

راهنمای استفاده از کتاب

برای کسب بهترین نتیجه در امتحانات مدرسه و کنکور گام‌های زیر را به ترتیب برای هر فصل طی کنید.

فیلم آموزشی

گام

اول

۱. هر فصل به تعدادی جلسه تقسیم شده است.
۲. برای استفاده از فیلم‌های آموزشی هر جلسه QR-Code های صفحه بعد را اسکن کنید.
۳. در هر جلسه مطالب کتاب درسی درس به درس تدریس شده است.
۴. تمرین‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی به صورت کامل تدریس شده است.

درسنامه آموزشی

گام

دوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت تقسیم شده است.
۲. در هر قسمت آموزش کاملی به همراه مثال و تست ارائه شده است.
۳. سطح تست‌ها عموماً کمی بالاتر از مثال‌ها است. اگر دانش‌آموز وقت کافی ندارد یا می‌خواهد فقط از سطح امتحانات مدرسه درس بخواند، می‌تواند بدون این‌که مطلبی را از دست دهد از تست‌ها عبور کند.
۴. قسمت‌هایی تحت عنوان ویژه علاقمندان آورده شده است که ویژه آمادگی برای آزمون‌های تستی و کنکور است و مطالعه آن‌ها برای امتحانات مدارس ضروری نیست.

پرسش‌های تشریحی

گام

سوم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (ادقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم) تقسیم شده است.
۲. سوالات از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۳. سوالات دارای پاسخ تشریحی هستند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

گام

چهارم

۱. هر فصل به تعدادی قسمت (ادقیقاً منطبق بر قسمت‌بندی گام دوم و سوم) تقسیم شده است.
۲. هر قسمت نیز دارای ریز طبقه‌بندی است.
۳. تست‌ها از ساده به دشوار و موضوعی مرتب شده‌اند.
۴. تمامی تست‌های کنکور داخلی و خارج از کشور قابل استفاده و منطبق بر کتاب درسی جدید آورده شده است.
۵. تست‌ها دارای پاسخ تشریحی هستند.
۶. تست‌های واجب با علامت * و تست‌های دشوار با علامت * مشخص شده است.

به جای آن‌که چندین کتاب بخوانید، کتاب‌های گاج را چندین بار بخوانید

درسنامه آموزشی

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- قسمت اول: گزاره‌ها، منطق ریاضی ۱۰
- قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی ۱۳
- قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دو شرطی ۱۷
- قسمت چهارم: استدلال ریاضی ۲۱

فصل دوم: تابع

- قسمت اول: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همبانی ۲۶
- قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق ۳۲
- قسمت سوم: اعمال روی توابع ۳۸

فصل سوم: آمار

- قسمت اول: شاخص‌های آماری ۴۸
- قسمت دوم: سری‌های زمانی ۵۳

FILM

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- جلسه اول: گزاره‌ها، منطق ریاضی، ترکیب عطفی و فصلی و گزاره‌های شرطی و دو شرط 140 min
- جلسه دوم: استدلال ریاضی 65 min

فصل دوم: تابع

- جلسه سوم: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همبانی 107 min
- جلسه چهارم: توابع پلکانی و قدرمطلق 93 min
- جلسه پنجم: اعمال روی توابع 92 min

فصل سوم: آمار

- جلسه ششم: شاخص‌های آماری 36 min
- جلسه هفتم: سری‌های زمانی 44 min

پرسش‌های تشریحی

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی ۱۳۷
- قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی ۱۳۸
- قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دو شرطی ۱۳۹
- قسمت چهارم: استدلال ریاضی ۱۴۰

فصل دوم: تابع

- قسمت اول: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ۱۴۹
- قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق ۱۵۲
- قسمت سوم: اعمال روی توابع ۱۵۳

فصل سوم: آمار

- قسمت اول: شاخص‌های آماری ۱۶۵
- قسمت دوم: سری‌های زمانی ۱۶۶

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

- قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی ۵۷
- قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی ۵۸
- قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دو شرطی ۶۲
- قسمت چهارم: استدلال ریاضی ۶۸

فصل دوم: تابع

- قسمت اول: مفهوم تابع، توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ۸۵
- قسمت دوم: توابع پلکانی و قدرمطلق ۹۰
- قسمت سوم: اعمال روی توابع ۹۵

فصل سوم: آمار

- قسمت اول: شاخص‌های آماری ۱۱۹
- قسمت دوم: سری‌های زمانی ۱۲۳

فصل

قسمت اول

گزاره‌ها - منطق ریاضی

۱

منطق ریاضی

در این فصل قرار است کاربرد علم منطق را در ریاضی شاهد باشیم به این بخش از علم منطق که در ریاضی کاربرد دارد، «منطق ریاضی» گفته می‌شود. منطق ریاضی به کمک روابط و قوانین خاص خود، روش‌های درست و منطقی استدلال کردن در ریاضی را به ما آموزش می‌دهد.

تعریف گزاره: گزاره جمله‌ای خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد.

هر چند درستی یا نادرستی گزاره بر ما معلوم نباشد اما گزاره در یک زمان نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

برای مثال: جمله «عدد ۲ زوج است»، یک گزاره درست است.

عبارت « $1+2$ » گزاره نیست، زیرا جمله کاملی نیست.

جمله «عدد ۳ عدد خیلی کوچکی است»، گزاره نیست، زیرا ملاک خاصی نداریم که بگوییم چه اعدادی، کوچک‌اند. و چه اعدادی خیلی کوچک‌اند، بنابراین نمی‌توانیم ارزش آن را تعیین کنیم.

به جمله « a عددی گویاست» دقت کنید چون ما نمی‌دانیم a چه عددی است (a مجهول است). پس گزاره محسوب نمی‌شود، زیرا اگر a عددی مثل $\frac{1}{4}$ باشد، گویاست و اگر عددی مثل $\sqrt{2}$ باشد، گنگ است. بد نیست بدانید به این گونه عبارت‌ها، گزاره‌ها نمی‌گوییم.

نکته مهم: در منطق ریاضی جملات خبری که ارزش‌گذاری آن‌ها سلیقه‌ای، نامفهوم و یا بی‌معنی باشد گزاره محسوب نمی‌شوند. هم‌چنین جملات امری پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

«ایا فردا امتحان داریم؟» ← چون پرسشی است، گزاره نیست.

«فردا ساعت ۸ برای امتحان در مدرسه باشید.» ← چون امری است، پس گزاره نیست.

«عجب سوالات سختی!» ← چون عاطفی است، گزاره نمی‌باشد.

در موارد زیر، چند گزاره درست وجود دارد؟

(آ) مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

(ب) هوای بارانی زیباتر از هوای برفی است.

(ت) با فرض $n \in \mathbb{N}$ عدد $2n+1$ همواره عددی فرد است.

(ب) اولین عدد سه‌رقمی بر ۵ بخش پذیر است.

$$(ت) \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 \leq (\sqrt{3})^2$$

(ج) حاصل عبارت $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$ عددی طبیعی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: (آ) درست است. مثل $5+7=12$

(ب) درست است، زیرا اولین عدد سه‌رقمی 100 است که بر ۵ بخش پذیر است.

(ت) چون سلیقه‌ای است، گزاره محسوب نمی‌شود.

(ت) $2 \leq \frac{5}{4}$ گزاره‌ای نادرست است.

(ت) نادرست است. برای مثال اگر $n=1$ باشد، حاصل $(2n+1)$ برابر با $(2+1=3)$ می‌گردد که عددی زوج است.

(ج) $4-3=1$ پس حاصل، عددی طبیعی است لذا این گزاره درست است. بنابراین گزینه (۴) درست است.

جدول گزاره‌ها

گاهی اوقات گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که ترکیبی از چند گزاره است. برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره‌ها که به گزاره‌های ترکیبی معروف هستند از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌کنیم که به مجموعه این قراردادها و نمادها «جبر گزاره‌ها» یا «حساب گزاره‌ها» گفته می‌شود. گزاره‌ها را معمولاً با حروفی مانند p, q, r, s نمایش می‌دهیم. همچنین ارزش درست یک گزاره را با حرف « T » یا « d » و ارزش نادرست یک گزاره را با حرف « F » یا « n » نشان می‌دهیم.

p	p, q	p, q, r
d	d, d	d, d, d
n	d, n	d, d, n
d, n	n, d	d, n, d
n, n	n, n	d, n, n
n, d	d, n	n, d, d
n, n	n, n	n, n, d
n, n	n, n	n, n, n

$2^1 = 2$
 \Downarrow
 یک گزاره

$2^2 = 4$
 \Downarrow
 دو گزاره

$2^3 = 8$
 \Downarrow
 سه گزاره

جدول‌های ارزش‌گذاری مربوط به ۱، ۲ و ۳ گزاره، در حالت کلی به صورت مقابل می‌باشند. در این جدول‌ها می‌بینید که مثلاً اگر ۳ گزاره داشته باشیم، جدول ارزش‌گذاری، دارای ۸ ردیف می‌باشد.

نکته: اگر n تعداد گزاره‌های دلخواه باشد، جدول ارزش‌گذاری دارای 2^n ردیف خواهد بود. مثلاً اگر ۴ گزاره داشته باشیم آن‌گاه $2^4 = 2^4 = 16$ پس جدول ارزش‌گذاری دارای ۱۶ ردیف خواهد بود.

تمرین

جدول ارزش‌گذاری مربوط به تعدادی از گزاره‌ها شامل ۲۲ ردیف می‌باشد. تعداد گزاره‌ها کدام است؟

۳ (۱)	۴ (۲)	۵ (۳)	۶ (۴)
-------	-------	-------	-------

گزینه (۳) صحیح است. $\Rightarrow n = 5 \Rightarrow 2^5 = 32 = 2^5 \Rightarrow$ تعداد ردیف‌ها

نقیض گزاره‌ها

نقیض یک گزاره مثل p را با $\sim p$ نمایش می‌دهند که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش p می‌باشد. برای ساختن نقیض گزاره از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

(۱) در جملات فارسی «است» را به «نیست» و «نیست» را به «است» تبدیل می‌کنیم. البته «نیاشد» و «باشد» هم نقیض یکدیگرند.

مثال: گزاره‌های مقابل نقیض یکدیگرند:

- ۱ عددی اول نیست: p
- ۱ عددی اول است: $\sim p$

(ب) می‌توانیم در ابتدای گزاره از عبارت «چنین نیست که» استفاده کنیم تا نقیض شود.

مثال: دو گزاره مقابل نقیض یکدیگرند:

- ۲۴ مضرب ۳ می‌باشد: p
- چنین نیست که ۲۴ مضرب ۳ باشد: $\sim p$

(پ) اگر نمادهای ریاضی داشته باشیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- تعدادهای \geq و $<$ نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $x \geq y$ و $x < y$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای $>$ و \geq نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $5 < -2$ و $5 \geq -2$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای $=$ و \neq نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $a = b$ و $a \neq b$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای \in و \notin نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $2 \in \mathbb{N}$ و $2 \notin \mathbb{N}$ نقیض یکدیگرند.
- نمادهای \subseteq و $\not\subseteq$ نقیض هم هستند. **مثال:** گزاره‌های $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{R}$ نقیض یکدیگرند.

تست

کدام یک از گزاره‌های زیر، نقیض گزاره « a^2 عددی منفی است» نمی‌باشد؟ (a عددی حقیقی و دلخواه است.)

- (۱) a^2 عددی منفی نیست
 (۲) چنین نیست که a^2 عددی منفی باشد
 (۳) a^2 عددی مثبت است
 (۴) $a^2 \geq 0$

پاسخ: دو گزاره نقیض هم باید دقیقاً مخالف هم باشند. « a^2 عددی منفی است» و « a^2 عددی مثبت است» در ظاهر مخالف هم هستند، ولی مخالف گزاره « $a^2 < 0$ » می‌شود. $a^2 \geq 0$ به عبارت دیگر اگر a^2 منفی نباشد، می‌تواند مثبت یا صفر باشد. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

گزاره‌های هم‌ارز

دو گزاره را زمانی هم‌ارز می‌گوییم که ارزش آن‌ها یکسان باشد، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. هم‌ارزی دو گزاره p و q را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً دو گزاره « 2 عددی فرد است» و « $\sqrt{3} \in \mathbb{N}$ » هم‌ارز هستند، زیرا هر دو نادرست هستند.

نکته: اگر داشته باشیم $p \equiv q$ ، آن‌گاه $\sim p \equiv \sim q$ ، به عبارتی هرگاه دو گزاره هم‌ارز هم باشند، نقیض آن‌ها نیز هم‌ارز هستند.

مثال

طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

نمونه: $\sim (3 \in \mathbb{Z}) \equiv (3 \notin \mathbb{Z})$

- (ا) $\sim (15 \leq -2) \equiv ?$ (ب) $\sim (\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}) \equiv ?$ (پ) $\sim (N \subset R) \equiv ?$

$\sim (15 \leq -2) \equiv (15 > -2)$

$\sim (\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}) \equiv (\frac{1}{4} \notin \mathbb{Q})$

$\sim (N \subset R) \equiv (N \not\subset R)$

پاسخ: (ا)

(ب)

(پ)

تمرین

اگر از گزاره‌های دو باز نقیض گرفته شود، جواب همان گزاره اولیه خواهد بود. به عبارتی نقیض نقیض هر گزاره، همان گزاره می‌شود. به عنوان مثال می‌توان گفت:

$\sim(\sim q) \equiv q$

$\sim(\sim(\sqrt{3} < \sqrt{5})) \equiv (\sqrt{3} < \sqrt{5})$

تست

گزاره « $\frac{\Delta^2}{5^3} = 5^4$ » با کدام گزاره زیر، هم‌ارز است؟

- (۱) معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ جواب حقیقی ندارد.
 (۲) حاصل عبارت $(x^2 - 1)$ به ازای هر مقدار x همواره مثبت است.
 (۳) رابطه $I = \{(3 \cdot 5), (4 \cdot 7), (\sqrt{6}, 1)\}$ تابع است.
 (۴) قد دانش‌آموزان یک کلاس، متغیر کمی نسبی است.

پاسخ: گزاره مورد نظر در سؤال، طبق قانون اعداد توان‌دار در تقسیم درست می‌باشد. گزینه‌های پاسخ سؤال است که ارزش آن درست باشد.

گزینه (۱): $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$ ، پس معادله دارای ریشه مضاعف می‌باشد. لذا گزاره مربوط به گزینه (۱) نادرست است.

گزینه (۲): اگر برای مثال به جای x صفر قرار دهیم، حاصل منفی می‌شود پس این گزاره نیز نادرست است.

گزینه (۳): چون $\sqrt{6} = 3$ می‌باشد، فقط خصوصیات اول (3 و 1) و (3 و 5) با هم برابرند. پس I تابع نمی‌باشد و گزاره‌های نادرست داریم.

گزینه (۴): طبق دانسته‌های شما از سال گذشته، وزن، قد، درآمد و ... متغیرهای کمی نسبی هستند. پس این گزاره درست است و با گزاره مورد نظر سؤال هم‌ارز می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) درست است.

فصل

قسمت دوم

ترکیب عطفی و فصلی

۱

ترکیب گزاره‌ها

در این درسنامه می‌خواهیم گزاره‌های مرکب را بشناسیم و در مورد چگونگی ساخت این گزاره‌ها آشنایی پیدا کنیم. در علم منطق ریاضی، به کمک حروف ربطی مثل «و»، «یا»، «اگر... آن‌گاه...» و «اگر... آن‌گاه...» و بالعکس می‌توانیم دو گزاره p و q را با هم ترکیب کنیم و یک گزاره مرکب بسازیم. دو گزاره مرکب $p \wedge q$ و $p \vee q$ به ترتیب ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره p و q نام دارند.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر حرف ربط «و» را بین دو گزاره p و q قرار دهیم، گزاره $p \wedge q$ ساخته می‌شود. این گزاره مرکب زمانی درست است که هم p و هم q درست باشند. یعنی حتی اگر یکی از دو گزاره p و q نادرست باشند، کل گزاره $p \wedge q$ نادرست خواهد بود. جدول ارزش‌گذاری $p \wedge q$ به شکل زیر است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نادرستی حتی یکی از گزاره‌ها، باعث نادرستی کل گزاره $p \wedge q$ می‌شود. \Rightarrow

درستی یا نادرستی گزاره‌های عطفی زیر را بررسی کنید.

(ا) 36 مربع کامل است و $\frac{7}{3}$ عددی گویاست.

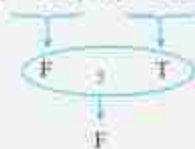
(ب) $(x(x-2) = x^2 - 2x) \wedge [(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \geq 1]$

(ج) پاسخ: (ا) 36 مربع کامل است و $\frac{7}{3}$ عددی گویاست.

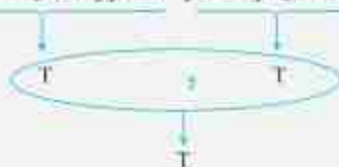
(ب) $(-3 \in \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$

(ت) 5^2 عددی فرد است و a^2 همواره عددی نامتقی است.

(ب) $(-3 \in \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$



(ت) 5^2 عددی فرد است و a^2 همواره عددی نامتقی است.



(ب) $(x(x-2) = x^2 - 2x) \wedge [(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2) \geq 1]$



در گزاره عطفی «p و معادله $x^2 - x + 3 = 0$ جواب حقیقی ندارد.» کدام گزاره باشد تا ارزش کل گزاره عطفی، درست باشد؟

- (۱) معادله $x^2 - 1 = 0$ یک ریشه حقیقی دارد.
 (۲) ۵ مضرب ۲۵ است.
 (۳) رابطه $\{(3, 5), (2, 7), (4, 4)\}$ یک تابع است.
 (۴) $\frac{\sqrt{5x}}{3x+2}$ عبارتی گویا است.

پاسخ: ارزش گزاره «معادله $x^2 - x + 3 = 0$ جواب حقیقی ندارد» درست است، زیرا اگر Δ را به دست آوریم حاصل عطفی می‌شود. پس معادله

ریشه حقیقی ندارد (۱) $(\Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11)$. لذا گزاره p هم باید درست باشد تا ارزش کل گزاره $p \wedge q$ درست باشد.

از بین گزینه‌ها فقط گزاره گزینه (۳) ارزش درست دارد، زیرا مؤلفه‌های اول تکراری نیستند. پس تابع است. اما در مورد نادرستی گزینه‌های دیگر باید

گفت. در گزینه (۱) معادله $x^2 - 1 = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی است ($x = \pm 1$). در مورد گزینه (۲) عدد ۵ مضرب ۲۵ نیست، بلکه مقسوم‌علیه ۲۵ است.

در مورد گزینه (۴) هم، چون x زیر رادیکال است پس عبارت $\frac{\sqrt{5x}}{3x+2}$ گویا نیست، بنابراین گزینه (۳) درست است.

ترکیب فصلی دو گزاره

اگر بین دو گزاره p و q از حرف ربط «یا» استفاده شود، گزاره $p \vee q$ ساخته می‌شود. این گزاره مرکب زمانی درست است که یکی از گزاره‌ها یا هر دو گزاره، درست باشند و به عبارتی زمانی نادرست است که هر دو نادرست باشند. جدول ارزش‌گذاری ترکیب فصلی $p \vee q$ به شکل زیر می‌باشد:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

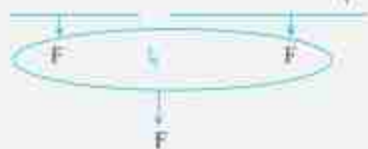
درستی حداقل یکی از گزاره‌ها، باعث درستی کل گزاره $p \vee q$ می‌شود. \Rightarrow

درستی یا نادرستی گزاره‌های فصلی زیر را تعیین کنید.

(ا) $\frac{1}{p}$ عددی طبیعی است یا $N \cap Z = Z$

(ب) ۹۰ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

پاسخ: (ا) $\frac{1}{p}$ عددی طبیعی است یا $N \cap Z = Z$



(ب) ۵ عددی اول است یا $(-5)^2$ عددی منفی است.

(ت) $(\sqrt{2} > \sqrt{2} - 1) \vee [(-2)^{-2} = 16]$

(ب) ۵ عددی اول است یا $(-5)^2$ عددی منفی است.



(ت) $(\sqrt{2} > \sqrt{2} - 1) \vee [(-2)^{-2} = 16]$



(ب) ۹۰ بر ۳ بخش پذیر است یا ۹۰ بر ۵ بخش پذیر است.



$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

تذکره: می‌دانید اگر توان عددی منفی باشد می‌توانیم آن عدد را معکوس کنیم تا علامت توان مثبت شود. لذا:

تستی

در گزاره فصلی «p یا ۸۰۰۰ عددی اول است.» گزاره p کدام باشد تا ارزش کل گزاره فصلی «درست» باشد؟

- (۱) از نمودار پراکنش نگاشت برای نمایش سه متغیر استفاده می‌شود.
- (۲) از نمودار میله‌ای برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود.
- (۳) از نمودار حبابی برای نمایش حداکثر ۳ متغیر استفاده می‌شود.
- (۴) از نمودار نقطه‌ای برای نمایش دو متغیر استفاده می‌شود.

پاسخ: گزاره «۸۰۰۰ عددی اول است.» گزاره‌ای نادرست است، پس برای آنکه گزاره فصلی درست باشد باید گزاره «p» درست باشد، چون در این صورت خواهیم داشت: $(p \vee q) \equiv (T \vee F) \equiv T$

طبق مطالب کتاب دهم، فقط گزاره «از نمودار میله‌ای برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود.» ارزش درست دارد، بد نیست بدانید که از نمودار پراکنش نگاشت برای نمایش دو متغیر، از نمودار حبابی برای نمایش حداقل سه متغیر و از نمودار نقطه‌ای برای نمایش یک متغیر استفاده می‌شود. بنابراین گزینه (۲) درست است.

تستی

اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، کدام گزینه در مورد ستون نتیجه گزاره $\sim(p \wedge \sim q) \vee q$ درست است؟

- (۱) شامل ۳ نادرست و ۱ درست می‌باشد.
- (۲) شامل ۲ درست و ۲ نادرست می‌باشد.
- (۳) شامل ۱ نادرست و ۳ درست می‌باشد.
- (۴) شامل ۴ نادرست می‌باشد.

پاسخ: (۳)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim(p \wedge \sim q) \vee q$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

گزینه (۳) صحیح است. \Rightarrow ۳ درست و ۱ نادرست

توانم و فرمول‌های اصلی ترکیب منطقی و فصلی

در بسیاری از تنه‌ها برای حل سریع‌تر و بدون رسم جدول ارزش‌گذاری می‌توانیم از فرمول‌های زیر استفاده کنیم. با فرض آنکه p و q دو گزاره دلخواه باشند و T گزاره‌های همواره درست و F گزاره‌های همواره نادرست باشند، خواهیم داشت:

روابط اصلی ترکیب منطقی	روابط اصلی ترکیب فصلی
$(p \wedge p) \equiv p$	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$(p \wedge T) \equiv (T \wedge p) \equiv p$	$(p \vee T) \equiv (T \vee p) \equiv T$
$(p \wedge F) \equiv (F \wedge p) \equiv F$	$(p \vee F) \equiv (F \vee p) \equiv p$
$(p \wedge \sim p) \equiv (\sim p \wedge p) \equiv F$	$(p \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$

در روابط بالا اگر به جای هر یک از گزاره‌های p و q، گزاره‌های دیگری مثل r یا s یا حتی $\sim p$ و $\sim q$ قرار گیرد، روابط به همان شکل جواب می‌دهد.

برای مثال: $(r \vee F) \equiv r$ ، $(s \wedge \sim s) \equiv F$ ، $(s \vee \sim s) \equiv T$ ، $(\sim p \vee F) \equiv \sim p$ ، $(r \wedge F) \equiv F$

تستی

کدام هم‌ارزی زیر، درست است؟

$[\sim p \vee \sim(\sim p)] \equiv T$ ، $[(\sim p \wedge T) \vee (\sim p \vee F)] \equiv p$ ، $(\sim p \wedge \sim F) \equiv T$ ، $(\sim p \wedge T) \equiv p$ ،

پاسخ: سمت چپ هم‌ارزی‌های داده‌شده را نوشته و حاصل آن‌ها را خودمان حساب می‌کنیم:

- (۱) گزینه $(\sim p \wedge T) \equiv p$
 - (۲) گزینه $(\sim p \wedge \sim F) \equiv (\sim p \wedge T) \equiv \sim p$
 - (۳) گزینه $[(\sim p \wedge T) \vee (\sim p \vee F)] \equiv [(\sim p) \vee (\sim p)] \equiv \sim p$
 - (۴) گزینه $[\sim p \vee \sim(\sim p)] \equiv (\sim p \vee p) \equiv T$
- بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

خواص و فرمول‌های تکمیلی ترکیب عملی و منطقی

در زیر روابطی را می‌خواهیم یاد بگیریم که فقط در تست‌ها کاربرد دارد. در تمام روابط زیر می‌توانیم از جدول ارزش‌گذاری استفاده کنیم و آن‌ها را اثبات نماییم ولی نیازی به این کار نیست.

توجه: همان‌طور که در روابط منطقی اشاره شد به جای هر کدام از گزاره‌های p و q ، می‌توان از گزاره‌های دیگری مانند $s, r, \sim p, \sim q$ و ... استفاده کرد.

روابط شرکت‌پذیری $\begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{cases}$ مثال: $[p \wedge (\sim p \wedge q)] \equiv [(p \wedge \sim p) \wedge q] \equiv (F \wedge q) \equiv F$

روابط پخش $\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$

روابط دمورگان $\begin{cases} \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \\ \sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \end{cases}$ مثال: $\begin{cases} \sim(\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim q) \\ \sim(\sim p \vee \sim q) \equiv (p \wedge q) \end{cases}$

قوانین جذب $\begin{cases} [p \wedge (p \vee q)] \equiv p \\ [p \vee (p \wedge q)] \equiv p \end{cases}$ مثال: $\begin{cases} \sim p \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p \\ p \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \end{cases}$

قوانین شبه‌جذب $\begin{cases} [p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q) \\ [p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q) \end{cases}$ مثال: $\begin{cases} [\sim p \wedge (p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge q) \\ [p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee \sim q) \end{cases}$

توجه: برای نمونه رابطه $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ را به کمک جدول ارزش‌گذاری اثبات می‌کنیم:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	p
د	د	د	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن

این ۴ سطر یکسان شدند پس هم‌ارزی درست است.

تست در صورتی که گزاره $p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)$ کدام است؟

$\sim r$ (۴) r (۳) F (۲) T (۱)

$[p \vee (\sim q \wedge \sim p)] \equiv [p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv (p \vee \sim q)$ **پاسخ:** ۳

چون طبق فرض گزاره $p \vee \sim q$ نادرست است پس هم p نادرست است و هم $\sim q$ ، لذا خود q درست است. بنابراین:

گزینه (۲) صحیح است. $[\sim(p \vee q) \wedge \sim(\sim r)] \equiv [\sim(F \vee T) \wedge r] \equiv (F \wedge r) \equiv F$

تست در کدام گزینه، با یک هم‌ارزی نادرست مواجه هستیم؟

$\sim r \wedge (\sim r \vee s) \equiv s$ (۲) $\sim(\sim p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$ (۱)

$p \vee (p \wedge \sim r) \equiv p$ (۴) $q \vee (s \wedge \sim p) \equiv (q \vee s) \wedge (q \vee \sim p)$ (۳)

پاسخ: با توجه به قوانین ذکرشده، فقط هم‌ارزی (۲) نادرست است که اصلاح‌شده آن به صورت مقابل است:

$\sim r \wedge (\sim r \vee s) \equiv \sim r$ **جذب**

پس گزینه (۲) جواب تست می‌باشد.



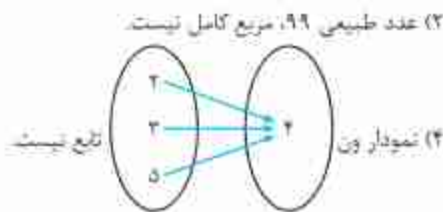
آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱

قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی

مفهوم گزاره - ارزش درستی گزاره‌ها

۱. کدام گزینه در مورد «مفهوم گزاره» صحیح است؟
 (۱) بعضی از جملات پرسشی، گزاره هستند.
 (۲) هر جمله خبری، یک گزاره است.
 (۳) هر جمله خبری، یک گزاره است.
 (۴) اگر یک جمله خبری قابل ارزش‌گذاری نباشد، گزاره نیست.
 (۵) ارزش یک گزاره، می‌تواند گاهی درست و گاهی نادرست باشد.
۲. کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) هر گزاره، جمله‌ای است خبری ولی هر جمله خبری ممکن است گزاره نباشد.
 (۲) جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.
 (۳) منطق ریاضی به کمک یک سری قانون و قاعده، روش درست استدلال کردن را به ما می‌آموزد.
 (۴) اگر ارزش یک جمله خبری برای ما معلوم نباشد، ولی دقیقاً درست یا نادرست باشد آن جمله گزاره نیست.
 (۵) اگر گزاره زبر ارزش نادرست دارد؟
 (۱) بزرگ‌ترین عدد اول دو رقمی، ۹۷ است.
۳. کدام گزینه گزاره محسوب نمی‌شود؟
 (۱) هر عدد طبیعی، عدد صحیح نیز می‌باشد.
 (۲) ساده‌ترین درس کتکور، زبان انگلیسی است.
 (۳) گزاره گزاره زبر ارزش درست دارد؟
 (۴) واریانس داده‌های ۷، ۷ و ۷ برابر صفر است.
 (۵) تمام مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۳۰ عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۳۰.
۴. تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری مربوط به n گزاره، ۲۵۶ می‌باشد. مقدار n کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
۵. تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری مربوط به ۵ گزاره چند برابر تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری ۷ گزاره‌ای است؟
 (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{1}{5}$
۶. چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟
 (آ) نمودار خط $y = 2x + 5$ از ربع اول نمی‌گذرد.
 (ب) نمودار $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ تابع نیست.
 (ت) مزه غذاها (خوب، متوسط، بد) متغیر کیفی ترتیبی است.



- (۲) 8^2 عددی نامتقی است.
 (۴) قرآن ۱۱۴ سوره دارد.

- (۲) ۵۱ عددی اول است.
 (۴) به ازای $n \in \mathbb{N}$ حاصل $(-2)^{n+1}$ همواره مثبت است.
۷. تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری مربوط به ۵ گزاره چند برابر تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌گذاری ۷ گزاره‌ای است؟
 (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{1}{5}$
۸. چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟
 (آ) نمودار خط $y = 2x + 5$ از ربع اول نمی‌گذرد.
 (ب) نمودار $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ تابع نیست.
 (ت) مزه غذاها (خوب، متوسط، بد) متغیر کیفی ترتیبی است.



(ت) مزه غذاها (خوب، متوسط، بد) متغیر کیفی ترتیبی است.

(ج) میانه، همان چارک اول است.

- (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

(ت) عدد ۱ نه اول است نه مرکب.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

هم‌ارزی - نفیض گزاره‌ها

۹۰: کدام هم‌ارزی درست است؟

(۳) $-(\sqrt{5} \in \mathbb{Q}) \equiv \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

(۱) $-(a^x < b^x) \equiv (a^x > b^x)$

(۴) (وزن افراد متغیر کیفی ترتیبی است) $\equiv (X^+ + 1)$ همواره مثبت است

(۳) $\sim [-(\frac{1}{p} < \frac{r}{q})] \equiv (\frac{1}{p} \geq \frac{r}{q})$

۹۱: در کدام گزینه دو عبارت کنار هم، نفیض یکدیگر نیستند؟

(۱) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \cdot \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

(۳) $x^2 - 3x \neq 2 \cdot x^2 - 3x = 2$

(۳) a عددی فرد است، a عددی زوج است.

(۴) a عددی مرکب است، a عددی اول است.

۱۱۰: کدام هم‌ارزی درست است؟

(۱) (مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست) \equiv (حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، الزاماً گنگ نیست)

(۲) $(\sqrt{5})$ عددی گنگ است $\equiv (\frac{\sqrt{3}+1}{4})$ عددی گویاست.

(۳) $(a < b) \equiv \sim (a > b)$

(۴) $(-3)^2 \geq 0 \equiv \sqrt{9+16} = 3+4$

۱۲: گزاره $[\sim (3 \in \mathbb{N})]$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

(۲) مقدار اشاره ممکن است یا حداقل بازتر در یک جامعه، برابر شود.

(۱) مکعب هر عدد حقیقی منفی، عددی منفی است.

(۴) برد تابع $f(x) = 5$ کل اعداد حقیقی (\mathbb{R}) می‌باشد.

(۳) طول رأس سهمی $y = -x^2 - 6x + 1$ برابر $x = -3$ می‌باشد.

۱۳: با توجه به جدول زیر اگر ارزش درست را با T و نادرست را با F نمایش دهیم، گزینه درست برای ارزش‌های شماره‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

گزاره p	ارزش p	ارزش $\sim p$
نمودار جعبه‌ای، 2 متغیر یا بیش‌تر را نمایش می‌دهد.	۱	۲
برای جمع‌آوری داده‌های آماری 4 روش وجود دارد.	۳	۴

F, T, T, F (۱)

T, F, T, F (۳)

T, F, F, T (۴)

F, T, F, T (۲)

۱۴: کدام گزاره با گزاره «مختصات رأس سهمی $y = (x-1)^2 + 4$ برابر $S(2+4)$ است» هم‌ارز می‌باشد؟

(۲) میانگین داده‌های $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ برابر 5 است.

(۱) میانه داده‌های $1, 2, 5, 9, 10, 12, 15$ برابر 9 می‌باشد.

(۴) مد داده‌های $1, 3, 5, 17, 19, 23, 27$ برابر 3 است.

(۳) دامنه تابع $y = 2$ برابر $\{3\}$ است.

قسمت دوم: ترکیب منطقی و قضای

ترکیب منطقی گزاره‌ها

۱۵: کدام گزینه، ستون آخر (نتیجه) جدول مقابل را نشان می‌دهد؟

p	q	$p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
د	د	?
د	ن	?
ن	د	?
ن	ن	?

- د
 - د
 - ن
 - ن
- (۴)

- د
 - ن
 - د
 - ن
- (۳)

- د
 - د
 - د
 - د
- (۲)

- ن
 - ن
 - ن
 - ن
- (۱)

۱۶: در جای خالی چه گزاره‌ای قرار دهیم تا ارزش گزاره حاصل، درست باشد؟

(مربع هر عدد بین صفر و یک، از خود عدد کوچک‌تر است.) $\wedge (\dots) \wedge (4^x \leq 2^x)$

(۱) تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها کم‌تر از چارک اول هستند. $|\sqrt{x} - \sqrt{4}| + \sqrt{x} = \sqrt{x}$ (۳)

(۲) حاصل کسر $\frac{x^x - 4}{x^x - 16}$ برابر است با $\frac{1}{x^x - 4}$ $\sim (5 \in \mathbb{Z}) \equiv 5 \in \mathbb{N}$ (۳)

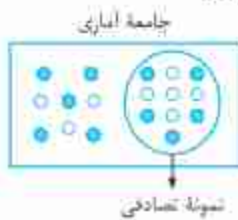
۱۷: با توجه به جدول زیر به جای A، B و C کدام ارزش‌ها قرار بگیرند؟ (T یعنی درست و F یعنی نادرست)

p	$\sim q$	$\sim p \wedge q$
A	B	T
F	C	F

$A \equiv F \cdot B \equiv F \cdot C \equiv T$ (۲) $A \equiv F \cdot B \equiv T \cdot C \equiv T$ (۱)

$A \equiv T \cdot B \equiv F \cdot C \equiv F$ (۴) $A \equiv T \cdot B \equiv F \cdot C \equiv T$ (۳)

۱۸: با توجه به شکل زیر در مورد گزاره «پارامتر دایره‌های توپر برابر ۱۰ و آماره دایره‌های توخالی برابر ۸ است.» چه می‌توان گفت؟



(۱) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب $\frac{5}{4}$ و $\frac{4}{4}$ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

(۲) گزاره درست است و نیازی به تغییرات ندارد.

(۳) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب $\frac{5}{4}$ و $\frac{1}{4}$ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

(۴) اگر به جای ۱۰ و ۸ به ترتیب ۲۸ و ۱۸ قرار گیرند، گزاره درست می‌شود.

۱۹: اگر گزاره p به صورت «معادله $3 - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$ دو جواب قابل قبول دارد.» و گزاره q به صورت «معادله $x^2 - x + 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد.» باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) ارزش گزاره عطفی $p \wedge q$ نادرست است.

(۲) ارزش گزاره عطفی $p \wedge q$ درست است.

(۳) گزاره p درست ولی q نادرست است.

(۴) گزاره p نادرست ولی q درست است.

ترکیب فصلی گزاره‌ها

۲۰: در جای خالی چه عبارتی قرار گیرد تا گزاره زیر، درست باشد؟

«... یا شدت زلزله، تغییر کیفی است.»

(۱) مرکب است.

(۲) یا ۲ برابر شدن داده‌ها، شد هم ۲ برابر می‌شود.

(۳) \sqrt{x} گویا است.

(۴) یا ۳ برابر شدن داده‌ها، میانه تغییری نمی‌کند.

۲۱: در جای خالی کدام گزاره را قرار دهیم تا گزاره حاصل، ارزش داشته باشد؟

«... یا تمام مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۴۰ عبارتند از $1, 2, 4, 5, 10, 20, 40$ »

(۱) شیب هر خط افقی برابر ۱ واحد است.

(۲) 21 عدد اول است.

(۳) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1$

(۴) $(-1)^{-2} = -1$

۲۲: گزاره «بُرد تابع $f(x) = \sqrt{3x+1}$ با دامنه $D_f = \{0, 1, 5\}$ برابر است با $\{1, 2, 4\}$ یا $\{7, 9\}$ داده‌ها قبیل از چارک اول قرار دارند.» با کدام گزاره زیر هم‌ارز نیست؟

(۱) در داده‌های 506000080000100000 ، میانه بهتر از میانگین محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهد.

(۲) در داده‌های 1020304050609999 ، میانه و دامنه میان‌جاری، بهتر از میانگین و انحراف معیار، پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهند.

(۳) در منحنی نرمال، ۹۶ درصد داده‌ها بین $\bar{x} - 2\sigma$ و $\bar{x} + 2\sigma$ قرار دارند.

(۴) یا فرض $D_f = \{\sqrt{3}, 0, 2\}$ در تابع $f(x) = x^2 - 1$ ، برد تابع برابر $\{1, 2, 3\}$ می‌باشد.

ترکیب عطفی و فصلی به طور هم‌زمان

$\sim p \vee \sim (q \vee \sim p) \equiv ?$

F (۴)

T (۳)

$\sim p \wedge \sim q$ (۲)

$\sim p \vee \sim q$ (۱)

۲۳: حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟

۲۴۰. حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟

$\sim (q \vee \sim q) \wedge \sim (p \wedge \sim p) \equiv ?$ F (۴) T (۳) q (۲) p (۱)

۲۵۰. اگر ارزش گزاره $\sim (\sim p \vee \sim q)$ درست باشد و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $q \vee (p \wedge r)$ با کدام گزاره زیر هم‌ارز است؟

T (۴) q (۳) p (۲) F (۱)

۲۶. حاصل هم‌ارزی مقابل کدام است؟

$(\sim q \vee T) \wedge (F \wedge p) \equiv ?$ $\sim q$ (۴) p (۳) F (۲) T (۱)

۲۷۰. ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

(۱) 527 عددی فرد است. و (۸) عدد اول است. (۳) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Z}) \vee [(\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{2})^2 = 4]$

(۲) $\sqrt{3}$ عددی گنگ است و ضرب دو عدد فرد، عددی زوج است. (۴) $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}) \vee (\frac{7}{8} < \frac{5}{9})$

۲۸۰. کدام هم‌ارزی، درست است؟

(۱) $(\sim p \wedge p) \equiv T$ (۳) $[\sim (q \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p)] \equiv F$
 (۲) $[\sim (\sim p) \vee (\sim p \wedge T)] \equiv F$ (۴) $[\sim p \wedge (\sim q \vee r)] \equiv [\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge r)]$

۲۹۰. طرف دوم هم‌ارزی $\sim q \vee \sim (p \vee q) \equiv ?$ کدام است؟

q (۳) p (۱) $\sim q$ (۴) $\sim p$ (۲)

۳۰. چند مورد از هم‌ارزی‌های زیر درست است؟

(۱) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ (۲) $[r \vee (p \wedge r)] \equiv p$
 (ب) $\sim (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim q)$ (ث) $(q \vee \sim q) \equiv (\sim q \vee q) \equiv F$
 (ج) $\sim [\sim (\sim p \vee \sim q)] \equiv \sim (p \wedge q)$ (۳) $\sim q$ (۴) $\sim p$

۳۱۰. چند تا از هم‌ارزی‌های زیر نادرست است؟

(۱) $(\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim (p \vee q)$ (۲) $[\sim p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv \sim p$
 (ب) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge q)$ (۳) $\sim p$ (۴) $\sim q$

۳۲۰. ارزش چند گزاره از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ یا $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (۲) $x^2 - 3x = 0$ دو ریشه غیرصفر دارد و عدد 20 مقرب 5 است.
 (ب) در تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ متغیر x وابسته است و شیب‌های هر دو خط موازی با هم برابرند.
 (ت) درآیند افراد، متغیر گسسته‌ای است یا انحراف معیار جذر واریانس است. (۳) $\sim p$ (۴) $\sim q$

۳۳۰. چند مورد از هم‌ارزی‌های زیر درست است؟

(۱) صفر (۲) $[\sim p \vee (p \wedge q)] \equiv (\sim p \vee q)$
 (ب) $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ (ث) $[\sim p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \equiv \sim q$
 (۳) $[p \vee (\sim p \vee \sim q)] \equiv T$ (۴) $\sim q$

۳۴۰. اگر گزاره $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim p)$ درست باشد و r نیز نادرست باشد، گزاره $\sim p \vee (q \wedge r)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

T (۴) F (۳) q (۲) p (۱)

۳۵۰. طرف دوم هم‌ارزی $(\sim p \vee F) \wedge (\sim p \vee q) \equiv ?$ کدام است؟

$\sim q$ (۴) q (۳) $\sim p$ (۲) p (۱)

۳۶۰. چند گزاره زیر، ارزش درست دارند؟

(۱) 17 عددی اول یا عددی گنگ است. (ب) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است یا 20 عددی اول است.
 (پ) $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1) \wedge (10^{-2} = 0.01)$

(ت) میانگین، داده وسط داده‌های مرتب‌شده است و اگر مقدار ثابتی به داده‌ها اضافه شود، به میانگین نیز همان مقدار اضافه می‌شود.

۲ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۴۳. چند مورد از گزاره‌های زیر ارزش درست دارند؟

(ا) در معادله $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{x+1}{2x+1}$ دو ریشه قابل قبول وجود دارد و نمودار $y = 3$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

(ب) در داده‌های ۱۰۲۰۳۰۴۰۶۰۸۰۱۰۰۱۲۰۱۸۰۲۰۰۲۱ اختلاف میانگین و میانه کم‌تر از ۲ واحد است یا میانه بزرگ‌تر از میانگین است.

(پ) عبارت $x^2 - 4x = 0$ به ۳ عامل اول تجزیه می‌گردد و مجموع ریشه‌های آن صفر می‌باشد.

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۴. اگر گزاره $(p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge r$ درست باشد، ارزش گزاره $(\neg p \vee q)$ کدام است؟

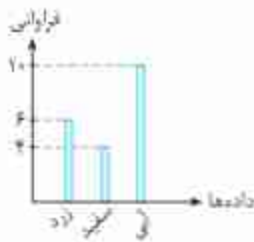
(۱) T (۲) F (۳) می‌تواند درست یا نادرست باشد (۴) ۲ بهستگی دارد

۴۵. ارزش چند گزاره از گزاره‌های زیر درست است؟

(ا) در تابع $f(x) = |x^2 + 3x|$ مقدار $f(-2)$ برابر با ۲ می‌باشد و عبارت $x^2 + 1$ قابل تجزیه است.

(ب) در نمودار زاواری با ۹ متغیر، زاویه هر دو محور متوالی ۴۰ درجه است و در نمودار میله‌ای روبه‌رو، درصد رنگ زرد برابر ۳۰ است.

(پ) با توجه به جدول مقابل، زاویه مربوط به گروه خونی O در نمودار دایره‌ای ۶۰ درجه است یا $(\frac{\sqrt{3}}{3})^2$ عددی گویا است.



گروه خونی	A	B	AB	O
فرکانس	۲۴	۱۶	۸	۱۲

(ت) $f = \{(10, 2), (20, 2), (30, 2)\}$ یک تابع است و معادله $x^2 - 9 = 0$ فقط دارای یک جواب $x = 3$ است.

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۴۶. ارزش کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

(۱) «طول رأس سهمی $y = x^2 - 12x + 1$ برابر $x = 6$ است.» و «مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.»

(۲) «وزن دانش‌آموزان پایه یازدهم متغیر کمی نسبتی است.» و «مربع هر عدد مثبت از همان عدد بزرگ‌تر است.»



قسمت سوم: گزاره‌های شرطی و دوشرطی

گزاره شرطی

۴۷. نقیض گزاره $\neg p \Rightarrow q$ کدام است؟

(۱) $q \Rightarrow p$ (۲) $p \Rightarrow q$ (۳) $\neg p \wedge \neg q$ (۴) $\neg p \wedge q$

۴۸. عکس نقیض گزاره مقابل چیست؟

- (۱) «اگر گنگ است» \Rightarrow «اگر ۲ زوج باشد»
- (۲) «اگر ۲ زوج باشد» \Rightarrow «اگر گنگ است»
- (۳) «اگر گویا است» \Rightarrow «اگر ۲ زوج باشد»
- (۴) «اگر ۲ زوج است» \Rightarrow «اگر $\sqrt{2}$ گنگ نباشد»

پایه هفتم | فصل اول (الگوریتم، مجموعه‌ها و استدلال ریاضی) | بانک سوالات



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

پاسخ فصل ۱

۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

هر جمله خبری یک گزاره نیست، مانند جملاتی که خبری هستند ولی هر فرد در مورد ارزش آن نظر متفاوتی دارد. مثلاً جمله خبری « $\frac{1}{2}$ عدد خیلی کوچکی است.» گزاره نیست، زیرا در علم منطق قانون خاصی برای بزرگی و کوچکی اعداد نداریم، پس بر اساس این توضیح گزینه (۳) نادرست و گزینه (۲) درست است. در مورد گزینه (۱) جملات پرستی نمی‌توانند گزاره باشند ضمناً ارزش هر گزاره، دقیقاً درست است یا نادرست و نمی‌تواند گاهی درست و گاهی نادرست باشد.

۲ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

برای توضیح نادرستی گزینه (۴) مثلاً ارزش جمله خبری « 5921 عددی اول است.» برای ما معلوم نیست ولی می‌دانیم این جمله گزاره است.

۳ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

گزینه (۱): درست است، چون هم دو رقمی است و هم اول است.

گزینه (۲): 99 جذر کامل ندارد پس مربع کامل نیست.

گزینه (۳): طبق مطالب سال دهم، درست است.

گزینه (۴): اگر نمودار را سه زوج مرتب تبدیل کنیم خواهیم داشت: $\{(5,4), (2,4), (2,4)\}$ می‌بینیم تابع است. پس گزینه (۴) نادرست است.

۴ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

جمله «ساده‌ترین درس کنکور، زبان انگلیسی است.» گزاره نیست، چون طبق قوانین علم، منطق نمی‌توان آن را ارزشیابی کرد، زیرا هر فردی نظر خاصی درباره دشواری یا آسانی این درس دارد.

بقیه گزینه‌ها همگی گزاره‌اند، دقت کنید که « n عددی نامنفی است.» گزاره است و ارزش درست دارد.

۵ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

بررسی گزینه (۱): می‌دانیم اگر داده‌ها برابر باشند، واریانس و انحراف معیار آن‌ها برابر صفر است.

بررسی گزینه (۲): 51 بر 3 بخش‌پذیر است پس اول نیست.

بررسی گزینه (۳): مقسوم‌علیه‌های طبیعی 30 عبارت‌اند از $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ که در گزینه (۳) عدد 6 نیامده است.

بررسی گزینه (۴): ارزش گزاره داده‌شده نادرست است، زیرا اگر n عددی زوج باشد، مثل 2 ، آن‌گاه حاصل عبارت منفی می‌گردد:

$$(-3)^{n+1} = (-3)^{2+1} = (-3)^3 = -27$$

۶ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

$$n=8 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow n=8$$

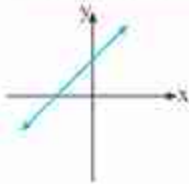
۷ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

$2^n =$ تعداد ردیف‌های جدول ارزش‌ها

$$\begin{cases} n=5 \Rightarrow 2^5 = 32 \\ n=7 \Rightarrow 2^7 = 128 \end{cases} \Rightarrow \text{نسبت این دو عدد} = \frac{2^5}{2^7} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

۸ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

(۱) اگر نمودار $y = 2x + 5$ را رسم کنیم، از ناحیه اول می‌گذرد، پس نادرست است.



(ب) اتحاد مزوج است و درست می‌باشد.

(پ) هر خطی به موازات محور y ها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند پس تابع است، پس این گزاره نادرست است.

(ت) مرز غذاها، کیفی تریبی است، پس گزاره درست است.

(ث) درست است.

(ج) میلته در واقع چراگ دوم محسوب می‌شود، پس این گزاره نادرست است.

۹ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

نادرستی گزینه (۱): $-(a^2 < b^2) \equiv a^2 \geq b^2$

درستی گزینه (۲): $-(\sqrt{5} \in Q) \equiv (\sqrt{5} \notin Q)$

نادرستی گزینه (۳): نقیض هر گزاره همان گزاره می‌شود.

$$-|\left(-\frac{1}{3} < \frac{2}{9}\right)| \equiv \left(\frac{1}{3} < \frac{2}{9}\right)$$

نادرستی گزینه (۴):

ارزش درست دارد $\Rightarrow +1$ همواره مثبت است،
ارزش نادرست دارد، (وزن، متغیر کمی نسبی است) \Rightarrow وزن افراد،
متغیر کیفی تریبی است.

۱۰ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

با توجه به نکات گفته‌شده در درس، در گزینه‌های (۱) و (۲) نقیض‌ها کنار هم آمده‌اند. در مورد گزینه (۳) هم هر عددی فرد نباشد، حتماً زوج است.

اما در مورد گزینه (۴) آیا عددی که اول نباشد حتماً مرکب است؟ خیر، زیرا عدد 1 نه اول است نه مرکب.

۱۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱ ۱

بررسی گزینه (۱): هر دو گزاره درست هستند $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ می‌بینیم که الزاماً ضرب دو عدد گنگ، گنگ نمی‌باشد، پس هم‌ارز هستند.

بررسی گزینه (۲): $\sqrt{5}$ عددی گنگ است که درست است ولی $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ گویا نیست، پس هم‌ارز نیستند.

بررسی گزینه (۳): $(a > b) \equiv (a \leq b)$ ، پس درمی‌یابیم که طرف اول و دوم هم‌ارز نیستند.

بررسی گزینه (۴): می‌دانیم که $\sqrt{25} = 5 = \sqrt{9+16}$ ، پس گزاره $\sqrt{9+16} = 3+4 = 7$ نادرست است.

هم‌چنین $9 \geq (-3)^2$ درست است، پس هم‌ارزی گزینه (۴) نادرست است.



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

فصل ۱

قسمت اول: گزاره‌ها - منطق ریاضی

۱. جدول زیر را کامل کنید.

گزاره P	ارزش P	گزاره $\neg P$	ارزش $\neg P$
$3^6 \times 3^5 \times 3^{-2} = 3^{10}$			
		$+24 \geq -1200$	
میانگین داده‌های ۴۰۵۰۶۰۷ عدد ۵/۵ است.			
		مربع هر عدد طبیعی دلخواه از خود آن عدد کوچکتر است.	
معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.			
		عبارت $\frac{\sqrt{4x-1}}{x^2}$ گویا است.	

۲. کدام یک از جملات یا عبارات‌های زیر، گزاره محسوب می‌شوند؟ ارزش هر گزاره را مشخص کنید.

(ا) کسر $\frac{3x-2}{5\sqrt{x+1}}$ عبارتی گویا است.

(ب) عدد طبیعی x ، مربع کامل است.

(پ) روزی چند عدد تست حل می‌کنی؟

(ت) دامنه تابع $f = \{(205) \cdot (702) \cdot (3011)\}$ برابر است با $D_f = \{30307\}$

(ث) کوچکترین عدد اول طبیعی، عدد ۱ است.

(ج) تعداد دندان‌های خراب هر فرد، متغیر کمتی نسبتی است.

(چ) اگر همه داده‌های آماری با هم برابر باشند دامنه تغییرات آن‌ها صفر است.

(ح) عدد $(-6)^n$ همیشه عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

(خ) روزی ۲ ساعت ریاضی بخوان.

(د) عدد 2^{11} عدد بسیار بزرگی است.

(ذ) $-\frac{3}{5} > -\frac{1}{2}$

(ز) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

زا نمودار خط $y = 3x - 4$ از نواحی اول و سوم نمی‌گذرد.



۲. هم‌ارزی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید.

(ا) $\{46 \text{ عددی مرکب است}\} \equiv ?$

(ب) $\{-(130 \leq -80)\} \equiv ?$

(ت) $\{-(3^2 \leq 5^2)\} \equiv ?$

نمونه $-(x > y) \equiv x \leq y$

(ب) $-(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv ?$

(ت) $-(\sqrt{4} \in \mathbb{Z}) \equiv ?$

قسمت دوم: ترکیب عطفی و فصلی

۴. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	در تابع $f(x) = 3x^2 - 5x $ متغیر مستقل برابر $f(x)$ است و بین افراد متغیر کیفی نسبتی است.		
۲	حاصل $(-3)^4$ عددی منفی نیست و رنگ انومیل ها، متغیر کیفی اسمی نیست.		
۳	۸۱ مضرب ۹ است و _____	✓	
۴	_____ و شیب هر خط عمودی (موازی محور عرض ها) تعریف نشده است.		✓
۵	طول رأس سهمی $y = 2x^2 - 8x + 3$ برابر -2 است و $\mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}$		
۶	مقسوم علیه های طبیعی عدد ۲۰ عبارتند از $1, 2, 4, 5, 10, 20$ و میانه یک سری از داده ها همان چارک دوم است.		
۷	$(\sqrt{131} - 26 = 11 - 6) \wedge ((\frac{7}{9})^5 \neq (\frac{3}{7})^5)$		
۸	مربع هر عدد منفی، از خود آن عدد کوچکتر است و مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.		

۵. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره مرکب	درست	نادرست
۱	عدد ۲۹ زوج یا اول است.		
۲	عدد ۲۷ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.		
۳	کسر $\frac{5x^2}{ x +4}$ عبارتی گویاست یا ۸۲ عددی مرکب —	✓	
۴	$(\sqrt{3} \in \mathbb{N}) \vee ((-4)^2 > (-2)^3)$		
۵	اندازه قد افراد، متغیر کیفی فاصله ای است یا ارسطو نویسنده کتاب ارغنون نیست.		
۶	مودار ون  تابع نیست یا _____	✓	
۷	تجزیه عبارت $9x^2 - 6x + 1$ به صورت $(3x - 1)^2$ است یا _____	✓	
۸	معکوس هر عدد مثبت، کوچکتر از خود آن عدد است یا مجموع هر عدد زوج با هر عدد فرد، عددی فرد است.		

۶. با استفاده از جدول ارزش گذاری، درستی یا نادرستی هم ارزی های زیر را بررسی کنید.

(پ) $(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (ب) $(p \vee \neg p) \equiv F$ (د) $(p \wedge \neg p) \equiv F$

(ج) $[p \vee (\neg p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$ (ت) $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$ (ث) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

(خ) $[p \wedge (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge q) \wedge r]$ (ح) $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$ (چ) $[p \wedge (\neg p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$

(ذ) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ (س) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ (نویانه علاقه مندان)

(ر) $\neg(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv p$ (ز) $[p \wedge (\neg p \wedge \neg q)] \equiv F$

۷. بدون رسم جدول، طرف دوم هم ارزی های زیر را به دست آورید.

(ا) $[\neg(\neg p) \vee \neg(\neg T)] \equiv ?$ (ب) $[(\neg p \vee T) \wedge (F \wedge \neg p)] \equiv ?$ (پ) $[\neg(p \vee \neg p) \wedge \neg(q \wedge \neg q)] \equiv ?$

۸. اگر فرض کنیم که گزاره $p \wedge r$ گزاره ای درست باشد و q گزاره ای دلخواه باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره $p \vee (q \wedge r)$ را تعیین کنید.

۹. بدون رسم جدول، طرف دیگر هم ارزی های زیر را به دست آورید (T گزاره ای همواره درست و F گزاره ای همواره نادرست است).

(ا) $(\neg p \wedge \neg F) \equiv ?$ (ب) $[(p \wedge \neg p) \vee (q \vee T)] \equiv ?$

۱۰. اگر گزاره $p \vee (\neg q \vee p)$ نادرست باشد، بدون رسم جدول، ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید.

(ا) $[\neg p \vee (q \wedge r)] \equiv ?$ (ب) $[\neg(p \vee q) \wedge \neg(\neg r)] \equiv ?$

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه a و b و وتر c ، مطلق شکل، اگر ضلع a را سه برابر کنیم، آن گاه وتر مثلث جدید، سه برابر وتر مثلث اولیه است.



استدلال: $c^2 = a^2 + b^2$: رابطه فیثاغورس در مثلث اولیه
 $c'^2 = (3a)^2 + b^2 = 9a^2 + b^2 = 9(a^2 + b^2) = 9c^2 \Rightarrow c'^2 = 9c^2 \xrightarrow{\text{جذر}} c' = 3c$
 پس وتر مثلث، سه برابر شده است.

ب) تساوی $\sqrt{\frac{15 \times 7 + 25 \times 2}{14}} = 2\sqrt{10}$ برقرار است.

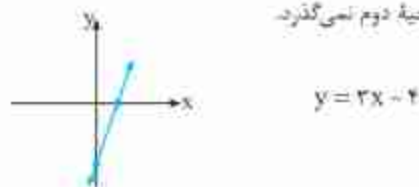
استدلال: $\sqrt{\frac{15 \times 7 + 25 \times 2}{14}} = \sqrt{\frac{15 + 25 \times 2}{2}} = \sqrt{15 + 25} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$



آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

پاسخ فصل ۱

- ۱) گزاره نادرست است. کوچک‌ترین عدد اول طبیعی، عدد ۲ است نه ۱.
 ج) گزاره درست است (سال گذشته خوانداید).
 ج) گزاره درست است (سال گذشته خوانداید).
 ج) گزاره نادرست است، چون اگر a زوج باشد حاصل $(-6)^a$ عددی مثبت می‌شود، مثلاً $(-6)^2 = +36$.
 ج) گزاره نیست (جمله امری است).
 د) گزاره نیست (جمله خبری است ولی قابل ارزش گذاری نیست).
 د) گزاره نادرست است، زیرا می‌دانیم که $-\frac{1}{4} < -\frac{2}{5}$ است.
 را گزاره درست است (اتحاد مربع دوجمله‌ای است).
 زا گزاره نادرست است، زیرا نمودار این خط از نواحی اول، سوم و چهارم می‌گذرد، پس فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد.



ز) گزاره درست است، چون هر خط عمودی دلخواه، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
$3^9 \times 3^5 \times 3^{-2} = 3^{10}$	F حاصل 3^{12} می‌شود.	$3^9 \times 3^5 \times 3^{-2} \neq 3^{10}$	T
$26 < -1400$	F	$26 \geq -1400$	T
میانگ داده‌های 2050607 عدد $5/5$ است.	T	میانگ داده‌های 2050607 عدد $5/5$ نیست.	F
مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد کوچک‌تر است.	T	مربع هر عدد طبیعی دلخواه، از خود آن عدد بزرگ‌تر است.	F
معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ چون دارای دو ریشه حقیقی متمایز دارد. مثبت است.	T	معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز ندارد. مثبت است.	F
عبارت $\frac{\sqrt{2}x - 1}{x^2}$ گویا نیست.	F	عبارت $\frac{\sqrt{2}x - 1}{x^2}$ گویا است.	T

- ۲) ا) (۴۶ عددی مرکب نیست) \equiv (۴۶ عددی مرکب است).
 ب) $\sim(\sqrt{25+9} \neq 5+3) \equiv (\sqrt{25+9} = 5+3)$
 پ) $\sim(-130 \leq -80) \equiv (-130 > -80)$
 ت) $\sim(\sqrt{3} \notin Z) \equiv \sqrt{3} \in Z$
 ث) $\sim[-(3^2 \leq 5^2)] \equiv 3^2 \leq 5^2$

- ۳) ا) گزاره است و ارزش نادرست دارد، چون x زیر رادیکال است و لذا عبارت مذکور، گویا محسوب نمی‌شود.
 ب) گزاره نیست، چون مقدار دقیق x به ما داده نشده است.
 پ) گزاره نیست (جمله پرسشی است).
 ت) گزاره درست است. زیرا می‌دانیم دامنه تابع، شامل عضوهای اول زوج مرتبه‌ها می‌باشد.