فصل اول:

شمـــارش

اصول شمارش

در این فصل می‌خواهیم عمل شمارش بدون انجام عمل شمردن را شرح دهیم. برای شمارش، دو اصل مهم زیر را باید یاد بگیریم:

۱ **اصل ضرب (اصل اساسی شمارش):** اگر کاری شامل چند مرحله باشد، تعداد راه‌های انجام کل آن کار برابر با حاصل‌ضرب تعداد راه‌های هر مرحله است.

؟ فرض کنید برای صرف نهار وارد رستورانی شده‌اید. این رستوران ۴ نوع غذا، ۳ نوع نوشیدنی و ۲ نوع سالاد دارد. به چند طریق می‌توانید یک وعده نهار شامل غذا، نوشیدنی و سالاد انتخاب کنید؟

از آن‌جا که شما غذا و نوشیدنی و سالاد میل می‌کنید، پس تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با: $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

توجه

«و» نشانهٔ عمل ضرب است.

۲ **اصل جمع:** این اصل را با یک مثال بیان می‌کنیم (فقط به تفاوت این مثال و مثال قبلی در اصل ضرب، خوب دقت کنید).

؟ فرض کنید برای صرف نهار وارد رستورانی شده‌اید. این رستوران ۲ نوع کباب، ۳ نوع پیتزا و ۴ نوع ساندویچ دارد. به چند طریق می‌توانید یک وعده نهار سفارش دهید؟

از آن‌جا که شما کباب یا پیتزا یا ساندویچ میل می‌کنید، پس تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با: $۲ + ۳ + ۴ = ۹$

توجه

«یا» نشانهٔ عمل جمع است.

از اصول شمارش در موارد متعددی استفاده می‌شود، مثلاً برای مسائل عددنویسی (با استفاده از ارقام) یا کلمه‌نویسی (با استفاده از حروف).

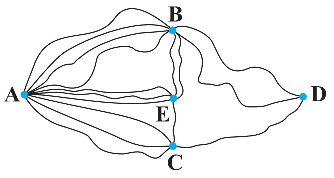
۱- شخصی مسیر تهران به اصفهان را به ۳ طریق و مسیر اصفهان به شیراز را به ۲ طریق طی می‌کند. به چند طریق این شخص می‌تواند از تهران با گذر از اصفهان، به شیراز برود؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۲۰

۲- اگر شخصی مسیر تهران به اصفهان را به ۳ طریق و مسیر اصفهان به شیراز را به ۲ طریق بتواند برود و برگردد و بخواهد طوری این کار را انجام دهد که در مسیر برگشت، از راه‌هایی که رفته عبور نکند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۳۶

• شکل مقابل، راه‌های دسترسی به شهرهای مختلف است. (براین اساس به سؤالات ۳ و ۴ پاسخ دهید.)



۳- به چند طریق می توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۶ ۴) ۴۰

۴- به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد، به‌طوری که از شهر C عبور نکنیم؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

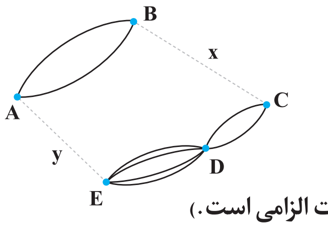
• یک کارخانهٔ خودروسازی، خودروهایی در ۶ رنگ، ۳ حجم موتور، ۴ نوع مختلف داشبورد و ۲ مدل جعبه دنده تولید می‌کند. (به سؤالات ۵ و ۶ پاسخ دهید.)

۵- تعداد راه‌های انتخاب یک فرد برای خرید یک اتومبیل کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۷۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۸۸

۶- با اضافه کردن یک امکان به کدام مورد، انواع بیشتری از این اتومبیل می‌تواند تولید شود؟

۱) رنگ ۲) حجم موتور ۳) داشبورد ۴) جعبه دنده



۷- در شکل مقابل، تعداد راه‌ها از شهر B به C برابر x و تعداد راه‌ها از شهر A به E برابر y است. اگر بتوانیم به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کنیم، مقدار $x - y$ کدام می‌تواند باشد؟ $(x, y \neq ۰)$ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸- به چند طریق می‌توان به یک آزمون دو گزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است، پاسخ داد؟ (پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی است.)

۱) ۲۲ ۲) $۲۰^{۲}$ ۳) ۴۰ ۴) $۲^{۲۰}$

۹- عبارت $(a-b+c)(x-y)(z+t)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۱۰- در یک ساختمان ۶ طبقه وجود دارد که می‌خواهیم با ۴ رنگ، آن‌ها را رنگ‌آمیزی کنیم. به چند طریق می‌توان این ساختمان را با این ۴ رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو طبقهٔ مجاوری هم‌رنگ نباشند؟

۱) ۴۰۹۶ ۲) ۳۰۷۲ ۳) ۱۵۳۶ ۴) ۹۷۲

۱۱- با استفاده از حروف کلمهٔ «مصباح» و بدون توجه به مفهوم آن، چند کلمهٔ سه حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

۱۲- در صفحهٔ پشت یک دستگاه الکتریکی (مانند تلویزیون) سه درگاه وجود دارد. اگر ما سه فیش در اختیار داشته باشیم و امتحان کردن هر فیش ۱۵ ثانیه طول بکشد، حداکثر ظرف چند دقیقه همهٔ فیش‌ها به‌درستی به درگاه مربوطه وصل می‌شوند؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

● با اعداد ۲،۹،۴،۱ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به‌طوری که: (به سؤالات ۱۳ و ۱۴ پاسخ دهید.)

۱۳- تکرار ارقام مجاز باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۲ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۱۴- تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۳۲

۱۵- با حروف کلمهٔ «نیستان» چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان ساخت که با حرف «ن» شروع و به حرف «ن» ختم شود؟(تکرار حروف به‌جز حرف «ن» که در اول و آخر می‌آید، مجاز نیست.)

۱) ۲۴ ۲) ۶ ۳) ۴۸ ۴) ۳۶

۱۶- چند عدد سه رقمی وجود دارد؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۹۹۰ ۳) ۹۹۹ ۴) ۱۰۰۰

۱۷- چند عدد سه رقمی، با ارقام متمایز وجود دارد؟ *(انسانی خارج ۸۸)*

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰۴ ۳) ۶۴۸ ۴) ۷۲۰

۱۸- چند عدد دو رقمی بدون صفر وجود دارد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸۱ ۴) ۹۸

۱۹- چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟

۱) ۱۹۶ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۳۳۶

۲۰- چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارد؟ *(انسانی خارج ۹۱)*

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۲۱- می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن‌ها یکی از حروف {الف، ب، ج، د} و در سمت چپ آن‌ها عدد دو رقمی بدون رقم صفر نوشته شود. چند کارت می‌توانیم بسازیم؟

۱) ۳۲۴ ۲) ۳۱۸ ۳) ۴۱۷ ۴) ۴۲۰

۲۲- چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟ *(انسانی داخل ۸۸)*

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

۲۳- با ارقام موجود در مجموعه {۱،۲،۴،۶،۷،۸}، چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ *(انسانی خارج ۹۸)*

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۲۴- پلاک اتومبیل‌سواری سری «ب» در تهران به‌صورت | تهران | *** ب ** | I.R. IRAN | است که هر ستاره نمایش یک رقم غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟ *(انسانی داخل ۸۲)*

۱) ۱۱۶۶۴ ۲) ۱۴۵۸۰ ۳) ۱۵۴۸۰ ۴) ۱۸۲۲۵

۲۵- با ارقام ۵،۴،۳،۲،۱،۰ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۲۶- با ارقام ۰,۲,۴,۷,۹ چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۷

• با اعداد ۵,۴,۳,۲,۱,۰ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که: (به سؤالات ۲۷ تا ۳۰ پاسخ دهید.)

۲۷- عدد مضرب ۵ بوده و تکرار ارقام مجاز باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۶۰ ۴) ۷۲

۲۸- عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز باشد؟

۱) ۷۵ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۰۰

۲۹- عدد مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۵۶ ۴) ۳۲

۳۰- عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۲ ۴) ۵۶

۳۱- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ ، چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵ ، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ *(انسانی داخل ۹۸)*

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۳۲- با ارقام ۰,۳,۵,۸ چند کد تلفن چهار رقمی شهرستان می‌توان نوشت؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۳۳- چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که در آن‌ها رقم ۷ ، فقط دوبار به‌صورت متوالی آمده باشد؟

۱) ۲۰۵ ۲) ۲۱۵ ۳) ۲۲۵ ۴) ۲۳۵

۳۴- با استفاده از ارقام ۰,۶,۴,۵ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به‌طوری که در همهٔ آن‌ها رقم ۶ به‌کار رفته باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

۳۵- با استفاده از ارقام ۵ ، ۶ ، ۷ و ۹ چند عدد حداکثر سه رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۰ ۳) ۴۲ ۴) ۵۲

فاکتوریل

تعریف فاکتوریل: فاکتوریلِ یک عدد طبیعی به معنی ضرب آن عدد در همهٔ اعداد طبیعی قبل از خودش است. علامت فاکتوریل به‌صورت (!) می‌باشد.

$$\boxed{n! = n(n-۱)(n-۲)\times\dots\times۱}$$

$۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۱۲۰$

طبق قرارداد ۱ = !۰ تعریف می‌شود.

نکته

نوشتن عوامل ضربی در عمل فاکتوریل را می‌توانیم هر جایی قطع کنیم، به شرط آن‌که در جلوی جملهٔ آخر، علامت فاکتوریل را قرار دهیم.

$۷! = ۷\times۶\times۵!$ یا $۷! = ۷\times۶\times۵\times۴!$

$(n+۱)! = (n+۱)n!$ یا $n! = n(n-۱)(n-۲)!$

نکتهٔ فوق در ساده کردن کسرهای دارای فاکتوریل کاربرد زیادی دارد:

$$\frac{۸!}{۵!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!} = ۳۳۶$$

$$\frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$$

۳۶- حاصل $(۱۰\times۹\times۸)$ با فاکتوریل کدام عدد طبیعی برابر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۷- سادهٔ‌شدهٔ عبارت $\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!}$ کدام است؟

۱) $n^۲+۳n+۲$ ۲) $n^۲+۳n-۲$ ۳) $n^۲+۵n-۶$ ۴) $n^۲+۵n+۶$

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ تعداد راه‌هایی که شخص می‌تواند طی کند برابر است با:

$\text{تهران} \xrightarrow{۳} \text{اصفهان} \xrightarrow{۲} \text{شیراز} \Rightarrow ۳ \times ۲ = ۶$

۲ ۲ در این مسئله، منظور از این‌که در برگشت، از راه‌هایی که رفته، عبور نکند، این است که در برگشت، تکرار راه مجاز نمی‌باشد. بنابراین:

تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به شیراز $۶ = ۲ \times ۳ \Leftarrow$: $\text{تهران} \xrightarrow{۳} \text{اصفهان} \xrightarrow{۲} \text{شیراز} \Rightarrow ۳ \times ۲ = ۶$

تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از شیراز به تهران ۲ : $\text{شیراز} \xrightarrow{۱} \text{اصفهان} \xrightarrow{۲} \text{تهران} \Rightarrow ۱ \times ۲ = ۲$

در واقع این شخص باید ۴ کار را انجام دهد: رفتن از تهران به اصفهان که به ۳ طریق ممکن است و رفتن از اصفهان به شیراز که به ۲ طریق ممکن است و برگشتن از شیراز به اصفهان که به ۱ طریق ممکن است (چون تکرار راه مجاز نیست) و برگشتن از اصفهان به تهران که به ۲ طریق ممکن است (چون تکرار راه مجاز نیست). در نهایت بنابر اصل ضرب، تمام این طرق در هم ضرب می‌شوند. یعنی:

$۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۶ \times ۲ = ۱۲$

۳ ۳ مسیرهایی که می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد، به‌صورت زیر است:

۱) $A \to B \to D \xrightarrow{\text{تعداد راه‌ها}} ۴ \times ۲ = ۸$

یا

۲) $A \to E \to B \to D \Rightarrow ۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$

یا

۳) $A \to C \to D \Rightarrow ۳ \times ۱ = ۳$

یا

۴) $A \to C \to E \to B \to D \Rightarrow ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$

یا

۵) $A \to E \to C \to D \Rightarrow ۳ \times ۱ \times ۱ = ۳$

یا

۶) $A \to B \to E \to C \to D \Rightarrow ۴ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۸$

طبق اصل جمع، تعداد کل حالات برابر است با: $۸ + ۱۲ + ۳ + ۱۲ + ۳ + ۸ = ۴۶$

۴ ۱ می‌خواهیم در سفر از شهر A به D، از شهر C عبور نکنیم، پس با توجه به پاسخ سؤال قبل، حالات ۳، ۴، ۵ و ۶ حذف می‌شود یعنی مسیر (۱) یا مسیر (۲) که تعداد کل حالات برابر است با: $۸ + ۱۲ = ۲۰$

۵ ۳ طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های هر مرحله در هم ضرب می‌شوند: $۶ \times ۳ \times ۴ \times ۲ = ۱۴۴$

۶ ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: یک حالت به تعداد حالت‌های رنگ اضافه می‌شود: $۷ \times ۳ \times ۴ \times ۲ = ۱۶۸$

گزینهٔ «۲»: یک حالت به تعداد حالت‌های حجم موتور اضافه می‌شود: $۶ \times ۴ \times ۴ \times ۲ = ۱۹۲$

گزینهٔ «۳»: یک حالت به تعداد حالت‌های داشبورد اضافه می‌شود: $۶ \times ۳ \times ۵ \times ۲ = ۱۸۰$

گزینهٔ «۴»: یک حالت به تعداد حالت‌های جعبه دنده اضافه می‌شود: $۶ \times ۳ \times ۴ \times ۳ = ۲۱۶$

پس مشاهده می‌شود با اضافه شدن یک حالت به تعداد حالت‌های جعبه دنده، انواع بیشتری از این اتومبیل تولید می‌شود.

۷ ۲ تعداد راه‌ها از B به C برابر x و از A به E برابر y است. مسیرهایی که می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد، به‌صورت زیر است:

(مسیر ۱) $A \to B \to C \to D \Rightarrow ۲ \times x \times ۲ = ۴x$

(مسیر ۲) $A \to E \to D \Rightarrow y \times ۴ = ۴y$

طبق فرض مسئله، تعداد حالاتی که می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد برابر ۲۰ است.

بنابراین $۴x + ۴y = ۲۰$ خواهد بود:

$۴x + ۴y = ۲۰ \xrightarrow{\text{فاکتور از ۴}} ۴(x + y) = ۲۰ \xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر ۴}} x + y = ۵$

یعنی مجموع دو عدد x و y برابر ۵ است که می‌تواند حالت‌های زیر باشد:

$\begin{cases} x = ۱ \\ \text{و} \\ y = ۴ \end{cases}$ یا $\begin{cases} x = ۴ \\ \text{و} \\ y = ۱ \end{cases}$ یا $\begin{cases} x = ۲ \\ \text{و} \\ y = ۳ \end{cases}$ یا $\begin{cases} x = ۳ \\ \text{و} \\ y = ۲ \end{cases}$

حاصل $x - y$ می‌تواند اعداد ۳، ۳-، ۱- یا ۱ باشد.

۸ **۴** پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. بنابراین جواب دادن به سؤال ۱، دو حالت دارد و جواب دادن به سؤال ۲، دو حالت دارد و ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد، که بنابر اصل ضرب، تعداد حالت‌های آن‌ها در هم ضرب می‌شود. یعنی:

$$\underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{\text{۲۰ تا}}=۲^{۲۰}$$

خب یه سؤال پیش میاد. منظور سؤال از این‌که «پاسخ دادن به همهٔ سؤالات الزامی است.» چیه؟

جواب اینه که اگر پاسخ دادن به سؤالات الزامی نباشه، ما برای هر سؤال، ۳ راه انتخاب داریم. یعنی مثلاً برای پاسخ دادن به سؤال اول می‌تونیم گزینهٔ «الف» یا گزینهٔ «ب» رو انتخاب کنیم، یا می‌تونیم اصلاً پاسخ نریم. پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن برابر خواهد بود با:

$$\underbrace{۳\times۳\times...\times۳}_{\text{۲۰ تا}}=۳^{۲۰}$$

۹ **۲** طبق اصل ضرب، تعداد جملات ایجاد شده برابر است با:

$$\underbrace{(a-b+c)}_{۳}\times\underbrace{(x-y)}_{۲}\times\underbrace{(z+t)}_{۲}=۱۲$$

۱۰ **۴** طبقهٔ اول ساختمان را به ۴ طریق می‌توان رنگ کرد امّا چون قرار است رنگ هر طبقه با رنگ طبقهٔ قبلی یکسان نباشد، لذا طبقه‌های بعدی هر کدام ۳ حالت برای رنگ‌آمیزی خواهند داشت. مثلاً فرض کنید طبقهٔ اول سبز رنگ باشد، طبقهٔ دوم سفید، طبقهٔ سوم می‌تواند مجدداً سبز باشد و طبقهٔ چهارم می‌تواند مجدداً سفید باشد و... . یعنی همواره در هر طبقه (به‌جز طبقهٔ اول) یکی از رنگ‌ها را دیگر نمی‌توان استفاده کرد. بنابراین:

$$\underset{\text{طبقه اول}}{۴}\times\underbrace{۳\times۳\times۳\times۳\times۳}_{\text{طبقات دیگر}}=۴\times۳^{۵}=۴\times۲۴۳=۹۷۲$$

۱۱ **۴** کلمهٔ «مصباح» دارای پنج حرف «م، ص، ب، ا، ح» است:

$$\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۶۰$$

همهٔ حروف به‌جز حرف به‌کار رفته در جایگاه قبل — همه حروف به‌جز دو حرف به‌کار رفته در جایگاه‌های قبل

۱۲ **۱**

$$\underset{\text{درگاه ۱}}{\boxed{۳}}\times\underset{\text{درگاه ۲}}{\boxed{۲}}\times\underset{\text{درگاه ۳}}{\boxed{۱}}=۶$$

به شش حالت می‌توان این ۳ فیش را به درگاه مربوطه متصل کرد و اگر امتحان کردن هر فیش ۱۵ ثانیه طول بکشد، $۹۰=۱۵\times۶$ ثانیه یا $\frac{۹۰}{۶۰}=۱/۵$ دقیقه طول می‌کشد تا تمام ۶ حالت را امتحان کنیم.

۱۳ **۳** چون عدد خواسته‌شده سه رقمی است، سه خانه (جایگاه) می‌کشیم و چون چهار عدد داریم و تکرار ارقام نیز مجاز است، هر خانه به ۴ طریق می‌تواند پر شود که بنابر اصل ضرب، تعداد حالات آن‌ها در هم ضرب می‌شود. یعنی:

$$\underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}}\Rightarrow ۴\times۴\times۴=۶۴$$

۱۴ **۲** چون عدد خواسته‌شده سه رقمی است، سه خانه می‌کشیم و چون چهار عدد داریم، خانهٔ سمت چپ (صدگان) به ۴ طریق پر می‌شود. امّا چون تکرار ارقام مجاز نیست، خانهٔ وسط (دهگان) به ۳ طریق و خانهٔ سمت راست (یکان) نیز به ۲ طریق پر می‌شود. یعنی:

$$\underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۳}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۲}}\Rightarrow ۴\times۳\times۲=۲۴$$

۱۵ **۱** ۵ خانه برای کلمهٔ ۵ حرفی می‌کشیم. کلمهٔ «نیستان» ۶ حرف دارد و خانه‌های سمت چپ و راست هر کدام فقط به یک طریق و آن هم با حرف «ن» پر می‌شوند و چون تکرار مجاز نیست، خانه‌های دیگر به ۴ طریق، ۳ طریق و ۲ طریق پر می‌شوند:

$$\underset{\text{ن}}{\boxed{۱}}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \underset{\text{ن}}{\boxed{۱}}\Rightarrow ۱\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$$

۱۶ **۱** تمامی اعداد سه رقمی با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ (یعنی ۱۰ رقم) ساخته می‌شوند:

$$\underset{\text{همهٔ ارقام به‌جز صفر}}{\boxed{۹}}\times\underset{\text{همهٔ ارقام}}{\boxed{۱۰}}\times\underset{\text{همهٔ ارقام}}{\boxed{۱۰}}=۹۰۰$$

دقت کنید که در اینجا تکرار ارقام مجاز است. زیرا مسئله اشاره‌ای به این موضوع (تکرار ارقام) نکرده است و منظور سؤال، این است که چند عدد سه رقمی وجود دارد.

۱۷ **۳** برای ساختن اعداد سه رقمی با ارقام متمایز، باید از ارقام ۰ تا ۹ (بدون تکرار ارقام) استفاده کنیم:

$$\underset{\text{صدگان}}{\overset{\text{همهٔ ارقام به‌جز صفر}}{\boxed{۹}}}\ \underset{\text{دهگان}}{\overset{\text{همهٔ ارقام به‌جز صدگان}}{\boxed{۹}}}\ \underset{\text{یکان}}{\overset{\text{همهٔ ارقام به‌جز ارقام دهگان و صدگان}}{\boxed{۸}}}\Rightarrow ۹\times۹\times۸=۶۴۸$$

۱۸ [۳] توجه کنید که این مسئله با سایر مسائلی که تاکنون حل کرده‌ایم، دو فرق دارد. اول این‌که ارقامی که به وسیلهٔ آن‌ها می‌خواهیم اعداد دو رقمی بدون صفر را بنویسیم، مشخص نیست و دوم این‌که مشخص نشده است که تکرار ارقام مجاز است یا خیر. اگر در مسئله‌ای اعداد مشخص نباشند، اعداد را از صفر تا ۹ در نظر می‌گیریم. حال برای حل این مسئله دو خانه در نظر می‌گیریم. در خانهٔ سمت چپ عدد ۹ می‌گذاریم چون به ۹ حالت پر می‌شود (یعنی اعداد ۱ تا ۹، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار بگیرد) و در خانهٔ سمت راست نیز ۹ می‌گذاریم (چون صفر مجاز نیست در آن قرار بگیرد)، پس:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{۹}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۹}} \Rightarrow ۹\times۹=۸۱$

بعضی از بچه‌ها این سؤال را این‌طوری حل می‌کنن که به جای ۹×۹ می‌نویسند ۸×۸ که خب مسلماً پاسخ، اشتباهه و فکر می‌کنن که صفر تا ۹، نه تا عدده و اگه صفر نباشه، ۸ تا عدد می‌شه، درحالی که صفر تا ۹، ده تا عدده و اگه صفر نباشه، ۹ تا عدد می‌شه.

۱۹ [۳] چون عدد مورد نظر، سه رقمی است، سه خانه می‌کشیم و چون در این مسئله، اعداد مشخص نشده‌اند، آن‌ها را از صفر تا ۹ در نظر می‌گیریم. حال چون در خانهٔ دهگان باید عددی اول قرار بگیرد، این خانه به چهار طریق پر می‌شود (یعنی اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷) و چون تکرار مجاز نیست و اعداد نمی‌توانند با صفر شروع شوند، خانهٔ سمت چپ به ۸ طریق پر می‌شود. چون صفر می‌تواند در خانهٔ سمت راست قرار بگیرد، پس خانهٔ سمت راست نیز به ۸ طریق پر می‌شود (چون صفر تا۹، ده عدد می‌باشند و خانه‌های سمت چپ و وسط هر کدام یک عدد را گرفته‌اند، بنابراین برای خانهٔ سمت راست ۸ انتخاب می‌ماند). یعنی:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{۸}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۸}} \Rightarrow ۸\times۴\times۸=۲۵۶$

۲۰ [۴] چون قرار است اعداد متشکل از ارقام فرد باشند، بنابراین باید از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ استفاده کنیم. برای جایگاه یکان فقط می‌توانیم عدد ۵ را قرار دهیم، چون اعداد حاصل باید بر ۵ بخش‌پذیر باشند و می‌دانیم تنها اعدادی بر ۵ بخش‌پذیرند که رقم یکان آن‌ها صفر یا ۵ باشد. برای بقیهٔ خانه‌ها شرط خاصی نداریم، پس هر کدام به ۵ حالت (همهٔ ارقام موجود) پر می‌شوند. در نتیجه داریم:

$\boxed{۵}\ \boxed{۵}\ \overset{\text{یکان}}{\underset{\text{فقط۵}}{\boxed{۱}}} \Rightarrow ۵\times۵\times۱=۲۵$

۲۱ [۱] برای حل این تست باید سه خانه بکشیم (دو خانه برای عدد دو رقمی بدون رقم صفر و یک خانه برای حروف). دو خانهٔ وسط و سمت چپ برای اعداد دو رقمی بدون رقم صفر است که هر کدام به ۹ طریق پر می‌شوند و خانهٔ سمت راست برای حروف است که به چهار طریق پر می‌شود. بنابراین:

$\underbrace{\boxed{۹}\ \boxed{۹}}_{\text{تعداد اعداد دو رقمی بدون رقم صفر}}\ \overset{\text{یکی از ۴ حرف}}{\boxed{۴}} \Rightarrow ۹\times۹\times۴=۳۲۴$

۲۲ [۴] می‌خواهیم اعداد ۵ رقمی بسازیم، ۵ جایگاه (خانه) برای هر رقم در نظر می‌گیریم و چون باید از ارقام زوج و غیر صفر ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم، برای هر خانه ۴ حالت وجود دارد، پس تعداد اعداد ۵ رقمی که می‌توان با این ارقام ساخت، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\overset{\text{دهگان هزار}}{\boxed{۴}}\ \overset{\text{یکان هزار}}{\boxed{۴}}\ \overset{\text{صدگان}}{\boxed{۴}}\ \overset{\text{دهگان}}{\boxed{۴}}\ \overset{\text{یکان}}{\boxed{۴}} \Rightarrow ۴^۵=۱۰۲۴$

ممکنه براتون سؤال پیش بیاد که چرا ارقام رو تکراری گرفتیم، اینکه چون فقط گفته اعداد ۵ رقمی بسازیم و شرطی واسه تکراری نبودن ارقامش نذاشته (در ضمن نمی‌تونیم با ۴ رقم متمایز، اعداد ۵ رقمی با ارقام غیرتکراری بسازیم.)

۲۳ [۳]

$\underset{\substack{\text{همه ارقام بجز رقم}\\ \text{به کار رفته در یکان}}}{\boxed{۵}} \times \overset{\text{۴ رقم باقی‌مانده}}{\boxed{۴}} \times \underset{\text{۳ رقم باقی‌مانده}}{\boxed{۳}} \times \overset{\text{۲ رقم باقی‌مانده}}{\boxed{۲}} \times \underset{\text{ارقام ۱ یا ۷}}{\boxed{۲}} =۲۴۰$

۲۴ [۲] ۵ ستاره داریم و به جای هر ستاره، یک رقم غیر صفر قرار می‌گیرد. چون می‌خواهیم پلاک با رقم فرد شروع و با رقم زوج پایان یابد، به‌جای ستارهٔ سمت چپ، پنج عدد فرد را می‌توان قرار داد (اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹) و به جای ستارهٔ سمت راست، چهار عدد زوج می‌توان قرار داد (اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸) و به جای بقیهٔ ستاره‌ها، ۹ عدد (از ۱ تا ۹) می‌توان قرار داد (چون تکرار ارقام مجاز است) که در این‌صورت، تعداد کل حالات به‌صورت زیر است:

$\overset{۹،۷،۵،۳،۱}{\underset{\text{طریق}}{\boxed{۵}}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۹}}\ \text{ب}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۹}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۹}}\ \overset{۸،۶،۴،۲}{\underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}}} \Rightarrow ۵\times۹\times۹\times۹\times۴=۱۴۵۸۰$

۲۵ [۲] چون می‌خواهیم یک عدد سه رقمی بسازیم، سه خانه در نظر می‌گیریم. حال چون عدد مورد نظر بزرگ‌تر از ۳۰۰ است، در خانهٔ سمت چپ که خانهٔ صدگان می‌باشد باید اعدادی انتخاب کنیم که ۳ یا بزرگ‌تر از ۳ باشند، بنابراین خانهٔ سمت چپ به سه حالت پر می‌شود (اعداد ۳، ۴ و ۵) و چون تکرار مجاز نیست، خانه‌های بعدی به پنج حالت و چهار حالت پر می‌شوند. یعنی:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{۳}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۵}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}} \Rightarrow ۳\times۵\times۴=۶۰$

۲۶ **۱** چون می‌خواهیم یک عدد سه رقمی بسازیم، سه خانه در نظر می‌گیریم. حال چون عدد مورد نظر کوچک‌تر از ۴۰۰ است، در خانهٔ سمت چپ که خانهٔ صدگان می‌باشد باید اعدادی انتخاب کنیم که از ۴ کم‌تر باشد و صفر هم نباشد (چون اعداد با صفر شروع نمی‌شوند). بنابراین خانهٔ سمت چپ به یک حالت که آن هم عدد ۲ است پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه‌های بعدی به چهار حالت و سه حالت پر می‌شوند. یعنی:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{1}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{4}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{3}} \Rightarrow 1\times4\times3=12$

۲۷ **۳**

نکته: اگر جایگشت مطلوب دارای شرط خاصی در یکی (یا چندتا) از جایگاه‌ها باشد، شمردن را از همان جایگاه شروع می‌کنیم و در صورت لزوم از اصل جمع برای محاسبهٔ جایگشت مطلوب استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال وقتی در مسئله‌ای تعداد اعداد زوج را بخواهد، ابتدا تعداد حالت‌های مطلوب برای یکان را محاسبه می‌کنیم، یا اگر در جایگشت‌های یک کلمه، ذکر شود که حروف خاصی در جای به‌خصوصی قرار دارند، چون جایگاه آن حروف معلوم است (و لذا جایگشتی ندارد)، ابتدا برای هر یک از آن‌ها یک حالت در نظر می‌گیریم، سپس جایگشت بقیهٔ حروف را شمارش می‌کنیم.

می‌دانیم اعدادی مضرب ۵ می‌باشند که رقم سمت راست‌ها آن‌ها صفر یا ۵ باشد. بنابراین خانهٔ سمت راست به دو طریق یعنی با صفر یا ۵ پر می‌شود و چون تکرار ارقام مجاز است، خانهٔ وسط به ۶ طریق پر می‌شود، اما خانهٔ سمت چپ به ۵ طریق پر می‌شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار بگیرد (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند.) بنابراین:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{5}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{6}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{2}} \Rightarrow 5\times6\times2=60$

۲۸ **۲** چون شرط زوج بودن خواسته شده است، پس خانهٔ سمت راست (رقم یکان) فقط با یکی از اعداد صفر یا ۲ یا ۴ می‌تواند پر می‌شود که سه حالت دارد و چون تکرار مجاز است، خانهٔ وسط به ۶ طریق پر می‌شود. امّا خانهٔ سمت چپ به ۵ طریق پر می‌شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار بگیرد (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند) بنابراین:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{5}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{6}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{3}} \Rightarrow 5\times6\times3=90$

۲۹ **۱** می‌دانیم اعدادی مضرب ۵ می‌باشند که رقم سمت راست آن‌ها صفر یا ۵ باشد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، باید دو حالت زیر را جداگانه بررسی کنیم:

حالت اوّل: رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست (یکان) فقط می‌تواند صفر باشد که به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانهٔ سمت چپ (صدگان) به ۵ طریق (غیر صفر) و خانهٔ وسط (دهگان) به ۴ طریق (غیر از صفر و صدگان) پر می‌شود. یعنی:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{5}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{4}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{1}} \Rightarrow 5\times4\times1=20$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست (یکان) فقط می‌تواند ۵ باشد که به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانهٔ سمت چپ (صدگان) به ۴ حالت پر می‌شود (چون ۵ و صفر نمی‌توانند در این خانه قرار بگیرند) و خانهٔ وسط به ۴ طریق می‌تواند پر شود (چون از ۶ عدد داده شده دو عدد در خانهٔ سمت چپ و راست قرار گرفته است). بنابراین:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{4}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{4}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{1}} \Rightarrow 4\times4\times1=16$

حال بنابر اصل جمع، تعداد حالت‌های اول و دوم را با هم جمع می‌کنیم تا تعداد اعداد مورد نظر به‌دست آید، یعنی:

$20+16=36$

۳۰ **۳** می‌دانیم اعدادی زوج هستند که رقم سمت راست آن‌ها عدد زوج باشد (در اینجا صفر، ۲ و ۴) و چون تکرار ارقام مجاز نمی‌باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اوّل: رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست (یکان) فقط می‌تواند صفر باشد که به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانهٔ سمت چپ (صدگان) به ۵ طریق و خانهٔ وسط (دهگان) به ۴ طریق پر می‌شود. یعنی:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{5}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{4}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{1}} \Rightarrow 5\times4\times1=20$

حالت دوم: رقم یکان ۲ یا ۴ باشد: در این حالت خانهٔ سمت راست (یکان) فقط ۲ یا ۴ می‌تواند باشد که به دو حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانهٔ سمت چپ (صدگان) به ۴ طریق پر می‌شود (چون صفر و عدد جایگزین در خانهٔ سمت راست (یکان) نمی‌تواند در آن قرار بگیرد) و خانهٔ وسط (دهگان) به ۴ طریق پر می‌شود (چون از ۶ عدد داده‌شده، دو عدد در خانه‌های سمت چپ و راست قرار گرفته است). بنابراین:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{4}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{4}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{2}} \Rightarrow 4\times4\times2=32$

حالا بنابر اصل جمع، تعداد حالت‌های اول و دوم را با هم جمع می‌کنیم تا تعداد اعداد مورد نظر به‌دست آید، یعنی:

$20+32=52$

۳۱ ۳ باید دو وضعیت را در نظر بگیریم:

الف) رقم یکان صفر باشد:

چهار رقم باقی‌مانده — فقط رقم صفر

$\boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۱} = ۶۰$

همه ارقام بجز صفر — سه رقم باقی‌مانده

ب) رقم یکان صفر نباشد:

همهٔ ارقام به جز ۵ و رقم به‌کار رفته در یکان هزار

$\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۱} = ۴۸ \Rightarrow$ کل حالات بنابر اصل جمع $= ۶۰ + ۴۸ = ۱۰۸$

همهٔ ارقام به‌جز صفر،۵ — ۳رقم باقی‌مانده — فقط رقم ۵

۳۲ ۴ می‌دانیم که کد تلفن شهرستان‌ها با عدد صفر شروع می‌شود، بنابراین خانهٔ اول فقط به یک طریق آن هم با عدد صفر پر می‌شود. امّا چون کد تلفن شهرستان‌ها فقط یک صفر در ابتدا دارد، خانهٔ دوم از سمت چپ نباید صفر باشد، پس به ۳ طریق پر می‌شود ولی خانه‌های بعدی می‌توانند صفر داشته باشند که هر کدام به ۴ طریق پر می‌شوند. یعنی:

$\underset{\text{طریق}}{\boxed{۱}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۳}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}}\ \underset{\text{طریق}}{\boxed{۴}} \Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۴ \times ۴ = ۴۸$

سؤالی که پیش می‌آد این است که از کجا فهمیدیم تکرار ارقام مجازه؟

پاسخ این‌که: در شماره‌های تلفن تکرار ارقام مجازه. اگر به شمارهٔ تلفن منزل خودتون یا دوستاتون توجه کنید، احتمالاً رقم تکراری داره.

۳۳ ۳ حالت‌هایی که در یک عدد چهار رقمی، رقم ۷، دو رقم متوالی باشد، به‌صورت روبه‌رو می‌باشد: $\boxed{\ }\boxed{\ }۷۷$ یا $\boxed{\ }۷۷\boxed{\ }$ یا $۷۷\boxed{\ }\boxed{\ }$

حالت اوّل: $۷۷\boxed{\ }\boxed{\ } \Rightarrow ۱ \times ۱ \times ۹ \times ۹ = ۸۱$

همهٔ ارقام به‌جز۷ — همهٔ ارقام به‌جز۷

حالت دوم: $\boxed{\ }۷۷\boxed{\ } \Rightarrow ۸ \times ۱ \times ۱ \times ۹ = ۷۲$

همهٔ ارقام به‌جزصفر و۷ — همهٔ ارقام به‌جز۷

حالت سوم: $\boxed{\ }\boxed{\ }۷۷ \Rightarrow ۸ \times ۹ \times ۱ \times ۱ = ۷۲$

همهٔ ارقام به‌جزصفر و۷ — همهٔ ارقام به‌جز۷

$\xRightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۸۱ + ۷۲ + ۷۲ = ۲۲۵$

۳۴ ۱ حالت‌های مختلفی که رقم ۶ می‌تواند در یک عدد سه رقمی به کار رود، به‌صورت زیر می‌باشد:

$\boxed{۱} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۶$

فقط رقم۶ — سه رقم باقی‌مانده — دو رقم باقی‌مانده

$\boxed{۲} \times \boxed{۱} \times \boxed{۲} = ۴$

ارقام ۴ یا۵ (صفر قرار نمی‌گیرد) — فقط رقم۶ — دو رقم باقی‌مانده

$\boxed{۲} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = ۴$

ارقام ۴ یا۵ — دو رقم باقی‌مانده — فقط رقم۶

$\xRightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۶ + ۴ + ۴ = ۱۴$

۳۵ ۲ قرار است اعداد ساخته شده حداکثر سه رقمی باشند، یعنی باید سه رقمی یا دو رقمی یا یک رقمی باشند.

تعداد اعداد یک رقمی = ۴

تعداد اعداد دو رقمی = ۴ × ۳ = ۱۲

تعداد اعداد سه رقمی = ۴ × ۳ × ۲ = ۲۴

$\Rightarrow ۴ + ۱۲ + ۲۴ = ۴۰$

۳۶ ۱ می‌دانیم که حاصل ۷۲۰ = ۱۰ × ۹ × ۸ می‌شود. از طرفی ۷۲۰ = ۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ = !۶ است، بنابراین گزینهٔ «۱» صحیح می‌باشد.

۳۷ ۴

$$\frac{(n+۳)!}{(n+۱)!} = \frac{(n+۳)(n+۲)\cancel{(n+۱)!}}{\cancel{(n+۱)!}} = (n+۳)(n+۲) = n^۲ + ۵n + ۶$$

۳۸ ۳

$$\frac{n!(m-۱)!}{(n-۱)!m!} = \frac{n(n-۱)! \times (m-۱)!}{(n-۱)! \times m(m-۱)!} = \frac{n}{m}$$

۳۹ ۳ روش اوّل:

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(n+۱) \times n \times (n-۱)!} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{(n+۱)(n)} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow n(n+۱) = ۶$$

$$\Rightarrow n^۲ + n = ۶ \Rightarrow n^۲ + n - ۶ = ۰ \Rightarrow (n+۳)(n-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = -۳ & \text{غ‌ق‌ق} \\ n = ۲ & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

روش دوم: به جای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $n(n+۱) = ۶$، می‌توان گفت $(n+۱)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) می‌باشند. پس می‌توان عدد ۶ را هم به‌صورت ضرب دو عدد متوالی، یعنی ۲ × ۳ نوشت:

$(n+۱)(n) = ۳ \times ۲ \Rightarrow n = ۲$

فصل چهارم:

الگوهای خطی

مدل‌سازی، الگو و دنباله

برای مدل‌سازی برخی از پدیده‌ها می‌توان از توابع با دامنهٔ اعداد طبیعی کمک گرفت. در واقع توابعی که پاسخ آن‌ها بستگی به بررسی مسئله در مرحلهٔ (گام) اوّل، دوم، ... و nاُم دارد، دامنهٔ آن‌ها، زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌باشند.

به‌طور مثال داریم:

تعداد شرکت‌کنندگان سالیانه در کنکور سراسری رشتهٔ علوم انسانی

تعداد گل‌های زدهٔ قهرمان لیگ برتر در هر یک از بازی‌های لیگ

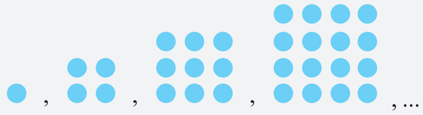
مصرف ماهیانهٔ آب یک خانواده، در ۱۲ماه یک سال

تعداد مسافرانی که در ایستگاه nاُم مترو پیاده می‌شوند.

حتی گاهی با توابعی سروکار داریم که در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده‌اند، امّا آن‌ها را در مجموعهٔ اعداد طبیعی بررسی می‌کنیم (زیرا گاهی بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی، مشکل و حتی امکان‌ناپذیر است.). در این حالت، با انتخاب نقاط با فاصلهٔ زمانی یکسان (تشکیل سری زمانی) رفتار تابع را به‌طور تقریبی بررسی می‌کنیم. به‌طور مثال، بررسی درجه حرارت بدن یک بیمار، در فواصل زمانی یکسان (مثلاً هر یک ساعت از زمان بستری به‌دلیل مشکل‌بودن بررسی در هر لحظه) و یا بررسی شاخص قیمت بورس از فروردین تا اسفند یک‌سال (یعنی به‌دلیل مشکل‌بودن بررسی قیمت در هر لحظه از سال، قیمت را در اوّل ماه اوّل، دوم، سوم، ... و دوازدهم مورد بررسی قرار می‌دهیم.).

ازجمله مدل‌سازی‌های مهمی که می‌توان به کمک توابع با دامنهٔ اعداد طبیعی مثال زد، الگوها و یافتن جملهٔ nاُم در آن‌ها می‌باشد.

؟ تعداد دایره‌های شکل nاُم در الگوی زیر را بیابید.



با توجه به الگوی داده‌شده، داریم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد دایره‌ها	۱ $(۱)^۲$	۴ $(۲)^۲$	۹ $(۳)^۲$	۱۶ $(۴)^۲$

$\Rightarrow$ تعداد دایره‌های شکل nاُم $= n^۲$

مثلاً در شکل دهم $(۱۰)^۲ = ۱۰۰$ دایره خواهیم داشت.

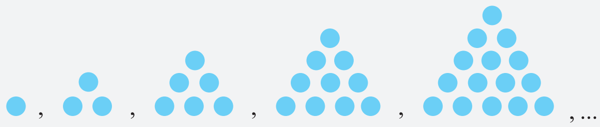
دنباله: اگر a تابعی از مجموعهٔ اعداد طبیعی به مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد $(a : \mathbb{N} \to \mathbb{R})$، آن‌گاه اعضای بُرد این تابع را می‌توان به‌صورت دنباله‌ای از اعداد نوشت، به‌طوری که جملهٔ اوّل آن را $a(۱)$، جملهٔ دوم را $a(۲)$، ... و جملهٔ nاُم را با $a(n)$ در نظر می‌گیریم.

جملهٔ nاُم دنباله را به‌جای $a(n)$ با a_n نشان می‌دهند و آن را جملهٔ عمومی یا ضابطهٔ دنباله می‌نامند. بنابراین جملات اوّل، دوم، ... و nاُم دنباله را به‌ترتیب با $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n نشان می‌دهیم.

$$\underset{\text{ورودی}}{۱,۲,۳,\ldots,n,\ldots} \longrightarrow \boxed{a} \xrightarrow{\text{خروجی}} a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n, \ldots$$

در الگوی مربوط به مثال قبل (که الگوی مربعی نام دارد)، ضابطهٔ دنباله به‌صورت $a_n = n^۲$ می‌باشد. اما گاهی جملهٔ nاُم یک دنباله، به‌صورت یک ضابطه داده نمی‌شود و رابطهٔ آن با سایر جملات داده می‌شود. مثال زیر را ببینید.

؟ جملهٔ nاُم (عمومی) مربوط به تعداد دایره‌های الگوی مثلثی زیر را تعیین کنید.



شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۶	۱۰	۱۵
		+۲	+۳	+۴	+۵

حال رابطهٔ بین شمارهٔ شکل‌ها و تعداد دایره‌ها را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$a_۱ = ۱$

$a_۲ = ۳ = a_۱ + ۲$

$a_۳ = ۶ = a_۲ + ۳$

$a_۴ = ۱۰ = a_۳ + ۴$

$a_۵ = ۱۵ = a_۴ + ۵$

بنابراین رابطهٔ بین جملات دنبالهٔ فوق به‌صورت مقابل است: $a_{n+۱} = a_n + n + ۱ \ ، a_۱ = ۱$

نکته

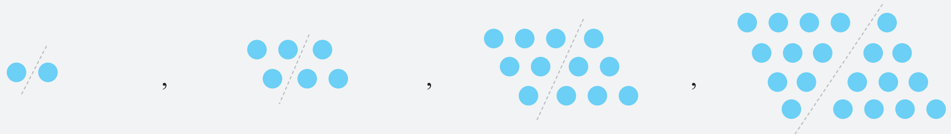
رابطه‌ای که ارتباط جملات یک دنباله را با یک‌دیگر نشان می‌دهد، رابطهٔ بازگشتی نام دارد.

رابطهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}, a_۱ = a_۲ = ۱$ که مربوط به دنبالهٔ فیبوناچی است، جملاتی به‌صورت زیر دارد:

$$\overset{+}{} \ ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,\dots$$

؟ در الگوی مثلثی مربوط به مثال قبل، نشان دهید ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ حاصل از تعداد دایره‌ها، به‌صورت $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

جملات الگو به‌صورت $۱,۳,۶,۱۰,۱۵,\dots$ است. قبلاً رابطهٔ بین جملات دنباله را به کمک رابطهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-۱} + n$ که در آن $a_۱ = ۱$ است، نشان دادیم. حال می‌خواهیم ضابطهٔ تابع را مستقیماً برحسب n (و نه $a_{n-۱}$) نشان دهیم. برای این کار، الگوی مثلثی را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم (در واقع هر جمله از الگوی زیر، شامل ۲ جملهٔ یکسان از الگوی مثلثی است.).



$b_۱ = ۱ \times ۲$ ، $b_۲ = ۲ \times ۳$ ، $b_۳ = ۳ \times ۴$ ، $b_۴ = ۴ \times ۵$

$$\Rightarrow b_n = n \times (n+۱) \xrightarrow{b_n = ۲a_n} n(n+۱) = ۲a_n \Rightarrow a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

بنابراین دنبالهٔ مثلثی را علاوه بر رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = a_n + n + ۱, a_۱ = ۱$ می‌توان به‌طور مستقیم به کمک ضابطهٔ $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ نشان داد.

؟ برای هر یک از رابطه‌های بازگشتی زیر، یک ضابطهٔ تابعی بنویسید.

الف) $a_{n+۱} = a_n + ۲ \ , a_۱ = ۱$ ب) $a_{n+۱} = -a_n \ , a_۱ = ۱$ ج) $a_{n+۱} = ۲a_n \ , a_۱ = \frac{۱}{۲}$

الف) $a_۱ = ۱ \ , a_۲ = a_۱ + ۲ = ۱ + ۲ = ۳, a_۳ = a_۲ + ۲ = ۵, \cdots$

بنابراین دنباله‌ای به شکل زیر داریم:

$$۱ \ , \ ۳ \ , \ ۵ \ , \ ۷ \ , \ ۹ \ , \cdots \Rightarrow a_n = ۲n - ۱$$

$$۲(۱)-۱ \quad ۲(۲)-۱ \quad ۲(۳)-۱ \quad ۲(۴)-۱ \quad ۲(۵)-۱$$

ب) $a_۱ = ۱ \Rightarrow a_۲ = -a_۱ = -۱ \Rightarrow a_۳ = -a_۲ = -(-۱) = ۱ \Rightarrow a_۴ = -a_۳ = -۱, \cdots$

بنابراین دنبالهٔ داده شده به شکل زیر است:

$$۱, -۱, ۱, -۱, \cdots \Rightarrow a_n = (-۱)^{n+۱}$$

$$(-۱)^{۱+۱} \quad (-۱)^{۲+۱} \quad (-۱)^{۳+۱} \quad (-۱)^{۴+۱}$$

در واقع دنبالهٔ فوق، توان‌هایی از (۱ -) است که حاصل آن به‌ازای جملات زوج، برابر (۱ -) و به ازای جملات فرد، برابر ۱ است، پس توان (۱ -) برای جملهٔ n اُم برابر (n + ۱) (یا (n - ۱)) است.

ج) $a_۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a_۲ = ۲a_۱ = ۱ \Rightarrow a_۳ = ۲a_۲ = ۲ \Rightarrow a_۴ = ۲a_۳ = ۴ \Rightarrow a_۵ = ۲a_۴ = ۸$

بنابراین دنبالهٔ داده شده به‌شکل زیر است:

$$\overset{\times ۲}{\frac{۱}{۲}, ۱}, \overset{\times ۲}{۲}, \overset{\times ۲}{۴}, \overset{\times ۲}{۸}, \cdots \Rightarrow a_n = ۲^{n-۲}$$

$$\downarrow ۲^{-۱} \quad \downarrow ۲^{۰} \quad \downarrow ۲^{۱} \quad \downarrow ۲^{۲} \quad \downarrow ۲^{۳}$$

نکات

۱ مثلث خیام، مثلثی از اعداد است به‌طوری که اعداد اوّل و آخر هر یک از سطرهای مثلث، برابر با ۱ بوده و بقیهٔ اعداد از جمع دو عدد بالایی سطر قبل به‌دست می‌آیند:

اگر a_n (جملهٔ nاُم الگو) بیانگر مجموع اعداد سطر nاُم مثلث خیام باشد، آن‌گاه داریم:

$$\overset{۲^{۰}}{\uparrow} \quad \overset{۲^{۱}}{\uparrow} \quad \overset{۲^{۲}}{\uparrow} \quad \overset{۲^{۳}}{\uparrow}$$

$$a_۱ = ۱,\ a_۲ = ۱+۱ = ۲,\ a_۳ = ۱+۲+۱ = ۴,\ a_۴ = ۱+۳+۳+۱ = ۸,\ \ldots$$

```
            ۱
          ۱   ۱
        ۱   ۲   ۱
      ۱   ۳   ۳   ۱
    ۱   ۴   ۶   ۴   ۱
  ۱   ۵   ۱۰  ۱۰  ۵   ۱
۱   ۶   ۱۵  ۲۰  ۱۵  ۶   ۱
```

در واقع می‌توان گفت، مجموع اعداد سطر nاُم مثلث خیام (یعنی a_n) برابر است با:

$$\boxed{a_n = ۲^{n-۱}}$$

این الگو را می‌توان به کمک روابط بازگشتی زیر نیز تعیین کرد:

$$\boxed{a_{n+۱} = a_n + ۲^{n-۱}, a_۱ = ۱} \quad \text{یا} \quad \boxed{a_{n+۱} = ۲a_n\ , a_۱ = ۱}$$

۲ به کمک رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(a_n + \frac{k}{a_n})$ و با فرض $a_۱ = k$، جملات دنباله به $\sqrt{k}$ نزدیک می‌شوند. یعنی هر چه n بیشتر شود، a_n تقریب بهتری از $\sqrt{k}$ را نشان می‌دهد.

با محاسبهٔ $a_۳$ می‌توان جذر تقریبی $\sqrt{۲}$ را محاسبه کرد:

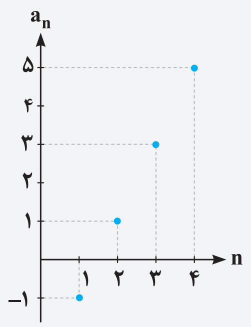
$$a_۱ = k = ۲ \Rightarrow a_۲ = \frac{۱}{۲}(a_۱ + \frac{۲}{a_۱}) = \frac{۱}{۲}(۲ + \frac{۲}{۲}) = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

$$a_۳ = \frac{۱}{۲}(a_۲ + \frac{۲}{a_۲}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲} + \frac{۲}{\frac{۳}{۲}}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۲} + \frac{۴}{۳}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۱۷}{۶}) = \frac{۱۷}{۱۲} \simeq ۱/۴۱$$

رسم نمودار دنباله‌ها

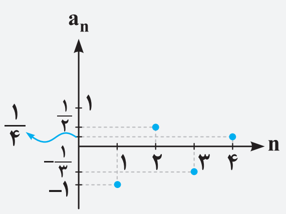
با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد طبیعی، می‌توان نمودار آن‌ها را رسم کرد.

الف) $a_n = ۲n - ۳ : -۱, ۱, ۳, ۵, \ldots \Rightarrow a_n = \{(۱,-۱), (۲,۱), (۳,۳), (۴,۵), \ldots\} \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$

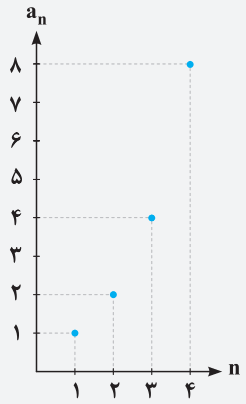


ب) $a_n = \frac{(-۱)^n}{n} : -۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots$

$a_n = \{(۱,-۱), (۲,\frac{۱}{۲}), (۳,-\frac{۱}{۳}), (۴,\frac{۱}{۴}), \ldots\} \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$



ج) $a_n = ۲^{n-۱} : ۱,۲,۴,۸,\dots \Rightarrow a_n = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۴),(۴,۸),\dots\} \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$



۱- مدل ریاضی کدام یک از مسائل زیر را می‌توان به کمک دنباله‌ها نمایش داد؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) میزان مطالعهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه در پایان هر روز　　۲) مساحت مربع به ضلع x

۳) دمای آب یک استخر　　۴) سرعت لحظه‌ای یک متحرک در طول حرکتش

۲- اگر $a_n = (-۲)^n$ ، $b_n = (\frac{۱}{۲})^n$ و $c_n = \frac{(-۱)^n}{۲}$ باشد، حاصل $a_۲ - b_۳ + c_۵$ کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) $\frac{۳۷}{۸}$　　۲) $\frac{۲۷}{۸}$　　۳) $\frac{۳۵}{۸}$　　۴) $\frac{۲۹}{۸}$

۳- مجموع جمله‌های نهم و دهم از دنبالهٔ $-۱, \frac{۱}{۲}, -۳, \frac{۱}{۴}, -۵, \frac{۱}{۶}, \dots$ کدام است؟

۱) ۹/۱　　۲) ۸/۹-　　۳) ۸/۹　　۴) ۹/۱-

۴- جملهٔ پنجم کدام دنباله از همه بزرگ‌تر است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) $a_n = \frac{۱}{n}$　　۲) $a_{n+۱} = a_n - ۱ , a_۱ = ۳$　　۳) $a_{n+۱} = a_n + (-۱)^{n+۱} , a_۱ = ۱$　　۴) $a_{n+۱} = \frac{۱}{۳} a_n , a_۱ = -۳$

۵- در یک دنباله با جملهٔ nاُم a_n داریم $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = a_n + (n+۱)$ ، جملهٔ هشتم کدام است؟ *(انسانی خارج ۹۱)*

۱) ۳۶　　۲) ۳۵　　۳) ۳۲　　۴) ۲۸

۶- در دنبالهٔ اعداد، $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = ۲a_n + ۱$ است، جملهٔ دهم دنباله کدام است؟ *(انسانی خارج ۹۴)*

۱) ۹۷۹　　۲) ۹۸۷　　۳) ۱۰۱۵　　۴) ۱۰۲۳

۷- در دنبالهٔ اعداد $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = a_n + ۲n + ۱$ ، جملهٔ بیست و سوم دنباله کدام است؟ *(انسانی داخل ۹۴)*

۱) ۴۸۴　　۲) ۵۱۷　　۳) ۵۲۹　　۴) ۵۷۶

۸- اگر $a_{n+۱} = \begin{cases} -\frac{۱}{۲} a_n \ ; & n \text{ فرد} \\ ۱ - ۲a_n \ ; & n \text{ زوج} \end{cases}$ باشد، با فرض $a_۱ = ۱$ ، جملهٔ پنجم دنباله کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) $\frac{۱}{۲}$　　۲) ۱-　　۳) $-\frac{۳}{۲}$　　۴) ۳

۹- رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} ۱ \ ; & n \text{ فرد} \\ ۳ \ ; & n \text{ زوج} \end{cases}$ کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱) $a_{n+۱} = ۳^n a_n , a_۱ = ۱$　　۲) $a_{n+۱} = a_n - ۲(-۱)^n , a_۱ = ۱$　　۳) $a_{n+۱} = (-۳)^n a_n , a_۱ = ۱$　　۴) $a_{n+۱} = a_n + ۲ , a_۱ = ۱$

۱۰- ضابطهٔ تابعی مربوط به رابطهٔ بازگشتی $a_n = a_{n-۱} - ۳ , a_۱ = ۲$ کدام است؟

۱) $a_n = -۳n - ۲$　　۲) $a_n = ۳n - ۱$　　۳) $a_n = ۲n$　　۴) $a_n = -۳n + ۵$

۱۱- اگر $a_۱ = ۰$ ، $a_{n+۱} = n + a_n$ باشد، ضابطهٔ تابعی این رابطهٔ بازگشتی کدام است؟

۱) $a_n = (n-۱)^۲$　　۲) $a_n = \frac{n(n-۱)}{۲}$　　۳) $a_n = ۲^{n-۱}$　　۴) $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

۱۲- اگر $a_{n+۱} = ۲ - a_n$ و $a_۱ = ۲$ باشد، جملهٔ $(۲n+۱)$اُم دنباله کدام است؟

۱) ۲^n　　۲) ۲-　　۳) ۲　　۴) صفر

۱۳- رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ $a_n = ۳n - ۲$ کدام است؟

۱) $a_{n+۱} = a_n + ۲ \,,\, a_۱ = -۱$ ۲) $a_{n+۱} = a_n + ۲ \,,\, a_۱ = ۵$

۳) $a_{n+۱} = a_n - ۳ \,,\, a_۱ = -۱$ ۴) $a_{n+۱} = a_n - ۳ \,,\, a_۱ = ۵$

۱۴- رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} (-۱)^{n+۱} & ;\ n \text{ زوج} \\ \dfrac{-۲}{(-۱)^n} & ;\ n \text{ فرد} \end{cases}$ **کدام است؟**

۱) $a_{n+۱} = (-۲)^n a_n \,,\, a_۱ = -۱$ ۲) $a_{n+۱} = -۲a_n \,,\, a_۱ = ۲$

۳) $a_{n+۱} = \dfrac{-۱}{۲} a_n \,,\, a_۱ = ۲$ ۴) $a_{n+۱} = -۲^{(-۱)^n} a_n \,,\, a_۱ = ۲$

۱۵- اگر مجموع جملات سطر nاُم مثلث خیام برابر با a_n باشد، ضابطهٔ تابعی این دنباله در کدام گزینه به‌درستی نشان داده شده است؟

۱) $a_n = ۲^n$ ۲) $a_{n+۱} = ۲a_n \,,\, a_۱ = ۱$ ۳) $\dfrac{a_{n+۱}}{a_n} = \dfrac{۱}{۲} \,,\, a_۱ = ۱$ ۴) $a_{n+۱} - a_n = ۲^n \,,\, a_۱ = ۱$

۱۶- رابطهٔ جملات دنبالهٔ $۵,۸,۱۱,۱۴,۱۷,\ldots$ در کدام گزینه به‌درستی بیان شده است؟

۱) $a_n = ۴n + ۱$ ۲) $a_n = ۶ + \dfrac{n}{(-۱)^n}$ ۳) $a_{n+۱} - a_n = ۳ \,,\, a_۱ = ۵$ ۴) $a_{n+۱} = ۲a_n - ۲ \,,\, a_۱ = ۵$

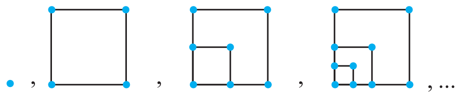
۱۷- ضابطهٔ دنبالهٔ a_n با جملات $۱, -\frac{۱}{۲}, ۳, -\frac{۱}{۴}, ۵, -\frac{۱}{۶}$ کدام است؟

۱) $a_n = n^{(-۱)^n}$ ۲) $a_n = (-n)^{(-۱)^n}$ ۳) $a_n = \begin{cases} -\dfrac{۱}{n} & ;\ n \text{ زوج} \\ n & ;\ n \text{ فرد} \end{cases}$ ۴) $a_n = \begin{cases} -\dfrac{۱}{۲n} & ;\ n \text{ زوج} \\ ۲n - ۱ & ;\ n \text{ فرد} \end{cases}$

۱۸- در دنبالهٔ اعداد $۱,۲,۴,۷,۱۱,۱۶,\ldots$ ، جملهٔ دهم، کدام است؟ *(انسانی داخل ۹۸)*

۱) ۳۷   ۲) ۴۲   ۳) ۴۵   ۴) ۴۶

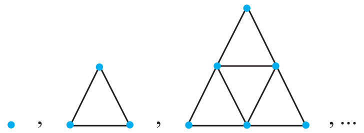
۱۹- تعداد رئوس شکل هفتم از الگوی مقابل، کدام است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



۱) ۱۹   ۲) ۲۸

۳) $۳^۷$ ۴) ۲۱

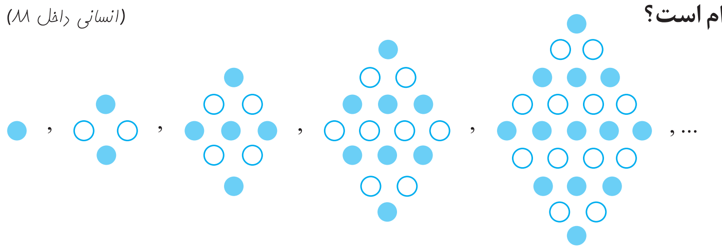
۲۰- تعداد رئوس در شکل nاُم از الگوی مقابل کدام است؟ $(n \geq ۲)$



۱) $۳n$ ۲) ۳^n

۳) $۳^{n-۱}$ ۴) $۳n - ۳$

۲۱- در آرایه‌های لوزی مقابل، تعداد دایره‌های توپر، در شکل یازدهم کدام است؟ *(انسانی داخل ۸۸)*



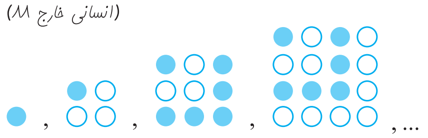
۱) ۶۱

۲) ۶۲

۳) ۶۳

۴) ۶۴

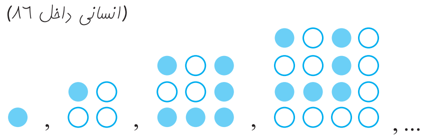
۲۲- در آرایهٔ مربعی مقابل، تعداد دایره‌های توخالی در شکل دوازدهم کدام است؟ *(انسانی خارج ۸۸)*



۱) ۵۵   ۲) ۶۶

۳) ۷۲   ۴) ۷۸

۲۳- در آرایه‌های مربعی مقابل، تفاضل دایره‌های توپر در دو جملهٔ دهم و یازدهم کدام است؟ *(انسانی داخل ۸۶)*



۱) صفر   ۲) ۱۷

۳) ۱۹   ۴) ۲۱

پاسخنامه تشریحی

۱ [۱] در گزینهٔ «۱» با بررسی پدیده در روز (مرحله) اوّل، دوم، سوم، ... و nاُم به یک دنباله می‌رسیم. در گزینه‌های (۲) و (۴) چون دامنهٔ مسائل مطرح شده اعداد طبیعی نیست، پس نمی‌توانند یک دنباله باشند. در مورد گزینهٔ «۳»، چون پاسخ آن به بررسی مسئله در مرحلهٔ اوّل، دوم، ... و nاُم بستگی ندارد، پس نمی‌تواند یک دنباله باشد.

۲ [۲]

$$\begin{cases} a_n=(-2)^n \xRightarrow{n=2} a_2=(-2)^2=4 \\ b_n=(\frac{1}{2})^n \xRightarrow{n=3} b_3=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8} \\ c_n=\frac{(-1)^n}{2} \xRightarrow{n=5} c_5=\frac{(-1)^5}{2}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a_2-b_3+c_5=4-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=4-\frac{1+4}{8}=4-\frac{5}{8}=\frac{32-5}{8}=\frac{27}{8}$$

۳ [۲] با استفاده از جملات داده شده، ابتدا ضابطهٔ دنباله را می‌یابیم:

$$-1,\frac{1}{2},-3,\frac{1}{4},-5,\frac{1}{6},\cdots \Rightarrow a_n=\begin{cases} -n & , \text{فرد } n \\ \frac{1}{n} & , \text{زوج } n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_9=-9 \\ a_{10}=\frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow a_9+a_{10}=-9+\frac{1}{10}=-\frac{89}{10}=-8/9$$

۴ [۳] **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: $a_n=\frac{1}{n} \xRightarrow{n=5} a_5=\frac{1}{5}$

گزینهٔ «۲»: $a_2=a_1-1=3-1=2 \Rightarrow a_3=a_2-1=2-1=1 \Rightarrow a_4=a_3-1=1-1=0 \Rightarrow a_5=a_4-1=0-1=-1$

گزینهٔ «۳»: $a_2=a_1+(-1)^2=1+1=2 \Rightarrow a_3=a_2+(-1)^3=2-1=1 \Rightarrow a_4=a_3+(-1)^4=1+1=2 \Rightarrow a_5=a_4+(-1)^5=2-1=1$

همچنین ضابطهٔ دنبالهٔ گزینهٔ «۳» را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$a_n=\begin{cases} 2 & ; \text{زوج } n \\ 1 & ; \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow a_5=1$$

گزینهٔ «۴»: $a_2=\frac{1}{3}a_1=\frac{1}{3}(-3)=-1 \Rightarrow a_3=\frac{1}{3}a_2=-\frac{1}{3} \Rightarrow a_4=\frac{1}{3}a_3=(\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{9} \Rightarrow a_5=\frac{1}{3}a_4=(\frac{1}{3})(-\frac{1}{9})=-\frac{1}{27}$

بنابراین داریم:

$-1<-\frac{1}{27}<\frac{1}{5}<1 \Rightarrow$ جملهٔ پنجم دنبالهٔ گزینهٔ «۳» از همه بزرگ‌تر است.

۵ [۱] روش اول: با توجه به رابطهٔ بازگشتی دنباله، جملات اوّل تا هشتم دنباله را می‌یابیم:

$$a_{n+1}=a_n+(n+1) \xRightarrow{a_1=1} a_2=a_1+2=1+2=3 \Rightarrow a_3=a_2+3=3+3=6 \Rightarrow a_4=a_3+4=6+4=10$$

$$\Rightarrow a_5=a_4+5=10+5=15 \Rightarrow a_6=a_5+6=15+6=21 \Rightarrow a_7=a_6+7=21+7=28 \Rightarrow a_8=a_7+8=28+8=36$$

روش دوم: دنبالهٔ بازگشتی داده شده مربوط به دنبالهٔ مثلثی است، جملهٔ عمومی دنبالهٔ مثلثی به‌صورت $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس:

$$a_8=\frac{8(8+1)}{2}=\frac{8\times 9}{2}=36$$

۶ [۴] روش اوّل: با توجه به رابطهٔ بازگشتی دنباله، جملات دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$a_{n+1}=2a_n+1 \xRightarrow{a_1=1} a_2=2a_1+1=2(1)+1=3 \Rightarrow a_3=2a_2+1=6+1=7$$

$$\Rightarrow a_4=2a_3+1=14+1=15 \Rightarrow a_5=2a_4+1=30+1=31 \Rightarrow a_6=2a_5+1=62+1=63 \Rightarrow a_7=2a_6+1=126+1=127$$

$$\Rightarrow a_8=2a_7+1=254+1=255 \Rightarrow a_9=2a_8+1=510+1=511 \Rightarrow a_{10}=2a_9+1=2(511)+1=1022+1=1023$$

روش دوم:

$$a_{n+1}=2a_n+1, a_1=1 \Rightarrow a_n: 1 \underset{+2}{,} 3 \underset{+4}{,} 7 \underset{+8}{,} 15 \underset{+16}{,} 31,\ldots \Rightarrow a_n=2^n-1 \Rightarrow a_{10}=2^{10}-1=1023$$

۷ [۳] با قرار دادن $n=1,2,\cdots$ در رابطهٔ بازگشتی دنباله داریم:

$$a_{n+1}=a_n+(2n+1) \xRightarrow{a_1=1} a_2=a_1+3=1+3=4$$

$$\Rightarrow a_3=a_2+5=4+5=9 \Rightarrow a_4=a_3+7=9+7=16 \Rightarrow a_5=a_4+9=16+9=25$$

بنابراین دنباله به‌صورت زیر است:

$$\underset{1^2}{1},\ \underset{2^2}{4},\ \underset{3^2}{9},\ \underset{4^2}{16},\ \underset{5^2}{25},\cdots \Rightarrow a_n=n^2 \xRightarrow{n=23} a_{23}=23^2=529$$

نکته: دنبالهٔ $1,4,9,16,\ldots$ را دنبالهٔ مربعی می‌گویند.

۸ ۴

$n=۱ \Rightarrow a_۲ = -\frac{۱}{۲}a_۱ = -\frac{۱}{۲}(۱) = -\frac{۱}{۲}$, $n=۲ \Rightarrow a_۳ = ۱-۲a_۲ = ۱-۲(-\frac{۱}{۲}) = ۱+۱ = ۲$, $n=۳ \Rightarrow a_۴ = -\frac{۱}{۲}a_۳ = -\frac{۱}{۲}(۲) = -۱$

$n=۴ \Rightarrow a_۵ = ۱-۲a_۴ = ۱-۲(-۱) = ۱+۲ = ۳$

۹ ۲ جملات دنباله را می‌نویسیم:

$۱,۳,۱,۳,۱,۳,\dots$

$\Rightarrow a_۲ = a_۱+۲, a_۳ = a_۲-۲, a_۴ = a_۳+۲, \dots \Rightarrow a_{n+۱} = a_n - ۲(-۱)^n , a_۱ = ۱$

و یا می‌توان نوشت:

$a_۲ = ۳a_۱ , a_۳ = \overset{۳^{-۱}}{\frac{۱}{۳}} a_۲ , a_۴ = ۳a_۳ , a_۵ = \overset{۳^{-۱}}{\frac{۱}{۳}} a_۴ , \dots \Rightarrow a_{n+۱} = ۳^{(-۱)^{n+۱}} a_n , a_۱ = ۱$

۱۰ ۴ با توجه به رابطهٔ بازگشتی داده شده، جملات دنباله را می‌نویسیم:

$\overset{-۳+۵}{۲} \xrightarrow{-۳} \overset{-۶+۵}{-۱} \xrightarrow{-۳} \overset{-۹+۵}{-۴} \xrightarrow{-۳} \overset{-۱۲+۵}{-۷} , \dots \Rightarrow a_n = -۳n+۵$

۱۱ ۲ با توجه به رابطهٔ بازگشتی داده شده، جملات دنباله را می‌نویسیم:

$\overset{\frac{۱\times۰}{۲}}{۰} \xrightarrow{+۱} \overset{\frac{۲\times۱}{۲}}{۱} \xrightarrow{+۲} \overset{\frac{۳\times۲}{۲}}{۳} \xrightarrow{+۳} \overset{\frac{۴\times۳}{۲}}{۶} \xrightarrow{+۴} \overset{\frac{۵\times۴}{۲}}{۱۰} , \dots \Rightarrow a_n = \frac{n(n-۱)}{۲}$

۱۲ ۳ ابتدا با توجه به رابطهٔ بازگشتی داده شده، ضابطهٔ تابعی دنباله را تعیین می‌کنیم:

$۲ \xrightarrow{۲-۲} ۰ \xrightarrow{۲-۰} ۲ \xrightarrow{۲-۲} ۰ \xrightarrow{۲-۰} ۲ \xrightarrow{۲-۲} ۰ , \dots \Rightarrow a_n = \begin{cases} ۲ ; & n \text{ فرد} \\ ۰ ; & n \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow a_{\underbrace{۲n+۱}_{\text{فرد}}} = ۲$

۱۳ ۳ با توجه به ضابطهٔ تابعی دنباله، $a_۱$ و $a_۲$ را می‌یابیم و با گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم:

$a_n = ۲-۳n \xRightarrow{n=۱} a_۱ = ۲-۳ = -۱ \Rightarrow a_۱ = -۱ \Rightarrow$ گزینه‌های «۱» یا «۳» صحیح هستند.

$a_n = ۲-۳n \xRightarrow{n=۲} a_۲ = ۲-۶ = -۴ \Rightarrow a_۲ = a_۱ - ۳ \Rightarrow$ گزینهٔ «۳» صحیح است.

۱۴ ۴ با نوشتن جملات دنباله، رابطهٔ بازگشتی آن را می‌یابیم:

$a_n = \begin{cases} (-۱)^{\overbrace{n+۱}^{\text{فرد}}} ; & n \text{ زوج} \\ \dfrac{-۲}{\underbrace{(-۱)^n}_{\text{فرد}}} ; & n \text{ فرد} \end{cases} \Rightarrow a_n : ۲ \xrightarrow{\times\frac{-۱}{۲}} -۱ \xrightarrow{\times(-۲)} ۲ \xrightarrow{\times\frac{-۱}{۲}} -۱ , ۲ , -۱ , \dots \Rightarrow a_۱ = ۲ , a_{n+۱} = -۲^{(-۱)^n} a_n$

زیرا داریم: $n=۱ \Rightarrow a_۲ = -۲^{-۱} \times a_۱ = -\frac{۱}{۲} \times ۲ = -۱$, $n=۲ \Rightarrow a_۳ = -۲^{۱} \times a_۲ = -۲a_۲ = -۲ \times (-۱) = ۲ , \dots$

۱۵ ۲ می‌دانیم مجموع جملات سطر nاُم مثلث خیام (a_n) برابر $a_n = ۲^{n-۱}$ می‌باشد، پس داریم:

$a_n = ۲^{n-۱} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+۱} = ۲a_n ; a_۱ = ۱ \Rightarrow \dfrac{a_{n+۱}}{a_n} = ۲ \\ a_{n+۱} = a_n + ۲^{n-۱} ; a_۱ = ۱ \end{cases}$

۱۶ ۳

$۵ \xrightarrow{+۳} ۸ \xrightarrow{+۳} ۱۱ \xrightarrow{+۳} ۱۴ \xrightarrow{+۳} ۱۷ , \dots \Rightarrow \begin{cases} a_{n+۱} = a_n + ۳ \Rightarrow a_{n+۱} - a_n = ۳ , a_۱ = ۵ \\ a_n = ۳n+۲ \end{cases}$

۱۷ ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: $a_n = n^{(-۱)^n} \Rightarrow a_۱ = ۱^{-۱} = ۱ , a_۲ = ۲^{۱} = ۲ , a_۳ = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳} , a_۴ = ۴^{۱} = ۴ , \dots$ ✗

گزینهٔ «۲»: $a_n = (-n)^{(-۱)^n} \Rightarrow a_۱ = (-۱)^{-۱} = -۱ , a_۲ = (-۲)^{۱} = -۲ , a_۳ = (-۳)^{-۱} = -\frac{۱}{۳} , a_۴ = (-۴)^{۱} = -۴ , \dots$ ✗

گزینهٔ «۳»: $a_n = \begin{cases} -\frac{۱}{n} ; & n \text{ زوج} \\ n ; & n \text{ فرد} \end{cases} \Rightarrow$ جملات دنباله: $۱ , -\frac{۱}{۲} , ۳ , -\frac{۱}{۴} , ۵ , -\frac{۱}{۶} , \dots$ ✓

گزینهٔ «۴»: $a_n = \begin{cases} -\frac{۱}{۲n} ; & n \text{ زوج} \\ ۲n-۱ ; & n \text{ فرد} \end{cases} \Rightarrow$ جملات دنباله: $۱ , -\frac{۱}{۴} , ۵ , -\frac{۱}{۸} , \dots$ ✗

۱۸ ۴ روش اوّل: ابتدا جملات دنباله را نوشته و رابطه‌ای بین آن‌ها تعیین می‌کنیم:

$$۱ \underbrace{,}_{+۱} ۲ \underbrace{,}_{+۲} ۴ \underbrace{,}_{+۳} ۷ \underbrace{,}_{+۴} ۱۱ \underbrace{,}_{+۵} ۱۶ ,\ldots$$

بنابراین با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده در دنبالهٔ اعداد، جملهٔ دهم دنبالهٔ داده شده برابر است با:

$$۱ , ۲ , ۴ , ۷ , ۱۱ , ۱۶ \underbrace{,}_{+۶} ۲۲ \underbrace{,}_{+۷} ۲۹ \underbrace{,}_{+۸} ۳۷ \underbrace{,}_{+۹} \overset{\text{جمله دهم}}{۴۶}$$

روش دوم:

$$\begin{array}{cccccc} ۱, & ۲ , & ۴ , & ۷ , & ۱۱ , & ۱۶ ,\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ۱ & ۱+۱ & ۱+۳ & ۱+۶ & ۱+۱۰ & ۱+۱۵ \end{array}$$

اعداد داخل دایره، همان اعداد دنبالهٔ مثلثی هستند. بنابراین برای پیدا کردن جمله دهم،کافیست مقدار جملهٔ نهم دنبالهٔ مثلثی را پیدا کرده و با عدد یک جمع کنیم:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{۹(۹+۱)}{۲} = \frac{۹\times ۱۰}{۲} = ۴۵ \Rightarrow \text{جملهٔ دهم دنبالهٔ فوق} = ۱+۴۵ = ۴۶$$

البته روش‌های حل دیگری نیز وجود دارند!!

۱۹ ۱ با توجه به الگوی داده شده، داریم:

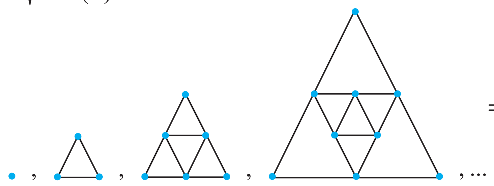
شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد رئوس	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹

+۳ +۳ +۳ +۳ +۳ +۳

در واقع ضابطهٔ تابعی این الگو به‌صورت $a_n = ۳n - ۲$ است، در نتیجه داریم:

$$a_۷ = ۳(۷) - ۲ = ۱۹$$

۲۰ ۴ طبق روند الگوی داده‌شده، داریم:



شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	⋯	n
تعداد رأس	۱	۳	۶	۹	⋯	۳(n−۱)

۳×۱ ۳×۲ ۳×۳

$\Rightarrow$ تعدادرأس‌های شکل nاُم $= ۳(n-۱) = ۳n - ۳ \,(n \geq ۲)$

۲۱ ۱

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعدادکل دایره‌ها	۱	۴	۹	۱۶	۲۵
تعداد دایره‌های توپر	۱	۲	۵	۸	۱۳
تعداد دایره‌های توخالی	۰	۲	۴	۸	۱۲

اگر a_n تعداد دایره‌های توپر در شکل n اُم باشد، آن‌گاه داریم:

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^۲}{۲} & ; \quad \text{زوج } n \\ \frac{n^۲+۱}{۲} & ; \quad \text{فرد } n \end{cases}$$

در واقع اگر n زوج باشد، تعداد دایره‌های توپر با تعداد دایره‌های توخالی برابر است و برابر نصف تعداد کل دایره‌ها $(\frac{n^۲}{۲})$ می‌باشد. همچنین اگر n فرد باشد، تعداد دایره‌های توپر از تعداد دایره‌های توخالی یک واحد بیشتر است.

$$a_{۱۱} = \frac{۱۱^۲+۱}{۲} = \frac{۱۲۱+۱}{۲} = \frac{۱۲۲}{۲} = ۶۱$$

۲۲ ۴

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعدادکل دایره‌ها	۱	۱+۳=۴	۱+۳+۵=۹	۱+۳+۵+۷=۱۶	۱+۳+۵+۷+۹=۲۵
تعداد دایره‌های توخالی	۰	۳	۳	۳+۷	۳+۷
تعداد دایره‌های توپر	۱	۱	۱+۵	۱+۵	۱+۵+۹

براساس روند موجود در جدول، در شکل nاُم داریم:

$$\text{تعداد کل دایره‌ها} = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + \cdots + (۲n-۱)$$

در جدول فوق، مجموع اعدادی که دورآن‌ها خط کشیده شده است، بیانگر تعداد دایره‌های توخالی در هر شکل می‌باشد.

$$\text{تعداد دایره‌های توخالی} = ۳+۷+۱۱+\cdots$$

$$\text{تعداد دایره‌های توپر} = ۱+۵+۹+\cdots$$

بنابراین در شکل دوازدهم داریم:

$$\text{تعداد کل دایره‌ها} = ۱+۳+۵+۷+۹+۱۱+۱۳+۱۵+۱۷+۱۹+۲۱+۲۳$$

$$\text{تعداد دایره‌های توخالی} = ۳+۷+۱۱+۱۵+۱۹+۲۳ = ۷۸$$

۲۳ ۴ طبق الگوی داده شده داریم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعدادکل دایره‌ها	۱	۱+ ۳	۱+ ۳ +۵	۱+ ۳ +۵+ ۷	۱+ ۳ +۵+ ۷ +۹
تعداد دایره‌های توپر	۱	۱	۱+۵	۱+۵	۱+۵+۹
تعداد دایره‌های‌توخالی	۰	۳	۳	۳+۷	۳+۷

فصل چهارم: الگوهای خطی

فصل هشتم:

تابع

تعریف تابع: یک تابع مانند f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین دو مجموعه است که به هر عضو از مجموعهٔ A، دقیقا یک عضو از مجموعهٔ B را نسبت می‌دهد.

معمولاً توابع را با حروف کوچک لاتین نامگذاری می‌کنیم، به عنوان مثال،وقتی تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B تعریف می‌شود، آن را با نماد $f: A \to B$ نمایش می‌دهیم.

صورت‌های مختلف نمایش تابع: براساس تعریف فوق، توابع به صورت‌های زیر نمایش داده می‌شوند:

۱ **نمایش به صورت زوج مرتب‌ها:** اگر رابطهٔ f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌های (x,y) نمایش دهیم، f یک تابع است هرگاه، هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مولفهٔ اول برابر نباشند، به عبارت دیگر، اگر تابع f دو زوج مرتب با مولفهٔ اول برابر داشت، باید مولفه‌های دوم آنها نیز برابر باشند تا دو زوج مرتب با هم برابر گردند.

$$f = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

نکته

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) با هم برابرند اگر مولفه‌های اول با هم و مولفه‌های دوم نیز با هم برابر باشند:

$$(a,b) = (c,d) \Rightarrow \underbrace{a = c}_{\text{برابری مولفه‌های اول}} \quad , \quad \underbrace{b = d}_{\text{برابری مولفه‌های دوم}}$$

؟ **اگر رابطهٔ $f = \{(۱,۳),(-۲,۲),(-۱,۰),(-۲,a-b),(۱,b+۱)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟**

۱) ۶   ۲) ۲-   ۳) ۲   ۴) ۴

گزینهٔ «۱»؛ چون تابع f شامل دو جفت زوج مرتب با مولفه‌های اول برابر است، باید مولفه‌های دوم آنها نیز برابر باشند:

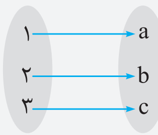
$$(۱,۳),(۱,b+۱) \in f \xRightarrow{\text{تابع } f} ۳ = b+۱ \Rightarrow b = ۳-۱ \Rightarrow b = ۲$$

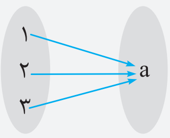
$$(-۲,۲),(-۲,a-b) \in f \xRightarrow{\text{تابع } f} a-b = ۲ \xRightarrow{b=۲} a-۲ = ۲ \Rightarrow a = ۴$$

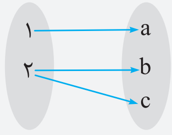
بنابراین $a+b = ۴+۲ = ۶$ می‌باشد.

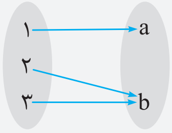
۲ **نمایش به فرم نمودار وِن:** اگر رابطهٔ f را به صورت نمودار ون از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B نمایش دهیم، f یک تابع می‌باشد اگر از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک فلش به سمت عضوی از مجموعهٔ B خارج شود.

؟ **کدام رابطه یک تابع را نشان نمی‌دهد؟**

۱) 

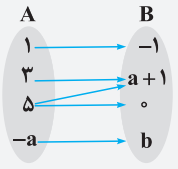
۲) 

۳) 

۴) 

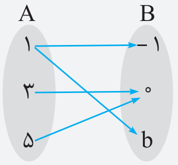
گزینهٔ «۳»؛ همهٔ گزینه‌ها به جز گزینهٔ «۳»، یک تابع را نشان می‌دهند اما در گزینهٔ «۳» عضو ۲ به دو عضو b و c متناظر شده است (از عضو ۲، دو فلش به سمت اعضای متمایز b و c خارج شده است)، درنتیجه این رابطه تابع نیست.

؟ **اگر نمودار ون مقابل مربوط به یک تابع باشد، مقدار b کدام است؟**



۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) صفر   ۴) ۲-

گزینهٔ «۲»؛ از عضو ۵ دو فلش خارج شده است، بنابراین برای تابع بودن رابطهٔ داده شده، این دو فلش باید به یک عضو وارد شوند، یعنی باید $a+۱ = ۰$ و در نتیجه $a = -۱$ باشد که در این صورت $-a = ۱$ است و داریم:



مجدداً برای برقراری تعریف تابع، باید داشته باشیم: $b = -۱$

۳ نمایش به فرم جدولی: گاهی تابع f را می‌توان به صورت یک جدول نمایش داد که در ردیف اول آن x ها قرار می‌گیرند و اعضای متناظر به هریک از آنها (y ها) در ردیف مقابل آن قرار می‌گیرند.

؟ تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی اعداد طبیعی یک رقمی را به کمک یک جدول نمایش دهید. آیا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟

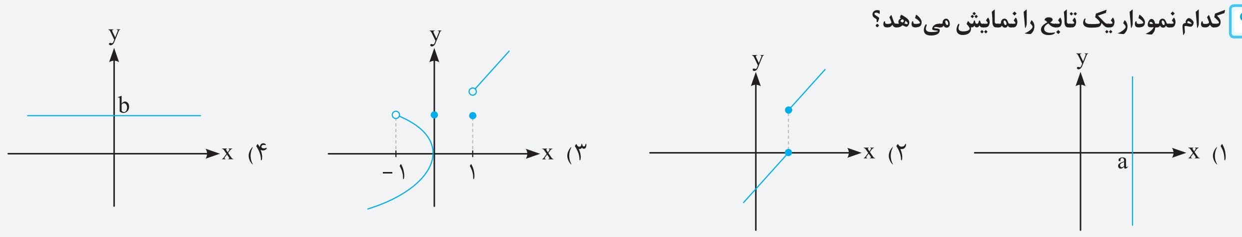
≡ به کمک جدول زیر، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی اعداد طبیعی یک رقمی را می‌توان نمایش داد:

x (اعداد طبیعی یک رقمی)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y (تعداد مقسوم‌علیه‌ها)	۱	۲	۲	۳	۲	۴	۲	۴	۳

با توجه به جدول بالا می‌توان گفت که این رابطه یک تابع را نمایش می‌دهد. توجه کنید که به طور مثال عدد ۲ دارای دو مقسوم‌علیه $\{۱,۲\}$ است، اما عدد ۶ دارای ۴ مقسوم‌علیه $\{۱,۲,۳,۶\}$ می‌باشد.

۴ نمایش به فرم نمودار مختصاتی: اگر عضو (x,y) از رابطهٔ f را به صورت یک نقطه در دستگاه مختصات در نظر بگیریم، با تعیین همهٔ اعضای رابطهٔ f روی دستگاه مختصات، نمودار f به دست می‌آید. نمودار رابطهٔ f یک تابع را نمایش می‌دهد، اگر هر خط موازی محور y ها رسم کنیم، نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

؟ کدام نمودار یک تابع را نمایش می‌دهد؟



≡ گزینهٔ «۴»؛ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: خط عمودی $x=a$ نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند. ⇐ تابع نیست.

گزینهٔ «۲»: دو نقطهٔ توپر روی یک خط عمودی قرار دارند. ⇐ تابع نیست.

گزینهٔ «۳»: در قسمت x های منفی، خطی عمودی وجود دارد (مثلاً خط $x=-\frac{۱}{۲}$) که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. ⇐ تابع نیست.

گزینهٔ «۴»: هر خط موازی محور y ها، نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند. ⇐ تابع است.

۱- مجموعهٔ A دارای ۳ عضو و مجموعهٔ B دارای ۴ عضو است. چند تابع از A به B می‌توان تعریف کرد؟

۱) $۳^۴$ ۲) $۲^۶$ ۳) $۲^۵$ ۴) $۳^۵$

۲- به ازای کدام مقدار b، دو زوج مرتب $(b,۲a+۱)$ و $(۳a-۱,۳)$ باهم برابرند؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۳

۳- اگر $f=\{(۱,a),(a+۱,۸),(۱,۴),(۵,b)\}$ یک تابع باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۴- اگر $f=\{(۰,a+b),(۲,۲),(۰,۶),(۴,۸),(۲,a-b)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a\times b$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) -۶

۵- اگر $f=\{(۳,a),(-a,۱),(-۱,۲),(۳,b-۱),(-۱,ab)\}$ یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) -۳

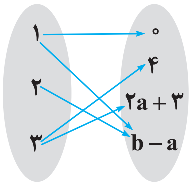
۶- اگر رابطهٔ $\{(۳,a+۲b),(۵,۴),(۷,۲),(۳,۷),(۵,۲a-b)\}$، یک تابع باشد، $a^۲-b^۲$ کدام است؟ (انسانی داخل ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۷- اگر $f=\{(۱,-۱),(۰,۲),(۱,x^۲-y^۲),(۰,x+y),(-۱,۱)\}$ یک تابع باشد، حاصل $x-y$ کدام است؟

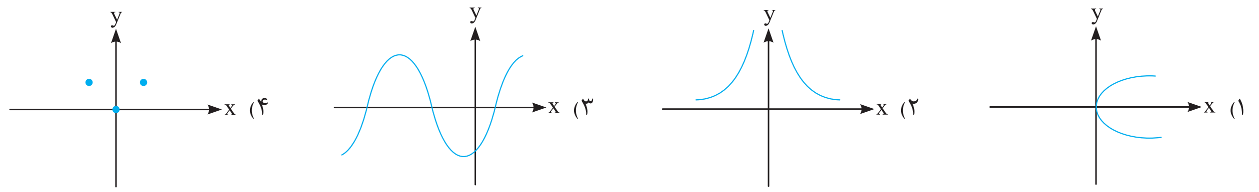
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۸- اگر نمودار ون مقابل، نمایشگر یک تابع باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

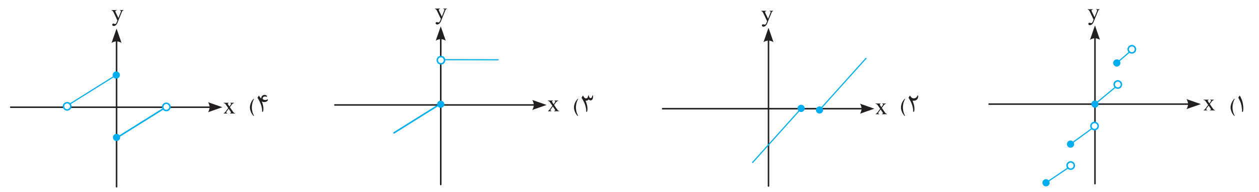


۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

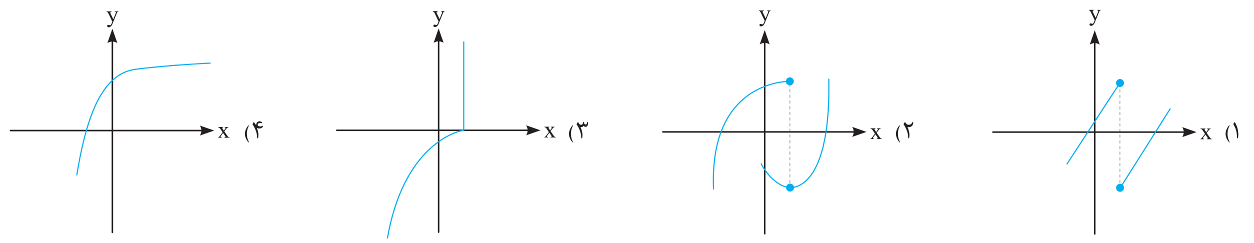
۹- کدام نمودار یک تابع را نمایش نمی‌دهد؟



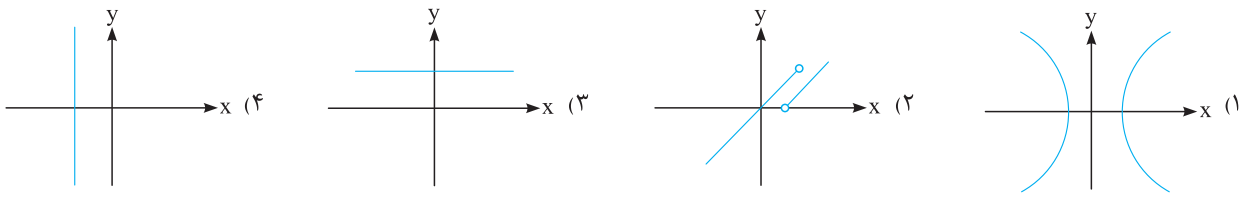
۱۰- کدام نمودار یک تابع را نشان نمی‌دهد؟



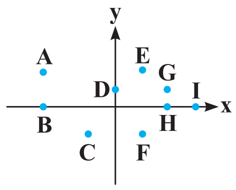
۱۱- کدام نمودار، نمایش یک تابع $y=f(x)$ است؟ *(انسانی خارج ۹۸)*



۱۲- کدام نمودار مربوط به یک تابع است؟



۱۳- با حذف کدام نقاط از شکل مقابل، نمودار حاصل یک تابع را نمایش می‌دهد؟



۱) A , D , I

۲) B , F , G

۳) B , D , H

۴) B , G , I

ضابطهٔ جبری تابع

درس دوم

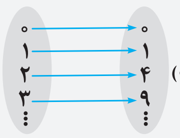
اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم که از یک قانون خاص تبعیت کند، آن‌گاه می‌توان رابطهٔ بین x ها و y ها را توسط این قانون (ضابطه) بیان کرد. در واقع ضابطهٔ هر تابع، قانونی است که رابطهٔ بین هر ورودی (x) از مجموعهٔ A و خروجی متناظر با آن (یعنی y) از مجموعهٔ B را نشان می‌دهد که آن را با نماد f(x) نمایش می‌دهیم و معمولاً می‌توان آن را به کمک یک عبارت جبری بیان کرد:

$\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ x $\xrightarrow[\text{(متغیر مستقل)}]{\text{ورودی}}$ f(x) $\xrightarrow[\text{(متغیر وابسته)}]{\text{خروجی}}$ y

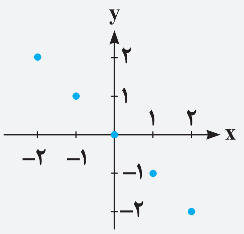
؟ ضابطهٔ مربوط به هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f=\{(-۱,۰),(۰,۰),(۱,۰)\}$

ب)



ج)



د)

$f: \begin{array}{c|cccc} x & ۱ & ۲ & ۳ & \cdots \\ \hline y & ۱ & ۲ & ۳ & \cdots \end{array}$

پاسخنامه تشریحی

۱ | **۲** هر عضو A می‌تواند به ۴ عضو B نظیر شود، پس تعداد کل توابع برابر است با:

$$\underbrace{4}_{\text{عضو اول } A} \times \underbrace{4}_{\text{عضو دوم } A} \times \underbrace{4}_{\text{عضو سوم } A} = 4^3 = 2^6$$

۲ | **۱**

$$(3a-1, 3) = (b, 2a+1) \Rightarrow \begin{cases} 2a+1 = 3 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ 3a-1 = b \xrightarrow{a=1} 3(1)-1 = b \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

۳ | **۲** می‌دانیم که f نباید شامل هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفهٔ اول برابر باشد، داریم:

$$(1,a),(1,4) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} a = 4$$

حال $a = 4$ را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f = \{(1,4),(5,8),(5,b)\} \Rightarrow (5,8),(5,b) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} b = 8$$

۴ | **۳**

$$\left.\begin{array}{l} (2,2),(2,a-b) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع}} a-b = 2 \\ (0,6),(0,a+b) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع}} a+b = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم.}]{\text{دو رابطه را باهم}} 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \xrightarrow{a-b=2} 4-b = 2 \Rightarrow b = 4-2 = 2$$

بنابراین حاصل‌ضرب a و b برابر است با:

$$a \times b = 4 \times 2 = 8$$

۵ | **۴**

$$\left.\begin{array}{l} (3,b-1),(3,a) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} b-1 = a \Rightarrow b = a+1 \\ (-1,2),(-1,ab) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} ab = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a(a+1) = 2 \Rightarrow a^2+a-2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = 2 \\ a = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

حال هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = 1, b = 2 \Rightarrow f = \{(3,1),\underline{(-1,1)},\underline{(-1,2)}\} \quad \text{غ ق ق} \\ a = -2, b = -1 \Rightarrow f = \{(3,-2),(2,1),(-1,2)\} \quad \checkmark \end{cases}$$

بنابراین $a = -2$ و $b = -1$ صحیح است و درنتیجه $a+b = -2+(-1) = -3$ می‌باشد.

۶ | **۳** در زوج‌مرتب‌هایی که معرف تابع باشند، اگر مؤلفه‌های اول یکسان باشند، مولفه‌های دوم نیز باید یکسان باشند:

$$\begin{cases} (3,a+2b) = (3,7) \Rightarrow a+2b = 7 \\ (5,4) = (5,2a-b) \Rightarrow 2a-b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2b = 7 \\ 2a-b = 4 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2a-4b = -14 \\ 2a-b = 4 \end{cases}$$

$$-5b = -10 \Rightarrow b = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$\xrightarrow{b=2} a+2(2) = 7 \Rightarrow a = 7-4 = 3 \Rightarrow a^2-b^2 = (3)^2-(2)^2 = 9-4 = 5$$

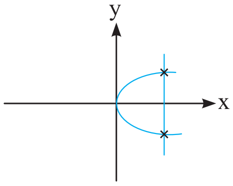
۷ | **۴** کافی است شرط تابع بودن روابط زوج مرتبی را اعمال کنیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} (1,-1),(1,x^2-y^2) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} x^2-y^2 = -1 \\ (0,2),(0,x+y) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع است.}} x+y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-y)\underbrace{(x+y)}_{2} = -1 \Rightarrow x-y = -\frac{1}{2}$$

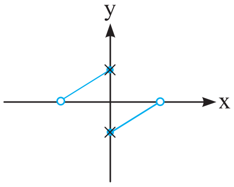
۸ | **۲** باید از هر عضو مجموعهٔ اول، تنها یک فلش خارج شود، پس اگر دو فلش داشتیم، باید خروجی هر دو فلش باهم برابر باشد:

$$\left\{\begin{array}{l} (3,4),(3,2a+3) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع}} 2a+3 = 4 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ (1,0),(1,b-a) \in f \xrightarrow{f \text{ تابع}} b-a = 0 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} b = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

۹ | **۱** در نمودار گزینهٔ «۱»، اگر خطی موازی محور yها در قسمت مثبت محور xها رسم شود، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند که این با تعریف تابع در تناقض است. بنابراین این نمودار نمی‌تواند یک تابع را نشان دهد. امّا در بقیهٔ نمودارها، هر خط عمودی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین نمودار یک تابع را نشان می‌دهند.



۱۰ | **۴** همهٔ گزینه‌ها به جز گزینهٔ «۴» تابع می‌باشند. در گزینهٔ «۴» خط عمودی $x = 0$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.



۱۱ **۴** طبق تعریف، نموداری معرف یک تابع است که هر خط موازی با محور y ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند (در بیش از یک نقطه قطع نکند) که فقط در نمودار گزینهٔ «۴» این‌چنین است. توجه کنید که در گزینه‌های «۱» و «۲»، به ازای یک طول مشخص، دو نقطه توپر وجود دارد. یعنی به ازای یک x، دو مقدار برای y داریم که نمی‌تواند معرف تابع باشد.

۱۲ **۳** تنها نمودار گزینهٔ «۳» یک تابع را نشان می‌دهد. در بقیهٔ گزینه‌ها، خط عمودی وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه (۲ یا بیشتر) قطع می‌کند.

۱۳ **۲** باید هر خط عمودی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، بنابراین حداقل باید یکی از نقاط A یا B و یکی از نقاط E یا F و یکی از نقاط G یا H حذف گردد. به طور مثال با حذف نقاط G، F و B یک تابع ایجاد می‌شود.

۱۴ **۴** **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین یک تابع است.

گزینهٔ «۲»: به ازای هر x، تنها یک y داریم. بنابراین تابع است.

گزینهٔ «۳»: از هر عضو مجموعهٔ اول، تنها یک فلش خارج شده است، بنابراین یک تابع است.

گزینهٔ «۴»: $x=۰ \Rightarrow y^۲-۰=۱ \Rightarrow y^۲=۱ \Rightarrow y=\pm ۱ \Rightarrow$ تابع نیست.

۱۵ **۲** می‌دانیم ضابطه‌ای بیانگر یک تابع می‌باشد که در آن به ازای هر x، فقط یک y وجود داشته باشد. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $x^۲+y^۲=۱ \xRightarrow{x=۰} y=\pm ۱ \Rightarrow$ تابع نیست.

گزینهٔ «۲»: $\sqrt{y}=x-۱ \xRightarrow{y>۰} y=(x-۱)^۲ \Rightarrow$ تابع است، چون به‌ازای هر x، فقط یک y داریم.

گزینهٔ «۳»: $x=|y|+۱ \xRightarrow{x=۲} ۲=|y|+۱ \Rightarrow |y|=۱ \Rightarrow y=\pm ۱ \Rightarrow$ تابع نیست.

گزینهٔ «۴»: $y^۲=x+۱ \xRightarrow{x=۰} y^۲=۱ \Rightarrow y=\pm ۱ \Rightarrow$ تابع نیست.

۱۶ **۲** **بررسی روابط:**

الف) $x=۱ \Rightarrow |y|=۱ \Rightarrow y=\pm ۱ \Rightarrow$ تابع نیست.

ب) $y=|x|-۱ \Rightarrow$ به‌ازای هر x دقیقاً یک y داریم. $\Rightarrow$ تابع است.

ج) $y=\sqrt{x}-۱ \Rightarrow$ به‌ازای هر x مثبت، دقیقاً یک y داریم. $\Rightarrow$ تابع است.

در واقع به ازای هر $x \geq ۰$، فقط یک y داریم و به ازای $x<۰$، yای نداریم.

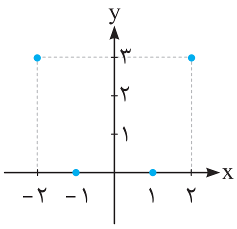
د) $x^۲+y^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲=۴ \xRightarrow{x=۰} y=\pm ۲ \Rightarrow$ تابع نیست.

بنابراین دو تا از روابط داده شده، تابع می‌باشند.

۱۷ **۱** با توجه به زوج مرتب‌های داده شده، تابع f به هر مؤلفهٔ اول، یک واحد بیشتر از توان دوم آن را نسبت می‌دهد که در نتیجه $f(x)=x^۲+۱$ به‌دست می‌آید.

۱۸ **۴** با تبدیل عبارت کلامی داده شده در صورت سؤال به یک عبارت جبری، ضابطهٔ f تعیین می‌شود:

$f(x)=x^۲-۱ \Rightarrow f=\{(-۱,۰),(-۲,۳),(۱,۰),(۲,۳)\} \xRightarrow{\text{رسم نمودار}}$



۱۹ **۳** **بررسی گزینه‌ها:**

با قرار دادن مقادیر $A=\{۰,-۱,-۲\}$ در ضابطهٔ تابع، خروجی تابع را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $f(x)=x^۲-۵ \xRightarrow{x\in\{۰,-۱,-۲\}} y\in\{-۵,-۴,-۱\}$

گزینهٔ «۲»: $f(x)=۲x+۳ \xRightarrow{x\in\{۰,-۱,-۲\}} y\in\{۳,۱,-۱\}$

گزینهٔ «۳»: $f(x)=۲x^۲-۱ \xRightarrow{x\in\{۰,-۱,-۲\}} y\in\{-۱,۱,۷\}$ ✓

گزینهٔ «۴»: $f(x)=x^۲-۱ \xRightarrow{x\in\{۰,-۱,-۲\}} y\in\{-۱,۰,۳\}$

۲۰ **۱**

$$f(۰)=۲, f(۱)=۰, f(۲)=-۱ \Rightarrow \frac{f(f(۰))}{۱-f(f(۱))}=\frac{f(۲)}{۱-f(۰)}=\frac{-۱}{۱-۲}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$