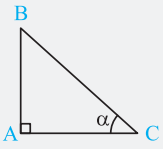
درسنامهٔ ۱

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC زیر، چهار نسبت مثلثاتی زیر را تعریف می‌کنیم:



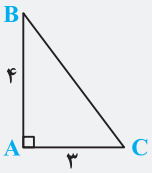
$$\text{کسینوس آلفا} = \cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} \quad , \quad \text{سینوس آلفا} = \sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{کتانژانت آلفا} = \cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } \alpha}{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } \alpha} = \frac{AC}{AB} \quad , \quad \text{تانژانت آلفا} = \tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } \alpha}{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

سؤال دانش‌پژوه (نرا کشتکار): **آقا ببخشید اگه مثلث قائم‌الزاویه نبود چی؟**

پاسخ: *درود بر شما و مثلث قائم‌الزاویه! ببین این بحث‌ها و تعاریفی که گفتیم فقط در مثلث قائم‌الزاویه انجام میشه. پس اگه مثلث قائم‌الزاویه نبود دیگه اون تعاریف بی‌معنی‌اند.*

مثال **در شکل مقابل، مقدار عبارت $\frac{\tan\hat{B}+\cot\hat{C}}{\sin\hat{B}\times\sin\hat{C}}$ را به‌دست آورید.**



پاسخ: قبل از هر کاری به کمک قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر BC را می‌یابیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

حال طبق تعریف‌های گفته شده در بالا حاصل کسر داده شده را می‌یابیم:

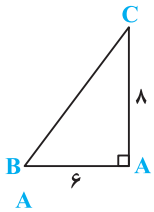
$$\frac{\tan\hat{B}+\cot\hat{C}}{\sin\hat{B}\times\sin\hat{C}} = \frac{\frac{AC}{AB}+\frac{AC}{AB}}{\frac{AC}{BC}\times\frac{AB}{BC}} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{12}{25}} = \frac{6\times 25}{4\times 12} = \frac{25}{8}$$

سؤال دانش‌پژوه (ناصر افته‌پاری): **آقا به‌جز این نسبت‌ها، باز هم چیزی داریم؟**

پاسخ: *درود بر شما! بله ولی حداقل امسال نمی‌خونین و واجب هم نیست بدونید. ضمناً اگر جناب‌عالی همین نسبت‌ها رو هم حفظ کنید و بلد باشین، من ده هزار مرتبه می‌گم درود بر شما!*

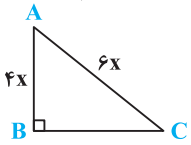
برگرفته از کتاب درسی

۱- در شکل مقابل، حاصل $\sin\hat{B}+\cos\hat{C}$ کدام است؟



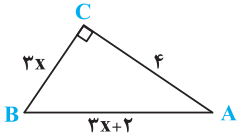
۱) ۱/۶
۲) ۱/۸
۳) ۱/۴
۴) ۱/۲

۲- در شکل مقابل، حاصل $\tan\hat{A}+\cot\hat{C}$ کدام است؟



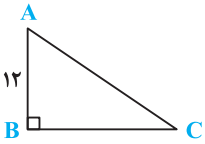
۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
۲) $\sqrt{13}$
۳) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
۴) $\sqrt{5}$

۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، مقدار $\sin\hat{A}$ کدام است؟



۱) $\frac{4}{5}$
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{5}{9}$

۴- در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، اگر $\tan\hat{A}=\frac{3}{4}$ و $AB=12$ باشد، محیط مثلث کدام است؟



۱) ۳۶
۲) ۲۵
۳) ۲۱
۴) ۳۵

۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ A قائمه و $\tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$ است. مقدار $\cos\hat{B}+\cos\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۱۳}$ ۲) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ A قائمه و $\cos\hat{B}=\frac{۴}{۵}$ است. مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AB=۲AC$. مقدار $\sin\hat{B}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

درسنامهٔ ۲

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰°

نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۰°، ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و ۹۰° از اهمیت بالایی برخوردار است و در همه‌جا مورد استفاده قرار می‌گیرد، پس حتماً آن‌ها را مطابق جدول زیر حفظ کنید.

نسبت‌های مثلثاتی / زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف‌نشده
cot	تعریف‌نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

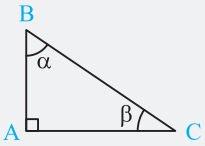
مثال حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\tan ۴۵^\circ \sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ \cot ۴۵^\circ$$

پاسخ:

$$\tan ۴۵^\circ \sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ \cot ۴۵^\circ = ۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times ۱=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$$

نکته اگر جمع زوایای α و β برابر ۹۰° باشد (α و β متمم هم باشند) در این صورت تساوی‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه وجود دارد:



$$\alpha+\beta=۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta \ , \ \sin\beta=\cos\alpha\\ \tan\alpha=\cot\beta \ , \ \tan\beta=\cot\alpha\end{cases}$$

مثال دو زاویهٔ ۳۰° و ۶۰° متمم هم‌دیگرند ($۹۰^\circ=۶۰^\circ+۳۰^\circ$)، پس همان‌طوری که در جدول فوق می‌بینید، داریم:

پاسخ:

$$\sin ۳۰^\circ=\cos ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲} \ , \ \sin ۶۰^\circ=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \ , \ \tan ۳۰^\circ=\cot ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \ , \ \tan ۶۰^\circ=\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$$

نکته

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ , \ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ , \ \tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}\Rightarrow \tan\alpha.\cot\alpha=۱$$

مثال حاصل عبارت $\tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ+\sin ۱۰^\circ-\cos ۸۰^\circ$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به ویژگی دو زاویهٔ متمم داریم:

$$۱۰^\circ+۸۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow \sin ۱۰^\circ=\cos ۸۰^\circ \quad , \quad ۲۰^\circ+۷۰^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow \tan ۲۰^\circ=\cot ۷۰^\circ$$

با جای‌گذاری تساوی‌های به‌دست آمده در عبارت خواسته‌شده داریم:

$$\tan ۲۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ+\sin ۱۰^\circ-\cos ۸۰^\circ=\underbrace{\cot ۷۰^\circ\times\tan ۷۰^\circ}_{۱}+\cancel{\cos ۸۰^\circ}-\cancel{\cos ۸۰^\circ}=۱+۰=۱$$

۸- کدام گزینه صحیح است؟ آزمون‌های گاج

۱) $\cos ۴۵^\circ + \sin ۴۵^\circ = ۲$ ۲) $\sin ۶۰^\circ = ۲\sin ۳۰^\circ$ ۳) $\tan ۶۰^\circ = ۲\cos ۳۰^\circ$ ۴) $۲\sin ۶۰^\circ = \tan ۴۵^\circ$

۹- حاصل $\cot^۲ ۶۰^\circ + ۱$ کدام است؟

۱) $۱ + \tan^۲ ۴۵^\circ$ ۲) $۱ - \tan^۲ ۳۰^\circ$ ۳) $۱ + \tan^۲ ۳۰^\circ$ ۴) $۲ + \tan^۲ ۴۵^\circ$

۱۰- عبارت $\sin^۴ x + \cos^۴ x$ به‌ازای کدام‌یک از مقادیر زیر برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود؟

۱) ۹۰° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰°

۱۱- مقدار عددی عبارت $(\sin ۶۰^\circ - \sin ۴۵^\circ)(\cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۱۲- حاصل عبارت $\frac{۱ - \cot^۲ ۶۰^\circ}{\cot^۲ ۶۰^\circ + ۱} \times \frac{\tan ۳۰^\circ}{۱ + \tan^۲ ۳۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$

۱۳- اگر $A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، آن‌گاه A کدام است؟ $\frac{۲\tan ۳۰^\circ + \sin ۶۰^\circ}{\sin^۲ ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\cos ۳۰^\circ}$

۱) $-\frac{۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۷}{۲}$ ۳) -۷ ۴) $-\frac{۷}{۳}$

۱۴- حاصل عبارت $\cot ۲^\circ \cot ۳^\circ \cot ۴۵^\circ \cot ۸۷^\circ \cot ۸۸^\circ$ کدام است؟

۱) $(\tan ۴۵^\circ)^۲$ ۲) ۲ ۳) $(\tan ۸۸^\circ)^۲$ ۴) $(\cot ۸۸^\circ)^۲$

۱۵- در صورتی که $\frac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \frac{۳}{۲}$ باشد، مقدار $\tan\theta$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶- اگر $\tan x = \frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل $A = \frac{۴}{\cos x} - \frac{۳}{\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

۱۷- اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{۲\sin\theta}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) ۳ ۲) ۱/۲ ۳) ۲ ۴) -۲

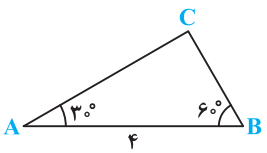
۱۸- اگر $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$، مقدار $\frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) -۴

۱۹- اگر داشته باشیم $۳\cos\hat{A} + ۴\sin\hat{A} = ۰$، در این صورت $\tan\hat{A} + \cot\hat{A}$ کدام است؟

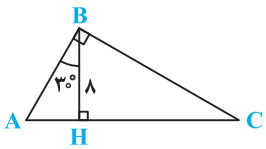
۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $-\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۲۰- در شکل مقابل، محیط مثلث ABC کدام است؟



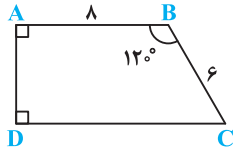
۱) $۲ + ۶\sqrt{۳}$ ۲) $۶ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۲ + ۳\sqrt{۶}$ ۴) $۴ + ۲\sqrt{۳}$

۲۱- در شکل مقابل، طول ضلع BC کدام است؟



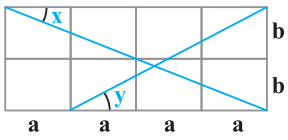
۱) ۸ ۲) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$
۳) ۱۶ ۴) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$

۲۲- در شکل مقابل، محیط ذوزنقهٔ ABCD کدام است؟



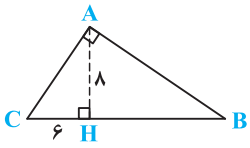
۱) $۲۵ + ۳\sqrt{۳}$ ۲) $۲۵ + \sqrt{۳}$
۳) $۲۴ + ۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲۴ + \sqrt{۲}$

۲۳- در شکل مقابل، طول هر کدام از مستطیل‌ها a و عرض آن‌ها b است. در این صورت $\cot x$ کدام است؟



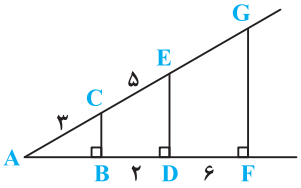
۱) $\frac{۳a}{۴b}\tan y$
۲) $\frac{۳}{۴}\tan y$
۳) $\frac{۳b}{۴a}\cot y$
۴) $\frac{۴}{۳}\cot y$

۲۴- با توجه به شکل مقابل، $\cos \hat{B}$ کدام است؟



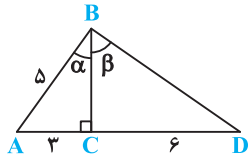
۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۵- با توجه به شکل مقابل، $\sin \hat{G}$ کدام است؟ برگرفته از کتاب درسی



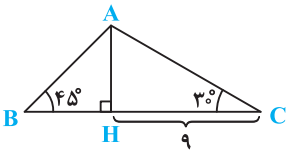
۱) $\frac{۵}{۶}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۵}$
۴) $\frac{۲}{۵}$

۲۶- با توجه به شکل مقابل کدام گزینه نادرست است؟



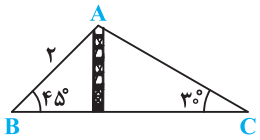
۱) $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$
۲) $\sin\beta = \frac{۶}{\sqrt{۵۲}}$
۳) $\tan \hat{A} = \cot\alpha$
۴) $\cot\beta = \frac{۳}{۲}$

۲۷- در شکل مقابل، طول AB کدام است؟



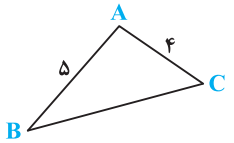
۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $۶\sqrt{۶}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $۶\sqrt{۳}$

۲۸- یک آنتن (دکل) توسط دو سیم AB و AC مطابق شکل مهار شده است. در این صورت طول BC کدام است؟



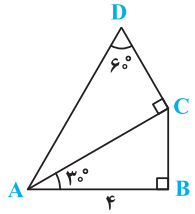
۱) $\sqrt{۶}+\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۲}+\sqrt{۶}$
۴) $۳\sqrt{۲}$

۲۹- در شکل مقابل، اگر $\cos \hat{C} = \frac{۳}{۴}$ باشد، آن‌گاه $\tan \hat{B}$ کدام است؟



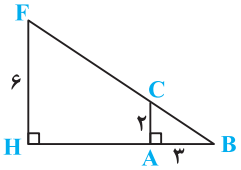
۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۷}}{۶}$
۳) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۴}}{۶}$

۳۰- در شکل مقابل، طول پاره‌خط CD کدام است؟



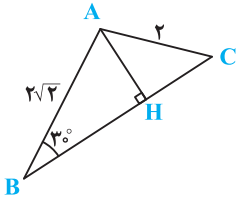
۱) ۴
۲) $\frac{۸}{۳}$
۳) ۸
۴) $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$

۳۱- در شکل مقابل، اندازهٔ AH چند واحد است؟

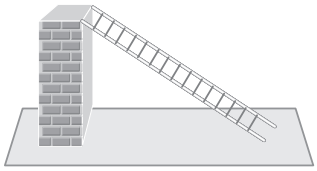


۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۳۲- زاویهٔ A در مثلث شکل مقابل، چند درجه است؟

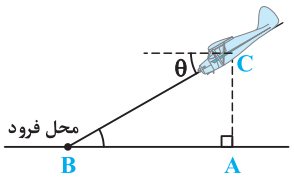


۱) ۶۰
۲) ۱۰۵
۳) ۹۰
۴) ۱۲۵



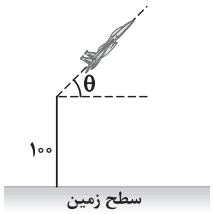
۳۳- نردبانی به طول ۳ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین 30° باشد، ارتفاع دیوار چقدر است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۶
۲) ۱/۵
۳) ۴/۵
۴) ۵



۳۴- هواپیمایی در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با سطح افق θ باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) $2\tan\theta$
۲) $\frac{\sin\theta}{2}$
۳) $2\cot\theta$
۴) $\frac{\cot\theta}{2}$

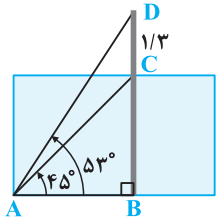


۳۵- موشکی مطابق شکل در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح زمین با زاویهٔ θ پرتاب می‌شود. اگر پس از طی ۱۰۰۰ متر با همین زاویه به ارتفاع ۶۰۰ متری از سطح زمین برسد، زاویهٔ پرتاب (θ) چقدر بوده است؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) 30°
۲) 45°
۳) 60°
۴) 50°

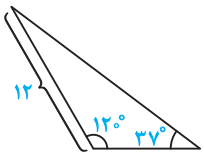
۳۶- شخصی با قد ۱۸۰ سانتی‌متر در فاصلهٔ ۲/۵ متری یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۳ متر ایستاده است. این شخص چند سانتی‌متر به تیر نزدیک شود تا سایه‌اش ۲ برابر قدش شود؟ برگرفته از کتاب درسی

۱) ۱۰
۲) ۲۰
۳) ۳۰
۴) ۴۰



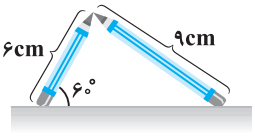
۳۷- در داخل حوضچهٔ یک شهربازی میله‌ای به‌صورت عمودی قرار گرفته است. اگر طول قسمت بیرون آب میله ۱/۳ متر باشد و قسمت انتهای میله با نقطه‌ای در انتهای حوضچه زاویهٔ 53° و قسمت ابتدایی بیرون آب با آن نقطه زاویهٔ 45° بسازد، طول میله کدام است؟ $(\tan 53^\circ \simeq \frac{3}{2})$

۱) ۲/۳
۲) ۲
۳) ۲/۶
۴) ۳/۹



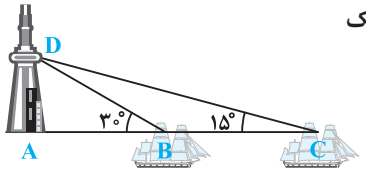
۳۸- شکل کلی کف یک موزهٔ تاریخی به‌صورت مقابل است. مساحت موزه کدام است؟ $(\tan 37^\circ = \frac{3}{4})$

۱) $72-18\sqrt{3}$
۲) $8\sqrt{3}-6$
۳) $72+18\sqrt{3}$
۴) $8\sqrt{3}+6$



۳۹- دو مداد به طول‌های ۶ و ۹ سانتی‌متر را به‌صورت زیر به هم تکیه داده‌ایم. فاصلهٔ پای دو مداد از هم روی زمین چند سانتی‌متر است؟

۱) $3\sqrt{7}$
۲) $3\sqrt{6}$
۳) $3+3\sqrt{6}$
۴) $3+3\sqrt{7}$

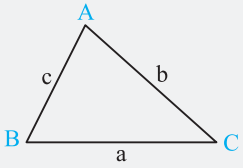


۴۰- دو کشتی مطابق شکل، نوری از یک برج مراقبت دریافت می‌کنند. اگر کشتی C نور را با زاویهٔ 15° و کشتی B نور را با زاویهٔ 30° نسبت به خط افق دریافت کنند و فاصلهٔ دو کشتی یک کیلومتر باشد، فاصلهٔ کشتی C از محل انتشار نور (D) چند کیلومتر است؟

۱) $2+\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
۳) $2+2\sqrt{3}$
۴) $\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

درسنامهٔ ۳

محاسبهٔ مساحت مثلث



اگر دو ضلع یک مثلث و زاویهٔ بین این دو ضلع معلوم باشد، می‌توان از رابطه‌های زیر مساحت مثلث را محاسبه نمود.

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B} \quad , \quad S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C} \quad , \quad S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

پاسخ‌های تشریحی

۱ **۳** می‌دانیم $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$. پس $\mathbb{W} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ می‌شود و چون $\mathbb{Z}$ زیرمجموعهٔ $\mathbb{W}$ نمی‌باشد، پس $\overbrace{\mathbb{W} \cup \mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{W}$ غلط و گزینهٔ (۳) جواب تست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $\mathbb{N} \cup \mathbb{W} \xrightarrow{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}} \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$ ✓ گزینهٔ (۲): $\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ ✓ گزینهٔ (۴): $\mathbb{W} \cap \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}} \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$ ✓

۲ **۳** حاصل تک‌تک گزینه‌ها را می‌یابیم:

گزینهٔ (۱): $\mathbb{N} - O = \{1,2,3,4,\cdots\} - \{1,3,5,\cdots\} = \{2,4,6,\cdots\} = E$

گزینهٔ (۲): $O - E = \{1,3,5,\cdots\} - \{2,4,6,\cdots\} = \{1,3,5,\cdots\} = O$

این دو هیچ اشتراکی ندارند، پس از مجموعهٔ اول چیزی کم نمی‌شود.

گزینهٔ (۳): $E - \mathbb{N} = \{2,4,6,\cdots\} - \{1,2,3,\cdots\} \xrightarrow[\text{وجود ندارد که در } \mathbb{N} \text{ نباشد.}]{\text{هیچ عضوی از مجموعهٔ اول}} \varnothing$ ✓

گزینهٔ (۴): $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\} - \{1,2,3,\cdots\} = \{0\}$

۳ **۳** با بررسی گزینه‌ها باید ببینیم به‌ازای کدام گزینه، $B = \varnothing$ می‌شود:

گزینهٔ (۱): $A = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0,\underline{1},\underline{2},\underline{3},\cdots\} - \{\underline{1},\underline{2},\underline{3},\cdots\} = \{0\}$

پس B به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \{0\}\} \xrightarrow[x^2 = 0 < 1]{x=0} B = \{0\} \neq \varnothing \Rightarrow$ این گزینه جواب نیست.

گزینهٔ (۲): $B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}\}$

B، تهی نیست، زیرا مثلاً اگر $x = \frac{1}{2}$ را درنظر بگیریم، آن‌گاه $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$. پس این گزینه هم جواب نیست.

گزینهٔ (۳): $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\cdots,-3,-2,-1,\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\cdots\} - \{\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\cdots\} = \{\cdots,-3,-2,-1\}$

پس B به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \{\cdots,-3,-2,-1\}\}$

به‌ازای هیچ xای از مجموعهٔ $\{\cdots,-3,-2,-1\}$، $x^2 < 1$ نمی‌شود. پس $B = \varnothing$ و همین گزینه جواب است.

گزینهٔ (۴): $B = \{x \mid x^2 < 1, x \in \{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}\}$

فقط به‌ازای $x = 0$ از مجموعهٔ $\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$، $x^2 = 0 < 1$ می‌شود و لذا $B = \{0\}$ غیرتهی است.

۴ **۲** ابتدا هر یک از مجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{11,13,15,17,19\} \\ B = \{12,15,18\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = \{11,12,13,15,17,18,19\}$$

$A \cup B$، ۷ عضو و A، ۵ عضو دارند. پس $A \cup B$ دو عضو بیشتر از A دارد.

۵ **۴**

نکته مجموعهٔ $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{a}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ بیانگر مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد طبیعی a می‌باشد. زیرا فقط xهایی انتخاب می‌شوند که a بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد.

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{N}\right\} = \text{مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد } 12 = \{1,2,3,4,6,12\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{18}{x} \in \mathbb{N}\right\} = \text{مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد } 18 = \{1,2,3,6,9,18\}$$

$\Rightarrow A \cap B = \{1,2,3,6\} \Rightarrow$ ۴ عضو دارد.

در واقع $A \cap B$ بیانگر شمارنده‌های مشترک ۱۲ و ۱۸ می‌باشد.

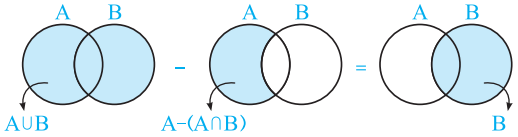
۶ **۳** **راه اول:**

$A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$ و $A \cap B = \{2,6\}$

$$\Rightarrow (A \cup B) - [A - (A \cap B)] = \{2,3,4,5,6,7,8\} - [\{\underline{2},3,\underline{6},7,8\} - \{\underline{2},\underline{6}\}]$$

$$= \{2,\underline{3},4,5,\underline{6},\underline{7},\underline{8}\} - \{\underline{3},\underline{7},\underline{8}\} = \{2,4,5,6\} \Rightarrow$$ چهار عضو دارد.

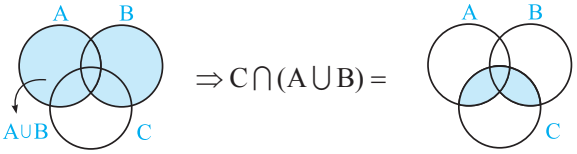
راه دوم: ابتدا مجموعهٔ خواسته‌شده را ساده می‌کنیم:



پس عبارت $(A\cup B)-(A-(A\cap B))$ همان مجموعهٔ $B=\{2,4,5,6\}$ است. لذا ۴ عضو دارد.

۴ | ۷ می‌خواهیم مسأله را طوری حل کنیم که روش حل کلی این نوع تست‌ها را خوب یاد بگیرید.

ببینید، معلوم است که گزینه‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند جواب باشند، زیرا در گزینهٔ (۲) به علت وجود $A\cup$، جواب باید شامل کل A باشد، درحالی‌که قسمت سایه‌خورده در شکل فقط بخشی از A را دربرمی‌گیرد. مشابهاً در گزینهٔ (۳) به خاطر وجود $C\cup$ جواب باید همهٔ C را دربر بگیرد که با توجه به شکل چنین اتفاقی نیفتاده است. هم‌چنین در گزینهٔ (۱)، عبارت $A\cap$، یعنی فقط قسمتی از A باید جواب باشد ولی بخشی از ناحیهٔ سایه‌خورده خارج از A قرار دارد و لذا گزینهٔ (۴) جواب است. ببینید:



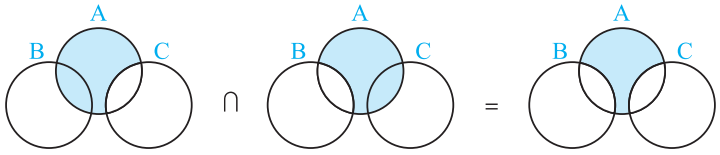
۸ | ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$A-(B\cap C)\xrightarrow[B\cap C=\varnothing]{\text{با توجه به شکل صورت سؤال}}A-\varnothing=A$$

شکل صورت تست، کل A را نشان نمی‌دهد، پس این گزینه جواب نیست.

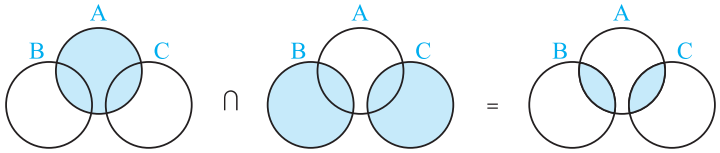
گزینهٔ (۲):



$(A-C)$ $(A-B)$ $(A-C)\cap(A-B)$

⇒ پس این گزینه جواب است.

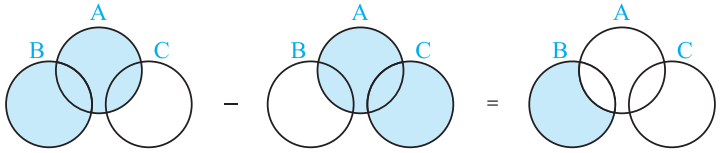
گزینهٔ (۳):



A $B\cup C$ $A\cap(B\cup C)$

⇒ این گزینه جواب نیست.

گزینهٔ (۴):



$(A\cup B)$ $(A\cup C)$ $(A\cup B)-(A\cup C)$

⇒ این گزینه جواب نیست.

۹ | ۲ ابتدا اعضای مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cup C$ را می‌یابیم:

$$A\cup B=\{1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,6^2,7^2,8^2\}=\{1,4,9,16,25,36,49,64\}\quad (*)$$

$$A\cup C=\{1^3,2^3,3^3,4^3,5^3,\cdots\}=\{1,8,27,64,125,\cdots\}\quad (**)$$

حال برویم سراغ چیزی که تست از ما خواسته است:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$\xrightarrow{(**),(*)}\{1,4,9,16,25,36,49,64\}\cap\{1,8,27,64,125,\cdots\}=\{1,64\}\Rightarrow$$ دو عضو دارد.

۱۰ | ۲ از آن‌جا که $(-\infty,4)\cup(6,+\infty)\cup[4,6]=\mathbb{R}$ و اشتراک این دو مجموعه، تهی است، پس $(-\infty,4)\cup(6,+\infty)=\mathbb{R}-[4,6]$. به عبارتی:

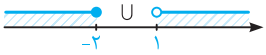
$$(-\infty,4)\cup(6,+\infty)=$$ $$=\mathbb{R}-[4,6]$$

۱۱ ۴

نکته کلمهٔ «و» در مجموعه‌ها معادل اشتراک ($\cap$) و کلمهٔ «یا» معادل اجتماع ($\cup$) می‌باشد.

در گزینهٔ (۴) داریم:

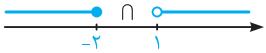
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ یا } x > 1\} = (-\infty,-2] \overset{\text{معادل «یا»}}{\cup} (1,+\infty) = \mathbb{R} - (-2,1]$$



اما در سایر گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ (۱): $(-\infty,-2) \overset{\text{معادل «و»}}{\cap} [1,+\infty) = \varnothing$

گزینهٔ (۲): $(-\infty,-2] \overset{\text{معادل «و»}}{\cap} (1,+\infty) = \varnothing$

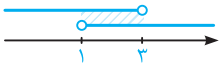


گزینهٔ (۳): $(-\infty,-2) \overset{\text{معادل «یا»}}{\cup} [1,+\infty) = \mathbb{R} - [-2,1)$

سؤال دانش‌پژوه (نعیمه پولکی): **ببخشید، میشه بگید چرا اشتراک در گزینه‌های (۱) و (۲)، $\varnothing$ شد؟**

پاسخ: درود! اشتراک دو بازه یعنی قسمتی که بین هر دو بازه مشترک است. اون دو خط رسم شده هیچ‌وقت با هم از یک جا رد نشدن. مثلاً اگه جواب $(1,+\infty) \cap (-\infty,3)$ را بخواهیم داریم:

$$(1,+\infty) \cap (-\infty,3) =$$

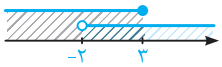


$$= (1,3)$$

۱۲ ۲

وقتی کلمهٔ «یا» وجود دارد، یعنی باید اجتماع بگیریم.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ یا } x \leq 3\} = (-2,+\infty) \cup (-\infty,3] =$$



$$= \mathbb{R}$$

دقت کنید اجتماع برای این $\mathbb{R}$ شد که دو بازه‌ای که اجتماع آن‌ها را می‌خواستیم، کل محور را شامل می‌شوند.

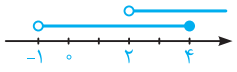
سؤال دانش‌پژوه (حسن بوربور): **آقا اجتماع این دو بازه $[-2,3)$ نمیشه؟**

پاسخ: درود بر هرچی بوربور! به‌به! دیگه چی؟ نه نمیشه، اشتراک دو مجموعه رو نخواسته که جواب $[-2,3)$ بشه، بلکه اجتماع اون‌ها رو خواسته.

۱۳ ۴

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): این گزینه صحیح است. زیرا:



$$(-1,4] \cap (2,+\infty) = (2,4] \Rightarrow \sqrt{3} \cong 1/7 \notin (2,4]$$

گزینهٔ (۲): اعداد $\frac{5b}{2} = 2/5b$ و $2b$ هر دو عضو بازهٔ $[b,3b]$ هستند، پس $\left\{\frac{5b}{2}, 2b\right\}$ زیرمجموعهٔ $[b,3b]$ بوده و این گزینه صحیح است.

گزینهٔ (۳): این گزینه صحیح است. زیرا:

$$(-2,5) \cup (-3,+\infty) = (-3,+\infty) \Rightarrow 6/022 \times 10^{23} \in (-3,+\infty)$$

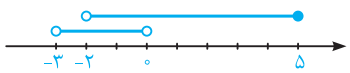
در حقیقت $6/022 \times 10^{23}$ عددی خیلی بزرگ و مثبت است و بازهٔ $(-3,+\infty)$ شامل همهٔ اعداد حقیقی مثبت است.

گزینهٔ (۴): نادرست است. زیرا بازهٔ $[-1,2]$ شامل عدد ۱- است که این عدد در بازهٔ $(-1,2)$ حضور ندارد. پس بازهٔ $[-1,2]$ نمی‌تواند زیرمجموعهٔ $(-1,2)$ باشد.

۱۴ ۳

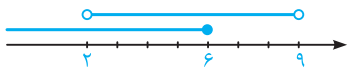
بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):



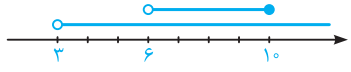
$$(-3,0) \cup (-2,5] = (-3,5]$$

گزینهٔ (۲):



$$(-\infty,6] \cap (2,9) = (2,6]$$

گزینهٔ (۳):

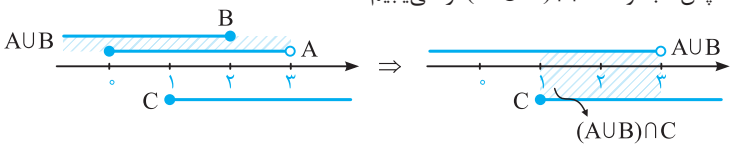


$$(3,+\infty) \cup (6,10] = (3,+\infty) \quad \checkmark$$

گزینهٔ (۴):

$$(-\infty,1) \cap [1,+\infty) = \varnothing$$

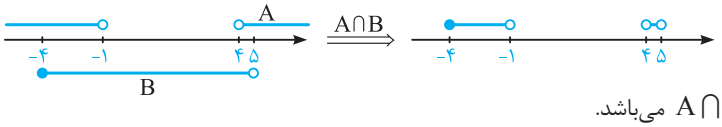
۱۵ ۳ مجموعه‌های A، B و C را روی محور نمایش داده و سپس مجموعهٔ $(A\cup B)\cap C$ را می‌یابیم:



$\Rightarrow (A\cup B)\cap C=[1,3)$

بازهٔ حاصل شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

۱۶ ۳ ابتدا مجموعه‌های $A=(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ و $B=(-\infty,5)\cap[-4,+\infty)=[-4,5)$ را روی محور رسم می‌کنیم و سپس به کمک نمودار، اشتراک A و B را می‌یابیم:

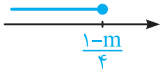


با توجه به گزینه‌ها فقط بازه‌ی $(-2,-4]$ زیرمجموعهٔ $A\cap B$ می‌باشد.

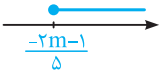
۱۷ ۳ ابتدا مجموعه‌های A و B را می‌یابیم:

$$A=\left\{x\mid 2x+m\le\frac{m+1}{2}\right\}:2x+m\le\frac{m+1}{2}\Rightarrow 2x\le\frac{m+1}{2}-m\Rightarrow 2x\le\frac{m+1-2m}{2}$$

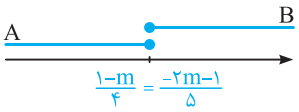
$$\Rightarrow 2x\le\frac{1-m}{2}\Rightarrow x\le\frac{1-m}{4}$$



$$B=\{x\mid m-5x\le 3m+1\}:m-5x\le 3m+1\Rightarrow m-3m-1\le 5x\Rightarrow\frac{-2m-1}{5}\le x$$

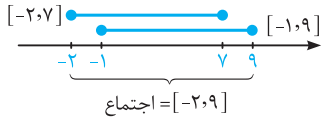


برای آن‌که $A\cap B$ فقط یک عضو داشته باشد، به ناچار باید داشته باشیم:



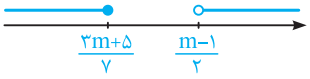
$$\frac{1-m}{4}=\frac{-2m-1}{5}\Rightarrow 5-5m=-8m-4\Rightarrow 3m=-9\Rightarrow m=-3$$

۱۸ ۳ طبق فرض $[-2,9]=[-1,b]\cup[a,7]$ شده است. پس b باید برابر ۹ و a باید برابر ۲- باشد، علت آن را روی محور بیان می‌کنیم:



$$\Rightarrow b-a=9-(-2)=11$$

۱۹ ۴ ابتدا دو مجموعهٔ $\left(\frac{m-1}{2},+\infty\right)$ و $\left(-\infty,\frac{3m+5}{7}\right]$ را روی محور رسم می کنیم:



با توجه به شکل، اگر قرار باشد اجتماع این دو مجموعه، $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) شود، باید داشته باشیم:

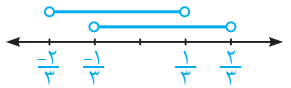
$$\frac{3m+5}{7}\ge\frac{m-1}{2}\Rightarrow 2(3m+5)\ge 7(m-1)\Rightarrow 6m+10\ge 7m-7\Rightarrow 17\ge m$$

۲۰ ۱ ابتدا A_2 و A_3 را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{aligned}A_2&=\{x\mid x\in\mathbb{R},0<x-1<2^2\}=\{x\mid x\in\mathbb{R},1<x<5\}\\A_3&=\{x\mid x\in\mathbb{R},0<x-1<2^3\}=\{x\mid x\in\mathbb{R},1<x<9\}\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_2\cap A_3=\{x\mid x\in\mathbb{R},1<x<5\}=(1,5)$$

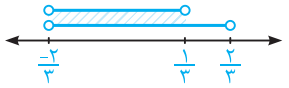
۲۱ ۴ با توجه به تعریف A_n داریم:

$$\left.\begin{aligned}A_3&=\left(-\frac{2}{3},\frac{3-2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\\A_6&=\left(-\frac{2}{6},\frac{6-2}{6}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_3\cup A_6=$$



$$=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$(A_3\cup A_6)-A_3=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=$$



$$=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

۲۲ ۱ ابتدا مجموعه‌های موردنظر را تشکیل می‌دهیم:

$$A_1=\left[-1,\frac{9-1}{2}\right]=[-1,4]\quad\text{و}\quad A_2=\left[-2,\frac{9-2}{2}\right]=[-2,3/5]$$

$$A_5=\left[-5,\frac{9-5}{2}\right]=[-5,2]\quad\text{و}\quad A_7=\left[-7,\frac{9-7}{2}\right]=[-7,1]$$

$$\begin{cases}A_2\cap A_5=[-2,3/5]\cap[-5,2]=[-2,2]\\A_1\cap A_7=[-1,4]\cap[-7,1]=[-1,1]\end{cases}$$

$$\Rightarrow(A_2\cap A_5)-(A_1\cap A_7)=$$

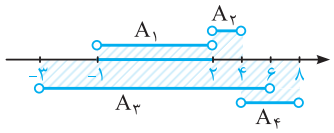
$$\Rightarrow$$

$$=[-2,-1)\cup(1,2]$$

۲۳ ۳

نکته اگر a و b دو عدد صحیح باشند که $a<b$، آن‌گاه در بازهٔ (a,b)، $b-a-1$ عدد صحیح، در بازهٔ $[a,b)$ یا $(a,b]$، $b-a$ عدد صحیح و در بازهٔ $[a,b]$، $b-a+1$ عدد صحیح وجود دارد.

$$A_1=\left((-1)^1\times 1,2(1)\right)=(-1,2), A_2=\left((-1)^2\times 2,2(2)\right)=(2,4), A_3=\left((-1)^3\times 3,2(3)\right)=(-3,6), A_4=\left((-1)^4\times 4,2(4)\right)=(4,8)$$

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4 = \text{  } =(-3,8)$$

که در این بازه $۱۰=۱-۱۱=۱-(-۳)-۸$ عدد صحیح وجود دارد.

۲۴ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

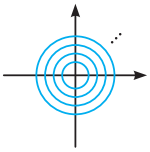
گزینهٔ (۱): مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به‌صورت $\{2,3,5,7\}$ است که متناهی است.

گزینهٔ (۲): مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ شما هم دقیقاً تعداد مشخصی دارد و لذا متناهی است.

گزینهٔ (۳): تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب، $۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}$ عدد است که با این‌که عدد خیلی بزرگی می‌باشد ولی قابل شمارش بوده و لذا مجموعهٔ موردنظر متناهی است.

سؤال *دانش‌پژوه (اصغر بالازاده):* **آقا! آخه تو اینجا هم باید شیمی بلد باشیم! اگه ما این عدد را نمی‌دونستیم چی‌کار کنیم؟**

پاسخ: درود بر این درس خوندنت! بیچاره معلم شیمی‌ات. تو در همین حد بدون که تعداد مولکول‌ها همیشه چه توی آب چه توی هرجایی متناهیه. خوب شد!



گزینهٔ (۴): تعداد دایره‌هایی که می‌توان به مرکز مبدأ مختصات رسم کرد نامتناهی است. پس همین گزینه جواب تست است.

۲۵ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): اگر $B=\mathbb{Q}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A، تمام اعداد گویای موجود در بازهٔ $(۰,۲)$ است که نامتناهی است.

گزینهٔ (۲): اگر $B=\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A، تمام اعداد حقیقی موجود در بازهٔ $(۰,۲)$ است که نامتناهی است.

گزینهٔ (۳): اگر $B=\mathbb{Q}'$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A، تمام اعداد گنگ موجود در بازهٔ $(۰,۲)$ است که نامتناهی است.

گزینهٔ (۴): اگر $B=\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ A به‌صورت $\{1\}$ درمی‌آید که متناهی است و همین گزینه جواب تست است.

۲۶ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): هر بازه‌ای که ابتدا و انتهایش یکسان نباشند بیانگر مجموعه‌ای نامتناهی است. اگر از این مجموعه یک یا حتی چند عدد برداریم باز هم نامتناهی باقی می‌ماند. پس گزینهٔ (۱) بیانگر مجموعه‌ای نامتناهی است.

گزینهٔ (۲): اعداد صحیح مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۲۰۰۰ به‌صورت مقابل هستند: $\{۱۹۹۸,۱۹۹۵,۱۹۹۲,\cdots\}$

همان‌طور که می‌بینید تا منفیِ بی‌نهایت این مضارب ادامه دارند، پس این مجموعه نیز نامتناهی است.

گزینهٔ (۳): اعداد کسری با مخرج یک که صورتشان اعداد طبیعی باشند، همان اعداد طبیعی هستند (مخرج ۱ عملاً بی‌تأثیر است) پس این گزینه بیانگر اعداد طبیعی کم‌تر از ۵۰۰ می‌باشد که مجموعه‌ای متناهی است.

گزینهٔ (۴): طبق آموخته‌های سال نهم و با توجه به تعریف مجموعه، جنگل‌های زیبای جهان نمی‌تواند بیانگر یک مجموعه باشد و لذا این گزینه اصلاً مجموعه نیست که بخواهد مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی باشد.

سؤال *دانش‌پژوه (اکبر شمس‌الریاضیات):* **آقا به نظر من، شما با طبیعت رابطهٔ خوبی ندارید! آخه چرا جنگل مجموعه نیست!؟**

پاسخ: درود بر تو و علاقه‌ات به طبیعت! بچه! مشکل از جنگل نیست، مشکل اینه که عباراتی که دارای صفت هستن معمولاً مجموعه نیستن مثل افراد بلندقد و یا چاق یا همین جنگل‌های زیبا. چون‌که این صفت‌ها معمولاً ازنظر افراد مختلف فرق می‌کنه. مثلاً ممکنه من جنگلی رو زیبا بدونم ولی شما نه و چون طبق تعریف کتاب سال قبل، مجموعه‌ها باید بیانگر اشیای کاملاً مشخص باشن، پس این عبارت بیانگر یک مجموعه نیست.

۲۷ ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): با توجه به بازهٔ باز $(۱,۷)$ باید کوچک‌ترین عضو پس از ۱ را بیابیم. اما هیچ عدد حقیقی‌ای بزرگ‌تر از عدد ۱ را نمی‌توان در این بازه یافت که بتوان ادعا کرد کوچک‌ترین عضو این بازه است. پس این بازه کوچک‌ترین عضو ندارد.

نکته بازه‌های باز، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو ندارند.

گزینهٔ (۲): برای اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۷، ۷ کوچک‌ترین عضو به حساب می‌آید و لذا این گزینه جواب تست است.

گزینهٔ (۳): این مجموعه بزرگ‌ترین عضو دارد (عدد ۳ بزرگ‌ترین عضو آن است)، ولی کوچک‌ترین عضو ندارد.

۲۸ **۴** مجموعهٔ A متناهی و مجموعهٔ B نامتناهی است، زیرا:

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{\cdots,-1,0,1,2,3\}$

حال با توجه به جدول درسنامه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $A \cap B$: متناهی ← (A: متناهی، B: نامتناهی)

گزینهٔ (۲): $A - B$: متناهی ← (A: متناهی، B: نامتناهی)

گزینهٔ (۳): $B - (A \cup B) \overset{B \subseteq A \cup B}{=\!=\!=} \varnothing$: متناهی

گزینهٔ (۴): $A \cup B$: نامتناهی ← (A: متناهی، B: نامتناهی)

پس گزینهٔ (۴) جواب تست است.

۲۹ **۳** ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$A = \{3,6,9,\cdots\} \Rightarrow$ نامتناهی

$B = \{-99,-98,\cdots,98,99\} \Rightarrow$ متناهی

حال به کمک آموخته‌هایمان از جدول درسنامه، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $A - B \Rightarrow$ نامتناهی ← (A: نامتناهی، B: متناهی)

گزینهٔ (۲): $\mathbb{Z} - A = \{\cdots,0,1,2,4,5,7,8,\cdots\} \Rightarrow$ نامتناهی

گزینهٔ (۳): $A \cap B \Rightarrow$ متناهی ← (A: نامتناهی، B: متناهی)

گزینهٔ (۴): $A \cup B \Rightarrow$ نامتناهی ← (A: نامتناهی، B: متناهی)

پس گزینهٔ (۳) جواب تست است.

۳۰ **۲** ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$A = \{1,3,5,7,9,\cdots\}$, $B = \{2,3,5,7,11,\cdots\}$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $A - B = \{1,3,5,7,9,\cdots\} - \{2,3,5,7,11,\cdots\} = \{$اعداد فرد غیر اول$\} = \{1,9,15,\cdots\} \Rightarrow$ نامتناهی

گزینهٔ (۲): $B - A = \{2,3,5,7,11,\cdots\} - \{1,3,5,7,9,\cdots\} = \{2\} \Rightarrow$ متناهی و غیرتهی

گزینهٔ (۳): $A \cap B = \{3,5,7,11,\cdots\} = \{$اعداد اول به غیر از ۲$\} \Rightarrow$ نامتناهی

گزینهٔ (۴): $A - (A \cup B) \overset{A \subseteq (A \cup B)}{=\!=\!=} \varnothing$

پس گزینهٔ (۲) جواب تست است.

۳۱ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): A و B نامتناهی هستند و داریم:

$A \cup B = \{2,4,6,8,\cdots\} \cup \{2,3,5,7,11,\cdots\} = \{2,3,4,5,6,7,\cdots\}$

این مجموعه برابر $\mathbb{N}$ نیست. زیرا مثلا $1 \notin A \cup B$.

گزینهٔ (۲): A مجموعه‌ای متناهی است، پس این گزینه نمی‌تواند جواب باشد.

گزینهٔ (۳): اعداد طبیعی مضرب ۲ و ۳ همان اعداد طبیعی مضرب ۶ هستند.

$A = \{6,12,18,\cdots\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,7,8,\cdots\} \Rightarrow$ B نامتناهی , $A \cup B = \mathbb{N}$

گزینهٔ (۴): A مجموعه‌ای متناهی است، پس این گزینه نمی‌تواند جواب باشد.

۳۲ **۲** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ (۱): اگر A متناهی باشد، لزوماً هر زیرمجموعهٔ آن هم قطعاً متناهی خواهد بود. پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۲): اگر A نامتناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. مثلاً اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد، B می‌تواند مجموعهٔ متناهی $B = \{1\}$ یا مجموعهٔ نامتناهی $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$ باشد.

گزینهٔ (۳): واضح است وقتی زیرمجموعهٔ یک مجموعه نامتناهی است، پس خود آن مجموعه هم قطعاً نامتناهی خواهد بود. پس این گزینه درست است.

گزینهٔ (۴): فرض کنید B مجموعهٔ متناهی مانند $\{1\}$ باشد چون $B \subseteq A$ است، مجموعهٔ A را می‌توان هم به‌صورت متناهی مانند $A = \{1,2\}$ در نظر گرفت و هم به‌صورت نامتناهی مانند $A = \mathbb{N}$ در نظر گرفت. پس این گزینه هم درست است.

۳۳ **۲** با توجه به صورت تست داریم:

$$\left.\begin{array}{l} U=\{۱,۲,۳,۴,\ldots,۸\} \\ ۲\times ۱<۷\ ,\ ۲\times ۲<۷\ ,\ ۲\times ۳<۷ \Rightarrow A=\{۱,۲,۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow A'=U-A=\{۴,۵,۶,۷,۸\} \Rightarrow$$

A'، ۵ عضو دارد.

۳۴ **۳**

مجموعهٔ مرجع: $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ ، $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴\}\cup\{۲,۴,۶,۸\}=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$

مجموعهٔ $(A\cup B)'$ شامل عضوهایی از مجموعهٔ مرجع U است که آن عضوها در مجموعهٔ $A\cup B$ حضور ندارند. پس داریم:

$$(A\cup B)'=\{۵,۷,۹\}$$

از طرفی $C'=\{۳,۴,۵,۶\}$ است. پس مجموعهٔ C برابر می‌شود با:

$$C=(C')'=\{۱,۲,۷,۸,۹\}$$

بنابراین:

$$(A\cup B)'\cap C=\{۵,۷,۹\}\cap\{۱,۲,۷,۸,۹\}=\{۷,۹\}$$

۳۵ **۴**

$$A'=U-A=\underbrace{\{۱,۲,۳,\cdots,n-۱,n\}}_{U}-\underbrace{\{۵,۶,۷,\cdots,n-۱,n\}}_{A}=\{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow$$

۴ عضو دارد.

سؤال دانش‌پژوه (ملیکا پورفلاح): **ببخشید A مگه $\{n,n-۱,\cdots,۵\}$ نبود؟**

پاسخ: بچه! مگه A ای که ما نوشتیم همون نیست؟! اگه خوب دقت کنی، من فقط ترتیب اعداد داخل مجموعه رو عوض کردم. یعنی A رو از تَه نوشتم. همین.

۳۶ **۳**

$$A\cup(A'\cap B)=(\overset{U}{\cancel{A\cup A'}})\cap(A\cup B)=U\cap(A\cup B)\overset{A\cup B\subseteq U}{=\!=}A\cup B$$

۳۷ **۳** برای حل و ساده‌سازی عبارت داده‌شده، باید یک عملیات که شبیه فاکتورگیری است را بلد باشید. با هم ببینیم:

$$(A\cap B')\cup(B\cap A)\overset{A\cap B=B\cap A}{=\!=}(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(\overset{U}{\cancel{B'\cup B}})=A$$

۳۸ **۲** ابتدا علامت «-» را به «$\cap$» تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$(A\cap B)-A=(A\cap B)\cap A'=\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing}\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$$

۳۹ **۲**

$$(B-A)\cup A=(B\cap A')\cup A=(B\cup A)\cap(\overset{U}{\cancel{A'\cup A}})=(B\cup A)\cap U\overset{B\cup A\subseteq U}{=\!=}B\cup A\overset{A\subseteq B}{=\!=}B$$

۴۰ **۱** ابتدا مجموعهٔ $(B-A)'-A$ را کمی ساده کرده و سپس متمم آن را به‌دست می‌آوریم:

$$(B-A)'-A=(B\cap A')'\cap A'=(B'\cup A)\cap A'=(B'\cap A')\cup(A\cap A')$$

$$\overset{A\cap A'=\varnothing}{=\!=}(B'\cap A')\cup\varnothing=(B'\cap A')=(B\cup A)'$$

بنابراین مجموعهٔ $(B-A)'-A$ برابر با $(B\cup A)'$ است و متمم آن، مجموعهٔ $A\cup B$ است.

۴۱ **۴** با توجه به آن‌که اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B'\subseteq A'$ است، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) گزینهٔ: $B'\subseteq A'$: $B'-A=B'\cap A'=B'$ ✓

(۲) گزینهٔ: $B'\subseteq A'$: $A'-B=A'\cap B'=B'$ ✓

(۳) گزینهٔ: $A\subseteq B$: $A-B'=A\cap B=A$ ✓

(۴) گزینهٔ: $A\subseteq B$: $B-A'=B\cap A=A\neq B$

۴۲ **۲** سؤال کمی سخت است. باید به خوبی از خواص اشتراک و اجتماع استفاده نماییم:

$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=[\overbrace{(A\cap A')}^{\varnothing}\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap A')\cup\overbrace{(B\cap B')}^{\varnothing}]$$

$$=[\varnothing\cup(A\cap B)]\cup[(B\cap A')\cup\varnothing]=(A\cap B)\cup(B\cap A')=(B\cap A)\cup(B\cap A')=B\cap(\overset{U}{\cancel{A\cup A'}})=B$$