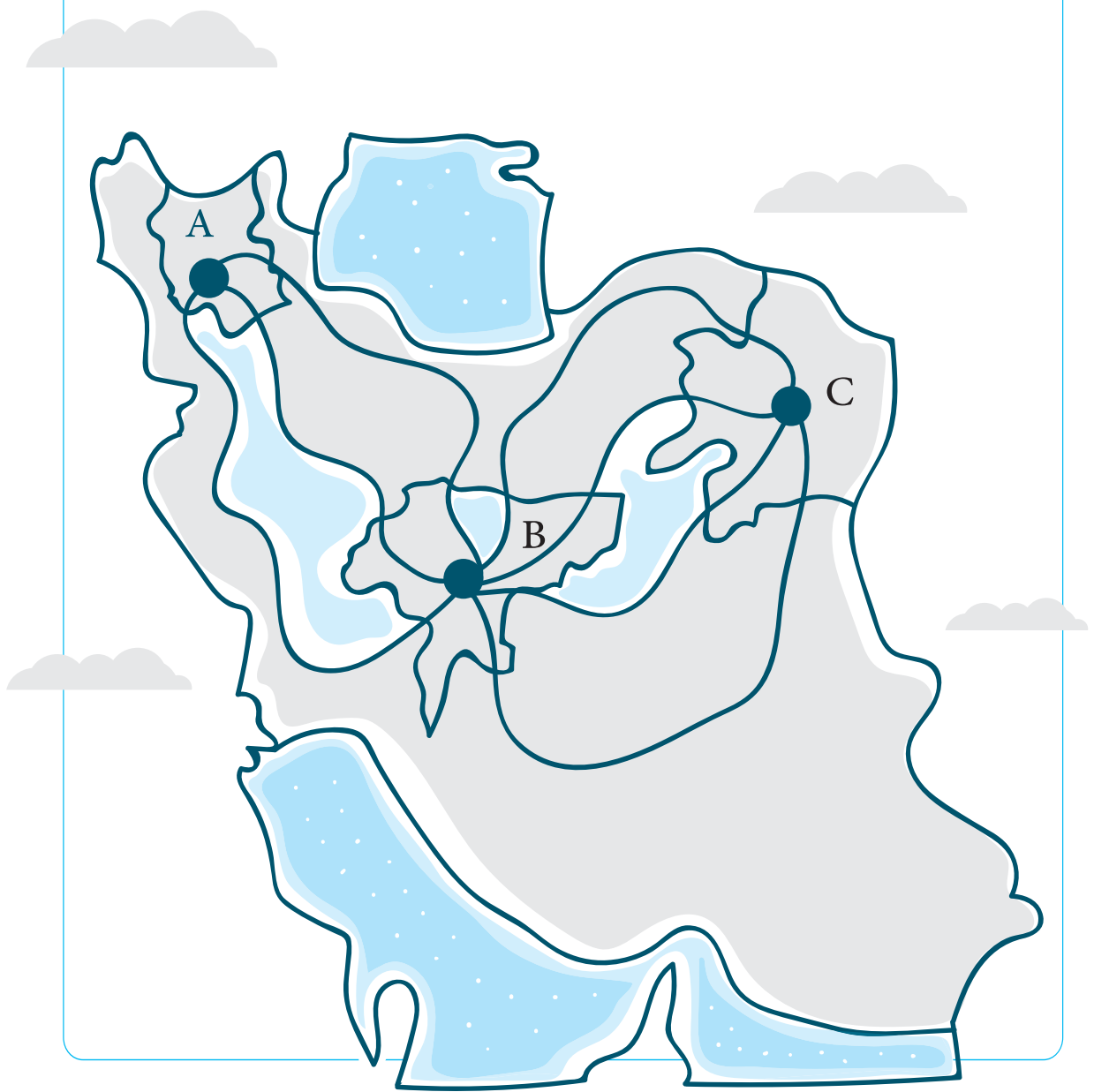


فصل اول

# آمار و احتمال



# آمار و احتمال

## فصل اول

### درستانه

#### شمارش

#### شمارش

در زندگی روزمره برای انجام بعضی کارها، انتخاب‌های مختلفی پیش روی ما قرار می‌گیرد. مثلاً می‌خواهیم به شهر مشهد سفر کنیم. برای مسافرت می‌توانیم از ماشین شخصی خود یا قطار یا هواپیما یا اتوبوس استفاده کنیم، پس ۴ انتخاب داریم. یا به یک رستوران رفته‌ایم و برای خوردن شام می‌توانیم از ۱۰ نوع فست‌فود یا ۵ نوع غذای پُرسی یکی را انتخاب کنیم، پس برای این کار  $10 + 5 = 15$  انتخاب داریم. در این نوع از انتخاب‌ها در واقع از قاعده یا اصلی که به اصل جمع، معروف است، استفاده کرده‌ایم. به تعریف این اصل، دقت کنید.

**اصل جمع:** اگر عملی را بتوان به  $m$  طریق و عمل دیگری را بتوان به  $n$  طریق انجام داد، به طوری که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، در این صورت به  $(m + n)$  طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد.

**توجه:** اصل جمع را به بیشتر از دو عمل نیز می‌توان تعمیم داد.

**مثال:** مادر لعلیا برای تولد او می‌خواهد یک اسباب‌بازی بخرد. وقتی وارد مغازه می‌شود، فروشنده به او ۵ نوع بازی فکری، ۴ نوع عروسک و ۱۰ نوع اسباب‌بازی مختلف دیگر را معرفی می‌کند. مادر لعلیا برای خرید یک اسباب‌بازی از بین بازی‌های فکری یا عروسک‌ها یا اسباب‌بازی‌های دیگر چند نوع انتخاب دارد؟

**پاسخ:** این که مادر لعلیا می‌خواهد فقط یک اسباب‌بازی بخرد و هم‌چنین لفظ «یا» که در صورت سؤال آمده به ما نشان می‌دهند که باید از اصل جمع استفاده کنیم. پس تعداد انتخاب‌های مادر لعلیا برابر است با:

برای انجام برخی از کارهای دیگر، نحوه انتخاب جور دیگری است. مثلاً می‌خواهیم از بین ۵ پیراهن مختلف و ۲ شلوار مختلف، یک پیراهن و یک شلوار برای پوشیدن انتخاب کنیم. در این حالت برای هر پیراهنی که از بین ۵ پیراهن انتخاب کنیم، باید یک شلوار از بین ۲ شلوار انتخاب شود. پس  $5 \times 2 = 10$  انتخاب برای ما وجود دارد. برای این انتخاب می‌توانیم از نمودار مقابل که به **نمودار درختی** معروف است نیز استفاده کنیم.



همان‌طور که در این نمودار می‌بینید، تعداد شاخه‌های نهایی برابر ۱۰ است که همان تعداد انتخاب‌های مطلوب ما می‌باشد.

قاعده‌ای که در این انتخاب‌ها از آن استفاده می‌کنیم به اصل ضرب، معروف است.

**اصل ضرب:** اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحله اول به  $m$  طریق و در مرحله دوم هر کدام از این  $m$  طریق به  $n$  روش انجام پذیر باشد، در کل آن عمل به  $m \times n$  طریق انجام‌پذیر است.

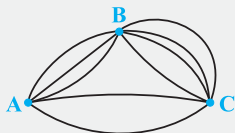
**توجه:** اصل ضرب را به بیشتر از دو مرحله نیز می‌توان تعمیم داد.

**مثال:** تعداد راه‌هایی که بین ۳ شهر A، B و C وجود دارد در شکل زیر نشان داده شده است. به

چند طریق می‌توان:

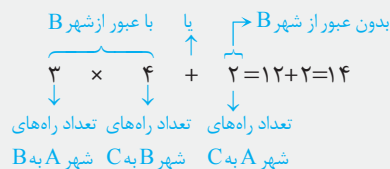
(الف) از شهر A به شهر B بدون عبور از شهر C رفت و برگشت، به طوری که از مسیر رفت، در برگشت، عبور نکنیم؟

(ب) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟



**پاسخ:** (الف) برای رفتن از شهر A به B، بدون عبور از شهر C، ۳ انتخاب داریم ولی چون می‌خواهیم از راهی که رفته‌ایم، برنگردیم. برای رفتن از B به A، ۲ انتخاب خواهیم داشت. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب برابر است با:

(ب) برای رفتن از شهر A به شهر C می‌توانیم از شهر B عبور کنیم یا بدون عبور از شهر B، مستقیماً به شهر C برویم. پس تعداد انتخاب‌های ما برای سفر از A به C برابر است با:



تذکره هرجا بین انتخاب‌ها حرف «یا» وجود داشت، از اصل جمع و هرجا حرف «و» وجود داشت، از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

همیشه یادم نمونه

اصول شمارش  
 اصل جمع ← عمل اول،  $m$  طریق یا عمل دوم،  $n$  طریق ← انجام عمل اول یا دوم به  $m + n$  طریق  
 اصل ضرب ← مرحله اول عمل،  $m$  طریق و مرحله دوم عمل،  $n$  طریق ← انجام عمل به  $m \times n$  طریق

۱- رضا وارد یک رستوران می‌شود که در منوی رستوران ۱۰ نوع غذا، ۵ نوع دسر و ۶ نوع نوشیدنی وجود دارد. او به چند طریق می‌تواند یک غذا، یک دسر و یک نوشیدنی انتخاب کند؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۵۶ (۴) ۳۰۰

۲- سه تا دوست با هم به پارکی می‌روند که در آن ۱۲ وسیله بازی وجود دارد. این سه نفر به چند طریق می‌توانند این وسیله‌های بازی را برای سوارشدن انتخاب کنند؟

- (۱)  $3^3 \times 2^6$  (۲) ۳۶ (۳)  $3^{12}$  (۴)  $2^6 \times 6^{12}$

۳- ۵ تا هدیه خریده‌ایم که می‌خواهیم آن‌ها را کادو کنیم. اگر ۷ نوع کاغذ کادو مختلف و از هر نوع به تعداد زیاد داشته باشیم، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

- (۱)  $5^7$  (۲) ۳۵ (۳)  $7^5$  (۴) ۱۲

۴- در یک اتوبوس ۱۰ نفر مسافر وجود دارد و این اتوبوس در ۶ ایستگاه توقف می‌کند. این مسافرها به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

- (۱) ۶۰ (۲)  $6^{10}$  (۳) ۱۶ (۴)  $10^6$

۵- یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

- (۱) ۹۰ (۲)  $10^9$  (۳)  $9^{10}$  (۴) ۱۸۰

تمرین کتاب درسی

۶- به چند طریق می‌توان به یک آزمون ۴ گزینه‌ای با ۱۰ تست پاسخ داد به طوری که حتماً به تمام تست‌ها پاسخ داده شود؟

- (۱) ۴۰ (۲)  $2^{10}$  (۳)  $10^4$  (۴)  $2^{20}$

۷- لیلا ۵ بلوز، ۳ دامن و ۴ شلوار دارد. او می‌خواهد بلوز با دامن یا بلوز با شلوار بپوشد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

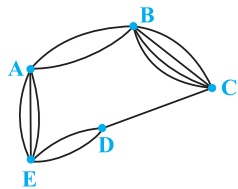
- (۱) ۳۵ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۴۵

۸- علی می‌خواهد به مسافرت برود. او برای رفت می‌خواهد با یکی از ۳ نوع قطار یا ۲ نوع هواپیما و برای برگشت با یکی از ۴ نوع اتوبوس یا ۲ نوع سواری مسافرت کند. او به چند طریق می‌تواند به سفر برود؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۳۰ (۳) ۴۸ (۴) ۱۵

۹- از بین ۳ فیلم کارتونی، ۵ فیلم خانوادگی و ۴ فیلم طنز به چند طریق می‌توان دو فیلم با ژانرهای مختلف انتخاب کرد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۷ (۳) ۱۲ (۴) ۳۶

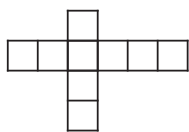


۱۰- با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۱۱- با رنگ‌های زرد، سبز و آبی می‌خواهیم خانه‌های شکل مقابل را رنگ‌آمیزی کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به طوری که خانه‌های مجاور، رنگ‌های متفاوت داشته باشند؟

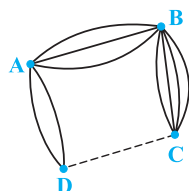
- (۱) ۲۵۶ (۲) ۷۶۸ (۳) ۵۱۲ (۴) ۳۸۴

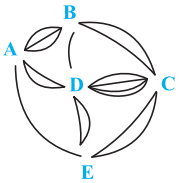


۱۲- بین چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی به صورت مقابل وجود دارد. بین دو شهر C و D چند راه وجود داشته باشد تا به ۲۲ طریق بتوان از شهر A به شهر C سفر کرد؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۵

مشابه تمرین کتاب درسی





۱۳- بین پنج شهر A, B, C, D و E مطابق شکل مقابل، راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. به چند طریق می‌توان از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر C سفر کرد؟

مشابه تمرین کتاب درسی

- ۲۴ (۱) ۱۴ (۲)  
۱۸ (۳) ۲۶ (۴)

۱۴- در تست قبل، اگر بخواهیم از شهر A به شهر E برویم و حتماً از شهر C هم عبور کنیم، تعداد حالت‌های ممکن کدام است؟ (از یک شهر، نباید ۲ بار عبور کنیم.)

- ۸۴ (۱) ۷۶ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۰۰ (۴)

۱۵- یک اتاق مربع شکل داریم و می‌خواهیم دیوارهای آن را با ۵ رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کنیم. اگر بخواهیم هیچ کدام از دیوارهای مجاور، یک رنگ نداشته باشند، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

- ۲۶۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

## درست‌نامه

### جایگشت

#### فاکتوریل

یکی از نمادهایی که در ریاضی وجود دارد، نماد فاکتوریل است که برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از این نماد استفاده می‌کنیم. به طور مثال داریم:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

به طور کلی  $n!$  برابر است با:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

**قرارداد:** برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$1! = 1 \quad \text{و} \quad 0! = 1$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 1! = 1 \\ 2! = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

**مثال** حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\text{ج) } \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\text{ب) } \frac{5! \times 3! \times 0!}{4! \times 7!}$$

$$\text{الف) } \frac{6!}{4!}$$

**پاسخ** روش اول:

$$\text{الف) } \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 6 \times 5 = 30$$

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$$

روش دوم: با استفاده از نکته‌ای که در بالا بیان کردیم، می‌توانستیم این طوری ساده کنیم:

$$\text{ب) } \frac{5! \times 3! \times 0!}{4! \times 7!} = \frac{5! \times 3! \times 1}{4 \times \cancel{3!} \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}} = \frac{1}{4 \times 7 \times 6} = \frac{1}{168}$$

$$\text{ج) } \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})!} = n(n-1) = n^2 - n$$

فرض کنید می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی، علوم و فارسی را کنار هم در یک طبقه بچینیم. چیدمان این کتاب‌ها را می‌توانیم به حالت‌های زیادی انجام دهیم. مثلاً این طوری:



اما تعداد این حالت‌ها چندتا است؟ برای محاسبه آن از جایگشت استفاده می‌کنیم. ... یا

#### جایگشت

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز را یک جایگشت  $n$  تایی از آن  $n$  شیء می‌نامیم. تعداد کل جایگشت‌های  $n$  تایی از  $n$  شیء متمایز برابر  $n!$  است. زیرا اگر برای هر کدام از این  $n$  شیء یک مکان در نظر بگیریم، آن‌گاه برای مکان اول (از چپ یا راست)،  $n$  شیء یا انتخاب داریم، برای مکان دوم،  $(n-1)$  شیء یا انتخاب، برای مکان سوم،  $(n-2)$  شیء یا انتخاب و به همین ترتیب تا مکان آخر که برای آن یک انتخاب باقی می‌ماند. حال بنا به اصل ضرب، تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \Rightarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

پس برای چیدمان ۳ کتاب ریاضی، علوم و فارسی، تعداد  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  حالت مختلف وجود دارد.

**مثال** با ارقام ۳، ۴، ۷، ۹ چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

**پاسخ**

$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

**نکته** اگر برای چیدمان اشیاء، افراد یا ارقام یا ... شرط خاصی قرار داده شود، مثلاً دو شیء خاص، اول باشند یا دو نفر کنار هم بنشینند یا عددی که با ارقام می‌نویسیم، زوج باشد یا ...، باید ابتدا مکان مربوط به آن شرط را پر کنیم و بعد سایر مکان‌ها را پر نماییم.

**مثال** با ارقام ۰، ۳، ۵، ۶، ۹ می‌توان چند عدد ۵ رقمی: (بدون تکرار ارقام)

الف) فرد نوشت؟      ب) با رقم دهگان مضرب ۳ نوشت؟      ج) زوج نوشت؟

**پاسخ** الف) چون می‌خواهیم عدد پنج‌رقمی فرد بنویسیم، پس باید رقم یکان عدد، فرد باشد. بنابراین اول مکان رقم یکان را پر می‌کنیم که برای آن حالت داریم، چون سه عدد ۳، ۵ و ۹ می‌توانند در آن قرار بگیرند. بعد به سراغ پر کردن مکان‌های دیگر می‌رویم. برای مکان اول (از سمت چپ)، ۳ انتخاب داریم، چون یکی از اعداد برای رقم یکان انتخاب شده و ۴ عدد دیگر باقی مانده است ولی صفر هم نمی‌تواند رقم اول از سمت چپ باشد، پس ۳ انتخاب برای این‌جا داریم. برای مکان دوم، ۳ انتخاب داریم، چون ۲ تا عدد انتخاب شده‌اند و ۳ تا باقی مانده‌اند و به همین ترتیب تا آخر، تعداد حالت‌های هر مکان را پر می‌کنیم. پس داریم:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳ = ۵۴$$

رقم یکان      غیر از یکان  
{۳ یا ۵ یا ۹}      و صفر

ب) می‌خواهیم رقم دهگان عدد پنج‌رقمی ما مضرب ۳ باشد، پس ابتدا مکان رقم دهگان و سپس از چپ به راست، سایر مکان‌ها را پر می‌کنیم. باید در رقم دهگان آن یکی از اعداد ۳ یا ۶ یا ۹ قرار بگیرد. بنابراین داریم:

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۱ = ۵۴$$

رقم دهگان      غیر از دهگان  
{۳ یا ۶ یا ۹}      و صفر

ج) **روش اول:** اگر تعداد کل اعداد پنج‌رقمی که با این ارقام می‌توان نوشت را منهای تعداد کل اعداد پنج‌رقمی فرد، کم کنیم، آن‌گاه تعداد اعداد پنج‌رقمی زوج به دست می‌آید. پس داریم:

$$۹۶ = ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \quad \text{تعداد کل اعداد پنج‌رقمی غیر از صفر}$$

$$۴۲ = ۹۶ - ۵۴ = \text{تعداد کل اعداد پنج‌رقمی فرد} - \text{تعداد کل اعداد پنج‌رقمی زوج}$$

**روش دوم:** چون می‌خواهیم عدد زوج بنویسیم، پس باید رقم یکان آن یکی از ارقام ۰ یا ۶ باشد.

حال تعداد حالت‌های هر کدام را جداگانه محاسبه کرده و بعد طبق اصل جمع، جواب آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲۴ \rightarrow \text{یکان صفر باشد: حالت اول} \\ \{۰\} \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد پنج‌رقمی زوج} = ۲۴ + ۱۸ = ۴۲ \\ ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۱۸ \rightarrow \text{یکان ۶ باشد: حالت دوم} \\ \{۶\} \text{ غیر از صفر و ۰} \end{array} \right.$$

**طاقم‌آزاده!** ما نفهمیدیم چرا تو روش دوم، دو حالت در نظر گرفتیم؟ خوب یکان رو با ۲ حالت پر می‌کردین، بعد هم بقیه مکان‌ها رو، چه اشکالی داره؟

**پاسخ** خیلی هم اشکال داره. حالا ببین چرا. فب آگه ما برای یکان، ۲ حالت در نظر بگیریم، بعد که بفوایم مکان اول از سمت چپ رو پر کنیم، پندر حالت باید برایش قرار بدهیم؟ ببین الان گیر کردیم، چون نمی‌دونیم پندر تا؟ برای این‌که آگه صفر تو یکان انتقاب شده باشه، برای این مکان، ۴ حالت داریم ولی آگه صفر، انتقاب نشده باشه، برای این مکان، ۳ حالت داریم و ما هم نمی‌دونیم کدوم عدد انتقاب شده و بنابراین نمی‌تونیم این یایگه اول رو پر کنیم. برای همین دو حالت رو جدا در نظر می‌گیریم تا تکلیف ما مشخص باشه، بعد چون می‌گیم این یا اون، در آفر، جواب‌ها رو با هم جمع می‌کنیم. فکر کنم دیگه فوب فوب علت رو متوجه شده باشی. همیشه وقتی بین ارقام، عدد صفر وجود داره و عدد زوج رو می‌فوایم، باید همین‌طوری ۲ حالت، مسأله رو حل کنیم.

### همیشه یادم‌بمونه

**نماد فاکتوریل:** برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش به کار می‌رود.

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} ۰! = ۱ \\ ۱! = ۱ \end{array} \right\} \text{قرارداد}$$

**جایگشت:** هر حالت از کنار هم قرار گرفتن  $n$  شیء متمایز را یک جایگشت  $n$  تایی از آن  $n$  شیء می‌نامیم.

تعداد کل جایگشت‌های  $n$  تایی از  $n$  شیء متمایز برابر  $n!$  است.

\* در جایگشت از همان اصل ضرب استفاده می‌شود.

۱۶- کدام گزینه درست است؟

$$\frac{15!}{5!} = 3!(1) \quad (2) \quad 6!(3!) = 6!(2) \quad (3) \quad 10! - 8! = 89(3) \quad (4) \quad 2 \times (2!) = (2!)^2$$

۱۷- معادله  $(x^2 - x)! = 1$  چند جواب دارد؟

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 3$$

۱۸- عدد  $5 \times 7 \times 2^7 \times 3^4$  برابر فاکتوریل چه عددی است؟

$$(1) \quad 8 \quad (2) \quad 7 \quad (3) \quad 9 \quad (4) \quad 10$$

۱۹- اگر  $(n+1)! = 2(n-1)!$ ، آن‌گاه مقدار  $(3n)!$  کدام است؟

$$(1) \quad 720 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 3$$

۲۰- به ازای چند مقدار صحیح از  $x$  تساوی  $1 - 3x^2 = (3x^2 - 1)!$  برقرار است؟

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 3$$

۲۱- از تساوی  $7! \times 6! = (2n)!$  مقدار  $n$  کدام است؟

$$(1) \quad 8 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad 10$$

۲۲- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها عدد تاس، زوج باشد، کدام است؟

$$(1) \quad 12 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 9$$

۲۳- با استفاده از ارقام ۲، ۵ و ۶ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که با رقم ۵ شروع شوند؟

$$(1) \quad 9 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 27 \quad (4) \quad 18$$

۲۴- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی فرد با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$$(1) \quad 48 \quad (2) \quad 36 \quad (3) \quad 75 \quad (4) \quad 60$$

۲۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹ چند عدد پنج‌رقمی با ارقام متمایز، می‌توان نوشت که رقم وسط آن همواره فرد باشد؟

$$(1) \quad 12 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 36 \quad (4) \quad 48$$

۲۶- چند عدد چهاررقمی با ارقام فرد و متمایز، بزرگ‌تر از  $3000$  وجود دارد؟

$$(1) \quad 72 \quad (2) \quad 84 \quad (3) \quad 96 \quad (4) \quad 108$$

۲۷- با حروف کلمه «پتانسیل» چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به طوری که حرف وسط آن نقطه‌دار باشد؟

$$(1) \quad 1440 \quad (2) \quad 720 \quad (3) \quad 1420 \quad (4) \quad 920$$

۲۸- با حروف کلمه «Sunday» چند جایگشت ۴ حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که در آن فقط یک حرف صدادار وجود داشته باشد؟

$$(1) \quad 48 \quad (2) \quad 96 \quad (3) \quad 192 \quad (4) \quad 24$$

۲۹- با ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۸ چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$$(1) \quad 30 \quad (2) \quad 36 \quad (3) \quad 24 \quad (4) \quad 48$$

۳۰- با ارقام ۱، ۳، ۵، ۸ چند عدد سه‌رقمی مضرب ۳ با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$$(1) \quad 12 \quad (2) \quad 36 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 24$$

۳۱- با حروف کلمه «تجربی» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شده و به حرف بی‌نقطه ختم شود؟

$$(1) \quad 21 \quad (2) \quad 27 \quad (3) \quad 18 \quad (4) \quad 24$$

۳۲- چند عدد پنج‌رقمی با ارقام زوج و بزرگ‌تر از  $4000$  وجود دارد؟

$$(1) \quad 1875 \quad (2) \quad 1250 \quad (3) \quad 1874 \quad (4) \quad 1249$$

۳۳- با حروف کلمه «اردبیهشت» چند جایگشت ۵ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

$$(1) \quad 8! \quad (2) \quad \frac{8!}{5!} \quad (3) \quad 5! \quad (4) \quad \frac{8!}{3!}$$

۳۴- با حروف کلمه «کامپیوتر» چند کلمه ۵ حرفی (بدون تکرار حروف) می‌توان نوشت به طوری که فقط حرف اول و آخر آن نقطه‌دار باشد؟

$$(1) \quad 120 \quad (2) \quad 360 \quad (3) \quad 240 \quad (4) \quad 180$$

۳۵- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز بدون ارقام ۲ و ۵ و شامل رقم ۴ داریم؟

$$(1) \quad 114 \quad (2) \quad 108 \quad (3) \quad 126 \quad (4) \quad 120$$

تجربی داخل ۹۰

## حالت‌های خاص جایگشت n شیء - جایگشت با تکرار

## ← حالت‌های خاص جایگشت n شیء

گاهی می‌خواهیم  $n$  شیء را در کنار هم جایگشت دهیم، به طوری که چند شیء خاص مثلاً  $k$  شیء، کنار هم باشند. برای پیدا کردن جایگشت این اشیاء، ابتدا آن  $k$  شیء خاص را در اصطلاح به هم می‌بندیم و یک شیء در نظر می‌گیریم. بعد اگر اشیاء داخل بسته با هم جایگشت داشته باشند، جایگشت آن‌ها را در جایگشت اشیاء باقی‌مانده و این بسته ضرب می‌کنیم، یعنی  $(n-k+1)! \times k!$ . اگر هم اشیاء داخل بسته با هم جایگشت نداشتند که جواب برابر  $(n-k+1)!$  می‌شود.

**مثال** تعداد جایگشت‌های حروف کلمه **BARAN** که در آن دو حرف **A** کنار هم باشند، چه قدر است؟

**پاسخ** چون می‌خواهیم دو حرف **A** کنار هم باشند، پس آن‌ها را یک شیء در نظر می‌گیریم. حالا باید جایگشت حروف  $B, R, N$  و  $AA$  که  $4$  تا هستند را حساب کنیم. از طرفی جابه‌جایی دو حرف **A** با هم، تأثیری ندارد، پس درون بسته جایگشت نداریم. بنابراین تعداد جایگشت‌ها برابر است با:  $4!$  گاهی می‌خواهیم  $n$  شیء را در کنار هم جایگشت دهیم، به طوری که دو شیء خاص کنار هم نباشند. در این حالت جایگشت کل اشیاء را پیدا می‌کنیم و بعد تعداد جایگشت‌هایی که در آن دو شیء خاص کنار هم باشند را از آن کم می‌کنیم.

**مثال** تعداد جایگشت‌های ارقام  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  را پیدا کنید به طوری که رقم‌های  $3$  و  $4$  کنار هم نباشند.

**پاسخ** جایگشت این که ارقام  $3$  و  $4$  کنار هم باشند را از جایگشت  $6$  رقم داده شده کم می‌کنیم:

$$1020 \times 3 \times 4 = 506$$

ارقام  $3$  و  $4$  کنار هم باشند.

$$6! - (5! \times 2!) = 720 - 240 = 480$$

جایگشت  $493$  درون بسته  
جایگشت  $6$  رقم

گاهی می‌خواهیم  $n$  شیء را در کنار هم جایگشت دهیم، به طوری که  $k$  شیء خاص ( $k > 2$ ) کنار هم نباشند. در این حالت ابتدا  $(n-k)$  شیء بقیه را جایگشت داده و سپس در بین و دو طرف آن‌ها  $k$  شیء را جایگشت می‌دهیم.

**مثال** به چند طریق می‌توان  $5$  کتاب داستان متمایز و  $5$  کتاب علمی متمایز را در یک قفسه کنار هم بچینیم، به طوری که هیچ دو کتاب علمی‌ای در کنار هم نباشند؟

**پاسخ** ابتدا  $5$  کتاب داستان را می‌چینیم و بعد از  $6$  تا فضاهای خالی در بین و دو طرف آن‌ها،  $5$  مکان را انتخاب کرده و  $5$  کتاب علمی را در آن جاها قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{\text{داستان 1}} & \boxed{\text{داستان 2}} & \boxed{\text{داستان 3}} & \boxed{\text{داستان 4}} & \boxed{\text{داستان 5}} & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{داستان} & & \text{علمی} & & \text{داستان} & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 5! \times \binom{6}{5} \times 5! = 120 \times 6 \times 120 = 86400 & & & & & \\ \downarrow & & & & & \\ \text{انتخاب 5 تا از 6 تا مکان} & & & & & \end{array}$$

**دوجه** مفهوم  $\binom{6}{5}$  و چگونگی محاسبه آن را در درسنامه بعد می‌خوانید. پس این مثال را بعد از مطالعه درسنامه بعدی، بخوانید.

گاهی می‌خواهیم دو گروه از اشیاء را به طور یک در میان، کنار هم جایگشت دهیم که دو حالت ممکن است رخ دهد:

(۱) تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشد: در این حالت یک‌بار فرض می‌کنیم ابتدای صف چیدمان، گروه اول باشد و یک‌بار هم فرض می‌کنیم ابتدای صف، گروه دوم باشد و بعد جایگشت این دو حالت را با هم جمع می‌کنیم.

(۲) یکی از گروه‌ها یک عضو بیشتر از گروه دیگر داشته باشد: در این حالت چیدمان صف را با گروهی شروع می‌کنیم که عضو بیشتری دارد.

**مثال**  $2$  پسر و  $3$  دختر به چند طریق می‌توانند به صورت یک در میان در یک صف، کنار هم بایستند؟  $3$  پسر و  $3$  دختر چه‌طور؟

**پاسخ** برای قرار دادن  $2$  پسر و  $3$  دختر در یک صف، چون تعداد دخترها بیشتر است، ابتدای صف را با دختر شروع می‌کنیم. پس داریم:

$$12 = 6 \times 2 = 3! \times 2! \Rightarrow \text{دختر 3 پسر 2 دختر 1 پسر 1 دختر}$$

اما برای قرار دادن  $3$  پسر و  $3$  دختر در یک صف، چون تعداد آن‌ها برابر است، یک‌بار، صف را با پسر و یک‌بار، صف را با دختر شروع می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3! \times 3! \Rightarrow \text{دختر 3 پسر 3 دختر 2 پسر 1 دختر 1 پسر} \\ \text{یا} \\ 2 \times 3! \times 3! = 2 \times 6 \times 6 = 72 \Rightarrow \text{دختر 3 پسر 3 دختر 2 پسر 1 دختر} \end{array} \right.$$

← جایگشت با تکرار

گاهی  $n$  شیء داریم که  $n_1$  تای آن شبیه هم،  $n_2$  تای آن شبیه هم و ... و  $n_k$  تای آن شبیه هم است و می‌خواهیم جایگشت این  $n$  شیء را به دست آوریم. در این صورت باید به  $n!$ ، این  $n$  شیء را جایگشت دهیم و سپس به حاصل ضرب جایگشت اشیاء تکراری یعنی  $n_1!$ ،  $n_2!$ ، ... و  $n_k!$  تقسیم کنیم. پس تعداد کل حالت‌ها در این‌جا برابر می‌شود با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

**مثال** جایگشت‌های ۵ حرفی را برای حروف کلمه «باران» به دست آورید.

**پاسخ** در بین ۵ حرف این کلمه، ۲ حرف «ا» وجود دارد. پس تعداد جایگشت‌های این ۵ حرف برابر است با:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 60$$

**مثال** با ارقام ۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۳ چند جایگشت ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

**پاسخ** چون دو رقم ۱ و سه رقم ۲ داریم، در نتیجه:

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 2} = 60$$

همیشه یادم بپمونه

**حالت‌های خاص جایگشت**

- قرار گرفتن چند شیء خاص کنار هم **راهکار** ← بسته‌بندی چند شیء خاص
- کنار هم نبودن دو شیء خاص **راهکار** ← جایگشت کنار هم بودن دو شیء خاص - جایگشت کل
- کنار هم نبودن  $k$  شیء خاص که  $k > 2$  **راهکار** ← ابتدا  $n - k$  شیء را جایگشت داده و سپس  $k$  شیء را بین و دو طرف آن‌ها جایگشت می‌دهیم.
- جایگشت یک در میان دو گروه از اشیاء

یک گروه یک عضو بیشتر از گروه دیگر داشته باشد.

تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشد.

**راهکار** ↓

**راهکار** ↓

جایگشت چیدمان صف با شروع از گروهی که عضو بیشتری دارد.

جایگشت چیدمان صف با گروه اول در ابتدای صف

+

جایگشت چیدمان صف با گروه دوم در ابتدای صف

جایگشت با تکرار برای  $n$  شیء که  $n_1$  تا شبیه هم،  $n_2$  تا شبیه هم، ... و  $n_k$  تا شبیه هم است، برابر می‌شود با:  $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$

۳۶- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که به طوری عددهای اول کنارهم باشند؟

۱) ۶      ۲) ۲۴      ۳) ۱۲      ۴) ۱۸

۳۷- سه پسر و پنج دختر به چند طریق می‌توانند کنار هم روی یک ردیف صندلی بنشینند به طوری که پسرها کنار هم باشند؟

۱)  $5! \times 3!$       ۲)  $4! \times 5!$       ۳)  $3! \times 4!$       ۴)  $6! \times 3!$

۳۸- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «دبستان» که در آن دو حرف «س» و «ت» همواره کنار هم باشند، کدام است؟

۱) ۲۴۰      ۲) ۷۲۰      ۳) ۱۲۰      ۴) ۳۶۰

۳۹- با حروف کلمه «دامداران» چند جایگشت ۸ حرفی می‌توان ساخت که در آن حروف یکسان، کنار هم باشند؟

۱) ۷۲۰      ۲) ۶۰      ۳) ۱۲۰      ۴) ۳۶۰

۴۰- با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۳ چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت به طوری که در همه آن‌ها عدد ۳۲۱ دیده شود؟

۱) ۴۸      ۲) ۱۲      ۳) ۲۴      ۴) ۳۶

۴۱- ۵ نفر A، B، C، D و E به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند به طوری که نفر A کنار B و C بنشیند؟

۱) ۳۶      ۲) ۶۰      ۳) ۲۴      ۴) ۱۲

۴۲- می‌خواهیم با حروف a، b، c و d کلمات چهار حرفی بسازیم. تعداد کلماتی که در آن‌ها حرف‌های a و c کنار هم و b و d هم کنار هم هستند، کدام است؟

۱) ۸      ۲) ۱۰      ۳) ۱۲      ۴) ۶

۴۳- در تست قبل، اگر بخواهیم حروف a و c کنار هم نباشند، تعداد کلمات ۴ حرفی ممکن کدام است؟

۱) ۲۴      ۲) ۱۲      ۳) ۶      ۴) ۸



۴۴- با حروف کلمه «راستگو» چند کلمه شش حرفی می توان نوشت به طوری که دو حرف «س» و «گ» کنار هم نباشند؟

۲۴۰ (۱) ۷۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۴۵- ۵ کتاب داستان، ۳ کتاب هنری و ۴ کتاب علمی را می خواهیم در طبقه یک کتابخانه کنار هم قرار دهیم. اگر بخواهیم کتاب های هم

موضوع کنار هم باشند، این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

۵ × (۴!)<sup>۲</sup> (۱) (۴! × ۳!)<sup>۲</sup> (۲) (۳! × ۴!)<sup>۲</sup> × ۵ (۳) (۳!)<sup>۳</sup> × ۵ (۴)

۴۶- پنج نفر به نام های a, b, c, d و e قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. ترتیب سخنرانی این افراد به چند طریق ممکن است اگر

بین a و b فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۲۴ (۱) ۳۶ (۲) ۵۴ (۳) ۶۰ (۴)

۴۷- چند عدد سه رقمی وجود دارد که حداقل یک رقم آن ۲ باشد؟

۳۰۰ (۱) ۲۵۲ (۲) ۳۳۳ (۳) ۲۰۰ (۴)

۴۸- می خواهیم ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب تاریخ را به صورت یک در میان کنار هم بچینیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

۱۲ (۱) ۶ (۲) ۲۴ (۳) ۱۰ (۴)

۴۹- ۱۰ دختر و ۹ پسر به چند طریق می توانند به طور یک در میان در یک ردیف از سالن سینما بنشینند؟

۱۰ × ۹! (۱) ۹ × (۱۰!)<sup>۲</sup> (۲) ۹ × ۱۰! (۳) ۱۰ × (۹!)<sup>۲</sup> (۴)

۵۰- با جابه جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می توان تشکیل داد به طوری که رقم های ۲ یک در میان قرار گیرند؟ **ریاضی خارج ۸۹**

۹ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴)

۵۱- ۵ زن و ۵ مرد را به چند طریق می توان به صورت یک در میان کنار هم قرار داد؟

(۵!)<sup>۲</sup> (۱) ۲ × ۵! (۲) ۲ × (۵!)<sup>۲</sup> (۳) (۵!)<sup>۴</sup> (۴)

۵۲- با حروف کلمه «آبادان» چند جایگشت ۶ حرفی می توان ساخت؟

۷۲۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۲۴۰ (۴)

۵۳- با حروف کلمه «notebook» چند کلمه هشت حرفی می توان نوشت؟

۴۰۳۲۰ (۱) ۶۲۷۰ (۲) ۴۰۲۳۰ (۳) ۶۷۲۰ (۴)

۵۴- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ چند عدد ۸ رقمی می توان نوشت؟

۳۳۶۰ (۱) ۱۱۲۰ (۲) ۱۶۸۰ (۳) ۲۲۴۰ (۴)

۵۵- شش رقم ۵، ۵، ۳، ۳، ۱ را از مقوا بریده و در کنار یکدیگر جابه جا می کنیم. تعداد اعداد شش رقمی متمایز، کدام است؟ **انسانی خارج ۹۵**

۶۰ (۱) ۷۲ (۲) ۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۵۶- با حروف کلمه «DAMDARAN» چند رمز عبور ۸ حرفی می توان ساخت به طوری که با D شروع و به D ختم شوند؟ **انسانی خارج ۹۶**

۱۲۰ (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۴۰ (۴)

۵۷- با حروف کلمه «راهپیمایی» چند کلمه ۹ حرفی می توان ساخت که با کلمه «راه» شروع شوند؟

۱۲۰ (۱) ۹۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۵۰ (۴)

۵۸- در تست قبل، اگر بخواهیم کلمات ۹ حرفی بسازیم که به حرف «م» ختم شوند، آن گاه تعداد حالت های ممکن کدام است؟

۳۳۶۰ (۱) ۸! (۲) ۱۶۸۰ (۳)  $\frac{۸!}{۳!}$  (۴)

۵۹- با حروف کلمه «livingroom» چند کلمه ۱۰ حرفی می توان ساخت که با حرف «m» شروع و به حرف «g» ختم شوند؟

$\frac{۱۰!}{۴}$  (۱) ۸! (۲) ۱۰! (۳)  $\frac{۸!}{۴}$  (۴)

۶۰- حروف کلمه «EARNEST» را به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد به طوری که حرف N همواره در وسط قرار گیرد؟ (بدون توجه

به مفهوم)

۱۸۰ (۱) ۲۱۶ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۶۱- می خواهیم ۲ مداد سیاه و ۳ مداد قرمز را طوری کنار هم بچینیم که مدادهای سیاه همواره کنار هم باشند. این کار به چند طریق

امکان پذیر است؟ (مدادها متمایز نیستند.)

۲۴ (۱) ۴ (۲) ۱۰ (۳) ۴۸ (۴)

۶۲- با حروف کلمه «advance» چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت به طوری که حروف بی صدا یکی در میان باشند؟

۱۴۴ (۱) ۷۲ (۲) ۴۸ (۳) ۹۶ (۴)

۶۳- چند عدد شش رقمی با ارقام ۲، ۰، ۰، ۰، ۰، ۳ می توان نوشت؟

۳۰ (۱)      ۱۲۰ (۲)      ۵ (۳)      ۱۰ (۴)

۶۴- با حروف کلمه «FARHAD» چند رمز عبور ۶ حرفی می توان ساخت به طوری که دو حرف A کنار هم نباشند؟

۱۲۰ (۱)      ۱۸۰ (۲)      ۲۴۰ (۳)      ۳۰۰ (۴)

۶۵- تعداد جایگشت های حروف کلمه «BARAN» به طوری که A ها کنار هم نباشند، کدام است؟

۳۶ (۱)      ۲۴ (۲)      ۶۰ (۳)      ۹۶ (۴)

۶۶- تعداد جایگشت های حروف کلمه «banana» با تعداد جایگشت های کدام ارقام برابر است؟

۱۲۲۲۱ (۱)      ۳۴۳۴ (۲)      ۵۲۲۵۲۱ (۳)      ۴۲۳۲۳۴ (۴)

۶۷- با حروف کلمه «student» چند جایگشت ۷ حرفی می توان ساخت به طوری که حرف صدادار وسط کلمه باشد؟

$\frac{7!}{2}$  (۱)       $6! \times 2$  (۲)       $7!$  (۳)       $6!$  (۴)

۶۸- چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام ۲، ۲، ۳، ۳، ۴ می توان نوشت؟

۱۸ (۱)      ۳۶ (۲)      ۱۲ (۳)      ۲۴ (۴)

۶۹- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۵، ۵، ۲، ۲، ۵ می توان نوشت؟

۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۵ (۴)

۷۰- با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۲ چند عدد چهاررقمی زوج می توان نوشت؟

۶ (۱)      ۸ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۲ (۴)

۷۱- با ارقام ۱، ۱، ۴، ۷، ۷، ۷ چند عدد چهاررقمی می توان نوشت؟

۳۶ (۱)      ۳۸ (۲)      ۳۲ (۳)      ۳۰ (۴)

## درستانه

### تبدیل یا جایگشت r شیء از n شیء - ترکیب r شیء از n شیء

همان طور که قبلاً هم دیدید در بعضی از چیدمان ها (اشیاء یا ارقام یا ...) ترتیب قرار گرفتن اشیاء، ارقام یا افراد یا ... اهمیت دارد. مثلاً برای نوشتن یک عدد دورقمی با ارقام ۳ و ۷، این که ۳ اول باشد یا ۷ اهمیت دارد و اعداد متفاوتی را به ما می دهند، ۳۷ و ۷۳. حال مثلاً می خواهیم با ارقام ۱، ۲، ۵، ۶ و ۷ یک عدد سه رقمی با ارقام متمایز بنویسیم. در این صورت داریم:

$$5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

رقم ۵ →  
← انتخاب رقم ۳ از رقم ۵

در این جا حاصل ضرب  $5 \times 4 \times 3$  را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

در واقع برای محاسبه این تعداد از حالت ها از قاعده زیر استفاده کرده ایم:

### ← تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء که  $r \leq n$  و جابه جایی یا ترتیب انتخاب r شیء در آن اهمیت داشته باشد، برابر  $\frac{n!}{(n-r)!}$  است که برای آن از نماد  $P(n, r)$  استفاده می کنیم. در واقع داریم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad r \leq n$$

📌 **نوجه** برای حل این مسائل می توان از اصل ضرب یا فرمول P استفاده کرد، هر دو جواب یکسانی را به دست می دهند.

📌 **مثال** می خواهیم از بین ۶ نفر متقاضی استخدام، سه نفر را برای پست های منشی، حسابدار و معاونت انتخاب کنیم. این کار به چند طریق

امکان پذیر است؟

📌 **پاسخ** چون جابه جایی در انتخاب افراد مهم است، این که نفر اول منشی باشد یا نفر دوم یا نفر سوم، پس باید از فرمول تبدیل یا P استفاده کنیم:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

می توانستیم برای پیدا کردن جواب، از اصل ضرب نیز استفاده کنیم:

# پاسخ تشریحی

طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های انتخاب برای رضا برابر است با: **۴ ۱** 😊

$$10 \times 5 \times 6 = 300$$

برای هر نفر ۱۲ انتخاب برای سوار شدن وجود دارد. در نتیجه داریم: **۱ ۲** 😊

$$12 \times 12 \times 12 = 12^3 = (3 \times 4)^3 = 3^3 \times 4^3 = 3^3 \times (2^2)^3 = 3^3 \times 2^6$$

برای هر هدیه ۷ تا انتخاب داریم. در نتیجه تعداد حالت‌های ممکن برابر است با: **۳ ۳** 😊

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$$

هر مسافر در هر کدام از ۶ ایستگاه می‌تواند پیاده شود. پس داریم: **۲ ۴** 😊

$$\underbrace{6 \times 6 \times \dots \times 6}_{10 \text{ تا}} = 6^{10}$$

اگر تیم‌ها را به عنوان میزبان و مهمان در نظر بگیریم، برای تیم میزبان ۱۰ انتخاب و برای تیم مهمان ۹ انتخاب داریم. در نتیجه تعداد بازی‌ها برابر است با: **۱ ۵** 😊

$$10 \times 9 = 90$$

چون حتماً باید به همه تست‌ها پاسخ داده شود، برای پاسخ به هر سؤال، ۴ انتخاب داریم. در نتیجه: **۴ ۶** 😊

$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ تا}} = 4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$$

**تذکره!** اگر شرط این‌که حتماً به تمام سؤالات پاسخ داده شود رو نداده بود، جواب چه فرقی می‌کرد؟

پاسخ ✓ آگه این شرط رو ندراره بور، اون وقت می‌تونستیم به تست‌ها پاسخ هم ندریم. بنابراین برای هر تست ۵ تا انتخاب داشتیم و جواب می‌شد:

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{10 \text{ تا}} = 5^{10}$$

**۱ ۷** 😊

$$\underbrace{5 \times 3 + 5 \times 4}_{\substack{\text{بلوز با} \\ \text{شلوار} \\ \text{یا} \\ \text{بلوز با} \\ \text{دامن}}}} = 15 + 20 = 35$$

**۲ ۸** 😊

$$\underbrace{3 + 2} \times \underbrace{4 + 2}_{\text{برگشت رفت}} = 5 \times 6 = 30$$

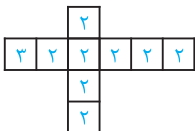
**۲ ۹** 😊

$$\underbrace{3 \times 5}_{\substack{\text{یا} \\ \text{یا}}} + \underbrace{3 \times 4}_{\substack{\text{یا} \\ \text{یا}}} + \underbrace{5 \times 4}_{\substack{\text{یا} \\ \text{یا}}} = 15 + 12 + 20 = 47$$

برای رفتن از A به D باید یا از A به B، بعد به C و بعد به D برویم یا از A به E و بعد به D برویم: **۱ ۱۰** 😊

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D: 2 \times 4 \times 1 = 8 \\ A \rightarrow E \rightarrow D: 2 \times 2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها} = 8 + 6 = 14$$

از خانه سمت چپ شروع به رنگ کردن می‌کنیم و تعداد حالت‌هایی که هر خانه را می‌توان رنگ‌آمیزی کرد در **۲ ۱۱** 😊



$$\text{شکل می‌نویسیم:} \quad \text{تعداد حالت‌ها} = 2^8 \times 3 = 256 \times 3 = 768$$

**۴ ۱۲** 😊

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C: 3 \times 4 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow C: 2 \times x = 2x \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها} = 12 + 2x \stackrel{\text{طبق فرض}}{=} 22 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

تعداد حالت‌های مختلف برای سفر از شهر D به شهر C و البته بدون عبور از شهر E را به دست می‌آوریم: **۳ ۱۳** 😊

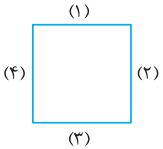
$$1) D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C: 2 \times 3 \times 2 = 12$$

$$2) D \rightarrow B \rightarrow C: 1 \times 2 = 2$$

$$3) D \rightarrow C: 4$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها} = 12 + 2 + 4 = 18$$

- ۱)  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E: 3 \times 2 \times 2 = 12$
  - ۲)  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E: 3 \times 2 \times 4 \times 2 = 48$
  - ۳)  $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E: 3 \times 1 \times 4 \times 2 = 24$
  - ۴)  $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E: 2 \times 4 \times 2 = 16$
  - ۵)  $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E: 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 8$
- $\Rightarrow$  تعداد کل حالت‌ها  $= 12 + 48 + 24 + 16 + 8 = 108$



اگر دیوارهای اتاق را به صورت روبه‌رو شماره‌گذاری کنیم، آنگاه برای رنگ کردن دیوار (۱)، ۵ انتخاب داریم. چون می‌خواهیم دیوارهای مجاور، یک رنگ نداشته باشند، برای رنگ کردن دیوارهای (۲) و (۴) دو حالت در نظر می‌گیریم:

**حالت اول:** دیوارهای (۲) و (۴) یک رنگ داشته باشند:

در این حالت برای رنگ کردن دیوار (۲)، ۴ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوار (۱)) داریم و چون رنگ دیوار (۴) هم مانند رنگ دیوار (۲) است، برای آن ۱ انتخاب خواهیم داشت. حال برای رنگ کردن دیوار (۳)، باز هم ۴ انتخاب داریم، چون فقط نباید رنگ دیوار (۲) و (۴) باشد. بنابراین تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{دیوار (۳)} \quad \text{دیوار (۱)} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 5 \times 4 \times 4 \times 1 = 80 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{دیوار (۲)} \quad \text{دیوار (۴)} \end{array}$$

**حالت دوم:** دیوارهای (۲) و (۴) دو رنگ مختلف داشته باشند:

در این حالت برای رنگ کردن دیوار (۲)، ۴ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوار (۱)) و برای رنگ کردن دیوار (۴)، ۳ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوارهای (۱) و (۲)) داریم. حال برای رنگ کردن دیوار (۳)، ۳ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوارهای (۲) و (۴)) خواهیم داشت. در نتیجه تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{دیوار (۳)} \quad \text{دیوار (۱)} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{دیوار (۲)} \quad \text{دیوار (۴)} \end{array}$$

بنابراین تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با:

$$80 + 180 = 260$$

- ۱)  $\frac{15!}{5!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \Rightarrow \frac{15!}{5!} \neq 3! \quad \times$
- ۲)  $(0! + 3!)! = (1 + 6)! = 7! \neq 6! \quad \times$
- ۳)  $10! - 8! = 10 \times 9 \times 8! - 8! = 8!(90 - 1) = 8! \times 89 \neq 89 \quad \times$
- ۴)  $\begin{cases} (2!)! = 2! = 2 \Rightarrow 2 \times (2!)! = 2 \times 2 = 4 \\ (2!)^2 = 2^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2 \times (2!)! = (2!)^2 \quad \checkmark$

می‌دانیم تنها  $1! = 1$  و  $0! = 1$ . در نتیجه داریم:

$$(x^2 - x)! = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \\ \text{یا} \\ x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

پس این معادله ۴ جواب دارد.

در عدد داده شده، ابتدا اعداد توان‌دار را به صورت ضرب عامل‌ها می‌نویسیم. سپس سعی می‌کنیم اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ... را در بین عامل‌های ضرب پیدا کرده و یا آن‌ها را با ضرب دو یا سه یا تعداد عامل‌های بیشتر ایجاد کنیم:

$$3^4 \times 2^7 \times 7 \times 5 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_9 \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_8 \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_6 \times \underbrace{2 \times 2}_4 \times 7 \times 5 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$$

همان‌طور که می‌بینید توانستیم اعداد ۱ تا ۹ را پیدا یا ایجاد کنیم و به ۹! برسیم.

$$2(n-1)! = (n+1)! \Rightarrow 2(n-1)! = (n+1)n(n-1)! \Rightarrow 2 = n^2 + n \Rightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Rightarrow (n-1)(n+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-1=0 \Rightarrow n=1 \quad \checkmark \\ n+2=0 \Rightarrow n=-2 \quad \text{غفقی} \end{cases} \Rightarrow (3n)! \stackrel{n=1}{=} 3! = 6$$



۳ ۲۰

از تساوی داده شده می توان نتیجه گرفت که فاکتوریل یک عبارت برابر خود همان عبارت شده است. هم چنین می دانیم تنها اعدادی که فاکتوریل آن ها برابر خودشان است، اعداد ۱ و ۲ هستند، زیرا  $1! = 1$  و  $2! = 2$  در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ 3x^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس تنها به ازای ۲ مقدار صحیح  $x$ ، تساوی داده شده برقرار است.



۲ ۲۱

$$(2n)! = 6! \times 7! \Rightarrow (2n)! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7! = 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7! = \underbrace{2 \times 5}_{10} \times \underbrace{3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7!}_{9}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7! = 10! \Rightarrow (2n)! = 10! \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$



۳ ۲۲

باید تاس یکی از عددهای ۲، ۴ یا ۶ بیاید. پس داریم:

$$\frac{2}{\downarrow \text{تعداد حالت های تاس}} \times \frac{3}{\downarrow \text{تعداد حالت های سکه}} = 6$$

$$\frac{1}{\text{رقم ۵}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳}} = 9$$

۱ ۲۳

**ظانم اجازه!** ما جواب رو به صورت  $1 \times 2 \times 1 = 2$  نوشتیم؟

پاسخ تو حالتی که رقمها تکراری نباشن رو نوشتی. اما هواسات باشه، وقتی تو صورت سؤال، نمیکه «بدون تکرار ارقام» یا «متمایز» پس یعنی رقمها می تونن تکراری باشن و تو باید حالت با تکرار رو به دست بیاری.



۲ ۲۴

در این جا ارقام متمایز هستند، پس داریم:

$$\frac{4}{\text{رقم ۵ یا ۳ یا ۱}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۱}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۱}} = 36$$

$$\frac{4}{\text{رقم ۳ یا ۱}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۱}} \times \frac{2}{\text{رقم ۲ یا ۱}} \times \frac{1}{\text{رقم ۱}} = 48$$

۴ ۲۵

اول تعداد حالت های رقم وسط را پر می کنیم و بعد به سراغ بقیه رقم ها می رویم:



۳ ۲۶

باید عدد چهاررقمی را با ارقام فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ بسازیم، اما برای محاسبه جایگشت، باید به شرط بزرگ تر از ۳۰۰۰ بودن عدد توجه کنیم. پس رقم اول از سمت چپ عدد، نمی تواند ۱ باشد و داریم:

$$\frac{4}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{4}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{2}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} = 96$$

$$\frac{6}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{5}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{4}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} = 1440$$

۱ ۲۷

اول تعداد حالت های حرف وسط را پر می کنیم و بعد جایگاه های بعدی را:



۳ ۲۸

حرف های  $a$  و  $u$  صدا دار هستند که می توانند حرف اول یا دوم یا سوم یا چهارم باشند. تعداد حالت های جایگشت ۴ حرفی را در صورتی که حرف صدا دار، حرف اول باشد، به دست می آوریم و بعد در ۴ ضرب می کنیم:  $4 \times 48 = 192 =$  تعداد کل حالت ها  $\Rightarrow \frac{2}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{4}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{2}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} = 48$

$$\frac{2}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{4}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{2}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} = 48$$

{a یا u}



۱ ۲۹

چون رقم صفر در بین ارقام وجود دارد، پس دو حالت در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \frac{4}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{1}{\text{رقم صفر}} = 12 \\ \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد} = 12 + 18 = 30 \\ \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{3}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} \times \frac{2}{\text{رقم ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹}} = 18 \\ \text{{۸ یا ۴}} \end{cases}$$



۱ ۳۰

می دانیم عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد. پس باید از بین ۴ رقم داده شده، ۳ رقمی را انتخاب کنیم که مجموع آن ها بر ۳ بخش پذیر باشد. در نتیجه این ۳ رقم را باید از بین ارقام مجموعه های  $\{1, 3, 5\}$  و  $\{1, 3, 8\}$  انتخاب کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\text{جایگشت}} \times \frac{3}{\text{جایگشت}} = 6 + 6 = 12$$

چون حرف «ی» در اول و وسط کلمه، نقطه دار و در آخر کلمه، بی نقطه است، پس دو حالت در نظر می گیریم. دقت کنید که تنها حرف بی نقطه

۱ ۳۱

این کلمه «ر» است. پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{\text{حرف اول «ی» باشد}} \times \frac{3}{\text{حرف اول «ی» باشد}} \times \frac{1}{\text{حرف اول «ی» باشد}} = 3 \\ \Rightarrow \text{تعداد کل کلمات} = 3 + 18 = 21 \\ \frac{2}{\text{حرف اول «ی» نباشد}} \times \frac{3}{\text{حرف اول «ی» نباشد}} \times \frac{3}{\text{حرف اول «ی» نباشد}} = 18 \\ \text{{ر، ی}} \quad \text{{ت، ج، ب}} \end{cases}$$

باید ارقام عدد پنج رقمی را از بین ارقام مجموعه  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$  انتخاب کنیم. از طرفی چون می‌خواهیم عدد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، باید رقم اول از سمت چپ ۲ نباشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{\{۸یا۶یا۴\}} = ۱۸۷۵$$

حالا در بین این اعداد، عدد ۴۰۰۰ هم وجود دارد و ما چون می‌خواهیم عدد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، پس یک عدد را از تعداد اعداد به دست آمده، کم می‌کنیم. در نتیجه تعداد کل اعداد مورد نظر ما  $۱۸۷۴ - ۱ = ۱۸۷۳$  تا می‌باشد.

$$\frac{۸!}{۳!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

کلمه «اردیبهشت» ۸ حرف دارد. در نتیجه داریم:

**طاقم اجازه!** جواب آخر رو چه طوری اون جور نوشتین؟

پاسخ: فیلی راحت. فب حاصل ضربی که داریم، برای این که ۸! رو نشون بده  $۳ \times ۲ \times ۱$  که همون ۳! هست رو کم داره، یعنی انگار ۸! تقسیم بر ۳!

$$\frac{۸!}{۳!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴$$

شده، چون داریم:

با کمی دقت و تمرین بیشتر، تو هم خیلی راحت می‌تونی این جور جواب‌ها رو پیدا کنی.

از بین ۸ حرف کلمه، ۵ حرف آن بی‌نقطه است که باید در اول و آخر کلمه نباشند. به دلیل وجود حرف «ی» دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱۲۰ = \frac{۲ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۱}{\{پ,ت\}} \times \frac{۱}{ی} \Rightarrow \text{تعداد کل کلمات} = ۱۲۰ + ۱۲۰ = ۲۴۰ \\ \text{حرف اول «ی» نباشد.} \\ ۱۲۰ = \frac{۱ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲}{\{پ,ت\}} \times \frac{۲}{\text{یکی از دو حرف } \{پ,ت\}} \\ \text{حرف اول «ی» نباشد.} \end{array} \right.$$

چون می‌خواهیم عدد سه رقمی شامل رقم ۴ باشد، پس یکی از ارقام آن حتماً ۴ است. از طرفی می‌خواهیم ارقام ۲ و ۵ را نداشته باشد، پس باید دو رقم دیگر را از بین ارقام ۰، ۱، ۳، ۶، ۷، ۸، ۹ انتخاب کنیم. در نتیجه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} ۴۲ = \frac{۱ \times ۷ \times ۶}{\text{رقم ۴}} \Rightarrow \text{رقم اول باشد.} \\ ۱۱۴ = ۴۲ + ۳۶ + ۳۶ \Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} \\ ۳۶ = \frac{۶ \times ۱ \times ۶}{\text{رقم ۴ غیر از صفر}} \Rightarrow \text{رقم وسط باشد.} \\ ۳۶ = \frac{۶ \times ۶ \times ۱}{\text{رقم ۴ غیر از صفر}} \Rightarrow \text{رقم آخر باشد.} \end{array} \right.$$

دو عدد اول ۲ و ۳ را با هم یک بسته در نظر می‌گیریم. پس این بسته با دو رقم ۱ و ۴ به ۳! جایگشت دارند. درون بسته هم ۲! جایگشت دارند. در نتیجه داریم:

$$۳! \times ۲! = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

سه تا پسر را یک بسته در نظر می‌گیریم. پس باید جایگشت ۶ شیء متمایز (۵ دختر و یک بسته) را حساب کرده و در جایگشت ۳ تا پسر ضرب کنیم:

$$۶! \times ۳!$$

دو حرف «س» و «ت» را با هم یک بسته در نظر می‌گیریم. در نتیجه کلاً ۵ حرف داریم که به ۵! جایگشت دارند. از طرفی دو حرف «س» و «ت» هم داخل بسته به ۲! جایگشت دارند. در نتیجه داریم:

$$۵! \times ۲! = ۱۲۰ \times ۲ = ۲۴۰$$

چون می‌خواهیم حروف یکسان، کنار هم باشند، دو حرف «د» را یک بسته و سه حرف «ا» را یک بسته در نظر می‌گیریم. در نتیجه این دو بسته با سه حرف «م»، «ر» و «ن» تشکیل ۵ شیء متمایز می‌دهند که به ۵! جایگشت دارند. حروف داخل بسته‌ها هم چون یکسان هستند، جایگشت درون بسته‌ها را نداریم. پس جواب برابر  $۱۲۰ = ۵!$  است.

چون می‌خواهیم عدد ۳۲۱ در همه آن‌ها دیده شود، پس این سه رقم را داخل یک بسته در نظر می‌گیریم که جایگشتی هم ندارند. حال با سه رقم باقی‌مانده و این بسته ۴! جایگشت خواهیم داشت. پس تعداد اعداد شش رقمی با این شرط برابر است با:

$$۴! = ۲۴$$

باید سه نفر A، B و C به صورت BAC یا CAB کنار هم بنشینند. پس این سه نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم که با دو نفر D و E به ۳! جایگشت خواهند داشت. درون بسته هم که ۲ حالت داریم، در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$۳! \times ۲ = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

حرف‌های a و c را داخل یک بسته و b و d را هم داخل یک بسته {b, d} و {a, c} در نظر می‌گیریم. پس دو شیء داریم که به ۲! جایگشت دارند. هم‌چنین داخل هر بسته هم به ۲! جایگشت خواهند داشت. در نتیجه داریم:

$$۲! \times ۲! \times ۲! = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$



۲ ۴۳

کافی است تعداد کلمات ۴ حرفی که دو حرف a و c در آن‌ها کنار هم هستند را از تعداد کل کلمات ۴ حرفی کم کنیم. چون می‌خواهیم a و c کنار هم باشند، آن‌ها را با هم داخل یک بسته در نظر می‌گیریم. پس ۳ شیء داریم که به ۳! جایگشت دارند و داخل بسته هم به ۲! جایگشت خواهند داشت. پس داریم:

$$4! - (3! \times 2!) = 24 - 12 = 12$$

a و c کنار هم



۳ ۴۴

ابتدا جایگشت این که دو حرف «س» و «گ» کنار هم باشند را به دست می‌آوریم. دو حرف «س» و «گ» را داخل یک بسته در نظر می‌گیریم، چون می‌خواهیم کنار هم باشند که به ۲! داخل بسته جایگشت دارند. حالا این بسته با ۴ حرف باقی‌مانده به ۵! جایگشت خواهند داشت. در نتیجه تعداد کلمات شش حرفی با این شرط برابر است با:

$$5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$

حال تعداد کل جایگشت‌های کلمه شش حرفی را به دست آورده و منهای حالت کنار هم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی که «س» و «گ» کنار هم نیستند به دست بیاید:

$$6! - 240 = 720 - 240 = 480$$



۳ ۴۵

کتاب‌های هر موضوع را داخل یک بسته در نظر می‌گیریم. پس ۳ بسته داریم که به ۳! جایگشت دارند و داخل هر بسته هم جایگشت داریم:

$$3! \times 5! \times 3! \times 4! = 3! \times 3! \times 5! \times 4! = (3!)^2 \times 5 \times 4! \times 4! = (3!)^2 \times (4!)^2 \times 5 = (3! \times 4!)^2 \times 5$$

جایگشت کتاب‌های هنری      جایگشت سه بسته جایگشت کتاب‌های علمی      جایگشت کتاب‌های داستان



۲ ۴۶

دو نفر a و b و نفری که قرار است بین آن‌ها سخنرانی کند، داخل یک بسته در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$\square, \square, a, \square, b, \square \Rightarrow 2! \times 3 \times 3! = 2 \times 3 \times 6 = 36$$

جایگشت ۳ شیء      جایگشت a و b      تعداد حالات انتخاب نفرات بین a و b



۲ ۴۷

بهترین راه این است که تعداد اعداد سه رقمی که در آن‌ها رقم ۲ به کار نرفته است را از تعداد کل اعداد سه رقمی کم کنیم:

$$9 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 = 900 - 648 = 252$$

**تذکره!** همیشه بیشتر توضیح بدید که چرا این طوری حل کردید؟

**پاسخ** بله که میشه. ببین وقتی میگه حداقل یک رقم عدد، ۲ باشه، یعنی یا یک رقم، یا دو رقم یا سه رقم عدد سه رقمی ما باید ۲ باشه. فب می‌تونیم این سه تا حالت رو حساب کنی و بعد جوابش رو با هم جمع کنی ولی یه کم راه هلت طولانی و وقت‌گیر میشه. فب ما راه‌هل کوتاه‌تر رو رفتیم. چون آگه کل عددهای سه رقمی رو منهای عددهایی که هیچ رقم ۲ ای ندارند، بکنی، عددهای سه رقمی که یا یکی یا دو تا یا سه تا ۲ دارند و مطلوب ما هم هست به دست میان. حالا بزار راه طولانی رو هم برات بنویسم. این راه رو هم ببین:

۱) عددهای سه رقمی که یک رقم ۲ دارند و ۲ رقم صدگان است:  $\frac{1 \times 9 \times 9}{2 \text{ غیر } 2 \text{ غیر } 2} = 81$

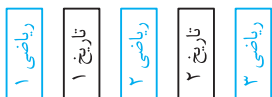
۲) عددهای سه رقمی که یک رقم ۲ دارند و ۲ رقم دهگان یا یکان است:  $\frac{8 \times 1 \times 9 + 8 \times 9 \times 1}{2 \text{ غیر } 2 \text{ غیر } 2 \text{ غیر } 2 \text{ و صفر}} = 72 + 72 = 144$

۳) عددهای سه رقمی که دو رقم ۲ دارند:  $\frac{1 \times 1 \times 9 + 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 9 \times 1}{2 \text{ غیر } 2 \text{ غیر } 2 \text{ غیر } 2 \text{ و صفر}} = 9 + 1 + 9 = 26$

۴) عدد ۱:  $222 \Rightarrow$  عدد سه رقمی که سه رقم آن ۲ است.

$$\Rightarrow$$
 تعداد کل حالت‌ها  $= 81 + 144 + 26 + 1 = 252$

چون تعداد کتاب‌های ریاضی بیشتر از تاریخ است، پس در ابتدای صف کتاب ریاضی را قرار می‌دهیم و بعد



$$3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

به‌طور یک در میان کتاب‌های تاریخ و ریاضی را می‌گذاریم:



۱ ۴۸



۴ ۴۹

چون تعداد دخترها بیشتر است، در شروع صف، دختر را قرار می‌دهیم و بعد به طور یکی در میان آن‌ها را می‌نشانیم. در نتیجه داریم:

$$10! \times 9! = 10 \times 9! \times 9! = 10 \times (9!)^2$$

به دو حالت می‌توان رقم‌های ۲ را یک در میان قرار داد: ۲ ۵۰ 😊

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 2 & & 2 & & \\ \_ & & \_ & & \_ & & \\ \text{یا} & & & & & & \\ \_ & & 2 & & 2 & & 2 \\ \_ & & \_ & & \_ & & \_ \end{array}$$

حال ۳ رقم دیگر را به ۳! حالت در هر کدام از حالت‌های فوق می‌توان بین رقم‌های ۲ جایگشت داد. پس جواب برابر است با:

$$3! + 3! = 6 + 6 = 12$$

دو حالت در نظر می‌گیریم. ابتدای صف، زن باشد یا ابتدای صف، مرد باشد: ۳ ۵۱ 😊

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 5! \times 5! \Rightarrow \text{مرد, مرد, زن, مرد, زن, مرد, زن, مرد, زن, مرد, زن} \\ \text{یا} \\ \Rightarrow 5! \times 5! \Rightarrow \text{زن, مرد, زن, مرد, زن, مرد, زن, مرد, زن, مرد, زن} \end{array} \right.$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 زن    مرد     $\Rightarrow$  تعداد کل حالت‌ها  $= 2 \times (5!)^2$

در کلمه «آبادان» سه حرف «ا» وجود دارد. در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با: ۲ ۵۲ 😊

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

حرف «O» سه بار تکرار شده است، پس تعداد کلمات ۸ حرفی برابر است با: ۴ ۵۳ 😊

$$\frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6720$$

۱ ۵۴ 😊

$$\frac{8!}{3! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 3360$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 ۳ بار    ۲ بار  
 تکرار ۵    تکرار ۶

۱ ۵۵ 😊

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 60$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 رقم ۳    رقم ۲  
 تکراری ۳    تکراری ۵

در کلمه‌های ۸ حرفی، حروف اول و آخر D هستند، پس باید جایگشت ۶ حرف باقی‌مانده را به دست آوریم: ۱ ۵۶ 😊

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

$\downarrow$   
 حرف ۳  
 تکراری ۸

در کلمه ۹ حرفی باید سه حرف اول «راه» باشد. پس باید جایگشت ۶ حرف باقی‌مانده را پیدا کنیم: ۱ ۵۷ 😊

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

$\downarrow$   
 حرف ۳ «ی»

حرف آخر که باید «م» باشد. پس جایگشت ۸ حرفی باقی‌مانده برابر است با: ۱ ۵۸ 😊

$$\frac{8!}{2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 3360$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 حرف ۳ «ی»    حرف ۲ «ا»

چون حرف اول و آخر باید «m» و «g» باشند، پس باید جایگشت ۸ حرف باقی‌مانده را به دست آوریم. از طرفی ۲ بار حرف «i» و ۲ بار حرف ۴ ۵۹ 😊

$$\frac{8!}{2! \times 2!} = \frac{8!}{2 \times 2} = \frac{8!}{4}$$

«O» تکرار شده است. در نتیجه داریم:

حرف وسط، N قرار می‌گیرد. پس باید جایگشت ۶ حرف باقی‌مانده را حساب کنیم که چون ۲ حرف E در آن تکرار شده‌اند، تعداد حالت‌ها برابر ۴ ۶۰ 😊

$$\frac{6!}{2!} = \frac{720}{2} = 360$$

است با:

۲ تا مداد سیاه را با هم یک بسته در نظر می‌گیریم. پس ۴ شیء داریم که می‌خواهیم آن‌ها را کنار هم بچینیم. از طرفی چون مدادها متمایز نیستند، پس ۲ ۶۱ 😊

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

باید جواب را بر جایگشت ۳ مداد قرمز تقسیم کنیم تا حالت‌های مشابه هم حذف شوند. در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

دقت کنید که چون ۲ مداد سیاه هم مشابه هستند، پس ۲! جایگشت درون بسته را هم نداریم.



**تکمیل جاز!** اگر مدادها متمایز بودند. اون وقت جواب چه طوری میشه؟

**پاسخ** لافل فورث به تلاشی بکن تا جواب رو پیدا کنی، آکه نتونستی پپرس. هلا فوب گوش کن بپین پی میگم. وقتی ۲ تا مدرار سیاه رو به بسته در نظر می‌گیریم، ۴ شیء متمایز داریم که به ۴! جایگشت دارند. ۲ تا مدرار سیاه هم درون بسته به ۲! جایگشت می‌کنند. پس جواب برابر میشه با:

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

چهار حرف d, v, n و c بی صدا هستند. آن‌ها را کنار هم می‌نویسیم و بین آن‌ها را خالی می‌گذاریم. حالا برای این‌که یکی در میان باشند، سه حرف صدادر a, a و e باید در این سه جای خالی قرار بگیرند و به  $\frac{3!}{2!}$  جایگشت دارند. در نتیجه داریم:

$$d-v-n-c$$

جایگشت

حروف بی صدا

$$4! \times \frac{3!}{2!} = 24 \times 3 = 72$$

جایگشت

حروف صدادر

اولین رقم از سمت چپ باید ۲ یا ۳ باشد. از طرفی رقم صفر، ۴ بار تکرار شده است. پس داریم:

$$4 \times 6 \times 3 = 72$$

جایگشت

شماره بعدی ۳ یا ۲

$$\frac{2 \times 5!}{4!} = \frac{2 \times 5 \times 4!}{4!} = 10$$

۴ بار تکرار صفر

بهترین روش حل این است که تعداد کل جایگشت‌های ۶ حرف که البته ۲ حرف A در آن تکراری است را حساب کنیم و بعد تعداد جایگشت‌هایی را که در آن‌ها دو حرف A کنار هم هستند، از آن کم کنیم تا مطلوب مسئله به دست آید. اما برای محاسبه حالتی که A ها کنار هم هستند، این‌طور عمل می‌کنیم که ابتدا A ها را با هم به عنوان یک بسته (شیء) در نظر می‌گیریم. بعد جایگشت ۵ حرف D, H, R, F, A را محاسبه می‌کنیم، به این صورت هر کلمه‌ای که بنویسیم در آن A ها کنار هم هستند. پس داریم:

$$\frac{6!}{2!} - 5! = \frac{720}{2} - 120 = 360 - 120 = 240$$

توجه کنید که جایگشت درون بسته هم نداریم.

برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف A کنار هم نباشند، باید حالت‌های مختلف زیادی را در نظر بگیریم. پس بهتر است تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف A کنار هم باشند را پیدا کنیم و از تعداد کل جایگشت‌ها کم کنیم:

تعداد کل جایگشت‌های ۵ حرفی

$$\frac{5!}{2!} - 4! = \frac{120}{2} - 24 = 60 - 24 = 36$$

تعداد جایگشت‌های

B, R, N, A, A

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه banana برابر است با:

$$3 \times 6 \times 6 = 108$$

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3! \times 2!} = 60$$

حرف n حرف a

حال باید عددی ۶ رقمی که دو رقم آن مشابه هم و سه رقم دیگر هم مشابه یک‌دیگر باشند را انتخاب کنیم که تنها گزینه (۳) این شرط را دارد.

اول تعداد حالت‌های وسط کلمه را پر می‌کنیم. پس داریم:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

تکرار دو حرف t

چون می‌خواهیم عدد زوج بنویسیم، پس رقم یکان باید زوج باشد. در نتیجه داریم:

$$1 \times 6 \times 8 = 48$$

رقم یکان

$$\frac{4! \times 3}{2! \times 2!} = \frac{3! \times 3 \times 2! \times 3}{2! \times 2!} = 18$$

تکرار ۲ بار ۲

تکرار ۳ بار ۳

چون ۵ رقم داریم و می‌خواهیم عدد چهاررقمی بنویسیم، پس حالت‌های مختلف ممکن را در نظر می‌گیریم:

۲ ۶۹



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{سه رقم ۵ و یک رقم ۲: } \frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4 \\ \text{دو رقم ۵ و دو رقم ۲: } \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6 \end{array} \right. \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد} = 4 + 6 = 10$$

حالت‌های مختلف ممکن را در نظر می‌گیریم:

۱ ۷۰



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{سه رقم ۲ و یک رقم ۱: } \frac{3 \times 2 \times 1 \times 3}{3!} = \frac{18}{6} = 3 \\ \text{دو رقم ۲ و دو رقم ۱: } \frac{3 \times 2 \times 1 \times 2}{2! \times 2!} = \frac{12}{4} = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد} = 3 + 3 = 6$$

ابتدا تعداد حالت‌های مختلف را پیدا می‌کنیم:

۲ ۷۱



۱) سه رقم ۷ و یک رقم ۴:  $\frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$

۲) سه رقم ۷ و یک رقم ۱:  $\frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$

۳) دو رقم ۷ و دو رقم ۱:  $\frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6$

۴) دو رقم ۷ و یک رقم ۴ و یک رقم ۱:  $\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$

۵) یک رقم ۷ و یک رقم ۴ و دو رقم ۱:  $\frac{4!}{2!} = 12$

تعداد کل اعداد =  $4 + 4 + 6 + 12 + 12 = 38$

سپس مجموع این حالت‌ها را به دست می‌آوریم:

۳ ۷۲



$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{3} \times \binom{3}{1} = \frac{5!}{2! \times 3!} \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10 \times 12 = 120$$

ابتدا ۳ نفر از بین ۶ نفر را برای اتاق ۳ نفره و بعد ۲ نفر از ۳ نفر باقی مانده را برای اتاق ۲ نفره انتخاب می‌کنیم. یک نفری هم که باقی مانده در

۳ ۷۳



اتاق ۱ نفره قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = \frac{6!}{3! \times 3!} \times 3 \times 1 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} \times 3 = 20 \times 3 = 60$$

باید به هر بچه، ۲ تا اسباب‌بازی بدهیم. پس برای بچه اول باید ۲ تا اسباب‌بازی از بین ۶ تا اسباب‌بازی انتخاب کنیم، برای بچه دوم ۲ تا

۴ ۷۴



اسباب‌بازی از بین ۴ اسباب‌بازی باقی مانده و به بچه سوم، ۲ تا اسباب‌بازی‌ای که باقی مانده می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = \frac{6 \times 5}{2!} \times \frac{4 \times 3}{2!} \times 1 = 15 \times 6 = 90$$

ابتدا ۳ مدرسه از بین ۵ مدرسه انتخاب می‌کنیم و بعد از هر کدام از ۳ مدرسه، یک نفر را انتخاب می‌کنیم:

۳ ۷۵



$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = \frac{5!}{3! \times 2!} \times 4 \times 4 \times 4 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} \times 64 = 10 \times 64 = 640$$

**تذکره:** همیشه بیشتر توضیح بدین چرا این طوری حل کردین؟

بین ۳ مدرسه، ۳ دانش‌آموز انتخاب کنیم که دوباره از یک مدرسه نباشن، پس بهترین راه اینه که اول ۳ تا از ۵ تا مدرسه رو انتخاب کنیم،

بعد از هر گروه از مدرسه‌ها، یک دانش‌آموز رو برادریم. این طوری که انتخاب میشن، قطعاً از ۳ تا مدرسه مختلف هستن.

چون می‌خواهیم دانش‌آموزان غیر هم‌منطقه‌ای باشند، پس ابتدا ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب کرده، بعد از هر کدام از این ۳ منطقه، یک

۲ ۷۶



دانش‌آموز را از بین ۱۵ دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{3} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} = \frac{6!}{3! \times 3!} \times 15 \times 15 \times 15 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} \times 3375 = 20 \times 3375 = 67500$$