مجموعه کتاب‌های علامه حلی

ریاضی (۲)

رشته علوم تجربی

پایه یازدهم

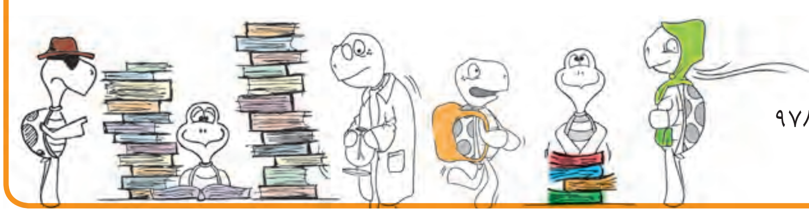
- سیدمحمدصالح ارشاد
- حجت انصاری
- اقبال زارعی
- سید حسین نیری‌پور

شناسنامه کتاب

شناسه	:	ارشاد، سیدمحمدصالح، ۱۳۶۵
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضی (۲) علوم تجربی یازدهم / سیدمحمدصالح ارشاد و دیگران.
مشخصات نشر	:	تهران: انتشارات حلی، ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری	:	۲۹×۲۲ س م. ۱: مصور (بخشی رنگی)، جدول (بخشی رنگی)، نمودار (بخشی رنگی)؛ ص ۴۳۲
فروست	:	مجموعه کتاب علامه‌حلی
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۴۹۶-۰۷۵-۵
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپای مختصر
یادداشت	:	فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی *http://opac.nlai.ir* : قابل دسترسی است.
شناسه افزوده	:	سیدمحمدصالح ارشاد، حجت انصاری، اقبال زارعی، سیدحسین نیری‌پور
شماره کتابشناسی ملی	:	۵۳۷۸۳۰۷

علامه حلی

عنوان کتاب	ریاضی (۲) رشته علوم تجربی
ناشر	انتشارات حلی
مؤلفان	سیدمحمدصالح ارشاد، حجت انصاری، اقبال زارعی، سید حسین نیری‌پور
ویراستار علمی	معصومه صباغیان
مدیر تولید	افسانه رمضانی
طراح جلد	سعید شمس
صفحه‌آرا	راضیه سادات فرهانیان، عاطفه قلیچ‌خانی
رسام	محدثه فریابی‌کنی
حروف‌نگار	حروف‌نگاری علامه‌حلی
سال چاپ	۱۳۹۷
نوبت چاپ	اول
شمارگان	۲۵۰۰ جلد
قیمت	۵۱,۹۰۰ تومان
شماره شابک	۹۷۸-۶۰۰-۴۹۶-۰۷۵-۵

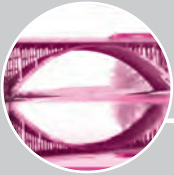


تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، ابتدای کوچه براتی، پلاک ۱۶ واحد ۱۴

تلفن دفتر مرکزی: ۵-۶۶۷۴۴۳۸۴

فهرست مطالب

فصل ۱
جبر و معادله



فصل ۲
هندسه

فصل ۳
توابع

فصل ۴
توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۵
مثلثات

فصل ۶
حد و پیوستگی

فصل ۷
آمار و احتمال

پاسخ‌ها

پیشگفتار

به نام خدا

سال‌هاست نام علامه حلی با فعالیت‌های گوناگونی چون تالیف کتاب‌های مفهومی، برگزاری آزمون‌های باکیفیت، برگزاری مسابقات علمی در سطح کشور، اجرای کارسوق‌های مهیج و خلاق و ... برای دانش‌آموزان کوشا و با استعداد این سرزمین شناخته شده است.

مجموعه علامه‌حلی با حفظ ارتباط «معلمی» با فضای کلاس و درس، همواره بر آموزش مفهومی و عمیق و یادگیری پایدار تاکید داشته و در جهت رسیدن به این هدف خلاقیت‌های آموزشی را سرلوحه اهداف خود قرار داده است.

مجموعه کتاب‌های جامع علامه حلی یکی از محصولات بخش انتشارات موسسه است. در این کتاب‌ها تلاش شده است تا تمام نیاز دانش‌آموزان در درس مورد نظر فراهم گردد و دانش‌آموز با تهیه این کتاب نیاز به مراجعه به سایر کتب تست یا کتب کار و ...را نداشته باشد. بدین منظور، این کتاب‌ها شامل درس‌نامه جامع و مفصل، تمرینات تشریحی و سوالات چهارگزینه‌ای به تعداد زیاد در هر فصل (با توجه به نیاز دانش‌آموزان برای آمادگی کنکور) با پاسخ‌های کاملا تشریحی می‌باشد.

ما همواره معترف و مفتخریم در راهی که پیموده‌ایم دبیران این سرزمین، با نظرات ارزشمند خود یاور ما بوده‌اند و همچنان برای ادامه راهی که برای سربلندی دانش‌آموزان کشورمان پیش رو داریم، منتظر انتقادات و نظرات سازنده دبیران و دانش‌آموزان با استعدادمان هستیم. راه ارتباطی ما با شما:

ketab.helli@gmail.com

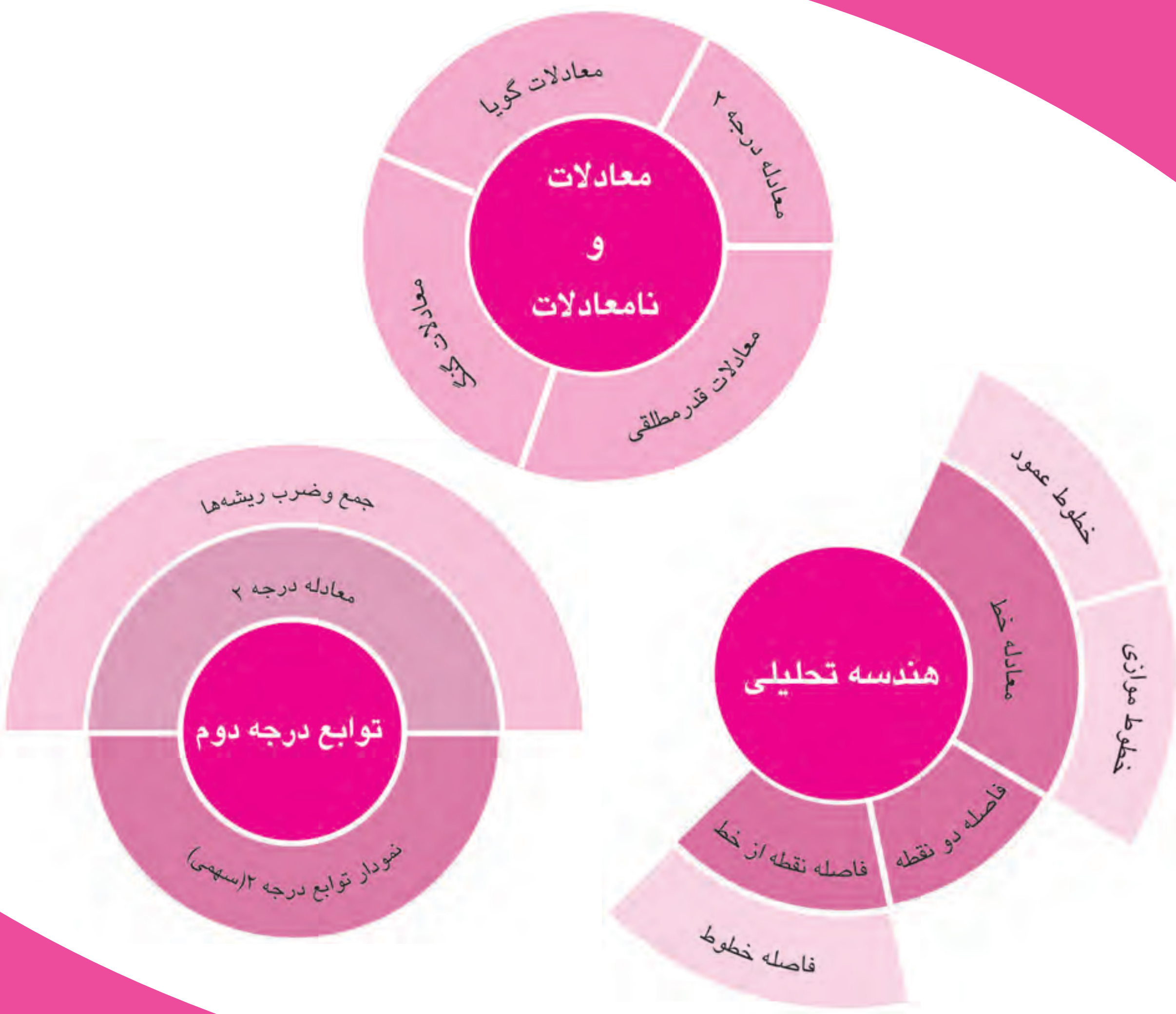
مریم صفدری

مدیر انتشارات حلی

فصل ۱

جبر و معادله

تبدیل هر مسئله در علم به مدل ریاضی، همواره مورد توجه دانشمندان است. تبدیل تعدادی از اعداد به دنباله، تبدیل مفاهیم هندسه به معادلاتی مثل معادلات خطوط و مکان هندسی مختلف، از این قبیل تبدیلات مفیداند.



اگر این فصل را به خوبی مطالعه کنی و کارهای خواسته‌شده را به دقت انجام دهی می‌توانی:

- معادلات مختلف درجه دوم یا گویا و گنگ را حل کنی.
- نمودارهای توابع درجه دوم را رسم کنی و آن‌ها را تحلیلی کنی.
- با تعبیر هندسی جواب‌های معادلات و بررسی تعداد جواب‌های یک معادله به روش هندسی آشنا بشی.
- با چگونگی پیدا کردن طول پاره‌خط‌ها و فاصله هر نقطه از خط آشنا شوی.

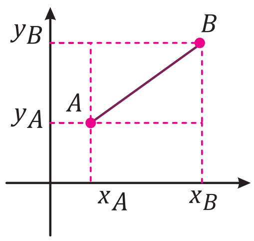
◄ هندسه تحلیلی

فاصله دو نقطه بر روی محور xها

اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را با x_A و x_B نشان دهیم، فاصله بین A و B را که طول پاره‌خط AB می‌نامیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$AB = |x_B - x_A|$$

فاصله دو نقطه در صفحه مختصات



اگر مختصات نقطه A و B در صفحه مختصات xy به‌صورت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B\ ,\ y_B)$ باشد فاصله دو نقطه A و B که طول پاره‌خط AB است برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$

مثال ۱. مختصات سه رأس یک مثلث به‌صورت $A(-۱,۱)$ و $B(۲,-۳)$ و $C(۶,-۶)$ است. محیط و نوع مثلث را تعیین کنید.

پاسخ: طول اضلاع این مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} A(-۱,۱) \\ B(۲,-۳) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۱-(-۳))^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

$$\left.\begin{matrix} A(-۱,۱) \\ C(۶,-۶) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC = \sqrt{(-۱-۶)^۲ + (۱-(-۶))^۲} = \sqrt{۷^۲ + ۷^۲} = ۲\sqrt{۷}$$

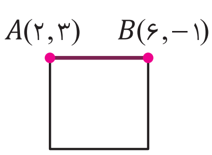
$$\left.\begin{matrix} B(۲,-۳) \\ C(۶,-۶) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC = \sqrt{(۲-۶)^۲ + (-۳-(-۶))^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

پس محیط این مثلث برابر با $۱۰ + ۲\sqrt{۷}$ است و باتوجه به آنکه $AB = BC$ است پس مثلث متساوی‌الساقین است.

تست ۱. **دو رأس یک مربع دارای مختصات $(۲,۳)$ و $(۶,-۱)$ است. مساحت این مربع کدام گزینه می‌تواند باشد؟**

۱) ۲۴   ۲) ۱۲   ۳) ۸   ۴) ۱۶

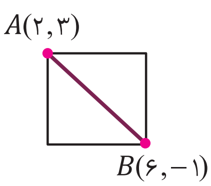
پاسخ گزینه ۴



شکل (۱)

ممکن است دو رأس داده شده مطابق شکل (۱) دو رأس مجاور باشند در این صورت طول ضلع مربع فاصله این دو نقطه است. اما اگر دو رأس داده شده مطابق شکل (۲) دو رأس مقابل باشند فاصله این دو نقطه برابر طول قطر مربع است. در نتیجه:

$$AB = \sqrt{(۶-۲)^۲ + (-۱-۳)^۲} = \sqrt{۴^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۳۲} \Rightarrow S = (\sqrt{۳۲})^۲ = ۳۲$$



شکل (۲)

$$AB = \sqrt{۴^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۳۲} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳۲} \times \sqrt{۳۲}}{۲} = ۱۶$$

اما ۳۲ در بین گزینه‌ها وجود ندارد پس گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۲. مختصات نقطه‌ای روی منحنی $y=\sqrt{x}$ بیابید که فاصله آن از نقطه $(۱,۰)$ برابر $\sqrt{۳}$ باشد.

پاسخ:

اگر نقطه A با طول α بر روی منحنی $y=\sqrt{x}$ باشد. مختصات عرض آن به‌صورت $\sqrt{\alpha}$ است و مختصات این نقطه به‌صورت $(\alpha\,,\sqrt{\alpha})$ است. حال باید فاصله نقطه $(\alpha\,,\sqrt{\alpha})$ را از $(۱,۰)$ برابر $\sqrt{۳}$ قرار دهیم:

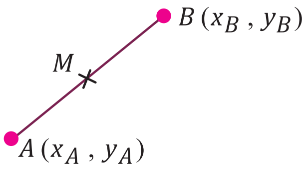
$$\begin{cases}A(\alpha\,,\sqrt{\alpha})\\ B(۱,۰)\end{cases} \Rightarrow\ AB=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\sqrt{\alpha}-۰)^۲}=\sqrt{۳}\ \Rightarrow\ (\alpha-۱)^۲+(\sqrt{\alpha})^۲=۳\ \Rightarrow\ \alpha^۲-\alpha+۱=۳$$

$$\Rightarrow\ \alpha^۲-\alpha-۲=۰\ \Rightarrow\ (\alpha-۲)(\alpha+۱)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=۲\\ \alpha=-۱\to \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

از آنجا که طول نقاط واقع بر منحنی $y=\sqrt{x}$ همگی نامنفی هستند پس $\alpha=-۱$ قابل قبول نیست و داریم $\alpha=۲$ در نتیجه مختصات این نقطه به‌صورت $(۲,\sqrt{۲})$ است.

مختصات وسط دو پاره‌خط

مختصات وسط پاره‌خطی که مختصات دو سر آن $A(x_A\,,y_A)$ و $B(x_B\,,y_B)$ است. به‌صورت زیر است:



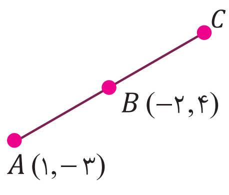
$$M=(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})$$

یعنی مختصات طول نقطه وسط دو نقطه B و A برابر میانگین طول نقاط A و B است و مختصات عرض نقطه وسط دو نقطه B و A برابر میانگین عرض نقاط A و B است.

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

مثال ۳. مختصات قرینه نقطه $(۱,-۳)$ را نسبت به نقطه $(-۲,۴)$ به‌دست آورید.



پاسخ:

راه اول: اگر مطابق شکل نقطه C قرینه نقطه $A(۱,-۳)$ نسبت به نقطه $B(-۲,۴)$ باشد.

نقطه B وسط پاره‌خط AC است و در نتیجه:

$$x_B=\frac{x_A+x_C}{۲}\ \Rightarrow\ x_C=۲x_B-x_A=-۴-۱=-۵$$

$$y_B=\frac{y_A+y_C}{۲}\ \Rightarrow\ y_C=۲y_B-y_A=۸-(-۳)=۱۱$$

راه دوم: باتوجه به آنکه نقاط A و B و C هم راستا هستند و طول AB و AC مساوی است می‌توان گفت زمانی‌که از A به B می‌رویم طول نقطه A از ۱ به ۲- می‌رسد یعنی ۳ واحد کاهش می‌یابد، پس از نقطه B به C هم باید طول نقطه ۳ واحد کاهش یابد پس طول نقطه C برابر ۵- است. همچنین زمانی‌که از A به B می‌رویم عرض نقطه از ۳- به ۴ می‌رسد و ۷ واحد افزایش می‌یابد، پس از نقطه B به C نیز عرض نقطه باید ۷ واحد افزایش یابد پس عرض نقطه C برابر ۱۱ است.

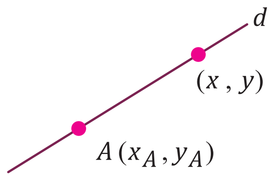
معادله خط

برای دو نقطه به مختصات $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ $(x_A \neq x_B)$ مقداری تعریف می‌کنیم به نام شیب پاره‌خط AB که از رابطه زیربه‌دست می‌آید:

$$\text{شیب پاره‌خط } AB = m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

درواقع شیب پاره‌خط AB از تفاضل عرض نقاط برروی تفاضل طول نقاط حاصل می‌شود.

در یک خط (اگر طول نقاط یکسان نباشد) شیب تمام پاره‌خط‌هایی که از انتخاب دو نقطه آن ایجاد می‌شود یکسان است. اگر یک نقطه مانند A به مختصات $A(x_A , y_A)$ روی خط مشخص d باشد شیب تمام پاره‌خط‌هایی که با نقطه A ایجاد می‌شود یکسان است. اگر فرض کنیم خطی دارای شیب a است و از نقطه $A(x_A , y_A)$ می‌گذرد، هر نقطه‌ای به مختصات $(x$ و $y)$ که واقع بر آن است با نقطه A شیب a می‌سازد پس:



$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = a \qquad (x \neq x_A)$$

در نتیجه همه نقاط دیگر خط که با نقطه A شیب a می‌سازند در معادله بالا صدق می‌کنند. درواقع نقطه A با مجموعه همه (x , y)هایی که در معادله فوق صدق کنند برروی خط d قرار دارند. اگر معادله فوق را به‌صورت زیر بنویسیم معادله شامل خود نقطه A نیز خواهد بود:

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

پس هر خط به شیب a* که از نقطه $A(x_A , y_A)$ عبور می‌کند از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

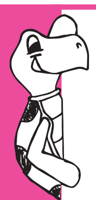
مثال ۴. معادله خطی که از دو نقطه $A(۱ , ۲)$ و $B(۳ , -۱)$ عبور می‌کند را بنویسید.

پاسخ: شیب خط گذرنده از نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم:

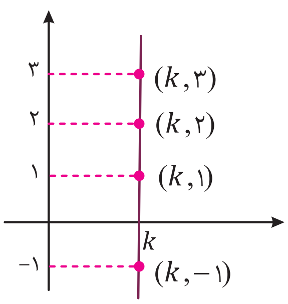
$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۲-(-۱)}{۱-۳} = \frac{۳}{-۲} = -\frac{۳}{۲}$$

پس شیب خط $-\frac{۳}{۲}$ است. با انتخاب یکی از نقاط A و B معادله خط را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} A(۱ , ۲) \\ a = \frac{-۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow y - ۲ = \frac{-۳}{۲}(x - ۱) \Rightarrow y = \frac{-۳}{۲}x + \frac{۳}{۲} + ۲ \Rightarrow y = \frac{-۳}{۲}x + \frac{۷}{۲}$$



اگر مختصات طول نقاط واقع بر یک خط یکسان باشد و همگی دارای طول یکسان k باشند برای این خطوط شیب تعریف نمی‌شود و معادله خط گذرنده از آن‌ها برابر $x = k$ است.



در حالتی که برای خط شیب تعریف شود، معادله خط یک تابع خواهد بود. در این حالت رابطه ※ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

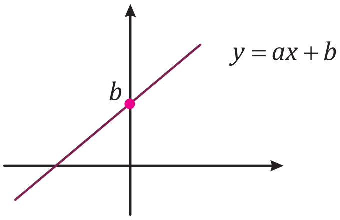
$$y - y_A = ax - ax_۰ \Rightarrow y = ax - ax_۰ + y_A$$

با فرض آن‌که $y_A - ax_۰$ را عدد b بنامیم داریم:

$$y = ax + b$$

※ منظور از شیب خط A شیب پاره‌خط گذرنده از هر دو نقطه دلخواه آن است.

پس هر تابع خطی دارای معادله $y=ax+b$ است. که در این حالت ضریب x همان شیب خط است.

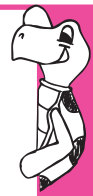


به عرض محل برخورد هر تابع خطی با محور yها عرض از مبدأ خط گوییم.

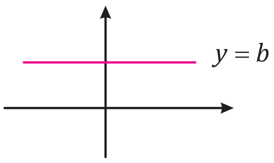
به طول محل برخورد هر تابع خطی با محور xها طول از مبدأ خط گوییم.

در هر معادله خط به‌صورت $y=ax+b$ ، b همان عرض از مبدأ خط است.

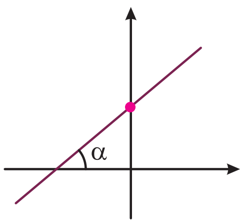
زیرا اگر ورودی تابع را صفر قرار دهیم خروجی آن برابر b است.



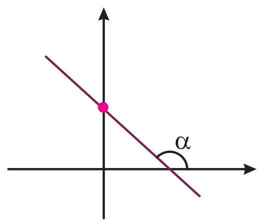
اگر در معادله خط $y=ax+b$ شیب خط برابر صفر $(a=0)$ باشد، معادله خط به‌صورت $y=b$ است در این حالت نمودار خط به‌صورت خطی موازی محور xها است.



در هر معادله خط به‌صورت $y=ax+b$ ، a همان شیب خط است که می‌توان گفت این مقدار برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط مطابق شکل‌های زیر با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

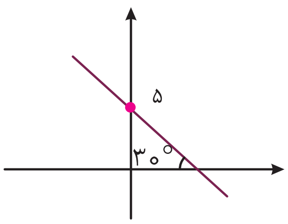


شیب $=tan\alpha > 0$



شیب $=tan\alpha < 0$

مثال ۵. معادله خط زیر را بنویسید.



پاسخ: از آنجا که شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد پس شیب خط فوق برابر $\tan 150^\circ$ است. در نتیجه:

$$\text{شیب}=\tan 150^\circ=\tan(180^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

چون عرض از مبدأ خط برابر ۵ است پس معادله خط به‌صورت $y=\frac{-\sqrt{3}}{3}x+5$ است.

معادله همه خطوط در حالت کلی

در حالت کلی می‌توان گفت معادله هر خطی به‌صورت کلی $ax+by+c=0$ است که دو حالت زیر برای آنها قابل تعریف است:

۱) اگر $b=0$ باشد برای خط شیب تعریف نمی‌شود و معادله آن به‌صورت $ax+c=0$ است.

۲) اگر $b\neq 0$ باشد برای خط شیب قابل تعریف است و باتوجه به آنکه معادله آن به‌صورت $y=-\frac{a}{b}x-c$ است، شیب خط برابر $\frac{-a}{b}$ است.

خطوط موازی و عمود

دو خط موازی دارای شیب‌های برابر و دو خط با شیب برابر موازی‌اند.

مثال ۶. معادله خطی موازی $۲x+۶y+۵=۰$ بنویسید که از نقطه $(-۱,۲)$ بگذرد.

پاسخ: ابتدا شیب خط را به‌دست می‌آوریم:
$$۶y=-۲x-۵ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x-\frac{۵}{۶} \Rightarrow \text{شیب}=-\frac{۱}{۳}$$

پس شیب این خط هم برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. پس:

$$y-۲=-\frac{۱}{۳}(x-(-۱)) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}+۲ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۵}{۳}$$

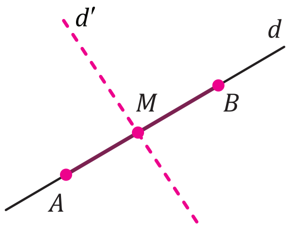
فرض کنید شیب خط L برابر $m_۱$ باشد در این صورت:

الف) اگر $m_۱\neq ۰$ آنگاه شیب خط عمود بر L برابر $-\frac{۱}{m_۱}$ است یعنی $m_۱\times m_۲=-۱$

ب) اگر $m_۱=۰$ آنگاه معادله این خط به‌صورت $y=k$ است و برای خطوط عمود بر آن شیب تعریف نمی‌شود. خطوط عمود بر این خط، عمود بر محور طول‌ها هستند و معادله آن‌ها به‌صورت $x=k'$ است که k' طول نقاط گذرنده از این خط است.

مثال ۷. معادله خط عمود منصف پاره‌خط واصل بین دو نقطه $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$ را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم عمود منصف یک پاره‌خط از وسط آن عبور می‌کند.
ابتدا مختصات نقطه M در وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{۲}=\dfrac{-۴+۲}{۲}=-۱ \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{۲}=\dfrac{۵+۱}{۲}=۳ \end{cases} \Rightarrow M(-۱,۳)$$

از طرفی شیب خط عمودمنصف، قرینه و معکوس شیب AB است. پس:
$$\text{شیب } AB=\frac{۵-۱}{۲-(-۴)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{شیب } d'=-\frac{۳}{۲}$$

پس خط d' از نقطه $M(-۱,۳)$ می‌گذرد و دارای شیب $-\frac{۳}{۲}$ است پس:

$$d': y-۳=-\frac{۳}{۲}(x-(-۱)) \Rightarrow y-۳=-\frac{۳}{۲}(x+۱) \Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲}$$

حالات دو خط نسبت به یکدیگر

دو خط به معادلات $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ و $(b\,,b'\neq ۰)$

الف) با یکدیگر متقاطع‌اند، هرگاه دارای شیب‌های یکسان نباشند. یعنی: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

در این حالت دستگاه معادلات فوق ۱ جواب دارد و با حل دستگاه فوق جواب معادله به‌دست می‌آید. جواب معادله نقطه محل تلاقی دو خط است.

ب) با یکدیگر موازی غیرمنطبق‌اند هرگاه شیب یکسان داشته باشند و عرض از مبدأ آن‌ها یکسان نباشد یعنی:
در این حالت دستگاه معادلات فوق جواب ندارد $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

ج) با یکدیگر منطبق‌اند هرگاه یکی ضریب دیگری باشد (ضریب غیر صفر) یعنی:
در این حالت دستگاه معادلات فوق، بی‌شمار جواب دارد $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

تست ۲. **به‌ازای کدام m دستگاه معادلات** $\begin{cases} mx+y=m-۱ \\ ۳x+(m-۲)y=۴-۲m \end{cases}$ **دارای بی‌شمار جواب است؟**

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار m

پاسخ **گزینه ۲**

باید داشته باشیم: $\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲}=\frac{m-۱}{۴-۲m}$ *

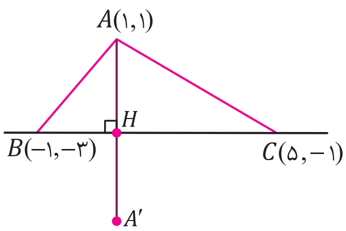
پس باید اولاً داشته باشیم:

$$\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲} \Rightarrow m^۲-۲m=۳ \Rightarrow m^۲-۲m-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ m=+۳ \end{cases}$$

اگر $m=-۱$ باشد تساوی * برقرار است. اما اگر $m=+۳$ باشد تساوی $\frac{۱}{m-۲}=\frac{m-۱}{۴-۲m}$ برقرار نخواهد بود.

مثال ۸. مختصات سه رأس یک مثلثی به ترتیب $A(۱,۱)$ و $B(-۱,-۳)$ و $C(۵,-۱)$ است.

مختصات قرینه نقطه A را نسبت به ضلع BC به‌دست آورید.



پاسخ: مطابق شکل نقطه H پای عمود وارد بر ضلع BC و وسط پاره‌خط AA' است که در آن A' قرینه A نسبت به ضلع BC می‌باشد. پس لازم است ابتدا مختصات نقطه H را به‌دست آورید. نقطه H از محل برخورد خط گذرنده از BC و خط عمود بر آن و گذرنده از A به‌دست می‌آید:

$$BC \text{ شیب } =\frac{-۳-(-۱)}{-۱-۵}=\frac{-۲}{-۶}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow AH \text{ شیب } =-۳$$

H و A معادله خط گذرنده از : $y-۱=-۳(x-۱) \Rightarrow y=-۳x+۴ \Rightarrow y+۳x=۴$

BC خط گذرنده از : $y+۳=\frac{۱}{۳}(x+۱) \Rightarrow ۳y+۹=x+۱ \Rightarrow ۳y-x=-۸$

از حل دستگاه زیر مختصات H حاصل می‌شود:

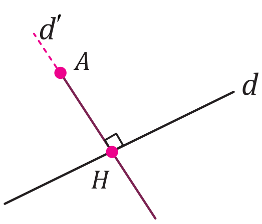
$$\begin{cases} y+۳x=۴ \\ ۳y-x=-۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+۳x=۴ \\ ۹y-۳x=-۲۴ \end{cases} \Rightarrow ۱۰y=-۲۰ \Rightarrow y=-۲ \Rightarrow x=۲$$

پس مختصات H به‌صورت $H(۲,-۲)$ است. از آن‌جا که H وسط AA' است داریم:

$$\begin{cases} x_{A'}=۲x_H-x_A=۴-۱=۳ \\ y_{B'}=۲y_H-y_A=-۴-۱=-۵ \end{cases} \Rightarrow A'(۳,-۵)$$

فاصله نقطه از خط

اگر بخواهیم فاصله نقطه‌ای به مختصات $A(x_۰\,,\,y_۰)$ را از خط d به معادله $ax+by+c=۰$ به‌دست آوریم. باید مراحل زیر را طی کنیم:



۱) ابتدا باید باتوجه به شیب خط d شیب خط عمود بر آن را به‌دست آوریم.

۲) معادله خط عمود بر خط d که از نقطه $A(x_۰\,,\,y_۰)$ می‌گذرد می‌نویسیم. (خط d')

۳) محل تلاقی خط d و d' را که نقطه H است به‌دست می‌آوریم.

۴) به کمک رابطه فاصله دو نقطه فاصله دو نقطه A و H را حساب می‌کنیم.

اگر مراحل بالا را با دقت انجام دهید به رابطه زیر می‌رسید:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad \text{فاصله نقطه } A \text{ از خط } ax+by+c=۰$$

چون در ریاضیات درمواقع زیادی احتیاج به پیدا کردن فاصله یک نقطه از خطی مشخص داریم حفظ رابطه بالا ضروری است.

مثال ۹. فاصله نقطه $(۱,-۲)$ را از خط به معادله $y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}$ به‌دست آورید.

ابتدا معادله را به‌صورت $ax+by+c=۰$ می‌نویسیم. برای راحتی محاسبات دو طرف تساوی را در ۳ ضرب می‌کنیم تا ضرایب x و y اعداد صحیحی باشند:

$$y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\times ۳}۳y=۲x+۱\Rightarrow ۳y-۲x-۱=۰$$

قدرمطلق مقدار عبارت $۳y-۲x-۱$ را به‌ازای $x=۱$ و $y=-۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left|۳(-۲)-۲(۱)-۱\right|=\left|-۶-۲-۱\right|=۹$$

عدد به‌دست آمده را بر جذر مجموع مربعات دو عدد ضریب x و y تقسیم می‌کنیم:

$$d=\frac{۹}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۱۳}}$$

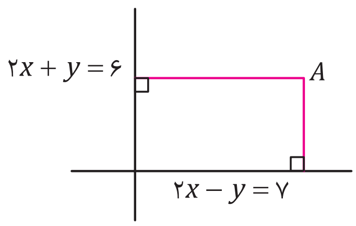
در صورت خلاصه داریم:

$$d=\frac{\left|۳(-۲)-۲(۱)-۱\right|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}}=\frac{\left|-۶-۲-۱\right|}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۹}{\sqrt{۱۳}}$$

تست ۳. **دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ و یک رأس آن نقطه $A(۸,۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟**

۱) ۱۲   ۲) ۹/۶   ۳) ۱۰/۲   ۴) ۲۰

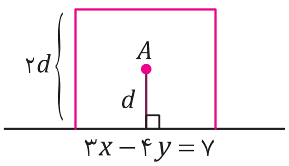
پاسخ **گزینه «۲»**



نقطه A برروی هیچ کدام از خطوط $۲x+y=۶$ و $۲x-y=۷$ قرار ندارد. در نتیجه مطابق شکل فاصله آن از این دو خط همان طول و عرض مستطیل است. پس فاصله این نقطه را از دو خط داده شده به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}۲x-y=۷\Rightarrow \text{فاصله } A \text{ از خط}=\frac{\left|۲(۸)-(۵)-۷\right|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{\left|۱۶-۵-۷\right|}{\sqrt{۵}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\\ ۲y+x=۶\Rightarrow \text{فاصله } A \text{ از خط}=\frac{\left|۲(۵)+(۸)-۶\right|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{\left|۱۰+۸-۶\right|}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}\end{array}\right\}\Rightarrow S=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\times ۱۲}{۵}=۹/۶$$

مثال ۱۰. نقطه $A(۳,۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $۳y-۴x=۷$ است. مساحت این مربع چقدر است؟

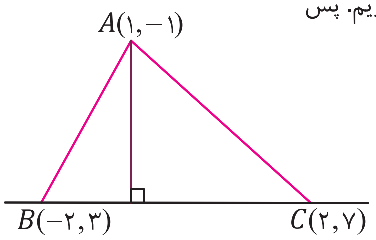


پاسخ: فاصله مرکز مربع از ضلع‌های مربع برابر نصف طول ضلع مربع است. پس اگر فاصله نقطه A را از معادله خط گذرنده از یکی از اضلاع به‌دست آوریم طول نصف ضلع مربع را به‌دست آورده‌ایم:

$$۳x-۴y=۷ \text{ فاصله نقطه } A \text{ از خط}=\frac{\left|۳(۳)-۴(۱)-۷\right|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{\left|۹-۴-۷\right|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲}{۵}$$

$$\text{طول ضلع مربع}=۲\times\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow S=\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲=\frac{۱۶}{۲۵}$$

مثال ۱۱. مختصات سه رأس یک مثلث $A(۱,-۱)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(۲,۷)$ است. طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.



پاسخ: مطابق شکل باید فاصله رأس A را از خط گذرنده از ضلع BC به‌دست آوریم. پس ابتدا لازم است معادله خط گذرنده از BC را به‌دست آوریم:

$$\text{شیب } BC = \frac{۷-۳}{۲-(-۲)} = \frac{۴}{۴} = ۱$$

$$\text{معادله خط گذرنده از } BC : y-۷ = ۱\times(x-۲) \Rightarrow y = x+۵$$

پس باید فاصله نقطه $A(۱,-۱)$ را از $y = x+۵$ به‌دست آورید:

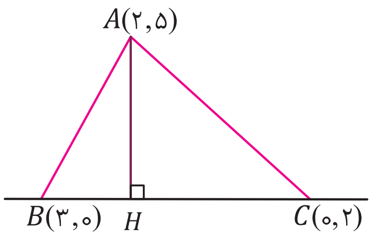
$$d = \frac{|(-۱)-(۱)-۵|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{|-۱-۱-۵|}{\sqrt{۲}} = \frac{۷}{\sqrt{۲}} = \frac{۷\sqrt{۲}}{۲}$$

پس طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر $\frac{۷\sqrt{۲}}{۲}$ است.

تست ۴. **مساحت مثلثی به سه رأس $A(۲,۵)$, $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

پاسخ **گزینه ۲**



راه ۱: می‌توانیم ابتدا طول ضلع BC را حساب کنیم و سپس با نوشتن معادله خط گذرنده از BC، فاصله نقطه A را از آن حساب کنیم. با این کار طول ارتفاع وارد بر BC را به‌دست آورده‌ایم. سپس با داشتن طول ضلع BC و ارتفاع وارد بر آن مساحت مثلث را به‌دست آوریم:

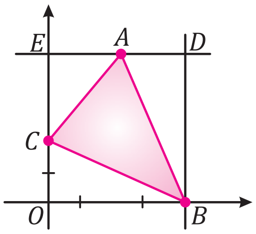
$$\begin{matrix} B(۳,۰) \\ C(۰,۲) \end{matrix} \Rightarrow BC = \sqrt{(۳-۰)^۲+(۰-۲)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

$$\text{شیب } BC = \frac{۲-۰}{۰-۳} = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \text{معادله خط گذرنده از } BC : y = -\frac{۲}{۳}x+۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳y+۲x-۶ = ۰$$

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ تا } BC = AH = \frac{|۳(۵)+۲(۲)-۶|}{\sqrt{۳^۲+۲^۲}} = \frac{|۱۵+۴-۶|}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

در نتیجه:

$$S = \frac{BC\times AH}{۲} = \frac{\sqrt{۱۳}\times\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}}{۲} = \frac{۱۳}{۲} = ۶/۵$$

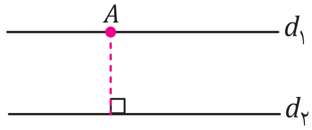


راه ۲: راه دوم بسیار راه کوتاه‌تر و در عین حال جالب‌تری است.
می‌توانیم مختصات سه رأس مثلث را در صفحه مختصات مشخص کنیم و مطابق شکل مستطیل $OBDE$ را دور آن طوری رسم کنیم که اضلاع آن موازی محورهای مختصات باشد:

مطابق شکل مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\underset{ABC}{\triangle}} = S_{\underset{OBDE}{\square}} - (S_{\underset{OAB}{\triangle}} + S_{\underset{BDC}{\triangle}} + S_{\underset{AEC}{\triangle}}) = (۳\times۵) - (\frac{۲\times۳}{۲}+\frac{۱\times۵}{۲}+\frac{۲\times۳}{۲}) = ۱۵-۸/۵ = ۶/۵$$

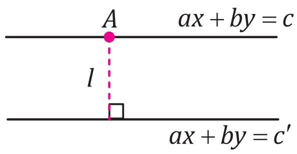
فاصله دو خط موازی



اگر دو خط d_1 و d_2 با یکدیگر موازی باشند فاصله هر نقطه‌ای که بر روی یکی انتخاب کنیم از خط دیگر یکسان است. پس فاصله دو خط موازی فاصله هر نقطه دلخواه واقع بر یکی از خطوط از دیگری است.

فاصله دو خط موازی با معادلات به‌صورت $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ برابر است با:

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



اثبات: فرض کنید نقطه $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای است واقع بر خط $ax+by=c$

حال فاصله نقطه A را از خط $ax+by=c'$ به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

از طرفی می‌دانیم $ax_0+by_0=c$ است (چون (x_0, y_0) بر روی خط $ax+by=c$ است). پس:

$$d=\frac{|ax_0+by_0-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال ۱۲. فاصله دو خط به معادلات $3x+4y=5$ و $6x+8y-1=0$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا ضرایب x و y دو معادله را یکسان می‌کنیم و فرم هر دو معادله را به‌صورت $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ می‌نویسیم:

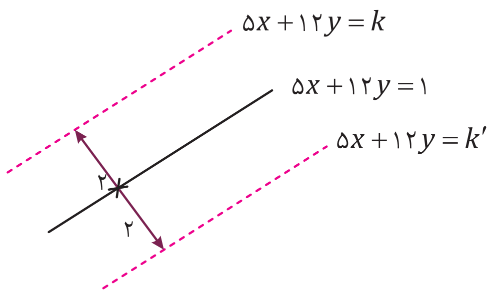
$$\begin{cases}6x+8y=1\\3x+4y=5\end{cases}\xrightarrow{\times 2}\begin{cases}6x+8y=1\\6x+8y=10\end{cases}$$

در نتیجه c و c' برابر ۱۰ و ۱ است در نتیجه:

$$d=\frac{|10-1|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{9}{10}=0/9$$

مثال ۱۳. معادله خطوطی را بنویسید که فاصله آن‌ها از خط به معادله $5x+12y=1$ برابر ۲ باشد.

پاسخ: برای هر خط در صفحه ۲ خط مانند شکل زیر وجود دارد که فاصله آن‌ها از خط مفروض برابر ۲ است. چون این دو خط موازی خط مفروض‌اند پس اگر معادله خط اصلی به‌صورت $ax+by=c$ باشد معادله آن‌ها به‌صورت $ax+by=c'$ است (که برای c' ، ۲ مقدار k و k' قابل محاسبه است)



چون معادله خط ما به‌صورت $5x+12y=1$ است. پس معادله دو خط موازی آن به‌صورت کلی $5x+12y=c'$ است.

پس باید فاصله دو خط $5x+12y=1$ و $5x+12y=c'$ برابر ۲ باشد:

$$\frac{|c'-1|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|c'-1|}{\sqrt{169}}=\frac{|c'-1|}{13}=2\Rightarrow |c'-1|=26\begin{cases}c'-1=26\Rightarrow c'=27\\c'-1=-26\Rightarrow c'=-25\end{cases}$$

پس معادله دو خط موازی $5x+12y=1$ به‌صورت $5x+12y=27$ و $5x+12y=-25$ است.

تست ۵. **نقاطی روی خط $y=x+1$ وجود دارند که فاصله آن‌ها از خط $2x+y=4$ برابر $\sqrt{5}$ است. جمع طول این نقاط کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینه «۲»**

فرض می‌کنیم نقطه‌ای به طول α روی خط $y=x+1$ است. پس عرض این نقطه $\alpha+1$ است و مختصات آن $(\alpha,\alpha+1)$ است. اگر فاصله این نقطه از خط $2x+y=4$ را به‌دست آوریم باید برابر $\sqrt{5}$ باشد:

$$A(\alpha,\alpha+1)\ \ 2x+y=4 \text{ فاصله } A \text{ تا خط } =\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Rightarrow\frac{|2\alpha+\alpha+1-4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$|3\alpha-3|=5\Rightarrow\begin{cases}3\alpha-3=5\Rightarrow\alpha=\frac{8}{3}\\3\alpha-3=-5\Rightarrow\alpha=-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{8}{3}+(-\frac{2}{3})=2$$

◄ معادله درجه دوم

در سال گذشته با حل معادله درجه دوم آشنا شدیم. دیدیم هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با توجه به علامت $\Delta=b^2-4ac$ دارای حداکثر ۲ ریشه است. اگر

۱) $\Delta<0$ باشد معادله جواب حقیقی ندارد.

۲) $\Delta=0$ باشد معادله دارای ۱ ریشه حقیقی است. در این حالت گوییم معادله دارای ریشه مضاعف است. این ریشه برابر $x=\frac{-b}{2a}$ است. در این حالت صورت کلی معادله به‌صورت زیر است:

اگر $\Delta=0$ باشد چند جمله‌ای ضریبی از یک مربع کامل است.

$$ax^2+bx+c=(x+\frac{b}{2a})^2=0$$

۳) $\Delta>0$ باشد معادله دارای ۲ ریشه حقیقی زیر است:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

امسال در مورد علامت ریشه‌های یک عبارت درجه دوم بحث می‌کنیم. اگر α و β دو ریشه یک معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند حاصل جمع و ضرب ریشه‌های معادله را می‌توان بر حسب a و b و c به‌دست آورد. اگر حاصل جمع ریشه‌ها را S و حاصل ضرب آن‌ها را P بنامیم داریم:

$$\begin{matrix}\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{matrix}\rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}\\P=\alpha.\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}S=\frac{-b}{a}\\P=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}S=-\frac{b}{a}\\P=\frac{c}{a}\end{cases}$$

پس حاصل جمع ریشه‌های هر معادله دوم برابر قرینه ضریب x تقسیم بر ضریب x^2 و حاصل ضرب آن‌ها برابر جمله درجه صفر تقسیم بر ضریب x^2 است.

مثال ۱۴. بدون حل معادله $۲x^۲-۳x-۱۳=۰$ در مورد علامت ریشه‌های معادله چه می‌توان گفت؟

پاسخ: می‌دانیم حاصل جمع ریشه های معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برابر $\frac{-b}{a}$ و حاصل ضرب آن‌ها $\frac{c}{a}$ است

پس:

$$\begin{cases} S=\frac{-b}{a}=\frac{۳}{۲}>۰ \\ P=\frac{c}{a}=-\frac{۱۳}{۲}<۰ \end{cases}$$

پس $S>۰$ و $P<۰$ است. در نتیجه قطعاً این معادله دارای ۲ ریشه با علامت‌های مختلف است زیرا ضرب دو ریشه آن منفی است. از طرفی می‌توان گفت ریشه مثبت معادله از قدرمطلق ریشه منفی بزرگ‌تر است زیرا حاصل جمع آن‌ها مثبت شده است.

مثال ۱۵. اگر معادله $۲x^۲-۳x-۱=۰$ دارای دو ریشه α و β باشد، حاصل هر یک از موارد زیر را به‌دست آورید.

الف) $\alpha^۲+\beta^۲$ ب) $\alpha^۳+\beta^۳$ ج) $(\alpha<\beta)\alpha-\beta$

پاسخ: می‌دانیم $S=\frac{۳}{۲}$ و $P=-\frac{۱}{۲}$ در نتیجه:

الف) $$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=S^۲-۲p=(\frac{۳}{۲})^۲-۲(-\frac{۱}{۲})=\frac{۹}{۴}+۱=\frac{۱۳}{۴}$$

ب) به کمک اتحاد $(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳ab(a+b)$ داریم:

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^۳-۳SP=(\frac{۳}{۲})^۳-۳(-\frac{۱}{۲})(\frac{۳}{۲})=\frac{۲۷}{۸}+\frac{۹}{۴}=\frac{۴۵}{۸}$$

البته می‌توانستیم به کمک اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$ و به کمک قسمت الف حاصل $\alpha^۳+\beta^۳$ را حساب کنیم:

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)(\alpha^۲-\alpha\beta+\beta^۲)=\frac{۳}{۲}(\frac{۱۳}{۴}+\frac{۱}{۲})=\frac{۴۵}{۸}$$

ج) اگر فرض کنیم $A=\alpha-\beta$ با توجه به آن‌که $\alpha<\beta$ است پس اختلاف ریشه کوچک‌تر از ریشه بزرگ‌تر را می‌خواهیم. به ۲ روش زیر می‌توانیم عمل کنیم.

راه ۱) با فرض منفی بودن A، آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^۲=(\alpha-\beta)^۲=\alpha^۲+\beta^۲-۲\alpha\beta=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta$$

با توجه به آن‌که $\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-\frac{۱}{۲}$ است داریم:

$$A^۲=\frac{۹}{۴}+۲=\frac{۱۷}{۴}$$

پس $A^۲=\frac{۱۷}{۴}$ است چون $A<۰$ است پس $A=\frac{-\sqrt{۱۷}}{۲}$.

راه ۲) اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ باشند داریم:

$$|\alpha-\beta|=|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}|=|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}|$$

چون $\sqrt{\Delta}\geq ۰$ است پس:

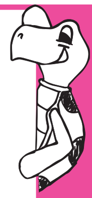
$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

علت این‌که قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها را حساب کردیم این است که نمی‌دانیم ریشه $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ بزرگ‌تر است یا $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$

و این بستگی به علامت a دارد. (چرا؟)

پس در این سوال

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = ۹ + ۸ = ۱۷ \rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{۱۷}}{۲} \xrightarrow{\alpha<\beta} \alpha - \beta = -\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$



در هر معادله درجه دوم، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$\begin{cases} \alpha^{۲} + \beta^{۲} = S^{۲} - ۲P \\ \alpha^{۳} + \beta^{۳} = S^{۳} - ۳SP \\ |\alpha - \beta| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \end{cases}$$

مثال ۱۶. اگر معادله $۲x^{۲} - ۳x - ۱ = ۰$ دارای دو ریشه α و β باشد. حاصل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

الف) $۲\alpha^{۲} - ۳\alpha$ ب) $۲\alpha^{۲} + ۳\beta$

پاسخ: الف) می‌دانیم هر ریشه معادله $۲x^{۲} - ۳x - ۱ = ۰$ عددی است که در معادله صدق می‌کند یعنی اگر α ریشه معادله باشد داریم $۲\alpha^{۲} - ۳\alpha - ۱ = ۰$ پس $۲\alpha^{۲} - ۳\alpha = ۱$ است.

در مورد ریشه دیگر نیز طبیعتاً رابطه بالا برقرار است یعنی $۲\beta^{۲} - ۳\beta = ۱$ است.

ب) اگر α ریشه معادله است داریم $۲\alpha^{۲} - ۳\alpha - ۱ = ۰$ پس $۲\alpha^{۲} = ۳\alpha + ۱$ است در نتیجه:

$$۲\alpha^{۲} + ۳\beta = ۳\alpha + ۱ + ۳\beta = ۳(\alpha + \beta) + ۱ = ۳(\frac{۳}{۲}) + ۱ = \frac{۱۱}{۲}$$

تست ۶. **اگر α و β ریشه‌های معادله $۲x^{۲} - ۴x - ۳ = ۰$ باشند حاصل $\alpha^{۳} + \frac{۱۱}{۲}\beta$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱۱}{۲}$ ۲) ۱۱ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) ۱۴

پاسخ **گزینه «۴»**

اگر α ریشه معادله باشد در معادله صدق می‌کند یعنی $۲\alpha^{۲} - ۴\alpha - ۳ = ۰$ در نتیجه:

$$۲\alpha^{۲} = ۴\alpha + ۳ \Rightarrow \alpha^{۲} = \frac{۴\alpha + ۳}{۲}$$

پس $\alpha^{۳}$ را برحسب α می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$\alpha^{۳} = \alpha^{۲} \times \alpha = \frac{۴\alpha + ۳}{۲} \times \alpha = \frac{۴\alpha^{۲} + ۳\alpha}{۲}$$

در عبارت بالا باز می‌توانیم به جای $\alpha^{۲}$ قرار دهیم $\frac{۴\alpha + ۳}{۲}$:

$$\alpha^{۳} = \frac{۴\alpha^{۲} + ۳\alpha}{۲} = \frac{۴(\frac{۴\alpha + ۳}{۲}) + ۳\alpha}{۲} = \frac{۸\alpha + ۶ + ۳\alpha}{۲} = \frac{۱۱\alpha + ۶}{۲} = \frac{۱۱}{۳}\alpha + ۳$$

پس:

$$\alpha^{۳} + \frac{۱۱}{۲}\beta = \frac{۱۱}{۲}\alpha + ۳ + \frac{۱۱}{۲}\beta = \frac{۱۱}{۲}(\alpha + \beta) + ۳$$

چون $S = -\frac{b}{a} = ۲$ پس:

$$\alpha^{۳} + \frac{۱۱}{۲}\beta = \frac{۱۱}{۲}S + ۳ = \frac{۱۱}{۲} \times ۲ + ۳ = ۱۴$$

تست ۷. **در معادله $۳x^۲-۱۷x+m=۰$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیش‌تر است. m کدام است؟**

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ **گزینه «۲»**

اگر α یک ریشه باشد ریشه دیگر $۳\alpha+۳$ است. پس:

$$S=\alpha+\underbrace{۳\alpha+۳}_{\beta}=۴\alpha+۳=\frac{۱۷}{۳}\Rightarrow ۴\alpha=\frac{۸}{۳}\Rightarrow \alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\beta=۳\alpha+۳=۳(\frac{۲}{۳})+۳=۵$$

پس یک ریشه $\frac{۲}{۳}$ و دیگر ۵ است در نتیجه:

$$P=\alpha\beta=\frac{۲}{۳}\times ۵=\frac{۱۰}{۳}\ \Rightarrow\ P=\frac{c}{a}=\frac{m}{۳}=\frac{۱۰}{۳}\ \Rightarrow\ m=۱۰$$

تست ۸. **به‌ازای کدام مقدار m معادله $(m+۱)x^۲+m(m^۲-۹)x-۲=۰$ دارای دو ریشه حقیقی قرینه است؟**

۱) -۱ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) ۹

پاسخ **گزینه ۳**

اگر دو ریشه معادله قرینه هم باشند، حاصل جمع ریشه‌ها برابر صفر است پس باید $S=\frac{-b}{a}=۰$ باشد:

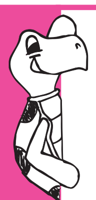
$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-m(m^۲-۹)}{m+۱}=۰\ \Rightarrow\ m(m^۲-۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\ m=۳\\ m=-۳\to \text{غ ق ق}\end{cases}$$

اما اگر $m=-۳$ باشد معادله جواب حقیقی ندارد زیرا:

$$m=-۳:-۲x^۲-۲=۰\ \Rightarrow\ x^۲=-۱\ \Rightarrow\ \text{جواب ندارد}$$

پس $m=۰$ یا $m=۳$ است که در بین گزینه‌ها $m=۳$ وجود دارد. اگر $m=۳$ باشد معادله دارای ۲ ریشه حقیقی زیر است:

$$m=۳\ \Rightarrow\ ۴x^۲-۲=۰\ \Rightarrow\ x^۲=\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{\frac{۱}{۲}}\ ,\ -\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$



اگر در یک معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، α یکی از ریشه‌ها باشد ریشه دیگر $\frac{c}{\alpha a}$ است. مثلاً اگر در یک معادله درجه دوم، یک ریشه ۲ باشد ریشه دیگر $\frac{c}{۲a}$ است. در حالت خاص اگر یک ریشه معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، برابر ۱ باشد (یعنی $a+b+c=۰$) ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ و اگر یک ریشه آن ۱- باشد ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

به عبارت دیگر:

$$a+b+c=۰\ \Rightarrow\ \text{ریشه‌ها}\ ۱,\frac{c}{a}$$

$$a+c=b\ \Rightarrow\ \text{ریشه‌ها}\ -۱,\frac{-c}{a}$$

مثال ۱۷. ریشه‌های معادله $۱۳۹۷x^۲-۱۲۸۵x-۱۱۲=۰$ را به‌دست آورید.

عدد ۱ در این معادله صدق می‌کند زیرا مجموع ضرایب صفر است یعنی: $۱۳۹۷-۱۲۸۵-۱۱۲=۰$

پس ریشه دیگر معادله $\frac{c}{a}=\frac{-۱۱۲}{۱۳۹۷}$ است.

تست ۹. **اگر در معادله $ax^{۲}+bx-c=۰$ رابطه $c=۴a-۲b$ برقرار باشد. ریشه دیگر معادله کدام است؟**

۱) $\frac{۲c}{a}$ ۲) $\frac{c}{۲a}$ ۳) $\frac{-۲c}{a}$ ۴) $-\frac{c}{۲a}$

پاسخ **گزینه ۲**

با کمی دقت متوجه می‌شویم اگر رابطه $c=۴a-۲b$ برقرار باشد یکی از ریشه‌های معادله برابر ۲- است زیرا:

$$a(-۲)^{۲}+b(-۲)-c=۰ \Rightarrow ۴a-۲b-c=۰ \Rightarrow ۴a-۲b=c$$

می‌دانیم در معادله درجه دوم $Ax^{۲}+Bx+C=۰$ ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{C}{A}$ است پس:

$$\alpha\beta=\frac{C}{A}=\frac{-c}{a} \xrightarrow{\alpha=-۲} -۲\beta=-\frac{c}{a} \Rightarrow \beta=\frac{c}{۲a}$$

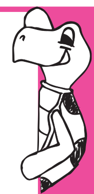
سهمی

سال گذشته با نمودار تابع درجه دوم آشنا شدیم. اگر $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ، تابع f را یک سهمی گوییم که به کمک مربع‌سازی معادله سهمی را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم.

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+\frac{b}{a}x)+c=a((x+\frac{b}{۲a})^{۲})-\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}+c$$

$$a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴a}+c=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+\frac{-(b^{۲}-۴ac)}{۴a}$$

$$\Rightarrow f(x)=a(x+\frac{b}{۲a})^{۲}+\frac{-\Delta}{۴a}$$



۱ مختصات طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

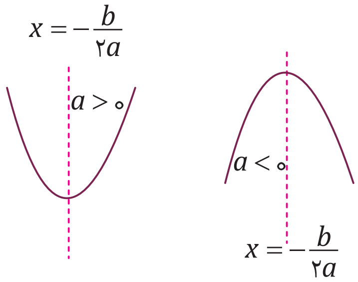
۲ مختصات عرض رأس سهمی برابر $f(-\frac{b}{۲a})$ یعنی $\frac{-\Delta}{۴a}$ است.

۳ مختصات رأس سهمی در حالت کلی به‌صورت زیر است.

$$(x_S,y_S)=(-\frac{b}{۲a},f(-\frac{b}{۲a}))=(-\frac{b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$$

۴ هر سهمی یک محور تقارن دارد که معادله آن به‌صورت $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

۵ می‌توان معادله هر سهمی را براساس ضریب $x^{۲}$ و مختصات رأس آن به‌صورت زیر نوشت:



$$f(x)=ax^{۲}+bx+c=a(x-x_{\text{رأس}})^{۲}+y_{\text{رأس}}$$

مثال ۱۸. سهمی $f(x)=۲x^{۲}-۴x-۳$ را رسم کرده و محل‌های برخورد آن را محورهای مختصات مشخص کنید.

ابتدا مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=\frac{۴}{۴}=۱ \Rightarrow y_{\text{رأس}}=f(۱)=۲-۴-۳=-۵$$

پس مختصات رأس سهمی $(۱,-۵)$ است.

طول نقطه برخورد هر تابع با محور yها برابر صفر است پس $f(۰)$ برابر محل برخورد تابع f با محور yهاست:

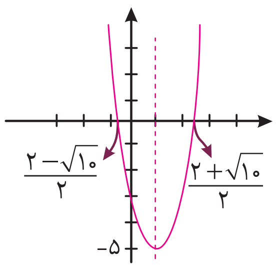
$$f(۰)=-۳$$

از طرفی ریشه‌های معادله $۲x^۲-۴x-۳=۰$، طول نقاط برخورد تابع f با محور xهاست:

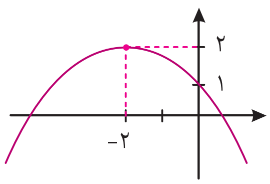
$$f(x)=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۴x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۱۰}}{۲}$$

پس تابع در دو نقطه با طول‌ها $\frac{۲+\sqrt{۱۰}}{۲}$ و $\frac{۲-\sqrt{۱۰}}{۲}$ با محور xها برخورد می‌کند.

در نتیجه شکل کلی سهمی به صورت زیر است:



تست ۱۰. نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) -۵ ۲) $-\frac{۵}{۴}$

۳) -۳ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

پاسخ **گزینه «۲»**

راه ۱) می‌دانیم مختصات طول رأس برابر $-\frac{b}{۲a}$ است. پس:

$$x_{\text{راس}}=-\frac{b}{۲a}=-۲$$

از طرفی چون $(-۲,۲)\in f$ است پس $f(-۲)=۲$ است و در نتیجه:

$$f(-۲)=۴a-۲b+c=۲$$

و چون ۱ محل برخورد تابع f با محور yهاست پس $f(۰)=۱$ است و در نتیجه $f(۰)=c=۱$. پس:

$$\begin{cases}-\frac{b}{۲a}=-۲\rightarrow b=۴a\\ ۴a-۲b+c=۲\xrightarrow{c=۱}۴a-۲b=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-۲b=۱\rightarrow b=-۱\\ a=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

پس $a+b=-\frac{۵}{۴}$ است.

راه ۲) می‌دانیم معادله هر سهمی به صورت $y=a(x-x_{\text{رأس}})^۲+y_{\text{رأس}}$ است. با توجه به شکل $x_{\text{رأس}}=-۲$ و $y_{\text{رأس}}=۲$ است پس:

$$f(x)=a(x+۲)^۲+۲$$

از طرفی $f(۰)=۱$ است پس:

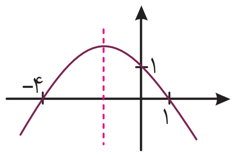
$$f(۰)=a(۰+۲)^۲+۲=۱\Rightarrow ۴a+۲=۱\Rightarrow ۴a=-۱\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

پس معادله سهمی به صورت $f(x)=\frac{-۱}{۴}(x+۲)^۲+۲$ است که به صورت زیر قابل ساده کردن است:

$$f(x)=\frac{-۱}{۴}(x^۲+۴x+۴)+۲=-\frac{۱}{۴}x^۲-x+۱$$

پس $a=-\frac{۱}{۴}$ و $b=-۱$ است و $a+b=\frac{-۵}{۴}$ است.

تست ۱۱. **اگر نمودار تابع f یک سهمی و به صورت زیر باشد. $f(۲)$ کدام است؟**



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۳

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

راه ۱) با توجه به شکل ۱ و ۴- ریشه‌های سهمی هستند، پس $f(x)$ بر $x-۱$ و $x+۴$ بخش‌پذیر است و معادله آن به‌صورت $f(x)=a(x-۱)(x+۴)$ است. از طرفی مطابق شکل $f(۰)=۱$ است پس:

$$f(۰)=a(۰-۱)(۰+۴)=۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

پس:

$$f(x)=-\frac{۱}{۴}(x-۱)(x+۴)$$

در نتیجه:

$$f(۲)=-\frac{۱}{۴}(۲-۱)(۲+۴)=-\frac{۳}{۲}$$

راه ۲) اگر معادله سهمی به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد داریم:

$$f(۰)=۱ \Rightarrow c=۱$$

$$\begin{array}{l} f(۱)=۰ \Rightarrow a+b+۱=۰ \\ f(-۴)=۰ \Rightarrow ۱۶a-۴b+۱=۰ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۱ \\ ۱۶a-۴b=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۴b=-۴ \\ ۱۶a-۴b=-۱ \end{cases} \quad \overline{۲۰a=-۵}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴} \Rightarrow b=\frac{-۳}{۴}$$

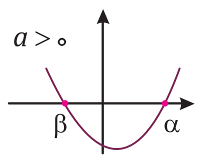
پس $f(x)=\frac{-۱}{۴}x^۲-\frac{۳}{۴}x+۱$ است در نتیجه:

$$f(۲)=-۱-\frac{۳}{۲}+۱=-\frac{۳}{۲}$$

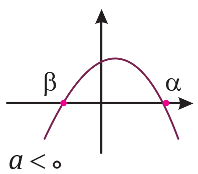
می‌دانیم در هر معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، $S=-\frac{b}{a}$ و $P=\frac{c}{a}$ است پس به کمک ریشه‌های یک سهمی می‌توان در مورد قرارگیری هر سهمی در صفحه مختصات صحبت کرد.

مثال ۱۹. حدود m را طوری بیابید که سهمی $f(x)=(m-۱)x^۲+(m+۲)x+m-۵$ از هر ۴ ناحیه محورهای مختصات عبور کند.

پاسخ: اگر سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند پس مطابق شکل‌های زیر حتماً ۱ ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارند:



$\beta<۰<\alpha$



$\beta<۰<\alpha$

پس کافی است ضرب ریشه‌های سهمی منفی باشد:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m-۵}{m-۱}<۰ \Rightarrow ۱<m<۵$$

در این مسأله لازم نیست مثبت بودن Δ چک شود زیرا اگر $p<۰$ باشد $\frac{c}{a}<۰$ است، از آن‌جا که ac و $\frac{c}{a}$ هم علامت‌اند $(a\neq ۰)$ پس اگر $\frac{c}{a}<۰$ باشد قطعاً $ac<۰$ است. در نتیجه $\Delta>۰$ خواهد بود.

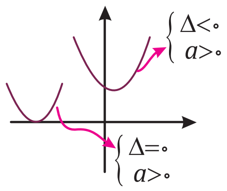
$$\begin{cases} ac<۰ \Rightarrow -۴ac>۰ \\ b^۲>۰ \end{cases} \Rightarrow b^۲-۴ac>۰$$

در واقع اگر معادله $\Delta>۰$ را نیز حل کنیم، جواب‌های معادله $p<۰$، زیرمجموعه جواب‌های معادله $\Delta>۰$ است و اشتراک آن‌ها برابر جواب‌های معادله $p<۰$ خواهد بود.

مثال ۲۰. به‌ازای چه مقادیری از m سهمی $f(x)=(m-1)x^2+2\sqrt{2}x+m$ از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند؟

اگر تابع f از ناحیه چهارم عبور نکند اولاً لازم است ضریب x^2 مثبت باشد و به یکی از دو صورت زیر باشد:

الف) تابع f بالای محور xها باشد یعنی ریشه نداشته باشد و در آن ضریب x^2 مثبت باشد:

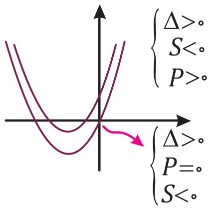


$$\begin{cases}(1)\ \Delta\le 0\to\Delta=8-4m(m-1)\le 0\xrightarrow{\div 4}-m^2+m+2\le 0\\(2)\ a>0\to m-1>0\to m>1\end{cases}$$

$$\begin{cases}-(m^2-m-2)\le 0\\m>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-(m-2)(m+1)\le 0\Rightarrow m\ge 2\ \text{یا}\ m\le -1\\m>1\end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $m\ge 2$

ب) تابع f دو ریشه منفی داشته باشد؛ و یا یک ریشه منفی و یک ریشه صفر داشته باشد، یعنی $\Delta>0$ و $S<0$ و $P\ge 0$ باشد:



$$\begin{cases}(1)\ \Delta>0\Rightarrow -m^2+m+2>0\Rightarrow -1<m<2\\(2)\ S=-\dfrac{b}{a}<0\Rightarrow\dfrac{-2\sqrt{2}}{m-1}<0\Rightarrow m>1\\(3)\ P=\dfrac{c}{a}\ge 0\Rightarrow\dfrac{m}{m-1}\ge 0\Rightarrow m\le 0\ \text{یا}\ m>1\end{cases}$$

$$(1)\cap(2)\cap(3)=m\in(1,2)$$

پس از اجتماع الف و ب کلیه جواب‌ها ایجاد می‌شود: $(1,2)\cup[2,+\infty)=(1,+\infty)$

تست ۱۲. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

پاسخ گزینه ۱

اگر سهمی محور xها را در دو نقطه با طول‌های منفی قطع کند، دارای ۲ ریشه منفی است. هر معادله درجه دو با ۲ ریشه حقیقی منفی دارای شرایط زیر است:

(۱) $\Delta>0$ (۲) $S<0$ (۳) $P>0$

هر کدام از شرایط بالا حذف شود ممکن است مشکلی ایجاد شود مثلاً اگر فقط $P>0$ را بررسی کنیم ممکن است معادله دارای ۲ ریشه مثبت باشد. پس ۳ شرط بالا شرط لازم و کافی برای داشتن ۲ ریشه منفی است:

$$(1)\ \Delta=(a+3)^2+4a>0\Rightarrow a^2+10a+9>0\Rightarrow(a+1)(a+9)>0\Rightarrow a\in(-\infty,-9)\cup(-1,+\infty)$$

$$(2)\ S=-\frac{b}{a}=\frac{-(a+3)}{a}<0\Rightarrow a\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$$

$$(3)\ P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{a}>0\Rightarrow a\in(-\infty,0)$$

$$(1)\cap(2)\cap(3)=(-\infty,-9)$$

با شرط $\Delta>0$ به‌راحتی گزینه‌های ۲ و ۴ رد می‌شوند. (چرا؟)

مثال ۲۱. حدود m را طوری بیابید که هر دو ریشه معادله $x^2-mx+3=0$ از ۱ بزرگ‌تر باشد.

راه ۱) تابع $f(x)=x^2-mx+3$ را در نظر بگیرید. این تابع اگر دو ریشه بزرگ‌تر از ۱ داشته باشد با انتقال ۱ واحدی آن

به سمت چپ، تابع $g(x)=f(x+1)$ ایجاد می‌شود که باید ۲ ریشه مثبت داشته باشد پس:

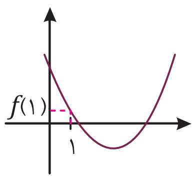
$$g(x)=f(x+1)=(x+1)^2-m(x+1)+3=x^2+(2-m)x+4-m$$

$$\begin{cases}(1)\,\Delta>0 \quad \Delta=(2-m)^2-4(4-m)=m^2-12>0\rightarrow\begin{cases}m>\sqrt{12}\\ \text{یا}\\ m<-\sqrt{12}\end{cases}\\ (2)\,S>0\rightarrow S=m-2>0\rightarrow m>2\\ (3)\,P>0\rightarrow P=4-m>0\rightarrow m<4\end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) داریم: $\sqrt{12}<m<4$

راه ۲) برای آن‌که تابع $f(x)=x^2-mx+3$ ۲ ریشه بزرگتر از ۱ داشته باشد مطابق شکل زیر باید شرایط زیر را داشته باشد:

$$\begin{cases}(1)\,f(1)>0 \Rightarrow 4-m>0 \Rightarrow m<4\\ (2)\,\Delta>0 \Rightarrow m^2-12>0 \Rightarrow\begin{cases}m>\sqrt{12}\\ \text{یا}\\ m<-\sqrt{12}\end{cases}\\ (3)\,x_{\text{راس}}=\dfrac{-b}{2a}>1 \Rightarrow \dfrac{m}{2}>1 \Rightarrow m>2\end{cases}$$



از اشتراک (۱) و (۲) و (۳) داریم: $\sqrt{12}<m<4$

مثال ۲۲. حدود m را طوری بیابید که عدد ۱ بین دو ریشه معادله $mx^2+(m+1)x+1=0$ باشد.

راه ۱) می‌دانیم در یک عبارت درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، اگر $a<0$ باشد و α و β دو ریشه f باشند به‌ازای اعداد بین دو ریشه علامت عبارت f مثبت است:

$a<0\rightarrow$

	β		α	
$-$		$+$		$-$

و اگر $a>0$ باشد به‌ازای اعداد بین دو ریشه علامت f منفی است:

$a>0\rightarrow$

	β		α	
$+$		$-$		$+$

پس اگر ۱ عددی بین ۲ ریشه باشد داریم:

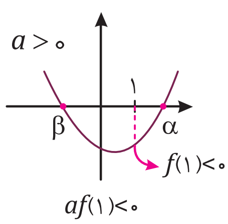
$a<0\rightarrow f(1)<0$

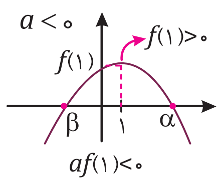
$a>0\rightarrow f(1)>0$

یعنی درهر دو حالت باید $af(1)<0$ باشد پس باید:

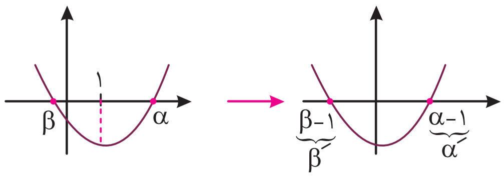
$$\left.\begin{array}{l}f(1)=m+m+1+1=2m+2\\ a=m\end{array}\right\}\Rightarrow m(2m+2)<0\Rightarrow m\in(-1,0)$$

به شکل سهمی f در هر دو حالت دقت کنید:





راه ۲) اگر نمودار سهمی $f(x)=mx^{۲}+(m+۱)x+۱$ را یک واحد به عقب ببریم تابع $y=f(x+۱)$ ایجاد می شود. در این صورت اگر ۱ بین ۲ ریشه f باشد، تابع $y=f(x+۱)$، یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد و باید ضرب ریشه‌های آن منفی باشد:



$$\Rightarrow \alpha'\beta'=(\alpha-۱)(\beta-۱)<۰ \Rightarrow \alpha\beta-(\alpha+\beta)+۱$$

چون در تابع f، $P=\frac{۱}{m}$ و $S=\frac{-m-۱}{m}$ است داریم:

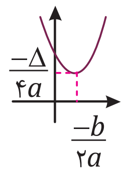
$$\frac{۱}{m}+\frac{m+۱}{m}+۱<۰ \Rightarrow \frac{m+۲}{m}+۱<۰$$

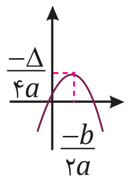
$$\Rightarrow \frac{۲m+۲}{m}<۰ \Rightarrow m\in(-۱,۰)$$

ماکزیمم و مینیمم سهمی

قبلاً دیدیم اگر در سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$، $a>۰$ باشد، تابع f دارای مینیمم و اگر $a<۰$ باشد تابع f دارای ماکزیمم است. در هر حالت مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی برابر $f(-\frac{b}{۲a})=\frac{-\Delta}{۴a}$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} a>۰ \to R_f=[-\frac{\Delta}{۴a},+\infty) \to \\ \\ a<۰ \to R_f=(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}] \to \end{cases}$$





مثال ۲۳. برد تابع $f(x)=\sqrt{-x^{۲}+۴x+۵}$ را به‌دست آورید.

ابتدا برد تابع $g(x)=-x^{۲}+۴x+۵$ را به‌دست می‌آوریم. چون g یک سهمی است و ضریب $x^{۲}$ در آن منفی است پس دارای ماکزیمم است و داریم:

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲ \Rightarrow y_{\text{رأس}}=g(۲)=-۴+۸+۵=۹$$

پس برد تابع g به صورت $(-\infty,۹]$ است. در نتیجه اگر این مقادیر وارد زیر رادیکال شوند از آن‌ها جذر گرفته می‌شود. از طرفی چون زیر رادیکال منفی نیست مقادیری از برد g وارد زیر رادیکال می‌شود که نامنفی باشند یعنی بازه $[۰,۹]$، پس برد تابع f بازه $[۰,۳]$ خواهد بود:

$$g(x)\leq ۹ \Rightarrow ۰\leq\sqrt{g(x)}\leq\sqrt{۹} \Rightarrow ۰\leq\sqrt{g(x)}\leq ۳$$

$$\to R_f=[۰,۳]$$

مثال ۲۴. مجموع دو عدد برابر ۸ است. بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها چه‌قدر است؟

$x+y=۸ \quad , \quad P=xy$

$\to P=x(۸-x)\to P(x)=-x^۲+۸x$

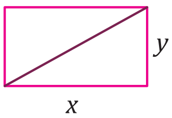
چون P برحسب x (یا y) یک تابع درجه دوم است و ضریب $x^۲$ در آن منفی است پس دارای ماکزیممی به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ است:

$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{-۲}=۴$

پس به‌ازای $x=۴$ حاصل‌ضرب دو عدد بیش‌ترین مقدار است و چون $x+y=۸$ است پس $y=۴$ است.

در حالت کلی، اگر مجموع دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی بیش‌ترین مقدار است که هر دو عدد برابر باشند.

مثال ۲۵. از بین مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۴ است مستطیلی اختیار می‌کنیم که کمترین طول قطر را دارد. مساحت مستطیل چه‌قدر است؟



اگر x و y اضلاع مستطیل باشند داریم: $۲(x+y)=۴\Rightarrow x+y=۲\Rightarrow y=۲-x$

تابع طول قطر را به صورت زیر برحسب یکی از اضلاع می‌نویسیم:

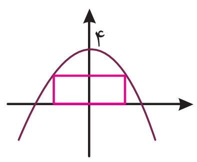
$A(x)=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(۲-x)^۲}=\sqrt{۲x^۲-۴x+۴}$

پس ابتدا مینیمم سهمی $f(x)=۲x^۲-۴x+۴$ را به‌دست می‌آوریم:

$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۴}{۴}=۱ \Rightarrow f(۱)=۲-۴+۴=۲$

پس کمترین مقدار تابع f برابر ۲ است و در نتیجه کمترین مقدار قطر برابر $\sqrt{۲}$ است.

تست ۱۳. **یک ضلع یک مستطیل مطابق شکل بر روی محور xها و دو رأس آن بر روی منحنی $y=۴-x^۲$ است. بیش‌ترین محیط مستطیل چه‌قدر است؟**

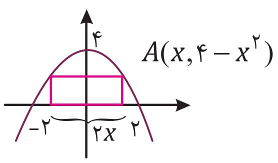


۱) ۶   ۲) ۸

۳) ۱۰   ۴) ۱۲

پاسخ **گزینه ۳**

مطابق شکل طول نقطه A برابر x است. چون A واقع بر منحنی است، پس عرض آن برابر $۴-x^۲$ است. در نتیجه مختصات نقطه A به صورت $(x,۴-x^۲)$ است. با توجه به شکل می‌توان محیط مستطیل را برحسب x نوشت:



$\text{محیط}=P(x)=۴(x)+۲(۴-x^۲)$

$\Rightarrow P(x)=-۲x^۲+۴x+۸$

تابع محیط برحسب x یک تابع درجه دوم است. که بیش‌ترین مقدار آن به‌ازای $x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۴}{۴}=۱$ است در نتیجه:

$\max(P)=P(۱)=-۲(۱)+۴+۸=۱۰$

معادلات دیگر

گاهی به کمک تغییر متغیرها و یا عملیات جبری می‌توانیم یک معادله را به معادلاتی تبدیل کنیم که حل آنها را فراگرفته‌ایم. در زیر به حل بعضی از این مثال‌ها می‌پردازیم.

مثال ۲۶. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $(x^۲-x)^۲=(x^۲-x)+۲$ ب) $x+۴\sqrt{x}=۵$ ج) $\frac{x^۴+۱}{x^۲}+x+\frac{۱}{x}=۰$

الف) اگر فرض کنیم $x^۲-x=t$ باشد داریم:

$$t^۲-t-۲=۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۲ \\ t=-۱ \end{cases}$$

اگر $t=۲$ باشد داریم:

$$x^۲-x=۲ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۱ \end{cases}$$

اگر $t=-۱$ باشد داریم: $x^۲-x=-۱ \Rightarrow x^۲-x+۱=۰ \Rightarrow \Delta<۰ \Rightarrow$ جواب ندارد

پس این معادله دارای ۲ جواب ۱- و $x=۲$ است.

ب) اگر فرض کنیم $\sqrt{x}=t$ است با فرض آن‌که می‌دانیم $t\geq ۰$ است داریم:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^۲$$

$$\rightarrow t^۲+۴t=۵ \Rightarrow t^۲+۴t-۵=۰$$

$$(t+۵)(t-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۵ \rightarrow \text{غ ق ق} \\ t=۱ \end{cases}$$

چون $t\geq ۰$ است پس $t=-۵$ قابل قبول نیست. در نتیجه:

$$\sqrt{x}=۱ \Rightarrow x=۱$$

ج) $$\frac{x^۴+۱}{x^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲$$

با فرض $x+\frac{۱}{x}=t$ داریم:

$$\frac{x^۴+۱}{x^۲}+x+\frac{۱}{x}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲+x+\frac{۱}{x}=۰$$

$$t^۲+t-۲=۰ \Rightarrow (t+۲)(t-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۲ \\ t=۱ \end{cases}$$

اگر $t=۱$ باشد داریم:

$$x+\frac{۱}{x}=۱ \Rightarrow \frac{x^۲+۱}{x}=۱ \Rightarrow x^۲-x+۱=۰ \Rightarrow \Delta<۰ \Rightarrow \text{جواب نداریم}$$

اگر $t=-۲$ باشد داریم:

$$x+\frac{۱}{x}=-۲ \Rightarrow \frac{x^۲+۱}{x}=-۲ \Rightarrow x^۲+۲x+۱=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲=۰ \Rightarrow x=-۱$$

پس این معادله تنها ۱ جواب دارد.

◄ معادلات گویا

از تقسیم هر چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای دیگر یک کسر گویا ایجاد می‌شود. معادله‌ای که از حاصل جمع و تفریق تعدادی چند جمله‌ای ایجاد شده باشد یک معادله گویا گوییم.

مثال ۲۷. معادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{x+19}{x^2+3x-4}+\frac{3}{x+4}=-\frac{4}{5}$$

پاسخ: ابتدا مخرج کسرها را تجزیه و سپس مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+19}{(x+4)(x-1)}+\frac{3}{x+4}=-\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{x+19+3x-3}{(x+4)(x-1)}=-\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4x+16}{(x+4)(x-1)}=-\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow \frac{4(x+4)}{(x+4)(x-1)}=-\frac{4}{5}$$

با توجه به آنکه باید $x\neq -4$ داریم:

$$\frac{4}{x-1}=-\frac{4}{5} \Rightarrow x-1=-5 \Rightarrow x=-4$$

از طرفی چون $x=-4$ مخرج کسرهای اولیه را صفر می‌کنند پس این معادله جواب ندارد.

تست ۱۴. اگر $x=2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{1}{x^2+x}+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{ax-1}{x^3-x}$ باشد، آنگاه این معادله چند جواب دیگر دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ گزینه «۱»

از آنجا که $x=2$ یکی از جواب‌های معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$x=2 \Rightarrow \frac{1}{2^2+2}+\frac{2^2}{2^2-1}=\frac{2a-1}{2^3-2} \Rightarrow \frac{1}{6}+\frac{4}{3}=\frac{2a-1}{6} \Rightarrow \frac{9}{6}=\frac{2a-1}{6}$$
$$\Rightarrow 2a-1=9 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$$

حال معادله را به کمک مخرج مشترک‌گیری حل می‌کنیم: برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x(x-1)(x+1)} \Rightarrow \frac{x-1+x^3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{5x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

اگر $x\neq 0,1,-1$ باشد داریم:

$$x^3+x-1=5x-1 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ غ ق ق} \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$x=0$ غیر قابل قبول است زیرا در دامنه معادله قرار ندارد و مخرج کسرهای اولیه را صفر می‌کند. پس معادله به‌جز $x=2$ فقط یک جواب دیگر $x=-2$ دارد.

تشکیل یک معادله گویا در حل بسیاری از مسائل ریاضی کاربرد دارد. در ادامه به چند مثال می‌پردازیم:

تست ۱۵. دو کارگر با هم کاشی‌کاری یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اگر هریک به تنهایی کار را انجام دهند کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را انجام می‌دهد، کارگر دوم کار را در چند روز انجام می‌دهد؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

پاسخ گزینه «۳»

اگر فرض کنیم کارگر اول کار را در x روز انجام می‌دهد، کارگر دوم کار را به تنهایی در $x+15$ روز انجام می‌دهد. فرض

می‌کنیم k روز از انجام کار هر دو نفر با هم گذشته باشد. نفر اول $\frac{k}{x}$ کار و نفر دوم $\frac{k}{x+۱۵}$ کار انجام داده است و $\frac{k}{۱۸}$ کل کار انجام شده است. پس داریم:

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{x+۱۵}=\frac{k}{۱۸}$$

$\frac{k}{x}$: کسری از کل کار که کارگر اول پس از k روزانجام داده است.

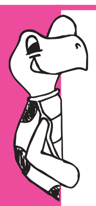
$\frac{k}{x+۱۵}$: کسری از کل کار که کارگر دوم پس از k روز انجام داده است.

$\frac{k}{۱۸}$: کسری از کار که هر دو کارگر پس از k روز باهم انجام داده‌اند.

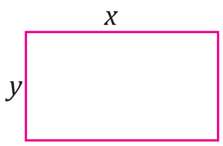
$$\xrightarrow{\div k}\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۲x+۱۵}{x(x+۱۵)}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$x^{۲}+۱۵x=۳۶x+۲۷۰\Rightarrow x^{۲}-۲۱x-۲۷۰=۰\Rightarrow(x-۳۰)(x+۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳۰\\x=-۹\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس نفر اول کار را به تنهایی در ۳۰ روز و نفر دوم به تنهایی در ۴۵ روز تمام می‌کند.



مستطیل طلایی: مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن است:



$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

نسبت عرض به طول این مستطیل را عدد طلایی گوییم. حال این عدد را بدست می‌آوریم:

$$\frac{x}{y}=L$$

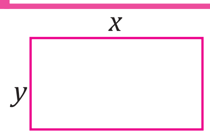
$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}\Rightarrow ۱+\frac{y}{x}=\frac{x}{y}\xrightarrow{\frac{x}{y}=L}۱+\frac{۱}{L}=L$$

$$\xrightarrow[L\neq ۰]{\times L}L+۱=L^{۲}\to L^{۲}-L-۱=۰\Rightarrow L=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\xrightarrow{L>۰}L=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

پس هر مستطیلی که نسبت طول به عرض آن $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ باشد مستطیل طلایی گوییم.

در یک مستطیل طلایی اگر محیط برابر ۲۰ باشد. طول و عرض را بدست آورید.



پاسخ:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\۲(x+y)=۲۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}y\\x+y=۱۰\end{cases}\Rightarrow\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}y+y=۱۰$$

$$y(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۱)=۱۰\Rightarrow y(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲})=۱۰\Rightarrow y=\frac{۲۰}{۳+\sqrt{۵}}\Rightarrow$$

$$y=\frac{۲۰}{۳+\sqrt{۵}}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۵}}=\frac{۲۰(۳-\sqrt{۵})}{۴}=۵(۳-\sqrt{۵})=۱۵-۵\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow x=۱۰-y=۱۰-(۱۵-۵\sqrt{۵})=۵\sqrt{۵}-۵$$

معادلات گنگ

برای حل معادلات گنگ با توان‌رسانی می‌توانیم معادلات را به معادلات گویا تبدیل کنیم اما باید جواب‌های آخر را در معادله اولیه قرار دهیم زیرا ممکن است زیر رادیکال‌ها یا جواب رادیکال‌ها با فرجه زوج را منفی کند. در مثال‌های زیر، روش حل معادلات گنگ و چک کردن این شروط را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲۸. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$ ب) $\sqrt{1-x^2}=x$ ج) $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{5x+9}$

پاسخ:

الف) اگر x جواب این معادله باشد به‌ازای این عدد عبارات زیر رادیکال نامنفی است پس باید $x-1\geq 0$ و $2x-1\geq 0$ باشند در نتیجه:

$$x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1,\ 2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2} \Rightarrow x\geq 1$$

پس جواب معادله باید از ۱ بزرگتر باشد. با این شرط می‌توانیم دو طرف تساوی را به توان ۲ برسانیم:

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1} \xrightarrow[x\geq 1]{\text{توان ۲}} x-1=2x-1 \Rightarrow x=0$$

اما $x=0$ غیرقابل‌قبول است زیرا در شرط اولیه عبارت صدق نمی‌کند پس این معادله جواب ندارد. زیرا از تساوی $-1=-1$ نمی‌توانیم جذر بگیریم! و تساوی $\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$ را ایجاد کنیم.

ب) می‌دانیم عبارت زیر رادیکال و خروجی زیر رادیکال همواره نامنفی است پس اگر عددی جواب معادله است باید آن عدد دارای شرایط زیر باشد:

$$\begin{cases} 1-x^2\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \\ x\geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0\leq x\leq 1$$

پس جواب‌های معادله در صورت وجود عضو بازه $[0,1]$ هستند. حال با این شرط دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{1-x^2}=x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{0\leq x\leq 1} 1-x^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

چون $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ عضو در بازه شرط اولیه ما یعنی $[0,1]$ نیست. پس $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ تنها جواب معادله است.

ج) ابتدا باید عبارات زیر رادیکال‌ها نامنفی باشند:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1 \\ 3x+4\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{4}{3} \\ 5x+9\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{-9}{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geq -1$$

حال با این شرط دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

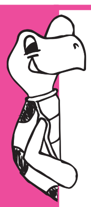
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{5x+9} \xrightarrow[x\geq -1]{\text{توان ۲}} x+1+3x+4+2\sqrt{(x+1)(3x+4)}=5x+9$$

$$\Rightarrow 4x+5+2\sqrt{3x^2+7x+4}=5x+9 \Rightarrow 2\sqrt{3x^2+7x+4}=x+4$$

چون خروجی رادیکال مثبت است لازم است $x+4\geq 0$ باشد، یعنی $x\geq -4$. شرط نامنفی بودن زیر رادیکال نیز در مرحله قبل به‌دست آمده است. پس تا به حال لازم است $x\geq -1$ و $x\geq -4$ باشد. پس اگر $x\geq -1$ باشد مراحل قبل بازگشت‌پذیراند. حال دو طرف نامعادله فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4(3x^2+7x+4)=x^2+8x+16 \Rightarrow 11x^2+20x=0 \Rightarrow x(11x+20)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-20}{11} \to \text{غ ق ق} \Leftarrow \text{زیرا در شرط اولیه } x\geq -1 \text{ صدق نمی‌کند.} \end{cases}$$



در معادلات گنگ می‌توانیم پس از توان‌رسانی جواب معادلات ثانویه به‌دست آمده را در معادله اولیه قرار دهیم و اگر تساوی برقرار شد آنگاه جواب را یکی از جواب‌های معادله بدانیم. اما گاهی جایگذاری جواب‌ها در معادله اولیه سخت و طاقت‌فرسا است در نتیجه چک کردن شروط توان‌رسانی کمک زیادی در محاسبه جواب‌های نهایی سؤال دارد.

تست ۱۶. معادله $\sqrt{x+۱}=۱-x^{۲}$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینه «۳»**

اولاً باید:

$$\begin{cases} x+۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۱ \\ ۱-x^{۲}\ge ۰ \Rightarrow -۱\le x\le ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۱\le x\le ۱$$

حال دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+۱}^{\,۲}=(۱-x^{۲})^{۲} \Rightarrow x+۱=(۱-x)^{۲}(۱+x)^{۲}$$

معادله را به‌صورت $f(x)=۰$ در می‌آوریم و تابع f را تجزیه می‌کنیم:

$$(۱-x)^{۲}(۱+x)^{۲}-(x+۱)=۰ \xrightarrow[x+۱]{\text{فاکتورگیری}} (x+۱)((۱-x)^{۲}(۱+x)-۱)$$

$$=(x+۱)(x^{۳}-x^{۲}-x)=x(x+۱)(x^{۲}-x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x^{۲}-x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

اما از بین جواب‌های فوق $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ در بازه $[-۱,۱]$ قرار ندارد پس معادله دارای سه جواب صفر، ۱- و $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ است.

دقت کنید که چک کردن جواب $x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ در معادله اولیه بدون به‌دست آوردن شرط‌های توان‌رسانی (دامنه توابع اولیه) کار دشواری است!

تست ۱۷. معادله $۲x-\sqrt{۲x-۱}=۱۳$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ **گزینه «۱»**

راه اول:

$$۲x-\sqrt{۲x-۱}=۱۳ \Rightarrow \sqrt{۲x-۱}=۲x-۱۳$$

شروط اولیه به‌صورت زیراند:

$$\begin{cases} ۲x-۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge \frac{۱}{۲} \\ ۲x-۱۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge \frac{۱۳}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\ge \frac{۱۳}{۲}$$

در نتیجه:

$$۲x-۱=(۲x-۱۳)^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲}-۵۴x+۱۷۰=۰$$

به کمک تجزیه اتحاد جمله مشترک داریم:

$$۴x^۲-۵۴x+۱۷۰=(۲x-۱۰)(۲x-۱۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱۰=۰ \Rightarrow x=۵ \\ ۲x-۱۷=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۷}{۲}=۸/۵ \end{cases}$$

چون شرط اولیه آن است که $x \geq \frac{۱۳}{۲}$ است پس $x=۵$ قابل قبول نیست، پس معادله یک جواب برابر $\frac{۱۷}{۲}$ دارد.

راه دوم: با تغییر متغیر $t=\sqrt{۲x-۱}$ داریم: $t=\sqrt{۲x-۱} \Rightarrow ۲x=t^۲+۱$

$$\Rightarrow ۲x-\sqrt{۲x-۱}=۱۳ \Rightarrow t^۲+۱-t=۱۳ \Rightarrow t^۲-t-۱۲=۰ \Rightarrow (t-۴)(t+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۴ \\ t=-۳ \end{cases}$$

چون $t=\sqrt{۲x-۱}$ است، پس:

$$\begin{cases} \sqrt{۲x-۱}=۴ \to ۲x-۱=۱۶ \to x=\frac{۱۷}{۲} \\ \sqrt{۲x-۱}=-۳ \to \text{جواب ندارد (چون خروجی‌رادیکال منفی شده است)} \end{cases}$$

در حل برخی از معادلات گنگ بررسی شرایط اولیه و دامنه عبارات و ویژگی‌های توابع استفاده شده در سؤال، باعث کاهش حجم محاسبات خواهد شد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

مثال ۲۹. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۵-x}=x-۶$ ب) $\sqrt{x^۲-۱}+\sqrt{x^۳+۳x^۲+۴x-۲}=۰$

پاسخ:

الف) اولاً باید عبارات زیر رادیکال، منفی باشند:

$$\begin{cases} x-۱\geq ۰ \\ ۵-x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۱ \\ x\leq ۵ \end{cases} \Rightarrow ۱\leq x\leq ۵$$

ثانیاً چون حاصل جمع دو عبارت نامنفی، عبارتی نامنفی است پس باید $x-۶$ که حاصل جمع $\sqrt{x-۱}$ و $\sqrt{۵-x}$ است نامنفی باشد: $x-۶\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۶$

چون لازم است $-۱\leq x\leq ۵$ و $x\geq ۶$ پس معادله جواب ندارد. چون به‌ازای همه مقادیر بازه $[-۱,۵]$، عبارت $x-۶$ عددی منفی است. در این‌جا دیدیم توان‌رسانی بدون این ملاحظات کار مناسبی نیست.

ب) می‌دانیم خروجی هر عبارت رادیکالی با فرجه زوج نامنفی است. پس حاصل جمع دو رادیکال زمانی صفر است که هر دو آن‌ها هم‌زمان برابر صفر باشد. پس باید:

$$\begin{cases} x^۲-۱=۰ \quad (۱) \\ x^۳-۳x^۲+۴x-۲=۰ \quad (۲) \end{cases}$$

با توجه به آن‌که هر دو معادله هم‌زمان باید صفر شوند پس کافی است جواب‌های معادله (۱) را که حل آن ساده‌تر است، ابتدا به‌دست آوریم و از بین این جواب‌ها جوابی که در معادله ۲ صدق می‌کند را انتخاب کنیم:

$$x^۲=۱ \to x=\pm ۱$$

اگر $x=۱$ باشد: $۱^۳-۳\times ۱^۲+۴(۱)-۲=۱-۳+۴-۲=۰$

پس $x=۱$ یک جواب معادله است.

اگر $x=-۱$ باشد: $(-۱)^۳-۳(-۱)^۲+۴(-۱)-۲=-۱-۳-۴-۲=-۱۰\neq ۰$

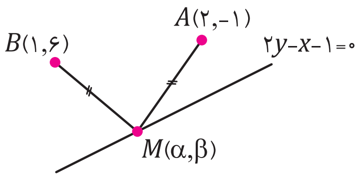
پس $x=-۱$ جوابی برای معادله ۲ نیست. پس $x=۱$ تنها جواب معادله است.

مثال ۳۰. نقطه‌ای روی خط $۲y-x-۱=۰$ پیدا کنید که از دو نقطه $A(۲,-۱)$ و $B(۱,۶)$ به یک فاصله باشد.

پاسخ: راه اول)

فرض می‌کنیم نقطه M با مختصات $M(\alpha,\beta)$ بر روی خط $۲y-x-۱=۰$ وجوددارد که فاصله آن از A و B برابر است.

اگر β عرض این نقطه باشد با توجه به آنکه مختصات این نقطه برروی خط صدق می‌کند طول آن برابر $۲\beta-۱$ است:



$$۲y-x-۱=۰ \Rightarrow x=۲y-۱ \xrightarrow{y=\beta} x=۲\beta-۱ \Rightarrow (۲\beta-۱,\beta)$$

حال فاصله نقاط A و B را از M به‌دست می‌آوریم و باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} A(۲,-۱) \\ M(۲\beta-۱,\beta) \end{cases} \Rightarrow AM=\sqrt{(۲\beta-۳)^۲+(\beta+۱)^۲}$$

$$\begin{cases} B(۱,۶) \\ M(۲\beta-۱,\beta) \end{cases} \Rightarrow BM=\sqrt{(۲\beta-۲)^۲+(\beta-۶)^۲}$$

$$AM=BM \Rightarrow \sqrt{(۲\beta-۳)^۲+(\beta+۱)^۲}=\sqrt{(۲\beta-۲)^۲+(\beta-۶)^۲}$$

دو طرف معادله بالا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(۲\beta-۳)^۲+(\beta+۱)^۲=(۲\beta-۲)^۲+(\beta-۶)^۲ \Rightarrow ۴\beta^۲-۱۲\beta+۹+\beta^۲+۲\beta+۱$$
$$=۴\beta^۲-۸\beta+۴+\beta^۲-۱۲\beta+۳۶ \Rightarrow ۱۰\beta=۳۰ \Rightarrow \beta=۳$$

اگر $\beta=۳$ باشد مختصات M به‌صورت (۳ و ۵) خواهد بود.

راه دوم) می‌دانیم هر نقطه بر روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. پس نقطه‌ای که از خط داده شده که برروی خط عمود منصف پاره خط AB است (یعنی محل تلاقی عمود منصف با خط داده شده است) جواب مسأله است. سعی کنید به کمک این راه خودتان مسأله را یک‌بار دیگر حل کنید.

تمرین‌ها

مختصات و فاصله دو نقطه

۱. الف) مختصات وسط پاره خطی با دو رأس $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۹ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

ب) مختصات قرینه نقطه $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۳ \end{bmatrix}$ را نسبت به نقطه $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ به‌دست آورید.

۲. مقدار a و b را طوری تعیین کنید که نقاط $A=\begin{bmatrix} ۲-a \\ ۲b+۳ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix} b+۱ \\ ۲a \end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix} a+۳b \\ b-۵ \end{bmatrix}$ رئوس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند.

۳. فاصله نقاط زیر را از هم به‌دست آورید.

۱) $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳/۲ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -۲/۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۴. ثابت کنید مثلث با رئوس $A(۰,۰)$، $B(۳,۱)$ و $C(۱,۲)$ مثلثی قائم‌الزاویه است و وتر آن را مشخص کنید.

۵. نقاط $A\begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}, C\begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ سه رأس یک مثلث‌اند.

الف) محیط و مساحت مثلث را حساب کنید.

ب) نوع مثلث را تعیین کنید.

۶. در مثلثی با رئوس $C(-۳,۸)$، $B(۱۳,-۴)$ و $A(-۱,۲)$:

الف) محیط مثلث را حساب کنید.

ب) طول میانه‌ها را حساب کنید.

ج) مساحت را حساب کنید.

۷. نقاط $A(۲,۳)$ و $C(-۱۰,-۶)$ دو رأس مقابل یک مربع‌اند. مساحت این مربع چقدر است؟

۸. روی محور عرض‌ها نقطه‌ای را بیابید که از نقاط $A(۲,-۳)$ و $B(-۴,۷)$ به یک فاصله باشد.

۹. نقطه‌ای به طول ۳ را در صفحه مختصات طوری بیابید که فاصله آن از نقطه $M(-۳,۶)$ برابر با ۱۰ واحد باشد.

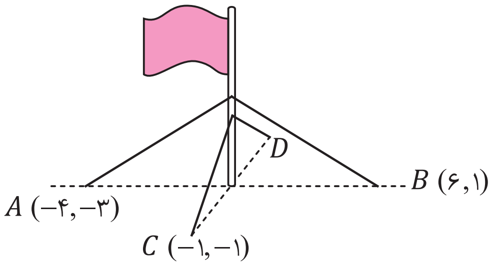
۱۰. مختصات نقاطی را روی نیم‌ساز ربع دوم و چهارم بیابید که فاصله آن‌ها از مبدأ مختصات برابر با $۲\sqrt{۲}$ باشد.

۱۱. از نقطه $M(۱,-۲)$ دایره‌ای به شعاع ۵ می‌گذرانیم به‌طوری که بر محور xها مماس باشد، مرکز دایره را بیابید.

۱۲. نقطه‌ای روی خط به معادله $y=x$ بیابید که فاصله آن از مبدأ مختصات ۲ واحد باشد.

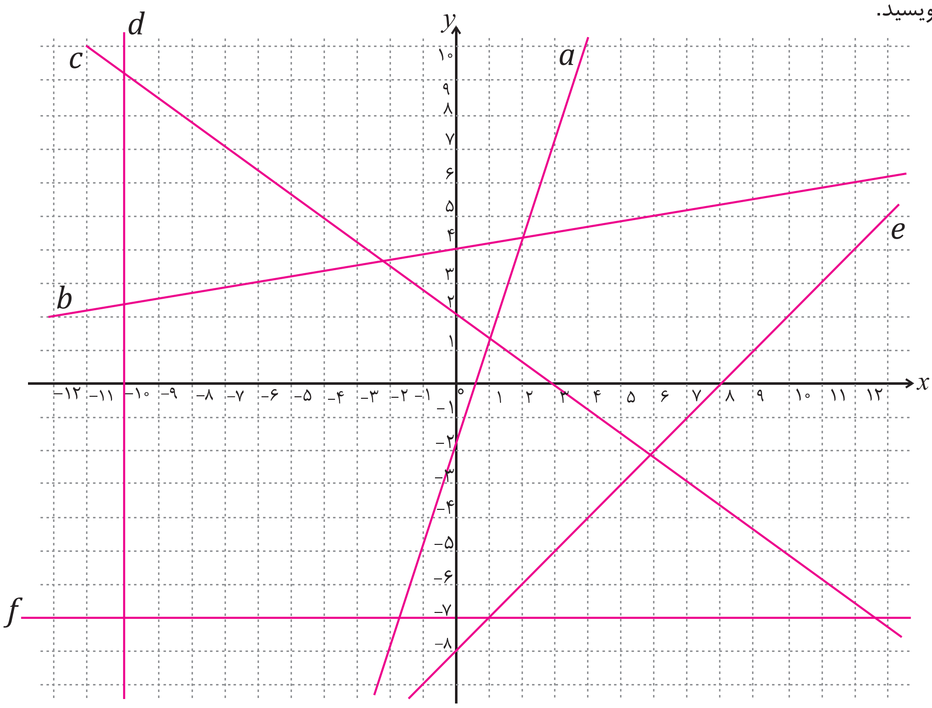
۱۳. یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است. به‌طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله. مختصات D را بدست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



معادله خط

۱۴. شیب هر یک از خطوط زیر را بنویسید.



۱۵. شیب خطوطی که از نقاط زیر عبور می‌کنند بنویسید.

۱) $(۱,۳),(-۵,۶)$ ۲) $(۴,-۵),(۳,-۹)$ ۳) $(-۱۲,۳۱),(۱۸,-۹)$

۴) $\begin{vmatrix}۰\\۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}$ ۵) $\begin{vmatrix}۵\\۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۵\\۲\end{vmatrix}$

۱۶. اگر شیب خط گذرنده از نقاط $\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}a-۱\\۲\end{bmatrix}$ برابر ۵ باشد مقدار a را حساب کنید.

۱۷. شیب خطی که از نقاط $\begin{bmatrix}m+۳\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۳\\۲-m\end{bmatrix}$ می‌گذرد برابر با ۲− می‌باشد، m را محاسبه کنید.

۱۸. الف)معادله خطی با شیب ۲− که از نقطه $\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ عبور می‌کند را بنویسید.

ب) معادله خطی با شیب $\frac{۱}{۳}$ که از نقطه $(۳,۲)$ عبور می‌کند را بنویسید.

۱۹. معادله خطی بنویسید که از نقاط داده شده عبور کند. شیب و عرض از مبدأ آن‌ها را نیز مشخص کنید.

۱) $(-۲,۳),(۸,۵)$ ۲) $\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$

۲۰. الف) معادله خطی بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}-۳\\ ۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$ عبور کند.

ب) معادله خطی بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}-۵\\ ۶\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-۵\\ ۳\end{bmatrix}$ عبور کند.

۲۱. خط d به معادله مقابل داده شده است: $(۲m-n+۵)x+(m+۳n-۲)y+۲m+۷n+۱۹=۰$

مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که این خط موازی محور yها باشد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع کند.

۲۲. معادله خطوط زیر را رسم کنید.

۱) $y+۱=۲x$

۲) $\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۵}y=۱$

۳) $\frac{x-y}{۳}=\frac{۲x-۲}{۴}$

۴) $\frac{y}{۲}=\frac{x}{۴}$

۲۳. شکل خطوط زیر را با شرایط داده شده، رسم کنید. (هر خط از کدام نواحی می‌گذرد)

۱) اگر $AB<۰ , BC>۰$ $\quad Ax+By+C=۰$

۲) $-m^۲x+n^۲y+p^۲=۰$

۳) اگر $p , q>۰$ $\quad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$

۲۴. محیط و مساحت مثلثی که از برخورد خط $۲x-۳y+۶=۰$ با محورهای مختصات حاصل می‌شود حساب کنید.

۲۵. مقدار k را طوری تعیین کنید که خط به معادله $۲x+۳y+k=۰$ با محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۲۷ واحد سطح تشکیل دهد.

? خطوط موازی

۲۶. الف) معادله خطی بنویسید که با خط $y=۳x-۲۲$ موازی باشد.

ب) معادله خطی بنویسید که با خط $۲x+۳y=۶$ موازی باشد و عرض از مبدأ آن ۷ باشد.

ج) معادله خطی بنویسید که با خط $\frac{x+y}{۹}+\frac{x}{۲}=۵$ موازی باشد و از نقطه $(-۲,۱)$ عبور کند.

د) معادله خطی بنویسید که با خط $۲y=-۶x+۱۲$ موازی و از نقطه $(۰,۱)$ عبور کند.

هـ) معادله خطی بنویسید که با خط $۲x+y=۵$ موازی و از نقطه $(۲,۰)$ عبور کند.

۲۷. معادله خطی بنویسید که با خط $x=۳$ موازی و از نقطه $\begin{bmatrix}-۲\\ -۷\end{bmatrix}$ عبورکند.

۲۸. معادله خطی بنویسید که با خط $y=-۵$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix}۱\\ ۹\end{bmatrix}$ عبور کند.

۲۹. معادله خطی موازی نیمساز ربع دوم و چهارم بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix}-۳\\ ۲\end{bmatrix}$ عبور کند.

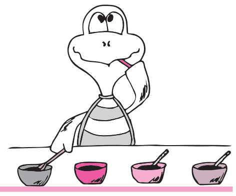
۳۰. مقدار a را طوری بیابید که خط $x-۳y=۲$ موازی با $ax+۲y+۳=۰$ باشد.

۳۱. مقدار a را طوری تعیین کنید که دو خط روبه‌رو موازی هم باشند.

$$\begin{cases}(۲a-۳)x+ay-۲=۲y+۳a\\ (۳a-۱)y+۲(۳a+۱)x=a-۱\end{cases}$$

? خطوط عمود

۳۲. اگر $A(۴,۰)$، $B(-۱,۳)$ و $C(m,۸)$ سه رأس یک مثلث باشند مقدار m را چنان تعیین کنید که $\hat{B}=۹۰^\circ$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

؟ هندسه تحلیلی

۱. معادله خطی که با نیمساز ربع اول و سوم موازی است و از نقطه $A=\begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}$ می‌گذرد، کدام است ؟

۱) $y=۲x+۱$ ۲) $y=x-۱$ ۳) $y=x-۵$ ۴) $y=۲x-۳$

۲. معادله خطی که از نقطه $A=\begin{bmatrix}-۲\\+۱\end{bmatrix}$ می‌گذرد و بر نیمساز ربع دوم و چهارم عمود است، کدام است ؟

۱) $y=x+۳$ ۲) $y=-x+۳$ ۳) $y=x-۳$ ۴) $y=-x-۳$

۳. طول از مبدأ خط راستی که دو نقطه $(۱,-۱)$ و $(۳,۱)$ را به هم وصل می‌کند، کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

۴. معادله خطی که از مبدأ مختصات و محل تلاقی دو خط $y=۵x+۳$ و $y=-۵x-۷$ می‌گذرد، کدام است ؟

۱) $y=۲x$ ۲) $y=-۲x$ ۳) $y=\frac{۱}{۲}x$ ۴) $y=-\frac{۱}{۲}x$

۵. مساحت مثلثی که خط $۳x+۴y=۲۴$ با محورهای مختصات می‌سازد برابر است با :

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۹/۵

۶. معادله خطی که از نقطه $A=\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix}$ گذشته و بر خط $\frac{x}{۲}=\frac{x-y}{۳}$ عمود است، کدام است ؟

۱) $y=۲x+۵$ ۲) $y=۵(x-۱)$ ۳) $y=۲(x-۱)$ ۴) $y+۲=۵x$

۷. معادله خطی که از نقطه $M=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ بگذرد و با جهت مثبت محور x ها زاویه ۱۳۵ درجه می سازد، کدام است؟

۱) $y=x+۳$ ۲) $۲y=۳x-۱$

۳) $y=-x+۳$ ۴) $۲y=-۳x$

۸. مساحت سطح محصور بین سه خط $y=x+۱$ و $x=۳$ و $y=-۴$ کدام است ؟

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۹. مختصات نقطه‌ای که خط $(m-۲)x+۳my+m+۴=۰$ به‌ازای جمیع مقادیر m از آن می‌گذرد، کدام است ؟

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۲,-۱)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۲)$

۱۰. اگر AC قطر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و $A(-۱,۷)$ و $B(۲,-۳)$ و $C(۶,۰)$ باشد، مختصات D کدام است ؟

۱) $(۲,۱۰)$ ۲) $(۳,۱۰)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۳,۹)$

۱۱. رأس‌های مثلثی $A(-۵,۶)$ ، $B(-۱,-۴)$ و $C(۳,۲)$ هستند. معادله ارتفاع BH کدام است؟

۱) $-۲x+y+۵=۰$ ۲) $۲y+x+۹=۰$

۳) $۲y-x+۷=۰$ ۴) $۲x-y-۲=۰$

۱۲. نقاط $A(۲,۵)$، $B(۳,-۱)$ و $C(۰,۲)$ سه رأس یک مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۲) $(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$

۱۳. به ازای کدام مقدار a دستگاه $\begin{cases} ax+۹y=۱۲ \\ ۴x+ay=a-۲ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۶ و ۶- ۴) هیچ مقدار

۱۴. معادلات دو ضلع از متوازی‌الاضلاعی به‌صورت $۲x+۳y=۷$ و $x-۲y=۰$ است. اگر $(-۳,۲)$ یکی از رأس‌های متوازی‌الاضلاع باشد، رأس دیگری از آن کدام است؟

۱) $(۴,۲)$ ۲) $(۵,-۱)$ ۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(-۲,-۱)$

۱۵. مساحت مثلثی با رأس‌های $(-۱,۲)$ ، $(۴,۰)$ و $(۵,۲)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۶. نقطه $A=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ روی دایره‌ای به مرکز مبدأ قرار دارد. معادله مماس بر دایره در نقطه A کدام است ؟

۱) $۴y+۳x=۲۴$ ۲) $۴y+۳x=۰$

۳) $۳y+۴x-۲=۰$ ۴) $۴y+۳x=۲۵$

۱۷. نقاط $M=\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. معادله عمود منصف MN کدام است ؟

۱) $۳x-۷+y=۰$ ۲) $۸-۵x=y$

۳) $y=۵+۳x$ ۴) $y=۳(x+۲)$

۱۸. فاصله محل تلاقی خط $x+۳y=۴$ با نیمساز ناحیه دوم از مبدأ مختصات کدام است ؟

۱) ۸ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۲}$

۱۹. معادله مجموعه نقاطی از صفحه مختصات که از دو نقطه $A(-۳,۲)$ و $B(۵,۴)$ به یک فاصله باشند، کدام خط است؟

۱) $۴x+y-۷=۰$ ۲) $۴x-y-۱=۰$

۳) $x+۴y-۱۳=۰$ ۴) $x-۴y+۱۱=۰$

۲۰. نقاط $A(-۱,۲)$ و $B(۲,۳)$ در صفحه مختصات مفروضند. طول میانه OM از مثلث OAB کدام است ؟

۱) $\sqrt{۲۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲۳}}{۲}$

۲۱. اگر نقاط $A\begin{vmatrix} \circ \\ -۱ \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} ۳ \\ ۱ \end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix} ۲ \\ -۴ \end{vmatrix}$ سه رأس یک مثلث باشند، این مثلث کدام است ؟

۱) متساوی‌الاضلاع　　۲) متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه

۳) فقط متساوی‌الساقین　　۴) فقط قائم‌الزاویه

۲۲. دو نقطهٔ $A(-۱,۲)$ و $B(-۳,۶)$ دو سر قطری از یک دایره هستند. معادله قطری از دایره که از نقطه $(۱,۱)$ می‌گذرد کدام است؟

۱) $y = x$　　۲) $y + x = ۲$

۳) $۲x + y = ۳$　　۴) $x + ۲y = ۶$

۲۳. قرینه نقطه $(۱,۵)$ نسبت به خط $۲y - x = ۴$ کدام نقطه است؟

۱) $(-۱,-۱)$　　۲) $(۳,۱)$　　۳) $(۵,-۱)$　　۴) $(۱,۱)$

۲۴. فاصله مبدأ مختصات از خط $y + x = ۱$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) $\sqrt{۲}$　　۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۴) $\sqrt{۵}$

۲۵. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطه $A(۸,۵)$ مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۷/۲　　۲) ۹/۶　　۳) ۱۱/۴　　۴) ۱۲/۸

۲۶. طول نقاطی روی خط $y = ۲x + ۱$ که از نیمساز ربع اول و سوم به فاصله $۴\sqrt{۲}$ هستند، کدام است؟

۱) $۹, -۷$　　۲) $-۹, ۷$　　۳) $۹, ۷$　　۴) $-۹, -۷$

۲۷. فاصله بین دو خط $۳x + ۴y = ۵$ و $-۶x = ۸y - ۲$ کدام است؟

۱) ۰/۳　　۲) ۰/۴　　۳) ۰/۸　　۴) ۱

۲۸. معادله دو ضلع مربعی $۳x - ۴y = ۵$ و $y = \frac{۶}{۸}x - ۱$ می باشد محیط مربع چه‌قدر است؟

۱) ۰/۲　　۲) ۰/۴　　۳) ۰/۶　　۴) ۰/۸

۲۹. معادله دو ضلع مربعی $۳x - ۴y = ۵$ و $۸y = ۶(x - ۱)$ است. مساحت مربع کدام است ؟

۱) $\frac{۱}{۲۵}$　　۲) ۰/۱۶　　۳) ۶/۲۵　　۴) ۴

۳۰. اگر فاصله نقطه $A(۱,۱)$ از خط $y = x + m$ برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، m کدام است ؟

۱) ± ۳　　۲) $\pm ۲\sqrt{۲}$　　۳) ± ۴　　۴) $\pm ۳\sqrt{۲}$

۳۱. اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ و $C(\circ,-۲)$ فاصله A از پاره‌خط BC چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$　　۲) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$　　۳) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$　　۴) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$

آزمون

۱. دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه $A(1,2)$ به فاصله ۲ هستند. مجموع طول‌های این نقاط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۲. اگر $A(-1,2)$ ، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ سه راس مثلث ABC باشند. ارتفاع AH محور عرض‌ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۳. دو نقطه روی خط $y=2x+1$ قرار دارند که از نیمساز ربع اول و سوم به فاصله $4\sqrt{2}$ هستند. مجموع طول این نقاط کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۴. اگر $x+y=5$ معادله یک قطر مربع و یک رأس آن $A(-2,1)$ باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۱۸

۵. فاصله خط گذرنده از نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ و خط گذرنده از نقاط $C(1,3)$ و $D(2,4)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۶. دو ضلع یک مربع بر روی خطوط $2x+\sqrt{5}y=3$ و $5y+2\sqrt{5}x=0$ قرار دارند. محیط این مربع کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷. معادلات سه ضلع یک مثلث به صورت $AB: x+2y=3$ ، $AC: y=2x-1$ و $BC: x+y=4$ است. طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۸. معادله $(x^2-2x)^2-(x^2-2x)=2$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹. به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2-2(a-2)x+14-a=0$ دارای ۲ ریشه مثبت است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $-2<a<2$ ۲) $2<a<5$ ۳) $2<a<14$ ۴) $5<a<14$

۱۰. به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله $8x^2-mx-8=0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2-x-2=0$ است؟ (سراسری ۹۶)

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۱. به ازای کدام مقدار m، مجموع جذر هر دو ریشه معادله $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر ۲ است؟ (سراسری ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲. به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y=(1-a)x^2+2\sqrt{6}x-a$ ، همواره بالای محور xها است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $a<1$ ۲) $a<-2$ ۳) $a>3$ ۴) $-2<a<1$

۱۳. به‌ازای کدام مقدار m، معادله درجه دوم $(m-6)x^2-2mx-3=0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟ (سراسری ۹۷)

۱) $m<-6$ ۲) $m>6$

۳) $0<m<6$ ۴) $3<m<6$

۱۴. حدود a کدام باشد تا عدد ۱ بین ریشه‌های معادله $ax^2+4x+(7-3a)=0$ قرار داشته باشد؟

۱) $(0,\frac{11}{2})$ ۲) $(0,1)\cup(\frac{4}{3},\frac{11}{2})$

۳) $\mathbb{R}-[0,\frac{11}{2}]$ ۴) $(1,\frac{4}{3})$

۱۵. کوتاهترین فاصله بین نقاط منحنی $y=\frac{۱}{۴}x^{۲}-۲$ و نقطه $(۰,۳)$ کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۴　　۳) ۳　　۴) ۲

۱۶. معادله گویای $\frac{۲}{x^{۲}-x+۱}+\frac{۱-۲x}{x^{۳}+۱}=\frac{۱}{x+۱}$ چند ریشه دارد؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ریشه ندارد

۱۷. یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهارکیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تخلیه چند کیلوگرم از رنگ خالص، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟ (سراسری ۹۲)

۱) ۰/۴　　۲) ۰/۵　　۳) ۰/۶　　۴) ۰/۸

۱۸. حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^{۲}+۴x+۳=\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) -۲　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴

۱۹. معادله $\sqrt{۲x+۴}+\sqrt{۲x+۱}=\sqrt{۴x+۹}$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۲۰. اگر β,α ریشه‌های معادله $۲x+۱=\sqrt{۱۱x-۲}$ باشند، $|\alpha-\beta|$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخنامه تشریحی

پاسخ تمرین‌های فصل ۱

۱. الف) اگر دو نقطه $A\begin{vmatrix}x_A\\y_A\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x_B\\y_B\end{vmatrix}$ داشته باشیم، نقطه M وسط پاره‌خط AB است.

$$M\left|\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{array}\right.$$

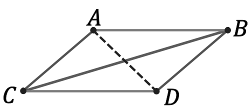
$$M=\begin{bmatrix}\dfrac{-3+5}{2}\\ \dfrac{-4-9}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -\dfrac{13}{2}\end{bmatrix}$$

ب) نقطه $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ را قرینه نقطه $\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ نسبت به $\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ فرض می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{5+x}{2}\\ \dfrac{-3+y}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{l}\dfrac{5+x}{2}=-1\Rightarrow x=-7\\ \dfrac{-3+y}{2}=5\Rightarrow y=13\end{array}\Rightarrow A\begin{bmatrix}-7\\13\end{bmatrix}$$

۲. می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند پس با توجه به شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:

$$M\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_A+x_C}{2}\\ \dfrac{y_A+y_C}{2}\end{array}\right.\qquad M\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_B+x_D}{2}\\ \dfrac{y_B+y_D}{2}\end{array}\right.$$



$$M\left|\begin{array}{l}\dfrac{a+3b-2}{2}\\ \dfrac{b-1}{2}\end{array}\right.,\quad M\left|\begin{array}{l}\dfrac{3+b-a}{2}\\ \dfrac{2a+2b+3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}a+3b-2=3+b-a\\ b-1=2a+2b+3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+2b=5\\ 2a+b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=9\\ 2a=-13\Rightarrow a=-\dfrac{13}{2}\end{cases}$$

۳. فاصله دو نقطه را از طریق رابطه $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ به‌دست می‌آوریم، پس داریم:

۱) $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$$\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

۲) $\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\5\end{bmatrix}$

$$\sqrt{(2+4)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

۳) $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$

$$\sqrt{(-2-5)^2+(3+1)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$$

۴) $\begin{bmatrix}0\\3.2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2.4\\0\end{bmatrix}$

$$\sqrt{(0+2.4)^2+(3.2-0)^2}=\sqrt{2.4^2+3.2^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4^2\times 6^2}{100}+\frac{4^2\times 8^2}{100}}=\sqrt{\frac{4^2\times\cancel{100}}{\cancel{100}}}=4$$

۴.

$$AB=\sqrt{(3-0)^2+(9-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$AC=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$BC=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

چون رابطه $AC^2+BC^2=AB^2$ برقرار است، یعنی این مثلث قائم‌الزاویه است و در مثلث قائم‌الزاویه بزرگ‌ترین ضلع وتر بوده، پس AB وتر است.

۵.

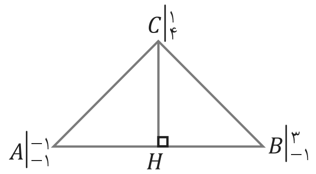
$$AB=\sqrt{(3+1)^2+0}=4$$

$$AC=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

$$BC=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

$$\text{محیط}=2\sqrt{29}+4$$

$$\text{مساحت}=\frac{CH\times AB}{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$$



ب) مثلث متساوی‌الساقین است، زیرا اضلاع AC و CB با هم برابر هستند.

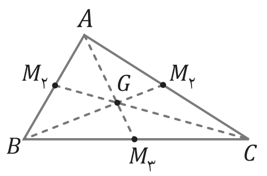
۶. الف)

$$AB=\sqrt{14^2+36}=\sqrt{232}$$

$$AC=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$$

$$BC=\sqrt{16^2+144}=20$$

$$\text{محیط}=\sqrt{232}+\sqrt{40}+20$$



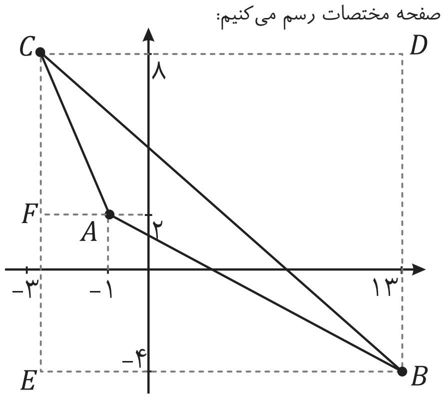
ب)

$$M_3\begin{vmatrix}5\\2\end{vmatrix}\Rightarrow AM_3=\sqrt{36}=6$$

$$M_1\begin{vmatrix}-2\\5\end{vmatrix}\Rightarrow BM_1=\sqrt{15^2+81}=\sqrt{306}$$

$$M_2=\begin{vmatrix}6\\-1\end{vmatrix}\Rightarrow CM_2=\sqrt{81+81}=9\sqrt{2}$$

ج) این مثال را در صفحه مختصات رسم می‌کنیم:



$$S_{\underset{ASC}{\Delta}}=S_{CDBE}-\left(S_{\underset{CBA}{\Delta}}+S_{\underset{FABE}{\text{ذوزنقه}}}+S_{\underset{AFC}{\Delta}}\right)$$

$$=12\times 16-\left(\frac{16\times 12}{2}+\frac{(2+16)\times 6}{2}+\frac{2\times 6}{2}\right)=36$$

۷. می‌دانیم چون هر مربع یک لوزی است، پس مساحت مربع را از طریق مساحت لوزی هم می‌توان یافت، یعنی: $\dfrac{(\text{قطر})^2}{2}$ و اندازه پاره‌خط همان قطر مربع است.

$$\left.\begin{array}{l}A(2,3)\\ C(-10,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow AC=\sqrt{144+81}$$

$$\Rightarrow S=\frac{144+81}{2}=\frac{225}{2}=112.5$$

۸. هر نقطه روی محور عرض‌ها را می‌توان به صورت $M(۰,\alpha)$ نمایش داد. حال می‌دانیم $MA=MB$ پس داریم:

$$\sqrt{(۰-۲)^۲+(\alpha+۳)^۲}=\sqrt{۴^۲+(\alpha-۷)^۲}$$
$$\Rightarrow \alpha^۲+۶\alpha+۹+۴=۱۶+\alpha^۲-۱۴\alpha+۴۹ \Rightarrow ۲۰\alpha=۵۲$$
$$\Rightarrow \alpha=\frac{۵۲}{۲۰}=\frac{۲۶}{۱۰}=۲/۶$$

۹. فاصله نقطه $M(۳,y)$ از نقطه $(-۳,۶)$ بایستی برابر ۱۰ باشد، بنابراین:

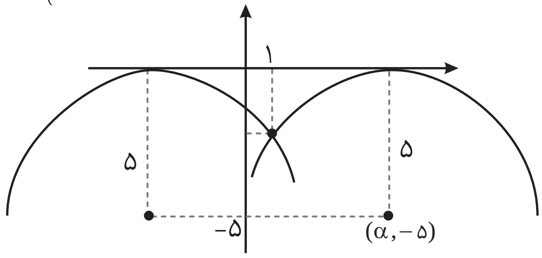
$$\sqrt{(۳+۳)^۲+(y-۶)^۲}=۱۰ \Rightarrow ۳۶+(y-۶)^۲=۱۰۰$$
$$\Rightarrow y-۶=۸ \Rightarrow y=۱۴ \Rightarrow M(۳,۱۴)$$

۱۰. نقاط روی نیمساز ربع دوم و چهارم به‌صورت $(\alpha,-\alpha)$ هستند، پس:

$$\sqrt{\alpha^۲+\alpha^۲}=۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲\alpha^۲=۸ \Rightarrow \alpha^۲=۴ \Rightarrow \alpha=\pm۲$$
$$\Rightarrow M_۱(۲,-۲)\ ,\ M_۲(-۲,۲)$$

۱۱. اگر این دایره بر محور xها مماس شود، یعنی مختصات مرکز به‌صورت $(\alpha,-۵)$ خواهد بود، پس داریم:

$$\sqrt{(\alpha-۱)^۲+۹}=۵ \Rightarrow (\alpha-۱^۲)+۹=۲۵ \Rightarrow (\alpha-۱)^۲=۱۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha-۱=۴ \Rightarrow \alpha=۵\\ \alpha-۱=-۴ \Rightarrow \alpha=-۳\end{cases}$$



نقطه $O(۵,-۵)$ یا $O(-۳,-۵)$ مرکز دایره است.

۱۲. نقطه (α,α) را روی خط مذکور جدا می‌کنیم، پس داریم:

$$\sqrt{\alpha^۲+\alpha^۲}=۲ \Rightarrow ۲\alpha^۲=۴ \Rightarrow \alpha^۲=۲ \Rightarrow \alpha=\pm\sqrt{۲}$$
$$M_۱(\sqrt{۲},\sqrt{۲})\ ,\ M_۲(-\sqrt{۲},-\sqrt{۲})$$

۱۳. ابتدای مختصات پای میله (نقطه O) را می‌یابیم. میانگین نقاط A و B:

$$\left.\begin{array}{l} x_O=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۶+(-۴)}{۲}=۱\\ y_O=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۱+(-۳)}{۲}=۱\end{array}\right\} \Rightarrow O=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}$$

می‌دانیم مختصات نقطه O میانگین مختصات نقاط C و D نیز هست.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x_C+x_D}{۲}=x_O \Rightarrow \frac{-۱+x_D}{۲}=۱ \Rightarrow x_D=۲+۱=۳\\ \frac{y_C+y_D}{۲}=y_O \Rightarrow \frac{-۱+y_D}{۲}=-۱ \Rightarrow y_D=-۲+۱=-۱\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow D=\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}$$

۱۴. شیب هر خط را با m نمایش می‌دهیم:

$m_a=\frac{۱۰+۵}{۴+۱}=\frac{۱۵}{۵}=۳$ $\qquad$ $m_b=\frac{۵-۲}{۶+۱۲}=\frac{۳}{۱۸}=\frac{۱}{۶}$

$m_c=\frac{۰+۳}{۳-۷}=-\frac{۳}{۴}$ $\qquad$ $m_d=$ بی‌نهایت

$m_e=\frac{-۷+۸}{۱-۰}=\frac{۱}{۱}=۱$ $\qquad$ $m_f=۰$

۱۵.

۱) $(۱,۳)\ ,\ (-۵,۶) \Rightarrow m=\frac{۶-۳}{-۵-۱}=\frac{۳}{-۶}=-\frac{۱}{۲}$

۲) $(۴,-۵)\ ,\ (۳,-۹) \Rightarrow m=\frac{-۹+۵}{۳-۴}=\frac{-۴}{-۱}=۴$

۳) $(-۱۲,۳۱)\ ,\ (۱۸,-۹) \Rightarrow m=\frac{-۹+۱۲}{۱۸-۳۱}=-\frac{۳}{۱۳}$

۴) $\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.\ ,\ \left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right. \Rightarrow m=\frac{۱-۱}{-۱-۰}=۰$

۵) $\left|\begin{matrix}۵\\۴\end{matrix}\right.\ ,\ \left|\begin{matrix}۵\\۲\end{matrix}\right. \Rightarrow m=\frac{۴-۲}{۵-۵}=\frac{۲}{۰}$ تعریف نشده

۱۶.

$$\frac{۴-۲}{۳-a+۱}=۵ \Rightarrow \frac{۲}{۵}=۴-a \Rightarrow a=\frac{۱۸}{۵}$$

۱۷.

$$\frac{۲-۲+m}{m+۳+۳}=-۲ \Rightarrow m=-۲m-۱۲ \Rightarrow m=-۴$$

۱۸.

الف) $y+۱=-۲(x-۲) \Rightarrow y+۱=-۲x+۴ \Rightarrow y=-۲x+۳$

ب) $y-۲=\frac{۱}{۳}(x-۳) \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+۱$

۱۹.

۱) $(-۲,۳)$ $\qquad$ $(۸,۵)$

$m=\frac{۵-۳}{۸+۲}=\frac{۲}{۱۰}$ $\qquad$ $y-۴=\frac{۱}{۵}(x+۲) \Rightarrow ۵y=x+۱۷$

عرض از مبدأ $=\frac{۱۷}{۵}$

۲) $\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$

$m=\frac{۴-۳}{۳-۲}=۱$ $\qquad$ $y-۳=x-۲ \Rightarrow y=x+۱$

عرض از مبدأ $=۱$

۳) $\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$

$m=\frac{۴-۲}{۳+۱}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ $\qquad$ $y-۲=\frac{۱}{۲}(x+۱) \Rightarrow ۲y=x+۵$

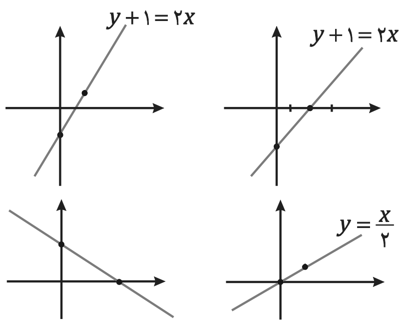
عرض از مبدأ $=\frac{۵}{۲}$

۲۰. الف) چون y این دو نقطه یکسان است، پس معادله این خط $y=۳$ خواهد بود.
ب) چون x این دو نقطه یکسان است، پس معادله آن $x=-۵$ خواهد بود.

۲۱. معادله خط $y=۵$ است پس بایستی ضریب x را برابر صفر قرار دهیم.

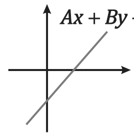
$$۲m-n+۵=۰ \Rightarrow ۲m-n=-۵ \Rightarrow y=\frac{۲m+۷n+۱۹}{۲-m-۳n}=۵$$
$$\Rightarrow ۲m+۷n+۱۹=۱۰-۵m-۱۵n \Rightarrow ۷m+۲۲n=-۹$$
$$۷m+۲۲(۲m+۵)=-۹ \Rightarrow m=-\frac{۱۱۹}{۵۱}=-\frac{۷}{۳}\ ,\ n=\frac{۱۷}{۵۱}=\frac{۱}{۳}$$

۲۲.



$$\frac{x-y}{۳}=\frac{۲x-۳}{۴}$$

۲۳.



۱) $Ax+By+C=۰$

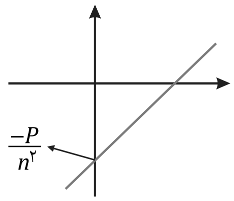
شیب خط $=-\frac{A}{B}$

چون $AB<۰$ پس یعنی $\frac{A}{B}<۰$ و $-\frac{A}{B}>۰$ پس شیب این خط مثبت است. عرض از مبدأ این خط هم $-\frac{C}{B}$ است، چون $BC>۰$ پس $\frac{C}{B}>۰$ در نتیجه $-\frac{C}{B}<۰$ است.

یعنی $Ax+By+C=۰$ یک خط با شیب مثبت و عرض از مبدأ منفی است.

۲) شیب $=\frac{n^۲}{m^۲}>۰$

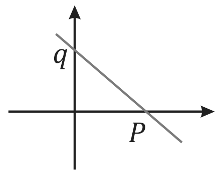
عرض از مبدأ $=-\frac{p^۲}{n^۲}<۰$



از ناحیه اول و سوم و چهارم می‌گذرد.

۳) عرض از مبدأ $=q>۰$

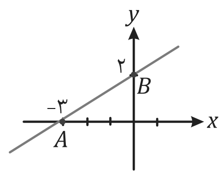
طول از مبدأ $=p>۰$



از ناحیه اول و دوم و چهارم می‌گذرد.

۲۴.

x	۰	-۳
y	$+۲$	۰



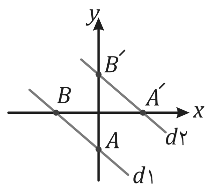
$S_{AOB}=\frac{۲\times ۳}{۲}=۳$

$AB=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$

محیط $=۲+۳+\sqrt{۳}=۵+\sqrt{۱۳}$

۲۵. از معادله واضح است این خط دارای شیب منفی بوده و به شکل زیر است و مختصات نقطه A (نقطه‌ای که طول آن صفر است) $\frac{-k}{۳}$ و مختصات نقطه B (نقطه‌ای که عرض آن صفر است) $-\frac{k}{۲}$ می‌باشد.

$$\frac{(\frac{-k}{۲})(\frac{-k}{۳})}{۲}=۲۷$$
$$\Rightarrow k^۲=۲۷\times ۳\times ۴ \Rightarrow k=\pm ۱۸$$



اگر k مثبت باشد خط $d_۱$ است و اگر k منفی باشد خط $d_۲$ است.

۲۶. الف) $y=۳x+k \qquad (k\in \mathbb{R})$

ب) شیب خط خواسته شده باید $\frac{-۲}{۳}$ بوده و از نقطه $(۰,۷)$ عبور کند پس:

$۲x+۳y=۲۱$

ج) شیب خط خواسته شده باید $\frac{-۷}{۲}$ باشد که با خط $\frac{x}{۲}+\frac{x+y}{۹}=۵$ موازی شود:

$y=-\frac{۷}{۲}x+k$

$۱=-\frac{۷}{۲}(-۲)+k \Rightarrow k=-۶ \Rightarrow y=-\frac{۷}{۲}x-۶$

د) $\left.\begin{matrix} m=-۳ \\ (۰,۱)\end{matrix}\right\} \Rightarrow y-۱=-۳x \Rightarrow y=-۳x+۱$

هـ) $\left.\begin{matrix} m=-۲ \\ (۲,۰)\end{matrix}\right\} \Rightarrow y-۰=-۲(x-۲) \Rightarrow y=-۲x+۴$

۲۷. خطی که با خط $x=۳$ موازی باشد، به‌صورت $x=k$ است و چون این خط از نقطه $(-۲,-۷)$ می‌گذرد، پس $x=-۲$ است.

۲۸. خطی که با خط $y=-۵$ موازی باشد، به‌صورت $y=k$ نوشته می‌شود و چون این خط از نقطه $(۱,۹)$ عبور می‌کند، پس $y=۹$ است.

۲۹. خطی که موازی نیم‌ساز ربع دوم و چهارم باشد دارای شیب ۱- است.

$\left.\begin{matrix} m=-۱ \\ (-۳,۲)\end{matrix}\right\} \Rightarrow y-۲=-(x+۳) \Rightarrow y=-x-۱$

۳۰.

$$\left.\begin{matrix} x-۳y=۲ \Rightarrow y=\frac{x-۲}{۳} \\ ax+۲y+۳=۰ \Rightarrow y=\frac{-ax-۳}{۲}\end{matrix}\right\} \Rightarrow -\frac{a}{۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}$$

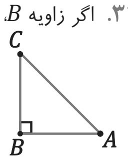
۳۱.

$$\begin{cases} (۲a-۳)x-۲-۳a=(۲-a)y \Rightarrow m=\frac{۲a-۳}{۲-a} \\ (۳a-۱)y=a-۱-۲(۳a+۱)x \Rightarrow m=\frac{-۲(۳a+۱)}{۳a-۱}\end{cases}$$

$$\frac{۲a-۳}{۲-a}=\frac{-۶a-۲}{۳a-۱} \Rightarrow \cancel{۶a^۲}-۲a-۹a+۳=\cancel{۶a^۲}+۲a-۱۲a-۴$$
$$\Rightarrow -۱۱a+۳=-۱۰a-۴ \Rightarrow a=-۷$$

۳۲. اگر زاویه B، ۹۰° باشد یعنی AB بر BC عمود است، پس:

$$\left.\begin{matrix} m_{AB}=\frac{۰-۳}{۴+۱}=-\frac{۳}{۵} \\ m_{BC}=\frac{۸-۳}{m+۱}=\frac{۵}{m+۱}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{۵}{m+۱}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow m=۲$$



۳۳.

$$m=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow[\text{قرینه و معکوس}]{\text{شیب خط عمود}} m'=۲ \Rightarrow y=۲x-۷$$

۳۴.

$$m=-\frac{۱۶}{۳} \xrightarrow[\text{قرینه و معکوس}]{\text{شیب خط عمود}} m'=\frac{۳}{۱۶} \Rightarrow y-۱=\frac{۳}{۱۶}(x-۳)$$
$$\Rightarrow y=\frac{۳}{۱۶}x+\frac{۷}{۱۶}$$

۳۵. اگر خطی بر $x=۹$ عمود باشد، معادله آن به‌صورت $y=k$ است و چون از $(۸,-۱۷)$ عبور می‌کند $y=-۱۷$ است.

۳۶. اگر خطی بر $y=-۶$ عمود باشد، باید به‌صورت $x=k$ باشد و چون از نقطه $(۱,-۱)$ عبور می‌کند، خط $x=۱$ است.

۳۷.

$$y=\frac{۱}{۲}-۳x \xrightarrow[\text{قرینه و معکوس}]{\text{شیب خط عمود}} m'=\frac{۱}{۳}$$

$$\left.\begin{matrix} m'=\frac{۱}{۳} \\ (۰,۰)\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x$$

۳۸.

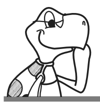
$$\left.\begin{matrix} (m-۱)x+۳y=۵ \Rightarrow \text{شیب}=\frac{۱-m}{۳} \\ ۶x+y=m \Rightarrow \text{شیب}=-۶\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{۱-m}{۳}=\frac{۱}{۶}$$
$$\Rightarrow ۱-m=\frac{۱}{۲} \Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

۳۹.

$$(۳a+۱)y=۳ax-(۵a+۴) \Rightarrow \text{شیب}=\frac{۳a}{۳a+۱}$$

$$(a-۱)y=۲(a+۲)-a(x) \Rightarrow \text{شیب}=\frac{-a}{a-۱}$$

$$\frac{۳a}{۳a+۱}=\frac{a-۱}{a} \Rightarrow ۳a^۲=۳a^۲-۲a-۱ \Rightarrow ۲a=-۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$



پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. **گزینه «۲»**
خطی موازی با نیمساز ربع اول و سوم باشد، دارای شیب برابر است، پس:

$$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ}) \Rightarrow y-(-۳)=۱\times(x-(-۲))$$
$$\Rightarrow y+۳=x+۲ \Rightarrow y=x-۱$$

۲. **گزینه «۱»**
می‌دانیم شیب خطی که بر یک خط مفروض عمود شود، قرینه معکوس خط مفروض است. پس:

$-۱ =$ شیب نیمساز دوم و چهارم

شیب خط عمود $= \frac{-۱}{-۱}=۱$

$$y-(+۱)=x-(-۲) \Rightarrow y=x+۳$$

۳. **گزینه «۱»**
خطی که از دو نقطه $(۱,-۱)$ و $(۳,۱)$ عبور می‌کند دارای شیب زیر است:

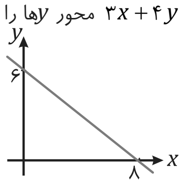
$$m=\frac{-۱-۱}{۱-۳}=\frac{-۲}{-۲}=۱$$
$$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ}) \Rightarrow y+۱=x-۱ \Rightarrow y=x-۲$$
$$\xrightarrow{y=۰} x=۲$$

۴. **گزینه «۱»**
ابتدا محل تلاقی این دو خط را به‌دست آورده و سپس شیب خط خواسته شده را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} y=۵x+۳ \\ y=-۵x-۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-۲ \\ x=-۱ \end{cases}$$

شیب $= \frac{-۲-۰}{-۱-۰}=۲ \Rightarrow y=۲x$

۵. **گزینه «۳»**
همان‌طور که در شکل مشخص شده است، خط $۳x+۴y=۲۴$ محور yها را در نقطه ۶ و محور xها در نقطه ۸ قطع می‌کند.



$$S=\frac{۶\times۸}{۲}=۲۴$$

۶. **گزینه «۱»**

$$۲x-۲y=۳x \Rightarrow ۲y=-x \Rightarrow y=-\frac{x}{۲}$$

شیب $= -\frac{۱}{۲} \Rightarrow$ شیب خط عمود $= \frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲$

$$y-۳=۲(x-(-۱)) \Rightarrow y=۲x+۵$$

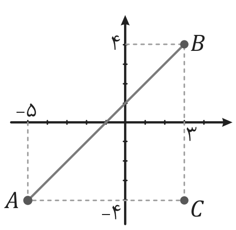
۷. **گزینه «۳»**
می‌دانیم شیب هر خط برابر تانژانت زاویه خط با جهت مثبت محور xها است.

زاویه $۱۳۵^{\circ} \Rightarrow \tan(۱۳۵^{\circ})=-۱$

$\Rightarrow$ شیب $=-۱$

$$y-۱=(-۱)(x-۲) \Rightarrow y=-x+۳$$

۸. **گزینه «۲»**
محل تلاقی این ۳ خط نقاط B، A و C است، پس مساحت ناحیه محصور مساحت مثلث ABC خواهد بود.



$$S=\frac{۸\times۸}{۲}=۳۲$$

۹. **گزینه «۲»**

$$mx-۲x+۳my+m+۴=۰ \Rightarrow (x+۳y+۱)m-۲x+۴=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۴-۲x=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۳y+۱=۰ \Rightarrow y=-۱ \end{cases}$$

۱۰. **گزینه «۲»**
چون می‌دانیم قطرها در متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، پس محل تلاقی آن‌ها وسط هرکدام است، پس:

$$\frac{B+D}{۲}=\frac{A+C}{۲}$$
$$\Rightarrow D=A+C-B=(-۱+۶-۲\ ,\ ۷+۰-(-۳))=(۳,۱۰)$$

۱۱. **گزینه «۴»**
شیب ارتفاع BH قرینه و معکوس شیب خط AC بوده و از نقطه B هم عبور می‌کند پس می‌توان نوشت:

شیب $AC = \frac{۶-۲}{-۵-۳}=\frac{۴}{-۸}=-\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$ شیب $BH = \frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲$

$$\Rightarrow y-(-۴)=۲(x-(-۱)) \Rightarrow y=۲x-۲$$

۱۲. **گزینه «۳»**
با توجه به دو نقطه B و C معادله خط BC را می‌نویسیم:

معادله خط BC : $y=-x+۲$

خط AH از نقطه A عبورکرده و شیب آن هم قرینه و معکوس شیب خط BC است.

$\Rightarrow$ معادله خط AH : $y=x+۳$

محل تلاقی خطوط AH و BC پای ارتفاع AH خواهد بود:

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x+۲ \\ y=x+۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{۵}{۲} \\ x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱۳. **گزینه «۱»**
شرط این‌که دستگاه جواب نداشته باشد این است که دو خط با هم موازی باشند پس شیب آن‌ها بایستی با هم برابر باشند:

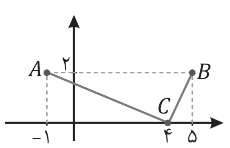
$$\frac{a}{۴}=\frac{۹}{a} \Rightarrow \begin{cases} a=+۶ \\ \text{یا} \\ a=-۶ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

اگر $a=-۶$ باشد، چون دو معادله ضریب یکدیگر می‌شوند، پس دو خط برهم منطبق خواهند بود و بینهایت جواب خواهد داشت.

۱۴. **گزینه «۳»**
چون نقطه داده شده در هیچکدام از خطوط صدق نمی‌کند، برای نوشتن معادله دو ضلع دیگر، خطوطی که موازی هر ضلع داده شده و از نقطه $(-۳,۲)$ بگذرد را در نظر می‌گیریم. پس معادله این ۴ ضلع به صورت روبه‌رو است و محل تلاقی دو به دو آن‌ها رئوس این متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

چهار ضلع : $\begin{cases} ۳y+۲x=۷ \\ ۳y+۲x=۰ \\ x-۲y=۰ \\ x-۲y=-۷ \end{cases} \Rightarrow$ چهار رأس $\begin{cases} (-۳,۲) \\ (۰,۰) \\ (۲,۱) \\ (-۱,۳) \end{cases}$

۱۵. **گزینه «۳»**
نقطه‌های گفته شده را در صفحه مختصات مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم. همان‌طور که در شکل مشخص است:



$$S=\frac{۲\times۶}{۲}=۶$$

۱۶. **گزینه «۴»**
خط مماس بر دایره در هر نقطه، بر شعاع وارد برآن نقطه عمود است، پس شیب خط مماس قرینه معکوس شیب خط OA است، اگر O مرکز دایره باشد:

معادله OA : $۳y=۴x \Rightarrow$ شیب عمود $= -\frac{۳}{۴}$

معادله مماس : $۴y+۳x=۲۵$

۱۷. **گزینه «۳»**

مختصات وسط پاره‌خط MN را پیدا کرده و معادله خط عمود بر MN که از نقطه مذکور عبور کند را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\frac{M+N}{۲}=(-۱,۲)$$

$$\text{شیب } MN=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow \text{شیب عمود منصف}=۳$$

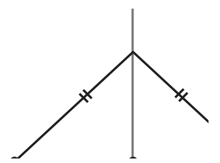
$$\Rightarrow \text{معادله}:\ y=۳x+۵$$

۱۸. **گزینه «۲»**

$$\begin{cases}x+۳y=۴\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=۲\\ x=-۲\end{cases}\Rightarrow \text{فاصله}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

۱۹. **گزینه «۱»**

باید معادله عمودمنصف AB را بنویسیم:



$$H\left(\frac{۵-۳}{۲},\frac{۴+۲}{۲}\right)=(۱,۳)$$

$$\text{شیب } AB=\frac{۴-۲}{۵-(-۳)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow[\text{عمودمنصف}]{\text{شیب}}-۴$$

$$y-۳=-۴(x-۱)\Rightarrow y-۳=-۴x+۴\Rightarrow y+۴x-۷=۰$$

۲۰. **گزینه «۲»**

$$M=\frac{A+B}{۲}=\left(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow OM=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$

۲۱. **گزینه «۲»**

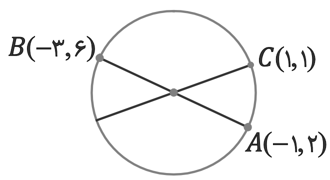
$$\begin{cases}\text{طول } AB:\sqrt{۱۳}\\ \text{طول } BC:\sqrt{۲۶}\\ \text{طول } AC:\sqrt{۱۳}\end{cases}\Rightarrow \text{قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین}$$

زیرا هم $AB=AC$ و هم $AB^۲+AC^۲=BC^۲$

۲۲. **گزینه «۲»**

همه قطرهای دایره از مرکز آن‌ها عبور می‌کنند. چون A و B مختصات دو سر یکی از قطرها هستند پس می‌توانیم مختصات مرکز دایره را بیابیم:

$$\left.\begin{aligned}x_۰&=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{-۱+(-۳)}{۲}=-۲\\ y_۰&=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۲+۶}{۲}=۴\end{aligned}\right\}\Rightarrow O(-۲,۴)$$



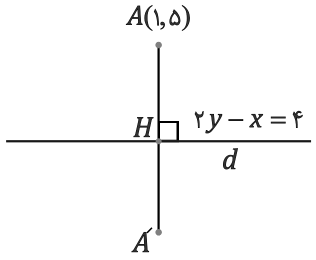
پس قطر دیگر دایره از نقاط $C(۱,۱)$ و $O(-۲,۴)$ عبور می‌کند. حال معادله این خط را می‌نویسیم:

$$\text{شیب } OC=\frac{۴-۱}{-۲-۱}=\frac{۳}{-۳}=-۱\Rightarrow y-۱=-۱(x-۱)\Rightarrow y=y+x=۲$$

۲۳. **گزینه «۲»**

مطابق شکل قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط d، A' می‌نامیم. خط d عمود منصف پاره‌خط AA' است. پس ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از A و A' را به‌دست می‌آوریم:

$$d:۲y-x=۴\rightarrow \text{شیب } d=\frac{۱}{۲}\rightarrow \text{شیب } AA'=-۲$$



معادله خط گذرنده از A و A': $y-۵=-۲(x-۱)\rightarrow y=-۲x+۷$

حال محل تلاقی دو خط d و AA' را به‌دست می‌آوریم تا نقطهٔ H را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases}۲y-x=۴\\ y+۲x=۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴y-۲x=۸\\ y+x=۷\end{cases}\Rightarrow ۵y=۱۵\rightarrow y=۳,x=۲$$

پس مختصات نقطه H به صورت (۳ و ۲) است از طرفی هم H وسط پاره‌خط AA' است، پس:

$$\left.\begin{aligned}x_H&=\frac{x_A+x_{A'}}{۲}\rightarrow x_{A'}=(۲\times۲)-۱=۳\\ y_H&=\frac{y_A+y_{A'}}{۲}\rightarrow y_{A'}=(۲\times۳)-۵=۱\end{aligned}\right\}\rightarrow A'(۳,۱)$$

۲۴. **گزینه «۳»**

$$y+x-۱=۰\Rightarrow \text{فاصله}=\frac{|۰+۰-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۵. **گزینه «۲»**

$$\text{فاصله تا ضلع موازی}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\Rightarrow ۲x-y=۱۱:\ \text{معادله ضلع دیگر}$$

$$\text{فاصله تا ضلع موازی}=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}\quad ۲y+x=۱۸:\ \text{معادله ضلع دیگر}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

۲۶. **گزینه «۲»**

$(a,۲a+۱)$: نقطه مطلوب

$$y=x \text{ فاصله از خط }=\frac{|۲a+۱-a|}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{|a+۱|}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}\Rightarrow\begin{cases}a=۷\\ a=-۹\end{cases}$$

۲۷. **گزینه «۳»**

ابتدا معادله هر دو خط را به‌صورت $ax+by+c=۰$ که در آن ضرایب x و y یکسان باشند می‌نویسیم:

$$\begin{cases}۳x+۴y=۵\\ ۶x+۸y=۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳x+۴y=۵\\ ۳x+۴y=۱\end{cases}\Rightarrow d=\frac{|۵-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۴}{۵}$$

۲۸. **گزینه «۴»**

چون دو خط داده شده با هم موازی است، پس اضلاع روبروی مربع هستند.

$$\begin{cases}۳x-۴y=۵\\ ۳x-۴y=۴\end{cases}$$

$$\text{فاصله دو خط (طول ضلع)}=\frac{۵-۴}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow \text{محیط}=۴\times\frac{۱}{۵}=۰/۸$$

۲۹. **گزینه «۲»**

چون دو خط داده شده با هم موازی است، پس این دو خط اضلاع روبرو مربع هستند.

$$\begin{cases}-۴y+۳x=۳\\ -۴y+۳x=۵\end{cases}$$

$$\text{فاصله دو خط (طول ضلع)}=\frac{۵-۳}{\sqrt{۹+۱۶}}=۰/۴$$

$$\Rightarrow \text{مساحت}=(۰/۴)^۲=۰/۱۶$$

۳۰. گزینه «۳»

$$y-x-m=۰ \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|۱-۱-m|}{\sqrt{۲}} = \frac{|m|}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow |m| = ۴ \Rightarrow m = \pm ۴$$

۳۱. گزینه «۴»

معادله خط گذرنده از پاره‌خط BC را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} B(۳,۴) \\ C(۰,-۲) \end{cases} \to \text{شیب}BC = \frac{۴-(-۲)}{۳-۰} = ۲ \to BC: y = ۲x-۲$$

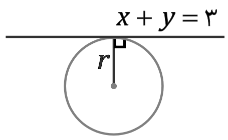
پس باید فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۱,۲)$ را از خط $y = ۲x-۲$ به‌دست آوریم:

$$d = \frac{|y-۲x+۲|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۵}} = \frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$$

۳۲. گزینه «۲»

محل تلاقی دو خط $۳x+۴y=۷$ و $۴x+۵y=۹$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۳x+۴y=۷ \\ ۴x+۵y=۹ \end{cases} \to \begin{cases} ۱۲+۱۶y=۲۸ \\ -۱۲x-۱۵y=-۲۷ \end{cases} \Rightarrow y=۱, x=۱$$



پس مختصات مرکز دایره $(۱,۱)$ است.
فاصلهٔ نقطهٔ مرکز دایره از خط مماس بر آن، برابر شعاع دایره است.

$$d = \frac{|x+y-۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۳. گزینه «۴»

می‌دانیم مجموعه نقاطی که فاصله آن‌ها از یک خط برابر عددی ثابت باشد دو خط موازی خط مذکور است. فرض می‌کنیم مختصات نقاط روی این دو خط $M(x,y)$ باشد، پس داریم:

$$\frac{|۳y-۴x+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}} = ۲ \Rightarrow |۳y-۴x+۲| = ۱۰$$

$$\begin{cases} ۳y-۴x+۲=۱۰ \Rightarrow ۳y-۴x-۸=۰ \\ ۳y-۴x+۲=-۱۰ \Rightarrow ۳y-۴x+۱۲=۰ \end{cases}$$

۳۴. گزینه «۲»

$$\begin{cases} y-۲x=-۱ \\ x+۲y=۳ \end{cases} \Rightarrow A=(۱,۱)$$

باید فاصله A را از BC به‌دست آوریم:

$$d = \frac{|\overset{۱}{x}+\overset{۱}{y}-۴|}{\sqrt{۱۲+۱۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

۳۵. گزینه «۴»

$$\left.\begin{array}{l} \text{فاصله نقطه از خط} = \dfrac{|۲(۱)+۲-۶|}{\sqrt{۵}} = \dfrac{۲}{\sqrt{۵}} \\ \text{فاصله نقطه از خط} = \dfrac{|۶-\frac{۱}{۲}|}{\sqrt{۵}} = \dfrac{\frac{۱۱}{۲}}{\sqrt{۵}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{\frac{۱۱}{۲}}{\sqrt{۵}}} = \frac{۴}{۱۱}$$

۳۶. گزینه «۴»

$$\text{گزینه ۱}: \Delta = ۲۵-۴\times۳(-۱) > ۰ \Rightarrow \text{۲ ریشه}$$

$$\text{گزینه ۲}: (x^۲)^۲+۲x^۲-۱=۰$$

$$\Rightarrow x^۲ = \begin{cases} \dfrac{-۱+\sqrt{۱+۴}}{۲} = \dfrac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \text{۲ ریشه} \\ \dfrac{-۱-\sqrt{۱+۴}}{۲} = \dfrac{-۱-\sqrt{۵}}{۲} < ۰ \Rightarrow \text{بدون جواب} \end{cases}$$

$$\text{گزینه ۳}: (x^۳)^۲+x^۳-۱=۰$$

$$\Rightarrow x^۳ = \begin{cases} \dfrac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \text{۱ ریشه} \\ \dfrac{-۱-\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \text{۱ ریشه} \end{cases} \Rightarrow \text{۲ ریشه}$$

$$\text{گزینه ۴}: x^۳+۴x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x^۲+۴x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲+۴x-۱=۰ \Rightarrow \Delta' = ۴-(-۱) > ۰ \text{ ۲ ریشه} \end{cases} \Rightarrow \text{۳ ریشه}$$

۳۷. گزینه «۱»

$$(x^۲+x+۱)^۲-۳(x^۲+x+۱)+۲=۰$$

$$\xrightarrow{a=x^۲+x+۱} a^۲-۳a+۲=۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۱)=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} a=۲ \Rightarrow x^۲+x+۱=۲ \Rightarrow x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow x = \dfrac{-۱\pm\sqrt{۱+۴}}{۲} \\ a=۱ \Rightarrow x^۲+x+۱=۴ \Rightarrow x^۲+x=۰ \Rightarrow x(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۱ \end{cases} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{۴ ریشه حقیقی}$$

۳۸. گزینه «۴»

$$(x^۲+۲x)^۲-۳(x^۲+۲x)+۲=۰$$

اگر فرض کنیم $t = x^۲+۲x$ داریم:

$$t^۲-۳t+۲=۰ \to \begin{cases} t=۱ \to x^۲+۲x=۱ \to x^۲+۲x-۱=۰ \\ t=۲ \to x^۲+۲x=۲ \to x^۲+۲x-۲=۰ \end{cases}$$

هر یک از معادلات فوق ۲ جواب حقیقی متمایز دارند (زیرا Δ آن‌ها مثبت است) که جمع ریشه‌های هر یک برابر $-\frac{b}{a}$ است. پس جمع کل ریشه‌های معادله برابر است با:

$$(-۲)+(-۲) = -۴$$

۳۹. گزینه «۲»

اگر فرض کنیم $t = x+\frac{۱}{x}$ داریم:

$$t^۲-۴t-۵=۰ \to \begin{cases} t=-۵ \to x+\dfrac{۱}{x}=-۵ \\ t=۱ \to x+\dfrac{۱}{x}=۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times x} \begin{cases} x^۲+۱=-۵x \to x^۲+۵x+۱=۰ \to \Delta>۰ \to \text{۲ریشه} \\ x^۲+۱=x \to x^۲-x+۱=۰ \to \Delta<۰ \to \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

۴۰. گزینه «۱»

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲} = (x+\frac{۱}{x})^۲-۲ \to x^۲+\frac{۱}{x^۲}+x+\frac{۱}{x}$$
$$= (x+\frac{۱}{x})^۲+(x+\frac{۱}{x})-۲$$

پس:

$$(x+\frac{۱}{x})^۲+(x+\frac{۱}{x})-۲=۴ \to (x+\frac{۱}{x})^۲+(x+\frac{۱}{x})-۶=۰$$

اگر فرض کنیم $t = x+\frac{۱}{x}$ داریم:

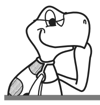
$$t^۲+t-۶=۰ \to \begin{cases} t=-۳ \\ t=۲ \end{cases} \to \begin{cases} x+\dfrac{۱}{x}=-۳ \\ x+\dfrac{۱}{x}=۲ \end{cases} \xrightarrow[x\neq۰]{\times x}$$

$$\begin{cases} x^۲+۱=-۳x \to x^۲+۳x+۱=۰ \to \text{جمع ریشه ها} = -\dfrac{b}{a} = -۳ \\ x^۲+۱=۲x \to x^۲-۲x+۱=۰ \to (x-۱)^۲=۰ \to x=۱ \end{cases}$$

پس این معادله دارای ۳ ریشهٔ متمایز است که جمع آن‌ها برابر -۲ است.

۴۱. گزینه «۳»

$$p = \frac{-۲}{۱} < ۰ \Rightarrow \text{ریشه‌ها مختلف‌العلامت}$$



پاسخ آزمون فصل ۱

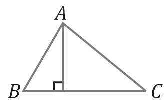
۱. گزینه «۳»

مختصات هر نقطه روی خط $y=x$ به‌صورت (x,x) است در نتیجه:

$$d=\sqrt{(x-۱)^۲+(x-۲)^۲}=۲ \Rightarrow x^۲-۲x+۱+x^۲-۴x+۴=۴$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۱=۰$$

جمع دو ریشه معادله بالا همان جمع طول این نقاط است که برابر $-\frac{b}{a}=۳$ است.

۲. گزینه «۱»



$$\text{شیب}BC=\frac{-۲-۰}{۱-۳}=۱$$
$$\xrightarrow[\text{بر } BC \text{ است}]{AH \text{ عمود}} \text{شیب}AH=-۱$$

$$\text{معادله خط گذرنده از } AH:\ y=-x+b \xrightarrow{A=(-۱,۲)} y=-x+۱$$

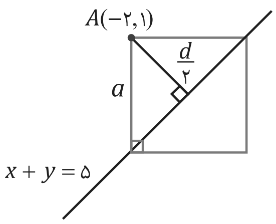
۳. گزینه «۴»

هر نقطه روی خط $y=۲x+۱$ به طول α دارای مختصات $(\alpha,۲\alpha+۱)$ است.
فاصله هر نقطه به طول α واقع بر این منحنی خط $y=x$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{|y-x|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=۴\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{|۲\alpha+۱-\alpha|}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲} \Rightarrow |\alpha+۱|=۸$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_۱=۷\\ \alpha_۲=-۹\end{cases} \Rightarrow \alpha_۱+\alpha_۲=-۲$$

۴. گزینه «۲»

فاصله نقطه A از خط $x+y=۵$ برابر نصف طول قطر مربع است. در نتیجه:



$$\frac{d}{۲}=\frac{|\overset{\overset{-۲}{\uparrow}}{x}-\overset{\overset{۱}{\uparrow}}{y}-۵|}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{d}{۲}=\frac{۶}{\sqrt{۲}}$$
$$\Rightarrow d=\frac{۱۲}{\sqrt{۲}}=۶\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow a\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲} \Rightarrow a=۶$$
$$\Rightarrow P=۴a=۲۴$$

۵. گزینه «۳»

معادله دو خط داده شده را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}A(۰,۰)\\ B(۱,۱)\end{cases} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱ \Rightarrow d_۱: y=x$$

$$\begin{cases}C(۱,۳)\\ D=(۲,۴)\end{cases} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{۴-۳}{۲-۱}=۱ \Rightarrow d_۲: y=x+۲$$

سپس فاصله دو خط موازی $y=x$ و $y=x+۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}ax+by=c\\ ax+by=c'\end{cases} \Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow \begin{cases}y-x=۰\\ y-x=۲\end{cases}$$
$$\Rightarrow d=\frac{۲}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۶. گزینه «۳»

دو خط داده شده با هم موازی‌اند. می‌دانیم فاصله دو خط موازی $ax+by=c$ و $ax+by=c'$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است. پس:

$$\begin{cases}۲x+\sqrt{۵}y=۳\\ ۲\sqrt{۵}x+۵y=۰\end{cases} \xrightarrow{\times\sqrt{۵}} \begin{cases}۲\sqrt{۵}x+۵y=۳\sqrt{۵}\\ ۲\sqrt{۵}x+۵y=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|۳\sqrt{۵}-۰|}{\sqrt{(۲\sqrt{۵})^۲+۵^۲}} \Rightarrow d=\frac{۳\sqrt{۵}}{\sqrt{۴۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۵}}=۱ \Rightarrow P=۴$$

۷. گزینه «۲»

با تلاقی دو خط گذرنده از AB و AC مختصات رأس A را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x+۲y=۳\\ y=۲x-۱\end{cases} \Rightarrow x+۴x-۳=۳ \Rightarrow ۵x=۵ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=۱$$

حال فاصله نقطه $A(۱,۱)$ را از خط $x+y=۴$ به‌دست می‌آوریم که برابر ارتفاع AH است:

$$d=\frac{|\overset{\overset{۱}{\uparrow}}{x}+\overset{\overset{۱}{\uparrow}}{y}-۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

۸. گزینه «۳»

فرض می‌کنیم $t=x^۲-۲x$ در نتیجه:

$$t^۲-t=۲ \Rightarrow t^۲-t-۲=۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}t=۲\\ t=-۱\end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases}x^۲-۲x=۲ \to x^۲-۲x-۲=۰ \xrightarrow{\Delta>۰} \text{۲ریشه}\\ x^۲-۲x=-۱ \to x^۲-۲x+۱=۰ \to (x-۱)^۲=۰ \to x=۱ \to \text{۱ریشه}\end{cases}$$

پس معادله دارای ۳ ریشه متمایز است.

۹. گزینه «۴»

$$\begin{cases}\Delta>۰:\ ۴(a-۲)^۲-۴(۱۴-a)>۰ \xrightarrow{\div ۴} a^۲-۳a-۱۰>۰\\ \Rightarrow (a+۲)(a-۵)>۰ \Rightarrow a<-۲ \text{ یا } a>۵ \quad (۱)\\ P>۰:\ \frac{c}{a}=۱۴-a>۰ \Rightarrow a<۱۴ \quad (۲)\\ S>۰:\ -\frac{b}{a}=۲(a-۲)>۰ \Rightarrow ۲<A \quad (۳)\end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳)=(۵,۱۴)$$

۱۰. گزینه «۳»

$$S=\alpha+\beta=\frac{۱}{۲}$$

$$S'=\alpha^۳+\beta^۳=\frac{m}{۸}$$

$$S'=\alpha^۳\beta^۳=-۱ \Rightarrow (\alpha\beta)^۳=-۱ \Rightarrow \alpha\beta=-۱$$

$$\Rightarrow S=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\tfrac{۱}{۲})^۳+۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{m}{۸}$$
$$\Rightarrow \frac{۱۳}{۸}=\frac{m}{۸} \Rightarrow m=۱۳$$

۱۱. گزینه «۴»

$$S=\alpha+\beta=\frac{m+۱}{۲}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{۱}{۱۶}$$

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=۴$$
$$\xrightarrow{\alpha\beta=\frac{۱}{۱۶}} \alpha+\beta=\frac{۷}{۲} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲} \Rightarrow m=۶$$

۱۲. گزینه «۲»

برای آنکه عبارت درجه دوم $Ax^۲+Bx+C$ همواره مثبت باشد، باید $\Delta<۰$ و $A>۰$ باشد:

$$\begin{cases}\Delta=۲۴+۴a(۱-a)<۰ \xrightarrow{\div ۴} ۶+a(۱-a)=۶+a-a^۲<۰\\ \Rightarrow a^۲-a-۶>۰ \qquad ۱-a>۰ \Rightarrow a<۱\end{cases}$$

$$\begin{cases} a^۲-a-۶>۰ \Rightarrow (a-۳)(a+۲)>۰ \\ \Rightarrow a\in(-\infty,-۲)\cup(۳,+\infty) \quad (۱) \\ a<۱ \qquad (۲)\end{cases}$$

$$(۱)\cap(۲)=(-\infty,-۲)$$

۱۳. گزینه «۴»

باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} ۱:\Delta>۰ \to ۴m^۲+۱۲(m-۶)<۰ \xrightarrow{\div ۴} m^۲+۳m-۱۸>۰ \\ ۲:p>۰ \to \frac{c}{a}=-\frac{۳}{m-۶}>۰ \to m<۶ \\ ۳:s<۰ \to -\frac{b}{a}=\frac{۲m}{m-۶}<۰ \xrightarrow[\text{(شرط ۲)}]{\text{چون } m<۶ \text{ است}} m>۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱:(m-۳)(m+۶)>۰ \to m<-۶ \text{ یا } m>۳ \\ ۲:m<۶ \\ ۳:m>۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۳<m<۶$$

۱۴. گزینه «۳»

می‌دانیم هر تابع درجه دوم $f(x)=Axx^۲+Bx+C$ به ازای اعداد بین دو ریشه خود علامتی مخالف علامت A دارد، پس اگر α عددی بین دو ریشه باشد، همواره داریم $A\cdot f(\alpha)<۰$، پس:

$$f(۱)=a+۴+۷-۳a=۱۱-۲a$$

$$\Rightarrow a\cdot f(۱)<۰ \Rightarrow a(۱۱-۲a)<۰ \Rightarrow a\in \mathbb{R}-\left[۰,\frac{۱۱}{۲}\right]$$

۱۵. گزینه «۲»

$$y=\frac{۱}{۴}x^۲-۲$$

$$d=\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۳)^۲}=\sqrt{x^۲+(\frac{۱}{۴}x^۲-۵)^۲}$$
$$=\sqrt{x^۲+\frac{۱}{۱۶}x^۴-\frac{۵}{۲}x^۲+۲۵} \Rightarrow d=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}x^۴-\frac{۳}{۲}x^۲+۲۵}$$

می‌دانیم کمترین مقدار تابع $y=ax^۲+bx+c$ برابر $\frac{-\Delta}{۴a}$ است. اگر $x^۲=t$ باشد، داریم:

$$y=\frac{۱}{۱۶}t^۲-\frac{۳}{۲}t+۲۵$$

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(\frac{۹}{۴}-\frac{۲۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۱۶}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۱۶ \Rightarrow d_{\min}=\sqrt{۱۶}=۴$$

۱۶. گزینه «۱»

$$\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱-۲x}{x^۳+۱}+\frac{۲}{x^۲-x+۱} \Rightarrow \frac{x^۲-x+۱}{x^۳+۱}=\frac{۱-۲x+۲x+۲}{x^۳+۱}$$
$$\Rightarrow \frac{x^۲-x+۱}{x^۳+۱}=\frac{۳}{x^۲+x+۱}$$

$$\Rightarrow x^۲-x+۱=۳ \Rightarrow x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=-۱ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۷. گزینه «۳»

$W_۱=۱۱kg$ وزن کل

$m_۱=۰/۴\times ۱۱=۴/۴$ (وزن رنگ خالص)

$W_۲=۴kg$

$m_۲=۴\times ۰/۷=۲/۸$ (وزن رنگ خالص)

$$\xrightarrow{\text{مخلوط}} \begin{cases} W=W_۱+W_۲=۱۵ \\ m=m_۱+m_۲=۲/۸+۴/۴=۷/۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۷/۲-x}{۱۵-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۷/۲-x}{۱۵-x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱۴/۴-۲x=۱۵-x$$
$$\Rightarrow x=۱۵-۱۴/۴=۰/۶$$

۱۸. گزینه «۲»

$$\underbrace{x^۲+۴x+۳}_{t}=\sqrt{\underbrace{x^۲+۴x+۵}_{t+۲}} \Rightarrow t=\sqrt{t+۲}$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} t^۲=t+۲ \Rightarrow t^۲-t-۲=۰ \Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰$$

$$\begin{cases} t=۲ \Rightarrow x^۲+۴x+۳=۲ \Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰ \xrightarrow{\text{۲ ریشه}} P=\frac{c}{a}=۱ \\ t=-۱ \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

زیرا باید $x^۲+۴x+۳$ بزرگ‌تر از صفر باشد.

۱۹. گزینه «۱»

اگر فرض کنیم $t=۲x+۱$ داریم: $۲x+۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq -\frac{۱}{۲}$

$$\sqrt{t+۳}+\sqrt{t}=\sqrt{۲t+۷} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t+۳t+۲\sqrt{t^۲+۳t}=۲t+۷$$
$$\Rightarrow ۲\sqrt{t^۲+۳}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^۲+۳t}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^۲+۳t=۴ \Rightarrow t^۲+۳t-۴=۰$$
$$\Rightarrow (t+۴)(t-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۴ \\ t=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=-۴ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲} \ \text{غ ق ق} \ (x\geq -\frac{۱}{۲}) \\ ۲x+۱=۱ \Rightarrow x=۰ \end{cases}$$

پس معادله ۱ جواب دارد.

۲۰. گزینه«۳»

$$(۲x+۱)^۲=۱۱x-۲ \Rightarrow$$
$$۴x^۲+۴x+۱=۱۱x-۲ \Rightarrow ۴x^۲-۷x+۳=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow |\alpha-\beta|=\left|۱-\frac{۳}{۴}\right|=\frac{۱}{۴}$$