵۹- نمودار تابع $y=۱+\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ را ابتدا دو واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع حاصل کدام است؟

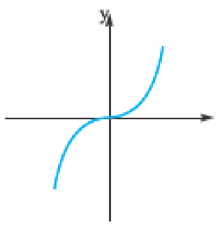
۱) $\sqrt{x^۲-۲x+۳}$ ۲) $\sqrt{x^۲-۲x-۱}$ ۳) $|x-۱|$ ۴) $|x+۱|$

۱۰۶۰- نمودار f کدام باشد تا تساوی $f(x)=-f(-x)$ به ازای هر x عضو دامنه برقرار باشد؟

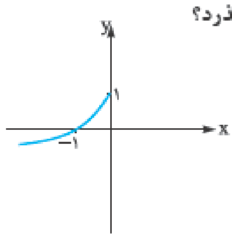
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۰۶۱- نمودار تابع مقابل از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. نمودار تابع از کدام نقطهٔ زیر می‌گذرد؟



۱) $(-۴,-۱)$
۲) $(-۴,-۲)$
۳) $(-۹,-۳)$
۴) $(-۹,-۴)$

۱۰۶۲- نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس ۲ واحد به طرف چپ و در نهایت ۱ واحد به پایین منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=\sqrt{۲-x}-۱$ ۲) $y=-\sqrt{x-۲}-۱$ ۳) $y=-\sqrt{x+۲}-۱$ ۴) $y=\sqrt{۲-x}-۱$

۱۰۶۳- با انتقال نمودار $f(x)=۱+\sqrt{x-۱}$ به نمودار $g(x)=۲+\sqrt{x+۱}$ رسیده‌ایم. مراحل انتقال به ترتیب کدام است؟

۱) دو واحد به چپ و یک واحد به بالا
۲) دو واحد به راست و یک واحد به بالا
۳) دو واحد به چپ و یک واحد به پایین
۴) دو واحد به راست و یک واحد به پایین

۱۰۶۴- نمودار تابع $y=\sqrt{۴x+۱۲}$ را ابتدا با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای عمودی منقبض، سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع حاصل کدام است؟

۱) $y=۱-\sqrt{x+۳}$ ۲) $y=۱+\sqrt{۳-x}$ ۳) $y=۱-۲\sqrt{۴x+۱۲}$ ۴) $y=۱+۲\sqrt{۱۲-۴x}$

۱۰۶۵- برای رسم نمودار تابع $g(x)=-۲x^۲+۴x$ با استفاده از نمودار $f(x)=x^۲$ چه انتقال‌هایی باید صورت گیرد؟

۱) یک واحد به چپ، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور yها، دو واحد به بالا
۲) یک واحد به راست، انبساط عمودی با ضریب ۲، قرینه نسبت به محور xها، دو واحد به بالا
۳) یک واحد به چپ، انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، قرینه نسبت به محور yها
۴) یک واحد به راست، انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، قرینه نسبت به محور xها

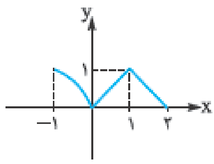
۱۰۶۶- تابع $f(x)=\log_۲(x+۲)$ مفروض است. به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y=f(۲x)+a$ فقط از دو ناحیه عبور می‌کند؟

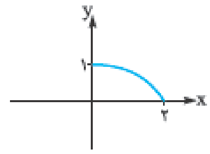
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

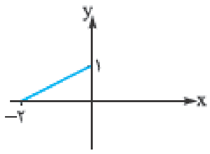
۱۰۶۷- تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی منقبض و سپس نسبت به محور yها قرینه کنیم و در نهایت یک واحد به پایین منتقل کنیم، تابع g حاصل می‌شود. خط $y=۳$ نمودار تابع fog را با کدام طول قطع می‌کند؟

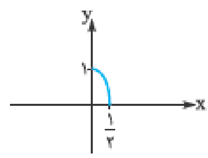
۱) -۱ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) -۲

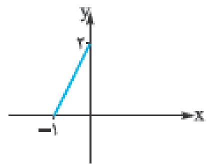
۱۰۶۸- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، کدام نمودار زیر بخشی از نمودار تابع $y=۲f(x+۱)$ است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰۶۹- نمودار تابع $y=\log_۲(۲x-۱)$ را ابتدا دو واحد به راست و سپس با ضریب ۲ در راستای افقی منبسط کرده و در نهایت یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. نمودار تابع حاصل، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۷/۵ ‏ ۲) ۸/۵ ‏ ۳) ۷ ‏ ۴) ۸

۱۰۷۰- برای رسم نمودار $y=\sqrt{۱-\cos^۲ x}$ با استفاده از نمودار $y=|\sin(\frac{\pi}{۶}-\frac{x}{۲})|$ چه مراحلی را می‌توان طی کرد؟

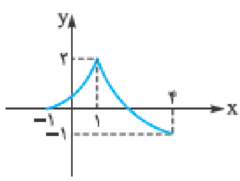
۱) انبساط افقی با ضریب ۲، $\frac{\pi}{۶}$ به چپ

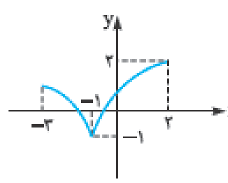
۲) انبساط افقی با ضریب ۲، $\frac{\pi}{۶}$ به راست

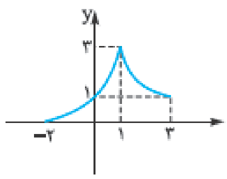
۳) انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{\pi}{۶}$ به چپ

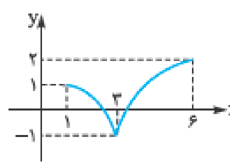
۴) انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{\pi}{۶}$ به راست

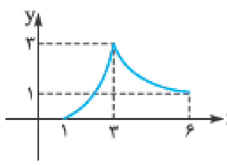
۱۰۷۱- اگر نمودار تابع $y=-f(x-۲)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=۱+f(x)$ کدام است؟



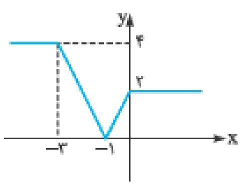
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰۷۲- اگر نمودار تابع $y=f(۱-x)$ به صورت مقابل باشد، سطح محصور بین نمودار تابع $y=f(x-۱)$ و محور xها در فاصلهٔ $[۰,۵]$ کدام است؟



۱) ۸

۲) ۸/۵

۳) ۹

۴) ۹/۵

۱۰۷۳- نقطهٔ $(-۸,۶)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. کدام نقطه به طور قطع روی نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(-x)+۱$ قرار دارد؟

۱) $(-۸,۴)$ ‏ ۲) $(۸,۴)$ ‏ ۳) $(۸,۱۰)$ ‏ ۴) $(-۸,-۲)$

۱۰۷۴- اگر $g(x)=۱-۲f(\frac{x}{۲}-۱)$ و نقطهٔ $(۲,-۱)$ روی نمودار g باشد، نقطهٔ متناظر A روی نمودار f کدام است؟

۱) $(۰,۱)$ ‏ ۲) $(۶,۳)$ ‏ ۳) $(۰,-۱)$ ‏ ۴) $(۶,-۳)$

۱۰۷۵- اگر نقطهٔ $(۲x_۰-۱,۱-y_۰)$ روی نمودار g، متناظر نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار f باشد، رابطهٔ بین f و g به کدام صورت است؟

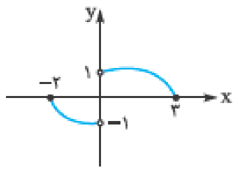
۱) $f(x)=۱+g(۲x-۱)$ ‏ ۲) $f(x)=۱+g(\frac{x+۱}{۲})$ ‏ ۳) $g(x)=۱-f(۲x-۱)$ ‏ ۴) $g(x)=۱-f(\frac{x+۱}{۲})$

تأثیر تبدیل نمودار توابع روی دامنه و برد

۱۰۷۶- اگر دامنهٔ تابع f بازهٔ $(-۲,۱]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=۱-f(۱-\frac{x}{۳})$ کدام است؟

۱) $(۰,۹]$ ۲) $(\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۳}]$ ۳) $[۰,۹)$ ۴) $[\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۳})$

۱۰۷۷- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{x}{\sqrt{f(-۳x)}}$ به کدام صورت قابل نمایش است؟



۱) $(a,b)-\{c\}$ ۲) $(a,b]\cup\{c\}$ ۳) (a,b) ۴) $(a,b]$

۱۰۷۸- اگر دامنهٔ تابع $y=۳-f(۲x-۳)$ بازهٔ $[-۱,۱)$ باشد، دامنهٔ تابع $y=۲f(x-۱)$ کدام است؟

۱) $[۰,۱)$ ۲) $[-۴,۰)$ ۳) $[-۱,۱)$ ۴) $[۱,۳)$

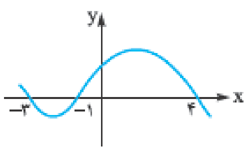
۱۰۷۹- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنهٔ تابع $f(۳-x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۱۰۸۰- اگر $f(x)=\sqrt{x+|x+۲|}$، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)

۱) $x\le -۱$ ۲) $x\ge -۱$ ۳) $x\le ۱$ ۴) $x\ge ۱$

۱۰۸۱- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)



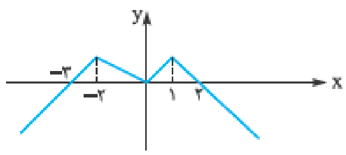
۱) $[-۱,۱]\cup[۰,۶]$

۲) $[-۳,۱]\cup[۰,۲]$

۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$

۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۱۰۸۲- اگر نمودار تابع $y=f(x+۱)$ به صورت مقابل باشد. آن‌گاه به ازای چند مقدار صحیح تابع $y=\log_{x+۱}f(x)$ تعریف می‌شود؟



۱) ۴

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۰۸۳- اگر برد تابع f برابر $\mathbb{R}_f=[-\sqrt{۳},۲]$ باشد، برد تابع $y=\sqrt{۲f(x-۱)+۱}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تابع یک به یک

در این قسمت، شرایط یک‌به‌یک بودن یک تابع را در حالت‌های مختلف بررسی و نکات آن را بیان می‌کنیم.

۱) نمایش زوج مرتبی

در نمایش زوج‌مرتبی یک تابع یک‌به‌یک، هیچ دو زوج‌مرتب متمایزی، مؤلفهٔ دوم برابر ندارند (دقت کنید که چون باید شرایط تابع‌بودن را داشته باشند، مؤلفه‌های اول نیز نباید یکسان باشند.) پس:

نکته اگر در یک تابع، مؤلفه‌های دوم برابر باشند، برای یک‌به‌یک بودن باید مؤلفه‌های اول نیز برابر باشند. باز هم تأکید می‌کنم بررسی شرط تابع‌بودن فراموش نشود.

تست اگر تابع $f=\{(-۲,-۱),(a^۲-۳a,-۱),(a-۱,۴),(۰,۱),(-a+۲,k)\}$ یک‌به‌یک باشد، k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دو زوج‌مرتب $(a^۲-۳a,-۱)$ و $(-۲,-۱)$ مؤلفه‌های دوم برابر دارند؛ پس باید مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز برابر باشد.

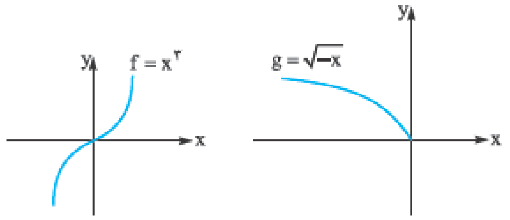
$$a^۲-۳a=-۲ \Rightarrow a^۲-۳a+۲=۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۲)=۰ \Rightarrow a=۱, a=۲$$

هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} a=۱: f=\{(-۲,-۱),\underline{(۰,۴)},\underline{(۰,۱)},(۱,k)\} : \text{تابع نیست.} \\ a=۲: f=\{(-۲,-۱),(۱,۴),\underline{(۰,۱)},\underline{(۰,k)}\} \Rightarrow k=۱ \end{cases}$$

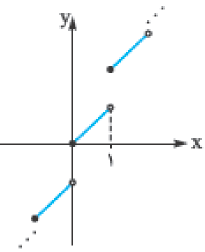
۹۸۱- گزینهٔ۱ $y=\log_{۵} x$ صعودی است (مبنا بزرگ‌تر از واحد است). $y=\log_{۰/۵} x$ نزولی است (مبنا بین صفر و یک است)؛ پس $-\log_{۰/۵} x$ صعودی است و $y=\log_{۵} x-\log_{۰/۵} x$ مجموع دو تابع صعودی است که خود، صعودی است.

۹۸۲- گزینهٔ۳ نمودارهای f و g را ببینید:



تابع f صعودی و g نزولی است. با توجه به صعودی‌بودن f، $-f$ نزولی است. بنا به نکات درس‌نامه، $g-f$ نزولی است.

۹۸۳- گزینهٔ۲ نمودار $y=x+[x]$ را رسم می‌کنیم:



تابع اکیداً صعودی است.

۹۸۴- گزینهٔ۲ با توجه به این‌که $(۲f-g)(۳)=۲f(۳)-g(۳)$ کافی است $f(۳)$ و $g(۳)$ را پیدا کنیم:

$$f(۳)=\sqrt{۳+۱}=۲\ ,\ g(۳)=\frac{۳+۱}{۳-۲}=۴$$

$$۲f(۳)-g(۳)=۲(۲)-۴=۰$$

۹۸۵- گزینهٔ۴ ابتدا $x=(f+g)(۱)$ را به دست می‌آوریم:

$$x=(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=(۱-۵)+(۱^{۲}-۱)=-۴$$

حالا باید $(f-g)(-۴)$ را محاسبه کنیم:

$$(f-g)(-۴)=f(-۴)-g(-۴)=\sqrt{-(-۴)}-(-۴+۳)$$

$$=۲-(-۱)=۳$$

۹۸۶- گزینهٔ۲ ابتدا باید دامنهٔ $\frac{۲}{f^{۲}}$ را پیدا کنیم. $f^{۲}=f.f$ است؛ پس دامنهٔ $f^{۲}$ همان دامنهٔ f و برابر $\mathbb{R}$ است. $(D_{۲}=\mathbb{R})$

$$D_{\frac{۲}{f^{۲}}}=D_f-\{x|f^{۲}=۰\Rightarrow f=۰\}=\{-۲,۰,۲\}-\{۲\}=\{-۲,۰\}$$

مقدار $\frac{۲}{f^{۲}}$ را به ازای عضوهای دامنه‌اش می‌یابیم:

- $\frac{۲}{f^{۲}}(-۲)=\frac{۲}{f^{۲}(-۲)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$
- $\frac{۲}{f^{۲}}(۰)=\frac{۲}{f^{۲}(۰)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

پس: $\frac{۲}{f^{۲}}=\{(-۲,\frac{۱}{۲}),(۰,\frac{۱}{۲})\}$

۹۸۷- گزینهٔ۱ ابتدا دامنهٔ $\frac{۲}{f}-\frac{۱}{g}$ را می‌یابیم که برابر اشتراک دامنه‌های توابع $\frac{۲}{f}$ و $\frac{۱}{g}$ است:

$$D_{\frac{۲}{f}}=D_f-\{x|f=۰\}=\{۱,۲,-۱\}-\{۲\}=\{-۱,۱\}$$

$$D_{\frac{۱}{g}}=D_g-\{x|g=۰\}=\{۲,۱,۳\}-\varnothing=\{۱,۲,۳\}$$

$$D_{\frac{۲}{f}-\frac{۱}{g}}=D_{\frac{۲}{f}}\cap D_{\frac{۱}{g}}=\{۱\}\Rightarrow(\frac{۲}{f}-\frac{۱}{g})(۱)=\frac{۲}{f(۱)}-\frac{۱}{g(۱)}$$

$$=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{-۲}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۶}$$

۹۸۸- گزینهٔ۱ طبق تعریف داریم:

$$D_{\frac{g}{f-g}}=D_g\cap D_{f-g}-\{x|f-g=۰\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=D_f\cap D_g-\{x|f=g\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=D_g\cap D_f-\{x|f=g\}$$

حالا باید از نمودار، اطلاعات مورد نیاز را استخراج کنیم:

$$D_g=(-۲,۲]-\{۱\}\qquad D_f=[-۲,۳)$$

هم‌چنین در $x=۰$ مقدار دو تابع f و g با هم برابر هستند.

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=\underbrace{((-۲,۲]-\{۱\})\cap([-۲,۳))}_{(-۲,۲]-\{۱\}}-\{x=۰\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=((-۲,۲]-\{۱\})-\{۰\}\Rightarrow D_{\frac{g}{f-g}}=(-۲,۲]-\{۰,۱\}$$

۹۸۹- گزینهٔ۱ **راه اول:** ابتدا دامنهٔ هر یک از توابع f و g را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f=(\text{دامنهٔ صورت})\cap(\text{دامنهٔ مخرج})-\{x|\text{مخرج}=۰\}$$

$$D_f=(\mathbb{R})\cap(x\ge-۳)-\{x|\sqrt{x+۳}=۰\Rightarrow x=-۳\}$$

$$\Rightarrow D_f=(x\ge-۳)-\{-۳\}=(x>-۳)\Rightarrow D_f=(-۳,+\infty)$$

به همین ترتیب برای تابع g داریم:

$$D_g=(\mathbb{R})\cap(x\ge-۳)-\{x|\sqrt{x+۳}=۰\Rightarrow x=-۳\}$$

$$\Rightarrow D_g=(x\ge-۳)-\{-۳\}=x>-۳\Rightarrow D_g=(-۳,+\infty)$$

حالا دامنهٔ تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=(-۳,+\infty)\cap(-۳,+\infty)-\{x|\frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}}=۰$$

$$\Rightarrow x=۱\}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=(-۳,+\infty)-\{۱\}$$

راه دوم: از گزینه‌ها برای حل استفاده می‌کنیم.

$x=۱$ را در تابع قرار می‌دهیم ($x=۱$ در ۱ و ۲ قرار ندارد و در ۳ و ۴ هست.)

$$\begin{cases} f(1)=\frac{1}{2} \\ g(1)=0 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{f(1)}{g(1)}$$: تعریف نمی‌شود

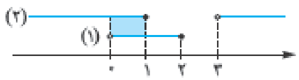
پس $x=1$ در دامنهٔ تابع قرار ندارد و در نتیجه ۳ و ۴ حذف می‌شوند. هم‌چنین $x=-4$ عبارت زیر رادیکال‌ها را منفی می‌کند، پس $x=-4$ هم در دامنه نیست؛ پس ۲ هم رد می‌شود و تمام!

۹۹۰- گزینه ۱ دامنهٔ هر یک از توابع $y=\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ و $y=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ را محاسبه می‌کنیم و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\sqrt{\frac{2-x}{x}}: \frac{2-x}{x}\ge 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{x-2}{x}\le 0 \Rightarrow 0<x\le 2 \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}: \frac{x-1}{x-3}\ge 0 \Rightarrow x\le 1 \text{ یا } x>3 \quad (2)$$

دامنهٔ f از اشـتراک دو مجموعه‌جواب فوق حاصل می‌شود؛ پس با توجه به شکل زیر، دامنهٔ f برابر است با:



$D_f=(0,1]$

۹۹۱- گزینه ۴ **راه اول:** با توجه به تعریف دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$، داریم:

دامنهٔ صورت: زیر رادیکال $\ge 0 \Rightarrow x(x^2-1)\ge 0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)\ge 0$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

x		−۱		۰		۱	
عبارت	−		+		−		+

$\Rightarrow$ دامنه $=[-1,0]\cup[1,+\infty)$

دامنهٔ مخرج: زیر رادیکال $\ge 0 \Rightarrow |x|+x\ge 0 \quad (*)$

از آن‌جا که $-|x|\le x\le |x|$، بنابراین با توجه به نامساوی سمت چپ یعنی $x\ge -|x|$ داریم: $x+|x|\ge 0 \xrightarrow{(*)}$ دامنهٔ مخرج $=\mathbb{R}$

ریشه‌های مخرج: $|x|+x=0 \Rightarrow |x|=-x$

با توجه به تعریف قدرمطلق، تساوی $|x|=-x$ به ازای هر $x\in(-\infty,0]$ برقرار است.

در نتیجه: $D_f=$ (دامنهٔ صورت) $\cap$ (دامنهٔ مخرج) $-$ (ریشه‌های مخرج)

$\Rightarrow D_f=([-1,0]\cup[1,+\infty))\cap(\mathbb{R})-((-\infty,0])$

$\Rightarrow D_f=[1,+\infty)$

راه دوم: $x=1$ در ۳ و ۴ قرار دارد. با قراردادن $x=1$ در تابع داریم:

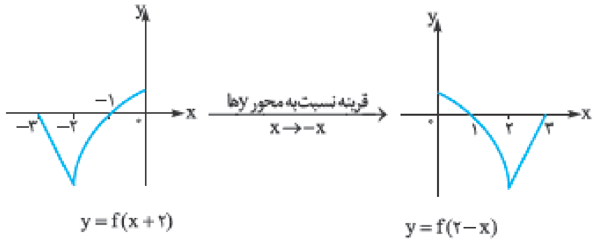
$$f(1)=\frac{\sqrt{1(1-1)}}{\sqrt{1+1}}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$$

چون تابع در $x=1$ مقدار دارد؛ پس $x=1$ عضو دامنهٔ تابع است. از طرفی $x=0$ در ۳ هست و در ۴ نیست.

$$f(0)=\frac{\sqrt{0(0-1)}}{\sqrt{0+0}}=\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{0}}$$: تعریف نشده

پس $x=0$ نباید عضو دامنه باشد، پس ۴ صحیح است.

۹۹۲- گزینه ۱ دامنهٔ تابع $f(x)$، بازهٔ $[-1,2]$ است. برای رسم نمودار $f(2-x)$، نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به چپ منتقل کرده و سـپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:



دامنهٔ تابع $f(2-x)$، بازهٔ $[0,3]$ اسـت. دامنهٔ y، اشتراک دامنهٔ صورت و مخرج به غیر از $f(2-x)=0$ است:

$$D_y=(D_f\cap D_{f(2-x)})-\{x\mid f(2-x)=0\}$$
$$=([-1,2]\cap[0,3])-\{1,3\}=[0,2]-\{1,3\}=[0,2]-\{1\}$$

۹۹۳- گزینه ۲ دامنهٔ تابع را که از اشتراک دامنهٔ توابع $y=\sqrt{x-1}$ و $y=\sqrt{1-x}$ محاسبه می‌شود را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}: x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1 \\ \sqrt{1-x}: 1-x\ge 0 \Rightarrow x\le 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=1$$

بنابراین f تابعی تک‌عضوی است. مقدار تابع را در $x=1$ می‌یابیم:

$$x=1: f(1)=\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}=0 \Rightarrow (1,0)\in f \Rightarrow f=\{(1,0)\}$$

پس f معکوس‌پذیر اسـت، چون یک‌به‌یک اسـت (رد ۱)، همانی نیست، چون ورودی و خروجی آن یکسـان نیست (رد ۳) و مثبت نیست، چون مقدار آن در $x=1$ (دامنهٔ تابع) صفر شده (رد ۴) اما به دلیل این‌که برد آن تک‌عضوی است، پس تابعی ثابت است.

۹۹۴- گزینه ۲ دامنهٔ f و g، $\mathbb{R}$ است.

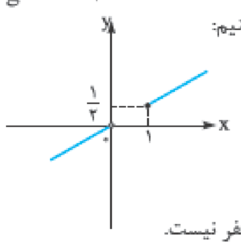
بریم سراغ دامنهٔ $\frac{f}{g}$، $D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)-\{x\mid g(x)=0\}$

$$=\mathbb{R}-\{x\mid 2[x]=0 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow x\in[0,1)\}$$

حالا ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ را به دست می‌آوریم: $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x[x]}{2[x]}=\frac{x}{2}$

پس: $\frac{f}{g}(x)=\frac{x}{2}\ ;\ x\in[0,1)$

تابع $y=\frac{x}{2}$ را روی $\mathbb{R}-[0,1)$ رسم می‌کنیم:



برد تابع $\mathbb{R}-[0,\frac{1}{2})$ است که تنها شامل صفر نیست.

۹۹۵- گزینه ۳ $f.g(x)$ را روی دامنهٔ آن محاسبه می‌کنیم.

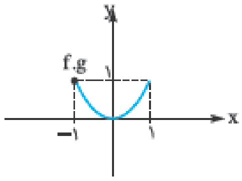
بنابراین ابتدا دامنهٔ $f.g$ را پیدا می‌کنیم:

$$D_{f.g}=D_f\cap D_g=\{x\mid x\in[-1,1]\}$$

(دامنهٔ f و g از نامساوی $1-x^2\ge 0$ به دست می‌آید.)

$f.g(x)=f(x)g(x)=(۱+\sqrt{۱-x^۲})(۱-\sqrt{۱-x^۲})$
$=۱-(۱-x^۲)=x^۲$

تابع f.g را رسم می‌کنیم:



برد f.g، بازهٔ $[۰,۱]$ است.

۹۹۶- گزینهٔ۲ با توجه به نمودار، دامنهٔ f بازهٔ $[-۱,۳]$ و دامنهٔ g بازهٔ $[۰,۴]$ است. پس دامنهٔ $f+g$ برابر است با:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۱,۳]\cap[۰,۴]=[۰,۳]$$

حالا به دوتا نمودار توجه کنید. هر دوتا در نقطهٔ $x=۲$ شکسته شده‌اند. پس دوتا حالت داریم:

۱ بازهٔ $[۰,۲]$: در این فاصله، تابع f، تابع ثابت $y=۲$ و تابع g، تابع ثابت $y=۰$ است؛ در نتیجه: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۲+۰=۲$

۲ بازهٔ $[۲,۳]$: در این فاصله هر دو تابع، خطی هستند؛ پس مجموع آن‌ها نیز خطی خواهد بود. در نتیجه فقط در نقاط ابتدا و انتهای بازه، $f+g$ را می‌یابیم و سپس معادلهٔ خط آن را می‌نویسیم. (دقت کنید که با توجه به نمودار، $f(۲)=۲$، $f(۳)=۰$، $g(۲)=۰$ و $g(۳)=۲$)

$x=۲:(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۲+۰=۲\Rightarrow(۲,۲)\in f+g$

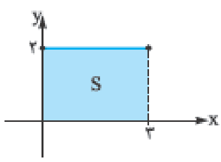
$x=۳:(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۰+۲=۲\Rightarrow(۳,۲)\in f+g$

در نتیجه: $\begin{cases}(۲,۲)\in f+g\\(۳,۲)\in f+g\end{cases}\Rightarrow y-۲=\frac{۲-۲}{۳-۲}(x-۲)$

$\Rightarrow y-۲=۰\Rightarrow y=۲\Rightarrow(f+g)(x)=۲$

پس تابع $f+g$ و در نتیجه نمودار آن به صورت زیر است:

$(f+g)(x)=۲,\ x\in[۰,۳]$



ناحیهٔ محصور بین نمودار تابع $f+g$ و محور xها همان ناحیهٔ رنگی است، که مساحت آن برابر است با:

$S=۲\times۳=۶$

۹۹۷- گزینهٔ۳ برای به دست آوردن fog، از دامنهٔ g شروع می‌کنیم. $(\{۲,۳,۴,۶\})$:

$fog(۲)=f(g(۲))=f(۱۱)=۷\Rightarrow(۲,۷)\in fog$

$fog(۳)=f(g(۳))=f(۲)=$ تعریف نمی‌شود

$fog(۴)=f(g(۴))=f(-۲)=۴\Rightarrow(۴,۴)\in fog$

$fog(۶)=f(g(۶))=f(۳)=-۵\Rightarrow(۶,-۵)\in fog$

$\Rightarrow fog=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵)\}$

۹۹۸- گزینهٔ۳ اول تابع f را تشکیل می‌دهیم. از آن‌جا که $x\in A$ است، داریم:

$x=۱:(x,۲x-۱)=(۱,۱)$

$x=۲:(x,۲x-۱)=(۲,۳)$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. پس تابع f برابر است با:

$f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷),(۵,۹)\}$

حالا تابع fof را محاسبه می‌کنیم: $(۱,۱)\in f,(۱,۱)\in f\Rightarrow(۱,۱)\in fof$

$(۲,۳)\in f,(۳,۵)\in f\Rightarrow(۲,۵)\in fof$

$(۳,۵)\in f,(۵,۹)\in f\Rightarrow(۳,۹)\in fof$

بنابراین: $fof=\{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۹)\}$

۹۹۹- گزینهٔ۱ می‌توانیم با توجه به نمودارهای ون، توابع f و g را به صورت زوج مرتبی بنویسیم:

$f=\{(۱,۴),(-۱,۲),(۳,۱),(۵,۱)\}$

$g=\{(۳,-۲),(۲,۰),(۱,۴),(۵,۴)\}$

حالا توابع fog و gof را تشکیل می‌دهیم.

تشکیل gof: زوج مرتب زمانی تشکیل می‌شود که خروجی تابع داخلی یعنی f با ورودی تابع بیرونی یعنی g برابر باشد.

$(-۱,۲)\in f,(۲,۰)\in g\Rightarrow(-۱,۰)\in gof$

$(۳,۱)\in f,(۱,۴)\in g\Rightarrow(۳,۴)\in gof$

$(۵,۱)\in f,(۱,۴)\in g\Rightarrow(۵,۴)\in gof$

$\Rightarrow gof=\{(-۱,۰),(۳,۴),(۵,۴)\}$

پس تابع gof سه زوج مرتب دارد.

تشکیل fog: در هیچ حالتی خروجی تابع g و ورودی تابع f یکسان نیست؛ پس این تابع هیچ زوج مرتبی ندارد.

۱۰۰۰- گزینهٔ۳ $(۴,۱)\in gof\Rightarrow g(f(۴))=۱$

با توجه به تابع f، $(۴,۵)\in f$ و در نتیجه $f(۴)=۵$، پس: $g(۵)=۱$

از آن‌جا که $(b,۱)\in g$ است؛ پس: $b=۵$

همچنین: $(۴,۲)\in fog\Rightarrow f(g(۴))=۲$

با توجه به مقدار b، دامنهٔ g به صورت $\{۱,۳,a,۵\}$ است. پس برای این‌که $g(۴)$ تعریف شود، باید $a=۴$ باشد. پس زوج مرتب (a,b) برابر $(۴,۵)$ است.

۱۰۰۱- گزینهٔ۴ ضابطهٔ f به صورت $f(x)=x+\sqrt{x}$ است، بنابراین:

$f(a)=a+\sqrt{a}$

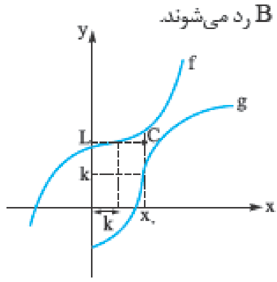
از آن‌جا که $g(f(a))=۵$، بنابراین: $g(a+\sqrt{a})=۵$

حالا به تابع g نگاه می‌کنیم. تنها زوج مرتبی که خروجی ۵ دارد، زوج مرتب $(۶,۵)$ است. پس ورودی باید ۶ باشد. در تساوی بالا ورودی g، $a+\sqrt{a}$ است؛ بنابراین: $a+\sqrt{a}=۶\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}}a=۴$

۱۰۰۲- گزینهٔ۱ مشخص است که اگر f و g تابع باشند، $f\cap g$، $f\pm g$، $f\times g$، $\frac{f}{g}$، fog و gof نیز تابع هستند. اما در مورد $f\cup g$ نمی‌توان نظر قطعی داد. برای مثال:

$\begin{cases}f=\{(۱,۰)\}\\g=\{(۱,-۱)\}\end{cases}\Rightarrow f\cup g=\{(۱,۰),(۱,-۱)\}$:تابع نیست

۱۰۰۳- گزینه ۳ چون مختصات نقطهٔ مربوط به $fog(x_۰)$ را خواسته، بنابراین حتماً طول آن $x_۰$ است، پس A و B رد می‌شوند. برای محاسبهٔ عرض هم به شکل نگاه کنید. $g(x_۰)=k$، حالا باید $f(k)$ را بیابیم که با توجه به اندازهٔ k، عرض تابع f می‌تواند L باشد. بنابراین مختصات موردنظر نقطهٔ $(x_۰ , L)$ یا مربوط به همان نقطهٔ C است.



۱۰۰۴- گزینه ۴ محاسبهٔ $f(f(۵))$: ابتدا باید $f(۵)$ را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ $f(۵)$، چون $۵ > ۳$ است، باید از ضابطهٔ بالا استفاده کنیم:

$$f(x)=x-\sqrt{x+۴} \Rightarrow f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲$$

$$\Rightarrow f(f(۵))=f(۲)$$

حالا برای محاسبهٔ $f(۲)$ باید از ضابطهٔ پایین استفاده کنیم:
(چون $۲<۳$):

$$f(x)=۲x+۳ \Rightarrow f(۲)=۲(۲)+۳=۷ \Rightarrow f(f(۵))=۷$$

محاسبهٔ $f(f(۱))$: برای محاسبهٔ $f(۱)$ از ضابطهٔ پایین استفاده می‌کنیم:

$$f(۱)=۲(۱)+۳=۵ \Rightarrow f(f(۱))=f(۵)$$

$f(۵)$ را هم که در قسمت قبل حساب کردیم: $f(۵)=۲$

$$\Rightarrow f(f(۱))=۲$$

در نتیجه حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

۱۰۰۵- گزینه ۱ اول با استفاده از اتحاد مربع کامل، ضابطهٔ g را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم: $g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$

با استفاده از ضابطه‌های $f(x)=|x|$ و $g(x)=(x+۱)^۲$ توابع fog و gof را تشکیل داده و مقادیر خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$(۱)\quad f(g(x))=f((x+۱)^۲)=|(x+۱)^۲|$$

چون عبارت $(x+۱)^۲$ همواره نامنفی است، بنابراین:

$$f(g(x))=(x+۱)^۲ \Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))=(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲$$

$$=(۲-\sqrt{۲})^۲=۲^۲+(\sqrt{۲})^۲-۴\sqrt{۲}=۴+۲-۴\sqrt{۲}=۶-۴\sqrt{۲}$$

$$(۲)\quad g(f(x))=g(|x|)=(|x|+۱)^۲$$

$$\Rightarrow g(f(۱-\sqrt{۲}))=(\underbrace{|۱-\sqrt{۲}|}_{-}+۱)^۲$$

$$=(-(۱-\sqrt{۲})+۱)^۲=(-۱+\sqrt{۲}+۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$fog(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴-۴\sqrt{۲}=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۱۰۰۶- گزینه ۳ برای به دست آوردن $g(۲)$، x را ۴ در نظر می‌گیریم:

$$g(\sqrt{۴})=g(۲)=\frac{۲(۴)-۱}{۴+۳}=۱$$

حالا نوبت $f(g(۲))$ است: $f(g(۲))=f(۱)=۱^۲+۱-۱=۱$

۱۰۰۷- گزینه ۳ تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲+۴x+۹}{x^۲+۴x+۵}=\frac{x^۲+۴x+۴+۵}{x^۲+۴x+۴+۱}=\frac{(x+۲)^۲+۵}{(x+۲)^۲+۱}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۳}-۲)=\frac{\sqrt{۳}^۲+۵}{\sqrt{۳}^۲+۱}=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$\Rightarrow f(f(\sqrt{۳}-۲))=f(۲)$$

با محاسبهٔ $f(۲)$ به مقصود می‌رسیم: $f(۲)=\frac{۴^۲+۵}{۴^۲+۱}=\frac{۲۱}{۱۷}$

۱۰۰۸- گزینه ۱ اول $g(\sqrt{۲})$ را به دست بیاوریم:

$$g(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=-(۲+\sqrt{۲})$$

$$f(-\frac{۱}{۲}g(\sqrt{۲}))=f(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲})=۴(۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-۲[\underbrace{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}_{\text{بین ۱ و ۲}}]$$

$$=۴(\frac{۳}{۲}+\sqrt{۲})-۲=۴(۱+\sqrt{۲})$$

۱۰۰۹- گزینه ۳ برای محاسبهٔ $(fof)(۳)$ یا همان $f(f(۳))$ اول باید مقدار $f(۳)$ را بیابیم. برای محاسبهٔ $f(۳)$ باید از نیم‌خطِ سمتِ راستیِ نمودارِ تابع، کمک بگیریم. اگر این خط را L بنامیم، آن‌گاه:

$$\begin{cases}(-۱,۲)\in L\\(۰,۱)\in L\end{cases} \Rightarrow \text{معادلهٔ } L: y-۱=\frac{۲-۱}{-۱-۰}(x-۰)$$

$$\Rightarrow y-۱=-x \Rightarrow y=۱-x \Rightarrow f(۳)=۱-۳=-۲$$

در نتیجه: $f(f(۳))=f(-۲)$

با توجه به شکل، $f(-۲)=۰$ در نتیجه: $f(f(۳))=f(-۲)=۰$

۱۰۱۰- گزینه ۳ با استفاده از ضابطهٔ f، $f(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=۲-|x-۲| \Rightarrow f(f(x))=f(۲-|x-۲|)$$

$$\Rightarrow ۲-|\cancel{۲}-|x-۲|-\cancel{۲}|=۲-|-|x-۲||$$

از آن‌جا که $|-u|=|u|$، بنابراین: $f(f(x))=۲-|x-۲|=f(x)$

۱۰۱۱- گزینه ۴ **راه اول**: با توجه به ضابطهٔ f:

$$g(f(x))=g(\frac{۲x-۱}{x+۱})$$

پس در تابع g هر جا x دیدیم باید به جای آن $\frac{۲x-۱}{x+۱}$ قرار دهیم:

$$\Rightarrow g(f(x))=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}=\frac{\frac{۴x-۲}{x+۱}+۲}{\frac{۲(x+۱)-۲x+۱}{x+۱}}$$

$$=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=\frac{\frac{۶x}{x+۱}}{\frac{۳}{x+۱}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

راه دوم: به ازای یک مقدار دلخواه، مقدار تابع را محاسبه می‌کنیم:

$x=2: g(f(x))=g(f(2))$

با توجه به ضابطهٔ f: $f(2)=\frac{3}{3}=1$

پس: $g(f(2))=g(1)$

با توجه به ضابطهٔ g: $g(1)=\frac{4}{1}=4$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=2$ مقدار ۴ دارد، (۴) است.

۱۰۱۲- گزینهٔ ۲ تابع f از درجهٔ ۳ و تابع g درجهٔ ۲ است، بنابراین درجهٔ gof، ۶ = ۳ × ۲ خواهد بود؛ پس $n=6$:

$$gof(x)=(k-1)x^6+x^2-1$$

نقطهٔ $(-1,2)$ در gof صدق می‌کند:

$$gof(-1)=2 \Rightarrow gof(-1)=k-1+1-1=2 \Rightarrow k=3$$

۱۰۱۳- گزینهٔ ۲ روش معمولی حل، این است که به جای xهای f، $g(x)$ را قرار دهیم و بعد از ساده‌سازی، خواستهٔ مسئله را اجرا کنیم. اما در این‌جا یک روش با *باحال‌ترا* ببینیم. از آن‌جا که تابع f تجزیه‌پذیر است و می‌خواهیم مجموعه نقاطی را بیابیم که fog پایین محور xهاست یا به عبارت دیگر $fog<0$ است به صورت زیر عمل می‌کنیم: $f(g(x))<0$

تجزیه شدهٔ f به صورت $f(x)=(x-1)(x+2)$ است؛ پس:

$$\Rightarrow f(g(x))=(\overset{\text{ریشه}=1}{g(x)}-1)(\overset{\text{ریشه}=-2}{g(x)}+2)<0 \Rightarrow -2<g(x)<1$$

در نهایت با توجه به ضابطهٔ g داریم:

$$-2<\frac{1}{2}(x-3)<1 \xrightarrow{\times 2} -4<x-3<2 \xrightarrow{+3} -1<x<5$$

۱۰۱۴- گزینهٔ ۱ تابع g را با استفاده از ضابطهٔ f تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+\frac{1}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x})=x+\frac{1}{x} \Rightarrow (f(\sqrt{x}))^2=(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

بنابراین تابع g برابر است با:

$$g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)=(x^2+\frac{1}{x^2}+2)-(x^2+\frac{1}{x^2})$$

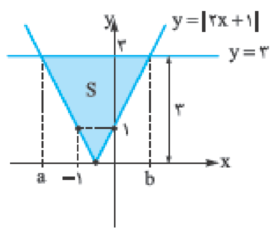
$\Rightarrow g(x)=2$ تابع ثابت

۱۰۱۵- گزینهٔ ۱ تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^2+x)=\sqrt{4(x^2+x)+1}$$

$$=\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$$

با رسم نمودار تابع $y=|2x+1|$ مساحت محصور بین نمودار و خط $y=3$ را محاسبه می‌کنیم:



x	-1	$-\frac{1}{2}$	0
y	1	0	1

$$\Rightarrow S_{\text{مثلث}}=\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$$

ارتفاع مثلث که برابر ۳ است. برای محاسبهٔ قاعده باید طول‌های a و b را حساب کنیم. a و b طول نقاط تلاقی نمودار $y=|2x+1|$ و خط $y=3$ است، پس:

$$|2x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases}2x+1=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow b=1\\ 2x+1=-3 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow a=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قاعدهٔ مثلث}=b-a=1-(-2)=3 \Rightarrow S_{\text{مثلث}}=\frac{3\times 3}{2}=4/5$$

۱۰۱۶- گزینهٔ ۴ مقادیر $\sin x$ در بازهٔ $[-1,1]$ و مقادیر $\sin^2 x$ در بازهٔ $[0,1]$ قرار دارد، پس $1\le 2-\sin^2 x\le 2$.

پس برای محاسبهٔ $f(2-\sin^2 x)$ از ضابطهٔ بالای f استفاده می‌کنیم:

$$f(2-\sin^2 x)=\sqrt{2-\sin^2 x-1}-1=\sqrt{1-\sin^2 x}-1$$

$$=\sqrt{\cos^2 x}-1=|\cos x|-1\le 0$$

بنابراین برای محاسبهٔ $f(|\cos x|-1)$ باید از ضابطهٔ پایین f استفاده کنیم:

$$\Rightarrow f(|\cos x|-1)=2$$

۱۰۱۷- گزینهٔ ۲ تابع fof را تشکیل می‌دهیم:

$$(fof)(x)=f(f(x))=f(x^2-1)=(x^2-1)^2-1$$

حالا نقاط تلاقی تابع با محور xها را پیدا می‌کنیم:

برای این کار باید ضابطهٔ تابع را برابر صفر قرار دهیم:

$$(x^2-1)^2-1=0 \Rightarrow (x^2-1)^2=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} : \text{دو نقطهٔ تلاقی}\\ x^2-1=-1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 : \text{یک نقطهٔ تماس}\end{cases}$$

نکته ریشه‌های مکرر تابع (یعنی ریشهٔ $(x-a)^n=0$ وقتی $n\ge 2$ است.) نقاط تماس تابع با محور xها هستند؛ پس ریشهٔ معادله $x^2=0$ یعنی $x=0$ نقطهٔ تماس نمودار تابع با محور xها است.

۱۰۱۸- گزینهٔ ۳ خروجی ماشین برابر $\frac{4}{3}$ است. این خروجی همان خروجی $\frac{x}{\sqrt{x}+1}$ است. ببینیم ورودی این تابع چه بوده؟

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{4}{3} \Rightarrow x=4$$

پس ماشین به صورت زیر، باز رسم می‌شود:

ورودی $\longrightarrow \boxed{2x-2} \xrightarrow{4} \boxed{\frac{x}{\sqrt{x}+1}} \longrightarrow$ خروجی

با توجه به شکل عدد ۴، خروجی تابع $y=2x-2$ است، پس:

ورودی: $2x-2=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$

۱۰۱۹- گزینهٔ ۲ با توجه به این‌که تابع $fog(x)=f(g(x))$ را داریم، برای محاسبهٔ $f(3)$ باید x را طوری بیابیم که در تابع $f(g(x))$، تابع داخلی یعنی $g(x)$ برابر ۳ شود:

$$\Rightarrow g(x)=3 \Rightarrow 2x-1=3 \Rightarrow x=2$$

حالا با قراردادن $x=2$ در تابع fog، مقدار $f(3)$ را می‌یابیم:

$$f(g(x))=\frac{x}{x-3} \Rightarrow f(g(2))=\frac{2}{2-3} \Rightarrow f(3)=-2$$

۱۰۲۰- گزینهٔ ۴ **راه اول:** با فرض $t=x-3$، ضابطهٔ $f(x)$ را می‌یابیم:

$$x-3=t \Rightarrow x=t+3$$

در تساوی داده‌شده به جای x، $t+3$ قرار می‌دهیم:

$$f(x-3)=x^2-4x+5 \Rightarrow f(t)=(t+3)^2-4(t+3)+5$$

$$\Rightarrow f(t)=t^2+6t+9-4t-12+5 \Rightarrow f(t)=t^2+2t+2$$

حالا برای محاسبهٔ $f(1-x)$ به جای t در تساوی بالا، $1-x$ قرار می‌دهیم:

$$f(1-x)=(1-x)^2+2(1-x)+2$$

$$\Rightarrow f(1-x)=x^2-2x+1+2-2x+2$$

$$\Rightarrow f(1-x)=x^2-4x+5$$

راه دوم: می‌توانیم میانبر هم بزنیم. اگر در ضابطهٔ $f(x-3)$ به جای xها، $4-x$ قرار دهیم، ضابطهٔ $f(1-x)$ ساخته می‌شود.

پس با توجه به تساوی $f(x-3)=x^2-4x+5$، به جای xها، $4-x$ قرار می‌دهیم:

$$f(4-x-3)=(4-x)^2-4(4-x)+5$$

$$\Rightarrow f(1-x)=16+x^2-8x-16+4x+5$$

$$\Rightarrow f(1-x)=x^2-4x+5$$

۱۰۲۱- گزینهٔ ۳ **راه اول:** تابع fog و تابع درونی g را داریم. نگاه کن!

$$\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=4(x^2-4x+5)\\ g(x)=2x-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2x-3)=4(x^2-4x+5) \quad (*)$$

چون تابع درونی را داریم، با فرض $g(x)=2x-3=t$ داریم:

$$2x-3=t \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$

با قراردادن این تساوی در $(*)$، $f(x)$ را می‌یابیم:

$$\Rightarrow f(t)=4\left(\left(\frac{t+3}{2}\right)^2-4\left(\frac{t+3}{2}\right)+5\right)$$

$$=4\left(\frac{t^2+6t+9}{4}-2t\underbrace{-6+5}_{-1}\right)=t^2+6t+9-8t-4$$

$$\Rightarrow f(t)=t^2-2t+5 \Rightarrow f(x)=x^2-2x+5$$

راه دوم: مقداردهی می‌کنیم:

$$f(g(x))=4(x^2-4x+5) \Rightarrow f(2x-3)=4(x^2-4x+5)$$

با قراردادن مقدار دلخواه $x=0$ در این تساوی داریم: $f(-3)=4(5)=20$

حالا در گزینه‌ها که ضابطهٔ f هستند، $x=-3$ قرار می‌دهیم؛ هر کدام ۲۰ شد جواب است که تنها ۳ این مقدار را می‌دهد. *اینهاها:*

$$x^2-2x+5 \xlongequal{x=-3} (-3)^2-2(-3)+5=20$$

۱۰۲۲- گزینهٔ ۴ ابتدا از $f(g(x))$، g و f را پیدا می‌کنیم. برای این کار $g(x)$ را t گرفته و x را برحسب t به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\sqrt[3]{x-1}=t \Rightarrow x-1=t^3 \Rightarrow x=t^3+1$$

x برحسب t را در $f(g(x))$ جای‌گذاری می‌کنیم تا $f(t)$ حاصل شود:

$$f(g(x))=f(t)=t^3+1+|t^3+1| \Rightarrow f(x)=x^3+1+|x^3+1|$$

$$\Rightarrow g(f(1))=g(1^3+1+|1^3+1|)=g(4)=\sqrt[3]{3}$$

۱۰۲۳- گزینهٔ ۲ ابتدا باید $f(x)$ را پیدا کنیم. برای این کار از تغییر متغیر $x\sqrt{x}+1=t$ استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{x(x^2+2\sqrt{x})}_{\text{از } \sqrt{x} \text{ فاکتور می‌گیریم}}=x\sqrt{x}(x\sqrt{x}+2) \xrightarrow{x\sqrt{x}+1=t}$$

$$=(t-1)(t+1)=t^2-1 \Rightarrow f(t)=t^2-1$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-1 \xrightarrow{x=\sqrt{3}} f(\sqrt{3})=2$$

۱۰۲۴- گزینهٔ ۲ **راه اول:** با توجه به ضابطهٔ $g(x)=x-\frac{1}{x}$:

$$f(g(x))=f(x-\frac{1}{x})$$

چون $f(g(x))=x^2+\frac{1}{x^2}-4$، بنابراین:

$$f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}-4 \quad (*)$$

خب، تابع داخلی را داریم، پس آن را برابر t قرار می‌دهیم: $x-\frac{1}{x}=t$

اما تنهاکردن x کار آسانی به نظر نمی‌رسد؛ پس از اتحادها برای محاسبهٔ تابع f استفاده می‌کنیم. نگاه کنید:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2 \xrightarrow{(*)} f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2+2-4$$

$$\Rightarrow f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2-2$$

$$\xrightarrow{x-\frac{1}{x}=t} f(t)=t^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$$

راه دوم: $f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}-4$

مقدار دلخواه $x=1$ را در تساوی بالا قرار می‌دهیم:

$$f(0)=1+1-4=-2 \Rightarrow f(0)=-2$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=0$ مقدار -2 دارد، ۲ است.

۱۰۲۵- گزینهٔ ۴ برای یافتن $g(1)$ در تابع fog، $x=1$ قرار می‌دهیم:

$$f(g(x))=\frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow f(g(1))=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow f(g(1))=\frac{3}{2} \quad (*)$$

حالا در ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$، به جای x، $g(1)$ قرار می‌دهیم:

$$f(g(1))=\frac{g(1)+1}{g(1)-1} \xrightarrow{(*)} \frac{3}{2}=\frac{g(1)+1}{g(1)-1}$$

$$\Rightarrow 3g(1)-3=2g(1)+2 \Rightarrow g(1)=5$$

۱۰۲۶- گزینهٔ ۲ شکل داده‌شده، مربوط به تابع gof است. با توجه به شکل داریم: $gof(x)=2x \Rightarrow g(f(x))=2x \quad (*)$

از آن‌جا که $g(x)=3x+4$، بنابراین: $g(f(x))=3f(x)+4$

از آن‌جا که با توجه به $(*)$، $g(f(x))=2x$ است؛ پس: $3f(x)+4=2x$

حالا برای بررسی $f(5)$، در این تساوی $x=5$ قرار می‌دهیم:

$$3f(5)+4=2(5) \Rightarrow 3f(5)=6 \Rightarrow f(5)=2$$

۱۰۲۷- گزینهٔ ۲ وقتی عرض از مبدأ تابع fog برابر ۲ باشد، یعنی $fog(0)=2$ است. $g(0)=a$ در نظر می‌گیریم:

$$f(g(0))=2 \xrightarrow{g(0)=a} f(a)=2 \Rightarrow \frac{a+3}{a+1}=2$$

$$\Rightarrow a+3=2a+2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow g(0)=1$$

۱۰۲۸- گزینه۳

با داشتن $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x}$، تساوی $fog(x)=(f+g)(x)$ را با $g(x)$ تشکیل می‌دهیم:

▸ $fog(x)=f(g(x))=\frac{g^{۲}(x)+۱}{g(x)}$

▸ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x}+g(x)=\frac{x^{۲}+۱+xg(x)}{x}$

$$fog(x)=(f+g)(x) \Rightarrow \frac{g^{۲}(x)+۱}{g(x)}=\frac{x^{۲}+۱+xg(x)}{x}$$

$$\cancel{xg^{۲}(x)}+x=x^{۲}g(x)+g(x)+\cancel{xg^{۲}(x)}$$

$$\Rightarrow g(x)(۱+x^{۲})=x \Rightarrow g(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$$

۱۰۲۹- گزینه۱ ضابطهٔ fog و ضابطهٔ تابع بیرونی f را داریم. پس به کمک ضابطهٔ f، تابع $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=x^{۲}-x-۲ \Rightarrow f(g(x))=g^{۲}(x)-g(x)-۲$$

از آن‌جا که $f(g(x))=x^{۲}+x-۲$؛ بنابراین:

$$g^{۲}(x)-g(x)-۲=x^{۲}+x-۲ \Rightarrow g^{۲}(x)-g(x)=x^{۲}+x$$

حالا برای این‌که تابع g را بیابیم از مربع کامل کردن استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow (g(x)-\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}=(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow (g(x)-\frac{۱}{۲})^{۲}=(x+\frac{۱}{۲})^{۲} \Rightarrow g(x)-\frac{۱}{۲}=\pm(x+\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x)-\frac{۱}{۲}=x+\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x)=x+۱ \\ g(x)-\frac{۱}{۲}=-x-\frac{۱}{۲} \Rightarrow g(x)=-x \end{cases}$$

حالا با هر کدام از ضابطه‌ها، تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم. هر کدام در گزینه‌ها بود جواب است: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f+g)(x)=(x^{۲}-x-۲)+(x+۱)=x^{۲}-۱ \\ (f+g)(x)=(x^{۲}-x-۲)+(-x)=x^{۲}-۲x-۲ \end{cases}$$

که عبارت $x^{۲}-۱$ در گزینه‌ها هست.

۱۰۳۰- گزینه۲ نقاط تقاطع fog با محور xها یعنی جاهایی که $f(g(x))=۰$ می‌شود. برای حل این معادله، اول معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل می‌کنیم، سپس به جای xها، $g(x)$ قرار می‌دهیم. خوشبختانه طراح به ما گفته f در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{۱}{۴}$ محور xها را قطع می‌کند. در نتیجه:

$$f(x)=۰ \Rightarrow x=۶, x=-\frac{۱}{۴}$$

حالا با جای‌گذاری $g(x)$ به جای xها داریم:

$$f(g(x))=۰ \Rightarrow g(x)=۶, g(x)=-\frac{۱}{۴}$$

از آن‌جا که $g(x)=x-\sqrt{x}$، بنابراین: $\begin{cases} x-\sqrt{x}=۶ \\ x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$

حالا دوتا روش داریم. یا معادلات را حل کنیم که *ولمون کن بابا!* یا از گزینه‌ها کمک بگیریم که *ایول همینه!* $x=۴$ ریشهٔ هیچ‌کدام از معادلات بالا نیست؛ پس جواب نیست. در نتیجه ۱، ۳ و ۴ حذف می‌شوند و *قلاص!*

۱۰۳۱- گزینه۳ برای حل معادلهٔ $f(g(x))=۰$ اول معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=۰ \Rightarrow x^{۲}-۸x+۱۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۶)=۰$$

$$\Rightarrow f(x)=۰ \Rightarrow x=۲, x=۶$$

حالا به جای xها $g(x)$ قرار می‌دهیم: $f(g(x))=۰ \Rightarrow \begin{cases} g(x)=۲ \\ g(x)=۶ \end{cases}$

چون g دوضابطه‌ای است، پس هر دو ضابطهٔ g را یک بار برابر ۲ و یک بار برابر ۶ قرار می‌دهیم و جواب‌های حاصل را با توجه به شرط ضابطه می‌پذیریم.

$$g(x)=۲ \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}+x=۲ \Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰ \\ \Rightarrow x=۱,-۲ \xrightarrow{x\geq۰} x=۱ ✓ \\ ۲x+۳=۲ \Rightarrow ۲x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \\ \xrightarrow{x<۰} x=-\frac{۱}{۲} ✓ \text{ قق} \end{cases}$$

$$g(x)=۶ \Rightarrow \begin{cases} x^{۲}+x=۶ \Rightarrow x^{۲}+x-۶=۰ \\ \Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰ \\ \Rightarrow x=-۳,۲ \xrightarrow{x\geq۰} x=۲ ✓ \\ ۲x+۳=۶ \Rightarrow ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \xrightarrow{x<۰} \text{غقق} \end{cases}$$

پس معادله سه جواب $x=۱$، $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=۲$ دارد و مجموع آن‌ها برابر ۲/۵ است.

۱۰۳۲- گزینه۲ ابتدا ضابطهٔ تابع gof را بدون ساده‌کردن آن می‌یابیم. (برای این‌که از بابت دامنه مشکلی نداشته باشیم.)

$$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{۱-x^{۲}}) \Rightarrow gof(x)=(\sqrt{۱-x^{۲}})^{۲}+۱$$

پس معادلهٔ خواسته‌شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$gof(x)=x^{۲}+۳x \Rightarrow (\sqrt{۱-x^{۲}})^{۲}+۱=x^{۲}+۳x \quad (*)$$

حالا می‌توانیم معادله را مرتب کنیم:

$$\Rightarrow ۱-x^{۲}+۱=x^{۲}+۳x \Rightarrow ۲x^{۲}+۳x-۲=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۱۶}}{۲(۲)}=\frac{-۳\pm۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۳+۵}{۴}=\frac{۱}{۲} ✓ \\ x=\frac{-۳-۵}{۴}=-۲ ✗ \text{ در معادلهٔ (*)، عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود.} \end{cases}$$

۱۰۳۳- گزینه۳ چون f و g چندجمله‌ای هستند و fof و $g(۲x+۳)$ خطی شده، پس حتماً f و g توابعی خطی هستند. پس می‌توانیم توابع f و g را به صورت $f(x)=ax+b$ و $g(x)=cx+d$ در نظر بگیریم. حالا با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^{۲}x+ab+b$$

از آن‌جا که $f(f(x))=۴x+۳$ است؛ بنابراین:

$$a^۲x+ab+b=۴x+۳ \Rightarrow \begin{cases} a^۲=۴ \\ ab+b=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\pm ۲ \quad (*) \\ ab+b=۳ \xrightarrow{(*)} \begin{cases} a=۲ \Rightarrow ۲b+b=۳ \\ \Rightarrow b=۱ \\ a=-۲ \Rightarrow -۲b+b=۳ \\ \Rightarrow b=-۳ \end{cases} \end{cases}$$

پس $f(x)=۲x+۱$ یا $f(x)=-۲x-۳$.

حالا برای ضابطهٔ دوم داریم $(g(x)=cx+d)$:

$$g(۲x+۳)=۳x-۲ \Rightarrow c(۲x+۳)+d=۳x-۲$$

$$\Rightarrow ۲cx+۳c+d=۳x-۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲c=۳ \Rightarrow c=\frac{۳}{۲} \quad (**) \\ ۳c+d=-۲ \xrightarrow{(**)} \frac{۹}{۲}+d=-۲ \Rightarrow d=-\frac{۱۳}{۲} \end{cases}$$

حالا برای محاسبهٔ $(gof)(-۱)$ یا $g(f(-۱))$ از هر کدام از ضابطه‌های f استفاده کنیم فرقی نمی‌کند، چون $f(-۱)$ برای هر دو ضابطهٔ f برابر ۱- است؛ پس:

$$g(f(-۱))=g(-۱)=\frac{۳}{۲}(-۱)-\frac{۱۳}{۲}=-\frac{۱۶}{۲}=-۸$$

۱۰۳۴- $\boxed{\text{گزینهٔ ۳}}$ ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را بیابیم، برای این‌کار در تساوی داده‌شده یعنی $۳f(۲-x)-۲f(۲+x)=-۱۵x+۵$ (*) به جای x مقدار x- قرار می‌دهیم (به خاطر این‌که در داخل پرانتزها، عبارت‌های مشابهی داریم و فقط x ها قرینهٔ هم هستند.)

$$x \Rightarrow -x \xrightarrow{(*)} ۳f(۲+x)-۲f(۲-x)=۱۵x+۵ \quad (**)$$

حالا با توجه به (*) و (**) از روش حذفی یکی از عبارات $f(۲+x)$ یا $f(۲-x)$ را حذف کرده و مقدار دیگری را محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$\begin{cases} ۳f(۲-x)-۲f(۲+x)=-۱۵x+۵ \\ ۳f(۲+x)-۲f(۲-x)=۱۵x+۵ \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\times ۳} \\ \xrightarrow{\times ۲} \end{array} \begin{cases} ۹f(۲-x)-۶f(۲+x)=-۴۵x+۱۵ \\ ۶f(۲+x)-۴f(۲-x)=۳۰x+۱۰ \end{cases}$$

$$\text{جمع}: ۵f(۲-x)=-۱۵x+۲۵ \Rightarrow f(۲-x)=-۳x+۵$$

حالا با فرض $۲-x=t$، $f(x)$ را می‌یابیم:

$$۲-x=t \Rightarrow x=۲-t \xrightarrow{f(۲-x)=-۳x+۵} f(t)=-۳(۲-t)+۵$$

$$\Rightarrow f(t)=۳t-۱ \Rightarrow f(x)=۳x-۱$$

پس معادله $x^۲=f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^۲=۳x-۱ \Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \text{دو ریشه دارد}$$

۱۰۳۵- $\boxed{\text{گزینهٔ ۲}}$ از تغییر متغیر $\cot x=z$ استفاده می‌کنیم و $\frac{\sin x}{\cos^۳ x}$ را برحسب $\cot x$ می‌نویسیم: $(\cot x=\frac{۱}{\tan x})$

$$\frac{\sin x}{\cos^۳ x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{۱}{\cos^۲ x}=\tan x(۱+\tan^۲ x)$$

$$=\frac{۱}{\cot x}(۱+\frac{۱}{\cot^۲ x})=\frac{z^۲+۱}{z^۳} \Rightarrow f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۳}$$

۱۰۳۶- $\boxed{\text{گزینهٔ ۳}}$ از تعریف دامنهٔ fof استفاده کنیم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$$

با توجه به ضابطهٔ f، $D_f=\{x\geq ۱\}$؛ پس:

$$f(x)\in D_f \Rightarrow \sqrt{x-۱}\geq ۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-۱\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۲$$

$$\Rightarrow D_{fof}=\{x\geq ۱ \mid x\geq ۲\}=[۲,+\infty)$$

۱۰۳۷- $\boxed{\text{گزینهٔ ۳}}$ از تعریف دامنهٔ fog استفاده می‌کنیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

برای این‌کار، دامنهٔ f و g را محاسبه می‌کنیم:

- $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$
- $g(x)=\sqrt{x^۲+۳x}=\sqrt{x(x+۳)}$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-۳]\cup[۰,+\infty)$$

بنابراین: $D_{fog}=\{x\in(-\infty,-۳]\cup[۰,+\infty) \mid \sqrt{x^۲+۳x}\in\mathbb{R}-\{۲\}\}$

با توجه به این‌که باید $\sqrt{x^۲+۳x}\neq ۲$؛ پس داریم:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲+۳x\neq ۴ \Rightarrow x^۲+۳x-۴\neq ۰$$

$$\Rightarrow x\neq ۱,\ x\neq -۴$$

در نتیجه: $D_{fog}=(-\infty,-۳]\cup[۰,+\infty)-\{-۴,۱\}$

بنابراین این دامنه شامل اعداد صحیح $\{-۴,-۲,-۱,۱\}$ نمی‌شود.

۱۰۳۸- $\boxed{\text{گزینهٔ ۳}}$ تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{۱-g(x)}=\sqrt{۱-\sqrt{[x]-۱}}$$

دامنهٔ تابع، اشتراک مجموعه‌جواب نامعادله‌های $[x]-۱\geq ۰$ و $۱-\sqrt{[x]-۱}\geq ۰$ است:

- $[x]-۱\geq ۰ \Rightarrow [x]\geq ۱ \Rightarrow x\geq ۱ \quad (۱)$
- $\sqrt{[x]-۱}\leq ۱ \Rightarrow [x]-۱\leq ۱ \Rightarrow [x]\leq ۲ \Rightarrow x<۳ \quad (۲)$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} ۱\leq x<۳$$

۱۰۳۹- $\boxed{\text{گزینهٔ ۲}}$ اول دامنهٔ دو تابع f و g را محاسبه می‌کنیم. در تابع گویای f از آن‌جا که مخرج صفر نمی‌شود، بنابراین دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ است.

از طرفی برای محاسبهٔ دامنهٔ g، عبارت زیر رادیکال را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x-x^۲\geq ۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲-x\leq ۰ \Rightarrow x(x-۱)\leq ۰ \Rightarrow ۰\leq x\leq ۱$$

حالا با کمک تعریف، دامنهٔ تابع gof را محاسبه می‌کنیم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}, ۰\leq\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱\} \quad (*)$$

برای حل نامعادلات مضاعف $۰\leq\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱$، چون مخرج مثبت است، طرفین را در $۱+x^۲$ ضرب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\times(۱+x^۲)} (۰\leq\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\leq ۱) \Rightarrow \underbrace{۰\leq ۱-x^۲}_{(۱)}\overbrace{\leq ۱+x^۲}^{(۲)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۱ \Rightarrow -۱\le x\le ۱ \\ \text{و} \\ ۱-x^۲ \le ۱+x^۲ \Rightarrow ۲x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲ \ge ۰ \ \text{همواره برقرار} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱\le x\le ۱$

بنابراین با توجه به (*) داریم: $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}, -۱\le x\le ۱\}=[-۱,۱]$

۱۰۴۰- گزینهٔ ۲ **راه اول**: دامنهٔ هر یک از توابع f و g را می‌یابیم:

$D_f: ۲-x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۲$

$D_g: x^۲-۱۵x>۰ \Rightarrow x(x-۱۵)>۰ \Rightarrow x<۰$ یا $x>۱۵$

(دقت کنید که مبنای لگاریتم برابر ۱۰ است.)

حالا با کمک تعریف، دامنهٔ fog را محاسبه می‌کنیم:

$D_{fog}=\{x\in D_g, g(x)\in D_f\}$

$=\{x<۰ \ \text{یا}\ x>۱۵, \log(x^۲-۱۵x)\le ۲\}$ (*)

برای حل نامعادلهٔ $\log(x^۲-۱۵x)\le ۲$ داریم:

$x^۲-۱۵x\le ۱۰^۲ \Rightarrow x^۲-۱۵x-۱۰۰\le ۰$

$\Rightarrow (x-۲۰)(x+۵)\le ۰ \Rightarrow -۵\le x\le ۲۰$

بنابراین با توجه به (*) داریم: $D_{fog}=\{x<۰ \ \text{یا}\ x>۱۵, -۵\le x\le ۲۰\}$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_{fog}=[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$

راه دوم: می‌توانیم ابتدا تابع fog را تشکیل دهیم و بعد دامنهٔ fog را بیابیم:

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\log(x^۲-۱۵x))=\sqrt{۲-\log(x^۲-۱۵x)}$

حالا دامنهٔ این تابع را محاسبه می‌کنیم:

(۱) $\log(x^۲-۱۵x): x^۲-۱۵x>۰ \Rightarrow x(x-۱۵)>۰$

$\Rightarrow x<۰$ یا $x>۱۵$

(۲) $\sqrt{۲-\log(x^۲-۱۵x)}: ۲-\log(x^۲-۱۵x)>۰$

$\Rightarrow \log(x^۲-۱۵x)\le ۲ \Rightarrow x^۲-۱۵x\le ۱۰۰ \Rightarrow -۵\le x\le ۲۰$

با اشتراک (۱) و (۲) دامنهٔ f برابر $[-۵,۰)\cup(۱۵,۲۰]$ خواهد بود.

راه سوم: می‌توانید از عددگذاری هم استفاده کنید.

۱۰۴۱- گزینهٔ ۱ دامنهٔ تابع g برابر $\mathbb{R}$ است. برای محاسبهٔ دامنهٔ f هم باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم *(به خاطر این‌که تو مخرجه مساوی صفر نمی‌ذاریم)*

$-x^۲+x+۲>۰ \xrightarrow{\times(-۱)} x^۲-x-۲<۰$

$\Rightarrow (x-۲)(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۲$

پس طبق تعریف، دامنهٔ تابع fog برابر است با:

$D_{fog}=\{x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}, -۱<(\frac{۱}{۴})^x<۲\}$

تابع نمایی $y=a^x$ همواره مثبت است؛ پس نامعادلهٔ $-۱<(\frac{۱}{۴})^x$ همواره برقرار است. برای حل نامعادلهٔ $(\frac{۱}{۴})^x<۲$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$(\frac{۱}{۴})^x<۲ \Rightarrow (۲^{-۲})^x<۲ \Rightarrow ۲^{-۲x}<۲^۱ \Rightarrow -۲x<۱$

$\xrightarrow{\times(-۱)} ۲x>-۱ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲}$

پس: $D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}, x>-\frac{۱}{۲}\}=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$

۱۰۴۲- گزینهٔ ۱ اول دامنهٔ توابع f، g و f + g را محاسبه می‌کنیم:

D_f : عبارت زیر رادیکال $\ge ۰ \Rightarrow ۱-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۱ \Rightarrow -۱\le x\le ۱$

D_g : عبارت زیر رادیکال $\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۰$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=(-۱\le x\le ۱)\cap(x\ge ۰)=(۰\le x\le ۱)$

حالا دامنهٔ تابع $(f+g)of$ را با کمک تعریف می‌یابیم:

$D_{(f+g)of}=\{x\in D_f, f(x)\in D_{f+g}\}$

$=\{-۱\le x\le ۱, \underbrace{۰\le\sqrt{۱-x^۲}}_{\text{برقرار است}}\le ۱\}$

$=\{-۱\le x\le ۱, \sqrt{۱-x^۲}\le ۱ \xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} ۱-x^۲\le ۱ \Rightarrow \underbrace{x^۲\ge ۰}_{\text{برقرار است}}\}$

$\Rightarrow D_{(f+g)of}=\{-۱\le x\le ۱\}=[-۱,۱]$

۱۰۴۳- گزینهٔ ۴ تابع f را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x-|x-۱| & x>۱ \\ x^۲ & x<۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-x+۱=۱ & x>۱\\ x^۲ & x<۱\end{cases}$$

دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{۱\}$ است.

طبق تعریف دامنهٔ fof: $D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$

$=\{\mathbb{R}-\{۱\}\mid \underbrace{f(x)\in\mathbb{R}-\{۱\}}_{(*)}\}$

$(*): f(x)\in\mathbb{R}-\{۱\} \Rightarrow f(x)\ne ۱$

چون ضابطهٔ اول $f(x)=۱$ است؛ پس $x>۱$ حذف می‌شود. در ضابطهٔ دوم باید $x^۲\ne ۱$ باشد و این برای $x\ne ۱,-۱$ اتفاق می‌افتد که $x=۱$ در دامنه نیست؛ بنابراین دامنهٔ fof برابر $(x<۱)-\{-۱\}$ است که شامل تمام اعداد صحیح منفی به‌جز $x=-۱$ است.

۱۰۴۴- گزینهٔ ۲ با توجه به نمودارها:

$D_f: [-۲,+\infty)$, $D_g: [-۴,+\infty)$

با استفاده از تعریف دامنهٔ fog داریم: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$=\{x\in[-۴,+\infty) \mid \underbrace{\underbrace{-\frac{۱}{۲}x-۱}_{g(x)}\in[-۲,+\infty)}_{(*)}\}$

پس برای یافتن مجموعه‌جواب (*) باید معادلهٔ تابع $g(x)$ را پیدا کنیم:

$A(-۴,۱), B(۰,-۱) \Rightarrow g(x)=-\frac{۱}{۲}x-۱$

$\Rightarrow D_{fog}=\{x\in[-۴,+\infty)\mid -\frac{۱}{۲}x-۱\ge -۲\}$

$=\{x\in[-۴,+\infty)\mid x\le ۲\}=[-۴,۲]$

که شامل ۷ عدد صحیح است. $\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

۱۰۴۵- گزینهٔ ۱ با توجه به این‌که $f(x)=[x]$ داریم:

$f(x-f(x))=f(x-[x])$

حالا در تابع f به جای x، $x-[x]$ قرار می‌دهیم:

$\Rightarrow f(x-[x])=[x-[x]]$

چون $-[x]$ عددی صحیح است، می‌تواند از داخل جزء صحیح بزرگ‌تر، بیرون بیاید؛ پس: $f(x-[x])=[x]-[x]=۰$

۱۰۴۶- $\boxed{\text{گزینه۲}}$ **راه اول:** ابتدا دامنهٔ تابع fog را می‌یابیم.

(دامنهٔ f برابر $\mathbb{R}$ و دامنهٔ g، $x\ge ۱$ است.)

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{fog}=\{x\ge ۱, \underbrace{\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}}_{\text{همواره برقرار}}\}=[۱,+\infty)$$

حالا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=f(\sqrt{x-۱})=(\sqrt{x-۱})^۲+۱$$

$$\Rightarrow f(g(x))=x-۱+۱ \Rightarrow f(g(x))=x$$

با توجه به این‌که $x\ge ۱$ است؛ پس $(fog)(x)\ge ۱$ و در نتیجه برد تابع fog برابر $[۱,+\infty)$ است.

راه دوم: برد تابع g را می‌یابیم:

$$g(x)=\sqrt{x-۱}\ge ۰ \Rightarrow \text{برد } g=[۰,+\infty)$$

این برد برای تابع f در حکم دامنه است، پس برد تابع $f(x)=x^۲+۱$ را با شرط $x\ge ۰$ می‌یابیم: $x\ge ۰ \Rightarrow x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲+۱\ge ۱$

برد تابع fog، برابر $[۱,+\infty)$ است.

۱۰۴۷- $\boxed{\text{گزینه۳}}$ می‌دانیم:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

پس تابع gof را تشکیل می‌دهیم. برای این‌کار با توجه به تساوی بالا و ضابطهٔ g خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x\in\mathbb{Z}: g(f(x))=g(۰)=۰^۲+۰-۲=-۲\\ \Rightarrow g(f(x))=-۲ \ \checkmark \ (\text{به ازای } x\in\mathbb{Z} \text{ برقرار است})\\ x\notin\mathbb{Z}: g(f(x))=g(-۱)=(-۱)^۲+(-۱)-۲=-۲\\ \Rightarrow g(f(x))=-۲ \ \checkmark \ (\text{به ازای } x\notin\mathbb{Z} \text{ برقرار است})\end{cases}$$

این‌که کلاً برقرار بود؛ پس تساوی به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ برقرار است.

۱۰۴۸- $\boxed{\text{گزینه۱}}$ می‌دانیم حدود تغییرات تابع $f(x)=x-[x]$، بازهٔ $[۰,۱)$ است. پس برای محاسبهٔ برد تابع gof کافی است برد تابع $g(x)=\frac{۱-x}{x}$ را در فاصلهٔ $[۰,۱)$ حساب کنیم. در نتیجه ابتدا تابع g را با کمک تفکیک کسر، ساده و سپس حدود آن را محاسبه می‌کنیم.

$$g(x)=\frac{۱-x}{x}=\frac{۱}{x}-۱$$

$$x\in[۰,۱) \Rightarrow ۰\le x<۱ \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{x}>۱$$

$$\xrightarrow{-۱} \underbrace{\frac{۱}{x}-۱}_{g}>۰ \Rightarrow g(x)>۰$$

پس برد تابع gof فاصلهٔ $(۰,+\infty)$ است.

توجه کنید که چون $x<۱$ و x نامنفی است؛ پس $\frac{۱}{x}>۱$.

۱۰۴۹- $\boxed{\text{گزینه۱}}$ اول برد تابع g را می‌یابیم:

$$\sqrt{x-۱}\ge ۰ \Rightarrow ۲+\sqrt{x-۱}\ge ۲ \Rightarrow g(x)\ge ۲$$

این برد برای تابع f در تابع fog در حکم دامنهٔ تابع است.

یعنی برای محاسبهٔ برد fog کافی است برد تابع $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ را به ازای $x\ge ۲$ (برگرفته از برد g) محاسبه کنیم. برای این‌کار باید از تفکیک کسر کمک بگیریم و f را ساده‌تر کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}=\frac{x^۲-۱+۲}{۱-x^۲}=\frac{x^۲-۱}{۱-x^۲}+\frac{۲}{۱-x^۲}$$

$$=\frac{-(۱-x^۲)}{۱-x^۲}+\frac{۲}{۱-x^۲}=-۱+\frac{۲}{۱-x^۲}$$

حالا از شرط $x\ge ۲$ کمک می‌گیریم و از مخرج شروع می‌کنیم و تابع را می‌سازیم: $x\ge ۲ \Rightarrow x^۲\ge ۴ \Rightarrow -x^۲\le -۴ \Rightarrow ۱-x^۲\le -۳$

حالا باید طرفین را معکوس کنیم. فقط دقت کنید که چون $۱-x^۲\le -۳$ و در نتیجه منفی است، پس معکوس آن هم منفی است. در نتیجه باید شرط کوچک‌تر از صفربودن آن را خودمان اضافه کنیم:

$$۱-x^۲\le -۳ \Rightarrow ۰>\frac{۱}{۱-x^۲}\ge -\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times ۲} ۰>\frac{۲}{۱-x^۲}\ge -\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{-۱} -۱>-۱+\frac{۲}{۱-x^۲}\ge -\frac{۵}{۳} \Rightarrow \text{برد } fog=[-\frac{۵}{۳},-۱)$$

۱۰۵۰- $\boxed{\text{گزینه۳}}$ با کمک ضابطهٔ f، تابع g را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=f(۲x-۳)-۲f(x)=((۲x-۳)-[۲x-۳])-۲(x-[x])$$

$$=\cancel{۲x}-۳-([۲x]-۳)-\cancel{۲x}+۲[x]$$

$$=-\cancel{۳}-[۲x]+\cancel{۳}+۲[x]=۲[x]-[۲x]$$

در بخش جزء صحیح گفتیم که:

$$[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\\ \text{یا}\\ [x]+[y]+۱\end{cases}$$

در نتیجه:

$$[۲x]=[x+x]=\begin{cases}[x]+[x]=۲[x]\\ [x]+[x]+۱=۲[x]+۱\end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر $۲[x]-[۲x]$ برابر است با:

$$۲[x]-[۲x]=\begin{cases}۲[x]-۲[x]=۰\\ ۲[x]-(۲[x]+۱)=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{برد } g=\text{مجموعه مقادیر تابع } g=\{۰,-۱\}$$

۱۰۵۱- $\boxed{\text{گزینه۴}}$ f نزولی $(-)$ و g صعودی $(+)$ است، پس:

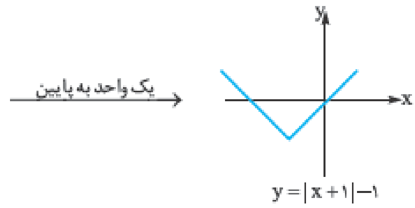
$$\begin{array}{cc}f & g\\ \downarrow & \downarrow\\ (-) & (+)\end{array} \xrightarrow{\text{حاصلضرب}} (-) \Rightarrow \text{نزولی است } fog$$

۱۰۵۲- $\boxed{\text{گزینه۳}}$ نمودار $f(x^۲)$، بالاتر از نمودار $f(x+۲)$ است، پس:

$$f(x^۲)>f(x+۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} x^۲<x+۲$$

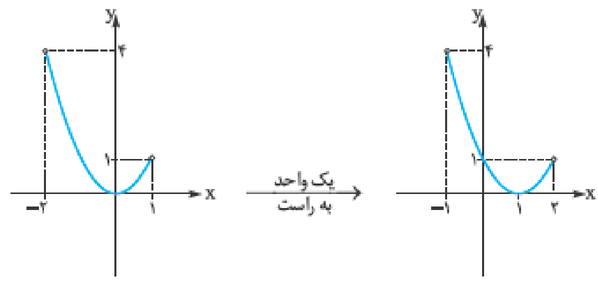
$$\Rightarrow x^۲-x-۲<۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۲)<۰ \Rightarrow -۱<x<۲$$

۱۰۵۳- $\boxed{\text{گزینه۴}}$ باید نمودار $y=|x+۱|-۱$ را رسم کنیم. برای این‌کار ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم کرده و سپس نمودار را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



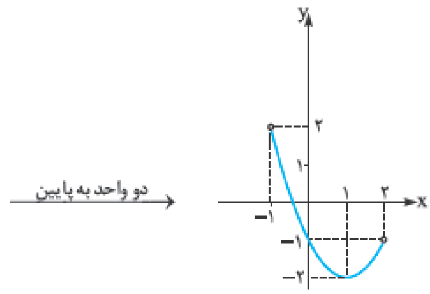
نمودار از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

۱۰۵۴- گزینهٔ۴ نمودار $f(x)=x^{۲}$ در دامنهٔ $(-۲,۱)$ را رسم می‌کنیم و سپس با انتقال یک واحد به راست و ۲ واحد به پایین به نمودار $y=f(x-۱)-۲$ می‌رسیم:



$D_f=(-۲,۱)$ $R_f=[۰,۴)$

$D_{f(x-۱)}=(-۱,۲)$ $R_{f(x-۱)}=[۰,۴)$



$D_{f(x-۱)-۲}=(-۱,۲)=A$

$R_{f(x-۱)-۲}=[-۲,۲)=B$

$\Rightarrow B-A=[-۲,۲)-(-۱,۲)=[-۲,-۱]$

۱۰۵۵- گزینهٔ۴ وقتی نمودار تابع $y=[۲x]$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، تابع به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$y=[۲x]\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{یک واحد به چپ}} y_۱=[۲(x+۱)]=[۲x+۲]=[۲x]+۲$$

برای این‌که تابع بالا دوباره به $y=[۲x]$ تبدیل شود باید $y_۱$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم.

۱۰۵۶- گزینهٔ۱ تابع $y=\frac{۲^{x}-۴}{۲}$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

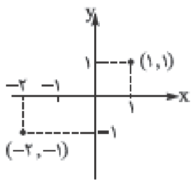
$$y=\frac{۲^{x}-۴}{۲}=۲^{x-۱}-۲$$

قرار است انتقالاتی روی نمودار تابع $y=۲(۲^{x})=۲^{x+۱}$ صورت گیرد تا به $y=۲^{x-۱}-۲$ برسیم. ابتدا نمودار $y=۲^{x+۱}$ را دو واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم، $(x\to x-۲)$؛ بنابراین:

$$y=۲^{x+۱}\xrightarrow{x\to x-۲} y_۱=۲^{x-۱}$$

اگر $y_۱$ را دو واحد به پایین منتقل کنیم به $y=۲^{x-۱}-۲$ می‌رسیم.

۱۰۵۷- گزینهٔ۲ چون نقطهٔ $(-۲,-۱)$ روی سهمی مطابق شکل قرار دارد و سهمی از مبدأ می‌گذرد، پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-(\frac{x}{۲})^{۲}$ است. قرار است از نقطهٔ $(-۲,-۱)$ به نقطهٔ $(۱,۱)$ برسیم. این نقاط را در دستگاه مختصات نشان می‌دهیم تا راحت‌تر به انتقال‌های عمودی و افقی برسیم:



کافی است از نقطهٔ $(-۲,-۱)$ ۳ واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا حرکت کنیم؛ بنابراین $y=-(\frac{x}{۲})^{۲}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$y=-(\frac{x}{۲})^{۲}\xrightarrow[x\to x-۳]{\text{۳ واحد به راست}} y=-(\frac{x-۳}{۲})^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به بالا}} y=-(\frac{x-۳}{۲})^{۲}+۲$$

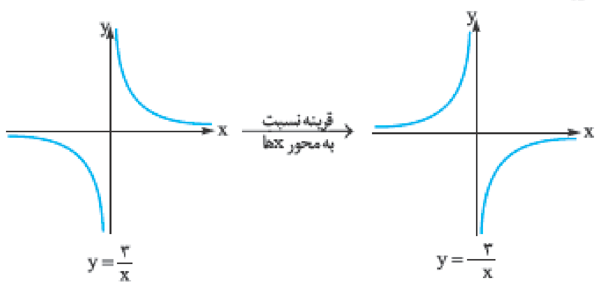
تابع بالا، محور yها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۱}{۴}$ قطع می‌کند. ببینید:

$$x=۰\Rightarrow y=-(\frac{۰-۳}{۲})^{۲}+۲=-\frac{۹}{۴}+۲=-\frac{۱}{۴}$$

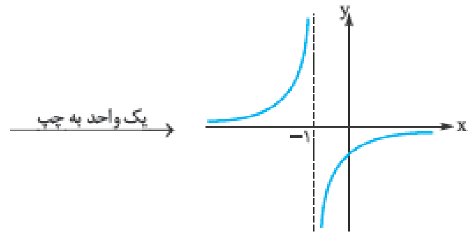
۱۰۵۸- گزینهٔ۴ تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

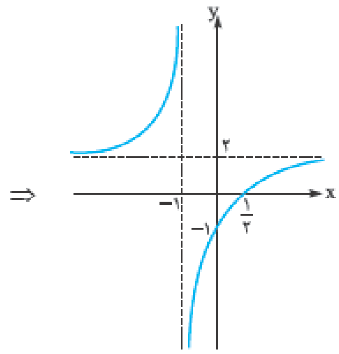
$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}=\frac{۲(x+۱)-۳}{x+۱}=۲-\frac{۳}{x+۱}$$

نمودار $y=\frac{۳}{x}$ را رسم می‌کنیم و سپس نسبت به محور xها قرینه کرده تا $y_۱=-\frac{۳}{x}$ به دست آید:



نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا $\frac{-۳}{x+۱}$ حاصل شود، سپس دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ به دست آید.





نمودار تابع از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.

۱۰۵۹- گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که:

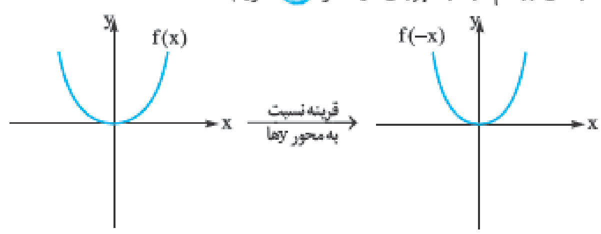
$$\sqrt{x^۲-۲x+۱}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱| \Rightarrow y=۱+|x-۱|$$

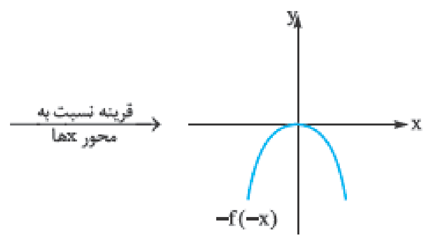
اگر نمودار، دو واحد به چپ منتقل شود، آن‌گاه:

$$x \to x+۲ \Rightarrow y=۱+|x+۲-۱| \Rightarrow y=۱+|x+۱|$$

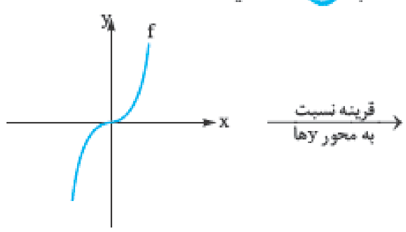
حالا اگر نمودار، یک واحد به پایین منتقل شود، ضابطهٔ تابع برابر $y=|x+۱|$ خواهد شد.

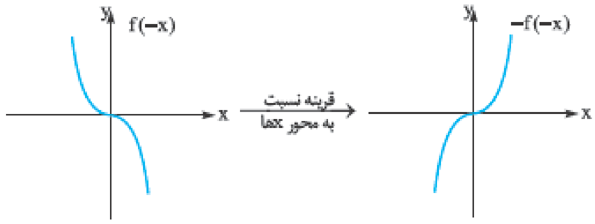
۱۰۶۰- گزینه ۴ باید گزینه‌ها را بررسی کنیم. *ما اینجا دوتاشو بررسی می‌کنیم دوتاش رو هم خودتون بررسی کنید.* در ۱ داریم:





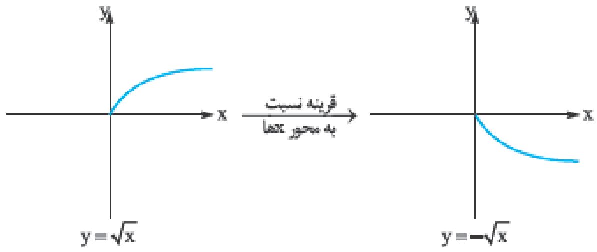
پس ۱ نادرست است. حالا به ۴ نگاه کنید.

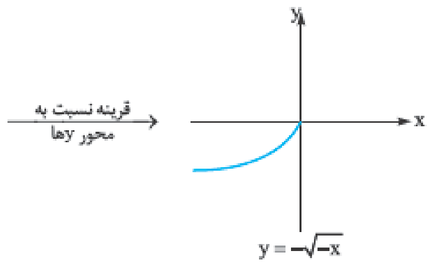


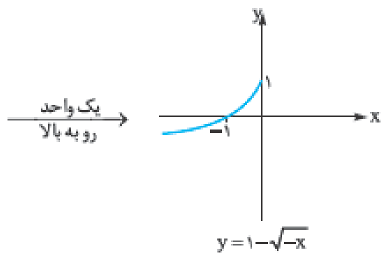


پس در نمودار ۴ تساوی $f(x)=-f(-x)$ برقرار است.

۱۰۶۱- گزینه ۱ باید تغییرات زیر روی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ انجام شود.







نقطهٔ $(-۴,-۱)$ در $y=۱-\sqrt{-x}$ صدق می‌کند.

۱۰۶۲- گزینه ۳ وقتی نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود، آن‌گاه:

$$f(x) \Rightarrow -f(x) \Rightarrow \sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x}$$

حالا باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم:
(روی محور xها جابه‌جا کنیم.) پس باید:

$$x \Rightarrow x+۲ \Rightarrow -\sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x+۲}$$

پس تا الان ضابطهٔ تابع به صورت $y=-\sqrt{x+۲}$ تبدیل شد. در پایان هم نمودار تابع را باید یک واحد به پایین منتقل کنیم: (کل ضابطه را منهای یک می‌کنیم.) $\Rightarrow y=-\sqrt{x+۲}-۱$

۱۰۶۳- گزینه ۱ اگر نمودار را دو واحد به چپ ببریم $(x \to x+۲)$ ضابطهٔ تابع به صورت مقابل می‌شود: $f(x)=۱+\sqrt{x-۱}$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد به چپ}} y=۱+\sqrt{x+۲-۱} \Rightarrow y=۱+\sqrt{x+۱}$$

حالا برای این‌که به نمودار $g(x)=2+\sqrt{x+1}$ برسیم، باید نمودار $y=1+\sqrt{x+1}$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم.

$$y=1+\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y=2+\sqrt{x+1}$$

پس برای رسم نمودار g با کمک نمودار f، باید نمودار f را دو واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل کنیم.

۱۰۶۴- گزینهٔ ۱ ابتدا تابع را به فرم بهتری می‌نویسیم:

$$y=\sqrt{4x+12}=\sqrt{4(x+3)}=2\sqrt{x+3}$$

حالا نمودار را در راستای عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌کنیم:

$$\xrightarrow{f\to\frac{1}{2}f} y=\sqrt{x+3}$$

بعد نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم: $\xrightarrow{f\to -f} y=-\sqrt{x+3}$

و بالأخره یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم: $y=1-\sqrt{x+3}$

۱۰۶۵- گزینهٔ ۲ با استفاده از مربع کامل کردن، $g(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$g(x)=-2(x^2-2x)=-2(x^2-2x+1)+2=-2(x-1)^2+2$$

حالا از $f(x)=x^2$ به $g(x)$ می‌رسیم:

$$f(x)=x^2\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} f_1(x)=(x-1)^2$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} f_2(x)=2(x-1)^2\xrightarrow[\text{به محور xها}]{\text{قرینه نسبت}}$$

$$f_3(x)=-2(x-1)^2\xrightarrow[\text{سمت بالا}]{\text{۲ واحد به}} g(x)=-2(x-1)^2+2$$

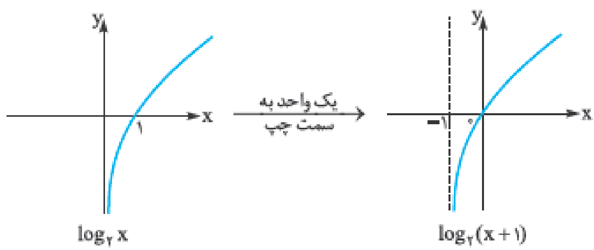
۱۰۶۶- گزینهٔ ۳ با استفاده از $f(x)=\log_2(x+2)$، تابع $f(2x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(2x)=\log_2(2x+2)=\log_2 2(x+1)$$

$$=\log_2 2+\log_2(x+1)=1+\log_2(x+1)$$

$$\xrightarrow{y=f(2x)+a} y=1+a+\log_2(x+1)\ (*)$$

با رسم نمودار $y_1=\log_2 x$ و انتقال آن یک واحد به سمت چپ، نمودار $\log_2(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



$\log_2(x+1)$ از ۲ ناحیه می‌گذرد؛ پس با توجه به $(*)$ باید $1+a=0$ باشد یعنی $a=-1$.

۱۰۶۷- گزینهٔ ۱ مرحله به مرحله پیش می‌رویم تا از f به g برسیم:

۱ نمودار f با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای افقی منقبض شده است؛ پس در نمودار f، x به 2x تبدیل شده است:

$$f(x)=\frac{x+1}{x}\xrightarrow{x\to 2x} f(2x)=\frac{2x+1}{2x}$$

۲ f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم و این یعنی $x\to -x$:

$$f(2x)=\frac{2x+1}{2x}\xrightarrow{x\to -x} f(-2x)=\frac{-2x+1}{-2x}$$

۳ اگر f را یک واحد به پایین منتقل کنیم، به g می‌رسیم:

$$g(x)=\frac{-2x+1}{-2x}-1=\frac{-1}{2x}$$

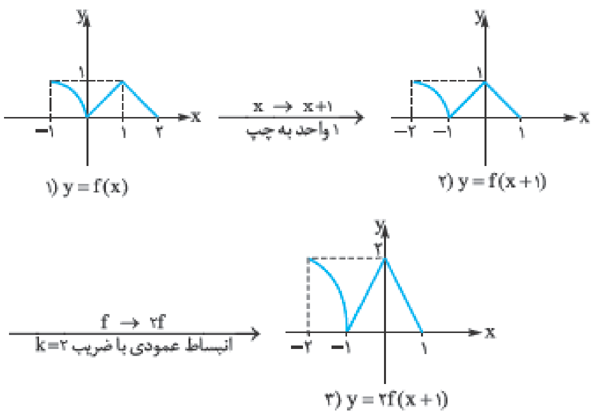
با داشتن $f(x)=\frac{x+1}{x}$ و $g(x)=\frac{-1}{2x}$، fog را می‌یابیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)}=\frac{-\frac{1}{2x}+1}{-\frac{1}{2x}}=\frac{\frac{-1+2x}{2x}}{-\frac{1}{2x}}=1-2x$$

حالا نقطهٔ تلاقی خط $y=3$ را با تابع fog می‌یابیم:

$$\begin{cases} y=3 \\ fog=1-2x \end{cases}\Rightarrow 1-2x=3\Rightarrow x=-1$$

۱۰۶۸- گزینهٔ ۴ نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم. برای رسم نمودار تابع $y=2f(x+1)$، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:



نمودار تابع به دست آمده در بازه $[-1,0]$ در ۴ آمده است.

۱۰۶۹- گزینهٔ ۳ نمودار $y=\log_2(2x-1)$ را ۲ واحد به راست منتقل می‌کنیم، پس به جای x، $x-2$ می‌گذاریم:

$$\log_2(2x-1)\xrightarrow{x\to x-2}\log_2(2(x-2)-1)=\log_2(2x-5)$$

سپس با ضریب ۲ در راستای افقی، x را منبسط می‌کنیم:

$$\log_2(2x-5)\xrightarrow{x\to\frac{x}{2}}\log_2(x-5)$$

در نهایت یک واحد به پایین منتقل می‌شود که باید به ضابطهٔ اخیر، ۱- را اضافه کنیم:

$$\log_2(x-5)\xrightarrow{-1} -1+\log_2(x-5)$$

می‌خواهیم بدانیم تابع $y=-1+\log_2(x-5)$، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند، پس به جای y، صفر را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{y=0} -1+\log_2(x-5)=0$$

$$\Rightarrow \log_2(x-5)=1\Rightarrow x-5=2\Rightarrow x=7$$

۱۰۷۰- گزینهٔ ۳ ابتدا تابع $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$$

قرار است از نمودار $y=|\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})|$، نمودار $y=|\sin x|$ را رسم کنیم:

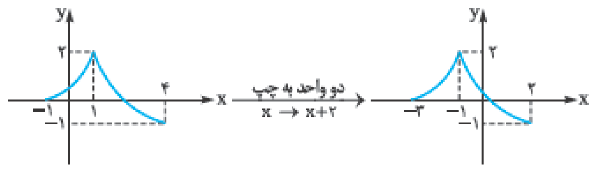
[۱] اول از همه باید $x \to 2x$ تبدیل شود که انقباض افقی، با ضریب $\frac{1}{2}$ را خواهیم داشت:

$$|\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})| \xrightarrow{x\to 2x} |\sin(\frac{\pi}{6}-x)| = |\sin(x-\frac{\pi}{6})|$$

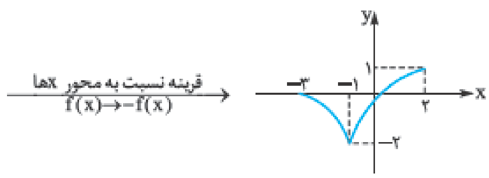
[۲] باید $x \to x+\frac{\pi}{6}$ تبدیل شود که به این معنی است، نمودار $\frac{\pi}{6}$ به سمت چپ حرکت کند.

یادآوری: $|-x|=|x|$

۱۰۷۱- گزینهٔ ۱ ابتدا باید از روی نمودار $y=-f(x-2)$ نمودار تابع $y=f(x)$ را بیابیم.

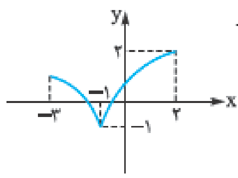


$y=-f(x-2)$ $\qquad$ $y=-f(x)$



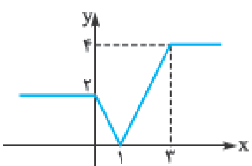
$y=f(x)$

حالا برای این‌که نمودار $y=1+f(x)$ را رسم کنیم کافی است نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم.


$y=1+f(x)$

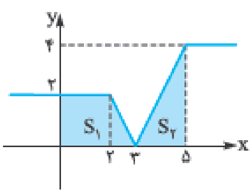
۱۰۷۲- گزینهٔ ۳ باید با انتقال‌هایی مناسب $f(1-x)$ را به $f(x-1)$ تبدیل کنیم:

ابتدا به جای x، $-x$ را جای‌گذاری می‌کنیم. در این حالت، نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود:



$$f(1-x) \xrightarrow{x\to -x} f(1-(-x)) = f(x+1)$$

حالا کافی است به جای xها، $x-2$ قرار دهیم، در این حالت نمودار ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌شود:



$$\left.\begin{array}{l} S_1=\frac{(2+3)\times 2}{2}=5 \\ S_2=\frac{2\times 4}{2}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مساحت کل} = S_1+S_2=9$$

۱۰۷۳- گزینهٔ ۲ از $f(x)$ با انتقال‌های مناسب به $y=\frac{1}{2}f(-x)+1$ می‌رسیم.

اول x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم؛ یعنی نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود و نقطهٔ $(-8,6)$ به $(8,6)$ تبدیل می‌شود و سپس در راستای عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض می‌شود که عرض نقطه نصف می‌شود.

$$f(-x) \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2}f(-x) \Rightarrow (8,6) \Rightarrow (8,3)$$

در آخر کافی است نمودار یک واحد به بالا منتقل شود، که به yها یک واحد اضافه می‌شود. $\quad (8,3) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} (8,4)$

۱۰۷۴- گزینهٔ ۱ نقطهٔ $(2,-1)$ روی نمودار g است؛ پس:

$$g(2)=-1 \xrightarrow{g(x)=1-2f(\frac{x}{2}-1)} g(2)=1-2f(\frac{2}{2}-1)=-1$$

$$\Rightarrow g(2)=1-2f(0)=-1$$

$$-2f(0)=-2 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow (0,1)\in f$$

۱۰۷۵- گزینهٔ ۴ نقطهٔ $(2x_0-1, 1-y_0)$ روی نمودار g قرار دارد، پس $g(2x_0-1)=1-y_0$. هم‌چنین (x_0,y_0) روی نمودار f قرار دارد و این یعنی $f(x_0)=y_0$ از این دو رابطه به تساوی زیر می‌رسیم:

$$g(2x_0-1)=1-y_0 \xrightarrow{y_0=f(x_0)} g(2x_0-1)=1-f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0)=1-g(2x_0-1) \quad (*)$$

که به طور مستقیم در گزینه‌ها وجود ندارد. باید $g(x)$ را پیدا کنیم. با فرض $2x_0-1=x$ داریم: $\quad 2x_0-1=x \Rightarrow x_0=\frac{x+1}{2}$

$x_0=\frac{x+1}{2}$ را در $(*)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(\frac{x+1}{2})=1-g(x) \Rightarrow g(x)=1-f(\frac{x+1}{2})$$

۱۰۷۶- گزینهٔ ۳ دامنهٔ تابع، بازهٔ $(-2,1]$ است. برای تعیین دامنهٔ تابع y کافی است نامعادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$-2<1-\frac{x}{3}\le 1 \xrightarrow{+(-1)} -3<-\frac{x}{3}\le 0 \xrightarrow{\times(-3)} 0\le x<9$$

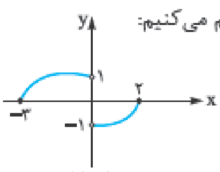
یادآوری: اگر دامنهٔ f بازهٔ $[a,b]$ و u تابعی چندجمله‌ای برحسب x باشد، دامنهٔ $y=\alpha f(u)+\beta$ از حل نامعادلهٔ مقابل به دست می‌آید: $a\le u\le b$

۱۰۷۷- گزینهٔ ۳ با توجه به نمودار تابع f، دامنهٔ آن $[-2,3]-\{0\}$ است.

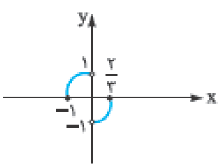
بریم سراغ دامنهٔ y $\quad D_y=\{x \mid f(-3x)>0\}$

نمودار $y=f(-3x)$ را با کمک نمودار f رسم می‌کنیم:

ابتدا به جای x، $-x$ را قرار می‌دهیم که نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود:


$f(-x)$

در این مرحله باید $x \to 3x$ تبدیل شود که نمودار با ضریب $\frac{1}{3}$ در راستای افقی منقبض می‌شود.


$f(-3x)$

با توجه به نمودار، $f(-3x)$ در بازهٔ $(-1,0)$ مثبت است؛ پس دامنهٔ y به صورت (a,b) است.

۱۰۷۸- گزینهٔ ۲ با استفاده از دامنهٔ تابع $y=3-f(2x-3)$، دامنهٔ تابع $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$-1\le x<1 \xrightarrow{\times 2} -2\le 2x<2 \xrightarrow{-3} -5\le 2x-3<-1$$

$$\Rightarrow D_f=[-5,-1)$$

برای این‌که از دامنهٔ تابع $f(x)$ به دامنهٔ تابع $y=2f(x-1)$ برسیم، باید $x-1$ را در دامنهٔ f قرار دهیم. *(درس‌نامه رو خوب بخون.)*

$$-5\le x-1<-1 \xrightarrow{+1} -4\le x<0 \Rightarrow D_y=[-4,0)$$

۱۰۷۹- گزینهٔ ۴ **راه اول**: ابتدا تابع $f(3-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(3-x)=\sqrt{2(3-x)-(3-x)^2}$$

$$=\sqrt{6-2x-9+6x-x^2}=\sqrt{-x^2+4x-3}$$

حالا دامنهٔ این تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$-x^2+4x-3\ge 0 \xrightarrow{\times(-)} x^2-4x+3\le 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3)\le 0 \Rightarrow 1\le x\le 3$$

راه دوم: ابتدا دامنهٔ $y=f(x)$ را می‌یابیم:

$$2x-x^2\ge 0 \xrightarrow{\times(-)} x^2-2x\le 0 \Rightarrow x(x-2)\le 0$$

$$\Rightarrow 0\le x\le 2 \quad (*)$$

حالا برای محاسبهٔ دامنهٔ $f(3-x)$ کافی است در رابطهٔ $(*)$ به جای x، $(3-x)$ قرار دهیم:

$$0\le 3-x\le 2 \xrightarrow{-3} -3\le -x\le -1 \xrightarrow{\times(-1)} 1\le x\le 3$$

۱۰۸۰- گزینهٔ ۳ **راه اول**: ابتدا ضابطهٔ $f(-x)$ را می‌یابیم.

$$f(-x)=\sqrt{-x+|-x+2|}$$

برای محاسبه دامنهٔ این تابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$-x+|-x+2|\ge 0 \xrightarrow{|u|=|-u|} -x+|x-2|\ge 0$$

با کمک تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge 2: -x+x-2\ge 0 \Rightarrow -2\ge 0 \quad \text{برقرار نیست} \\ \text{یا} \\ x<2: -x-x+2\ge 0 \Rightarrow 2x\le 2 \Rightarrow x\le 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varnothing \\ \text{یا} \\ x\le 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x\le 1$$

راه دوم: ابتدا دامنهٔ تابع f را می‌یابیم:

$$x+|x+2|\ge 0 \Rightarrow |x+2|\ge -x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -2: x+2\ge -x \Rightarrow 2x\ge -2 \Rightarrow x\ge -1 \\ \text{یا} \\ x<-2: -x-2\ge -x \Rightarrow -2\ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x\ge -2} x\ge -1 \\ \text{یا} \\ \varnothing \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x\ge -1$$

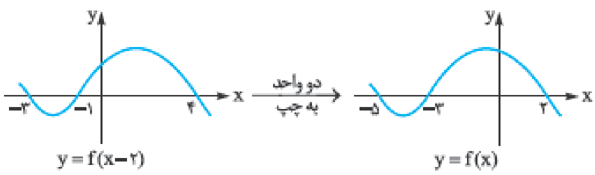
پس دامنهٔ تابع f برابر $x\ge -1$ است. حالا برای محاسبهٔ دامنهٔ $y=f(-x)$ خواهیم داشت:

$-x\ge -1 \Rightarrow x\le 1$ (در دامنهٔ f به جای x، $-x$ قرار می‌دهیم.)

۱۰۸۱- گزینهٔ ۴

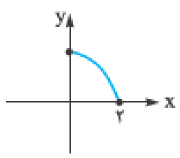
$$xf(x)\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0, f(x)\ge 0 \\ \text{یا} \\ x\le 0, f(x)\le 0 \end{cases} \quad (*)$$

اما ما الان نمودار $y=f(x-2)$ را داریم. پس باید نمودار f را رسم کنیم. اگر نمودار $y=f(x)$ را دو واحد به راست ببریم نمودار $y=f(x-2)$ به دست می‌آید، حالا الان برعکس، نمودار $f(x-2)$ را داریم. نمودار $f(x)$ را لازم داریم. پس باید نمودار $y=f(x-2)$ را ***بشوتیم سرجاش!*** بنابراین باید دو واحد به چپ منتقل کنیم:



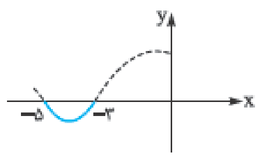
بنابراین از رابطهٔ $(*)$ داریم:

۱ $x\ge 0, f(x)\ge 0 \xrightarrow{\text{نمودار}}$



$\Rightarrow x\in[0,2]$

۲ $x\le 0, f(x)\le 0 \longrightarrow$



$\Rightarrow x\in[-5,-3]$

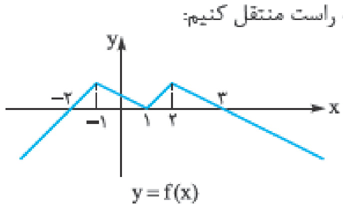
دامنهٔ تابع برابر اجتماع دو بازهٔ حاصل است؛ در نتیجه:

$$\text{دامنه}=[-5,-3]\cup[0,2]$$

۱۰۸۲- گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع $y=\log_{(x+1)} f(x)$ از اشتراک جواب‌های نامعادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ x+1\ne 1 \Rightarrow x\ne 0 \end{cases}$$

برای حل نامعادله اول باید از نمودار استفاده کنیم. از آن‌جا که نمودار $y=f(x+1)$ را داریم، برای رسم نمودار $y=f(x)$ کافی است نمودار $y=f(x+1)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم:



با توجه به شرط $x>-1$، باید در این فاصله، حدودی از x را بیابیم که $f(x)>0$ است. با توجه به نمودار f داریم:

$$f(x)>0 \Rightarrow x\in(-1,3)-\{1\}$$

(در $x=1$، $f(x)=0$ می‌شود)

پس دامنهٔ تابع، مجموعهٔ $(-1,3)-\{0,1\}$ است که این مجموعه شامل عدد صحیح ۲ است.