

۱- مفهوم گزاره

در منطق ریاضی به هر جمله‌ی خبری که بتوانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درستی یا نادرستی را نسبت بدهیم، هر چند که درستی یا نادرستی آن بر ما پوشیده باشد، یک گزاره گفته می‌شود.

به‌عنوان مثال جمله «۱۹ عددی اول است» یا « $۲ < ۳$ » همگی جملات خبری هستند و یک گزاره‌اند ولی جمله‌ی خبری «حافظ شاعر خوبی است» نمی‌تواند یک گزاره تلقی شود، چرا که درستی یا نادرستی آن دقیقاً معین نیست، زیرا برحسب سلیقه تغییر می‌کند.

دقت کنید جمله‌های غیر خبری از قبیل جملات عاطفی، امری و پرسشی همچون «چه گل زیبایی!» یا «لطفاً پنجره را باز کنید» یا «آیا ۱۶ عددی زوج است» نمی‌توانند یک گزاره باشند، چرا که نمی‌توان ارزش درستی یا نادرستی آن‌ها را تعیین کرد.

مثال

کدام یک از عبارات زیر گزاره است؟

(۱) آیا $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است؟

(۲) بهار فصل قشنگی است.

(۳) لطفاً درب کلاس را ببند.

(۴) $۱ + ۱۰^{۱۳}$ عددی اول است.

گزینه‌ساز: گزینه‌ی ۴

به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی «۱»: این عبارت یک گزاره نیست، زیرا یک جمله‌ی پرسشی است و ارزش درستی یا نادرستی آن معلوم نیست.

گزینه‌ی «۲»: این عبارت نیز یک جمله‌ی عاطفی است و گزاره نیست و برحسب سلیقه تغییر می‌کند، پس ارزش درستی یا نادرستی آن مشخص نیست.

گزینه‌ی «۳»: این عبارت یک جمله امری است، پس گزاره نیست.

گزینه‌ی «۴»: این عبارت یک جمله‌ی خبری است که گزاره است زیرا درستی یا نادرستی آن قابل تشخیص است.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p ، q یا r یا ... نمایش می‌دهیم.

درستی یا نادرستی یک گزاره را ارزش آن گزاره می‌گوییم و هر گزاره درست را با حرف «د» یا «T» (دقت کنید

T حرف اول کلمه‌ی True به معنی «درست» است) و هر گزاره‌ی نادرست را با حرف «ن» یا «F» (دقت کنید

F حرف اول کلمه False به معنی «نادرست» است) نشان می‌دهیم.

۲- نقیض گزاره

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره‌ی اولیه باشد. نقیض گزاره‌ی p را با نماد $(\sim p)$ و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم و چون یک گزاره یک جمله‌ی خبری است و حتماً دارای فعل می‌باشد، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم که با این کار ارزش گزاره‌ی p اگر درست باشد ارزش گزاره‌ی $(\sim p)$ نادرست و اگر p گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $(\sim p)$ درست خواهد بود. به عنوان مثال نقیض گزاره‌ی « ۳ عددی فرد است» به صورت « ۳ عددی فرد نیست» نوشته می‌شود.

مثال

نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید؟

$$(۱) \sqrt{۲} \text{ عددی گویا است.}$$

$$(۲) -۴ < ۱$$

$$(۳) ۱۰^۱ + ۱۰^۲ = ۱۰^۳$$

گه‌پاسخ:

نقیض هر یک از گزاره‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینه‌ی «۱»: نقیض گزاره‌ی « $\sqrt{۲}$ عددی گویا است» به صورت « $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست» یا « $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.» نوشته می‌شود.

گزینه‌ی «۲»: نقیض گزاره‌ی « $-۴ < ۱$ » به صورت « $-۴ \geq ۱$ » نوشته می‌شود.

گزینه‌ی «۳»: نقیض گزاره‌ی « $۱۰^۱ + ۱۰^۲ = ۱۰^۳$ » به صورت « $۱۰^۱ + ۱۰^۲ \neq ۱۰^۳$ » نوشته می‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌ای را که از ترکیب دو یا چند گزاره بوجود می‌آید گزاره‌ی مرکب می‌گوییم. واضح است که ارزش گزاره‌ی مرکب به ارزش گزاره‌های ساده تشکیل دهنده‌ی آن و نوع رابطه‌ی به کار رفته بین آن‌ها بستگی دارد.

◀ **نکته:** اگر یک گزاره‌ی مرکب دارای n گزاره ساده باشد، تعداد حالت‌های ارزشی گزاره‌ی مرکب از رابطه ۲^n به دست می‌آید.

ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دوشرطی» انجام می‌شود. که به تفصیل به آنها پرداخته می‌شود.

۳- هم‌ارزی گزاره‌ها:

هم ارزش بودن دو گزاره‌ی p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می‌دهیم. یعنی برای همه حالات منطقی هر دو درست یا نادرست باشند. به عبارت ساده‌تر گزاره p را هم‌ارز منطقی یا به‌طور ساده هم‌ارز گزاره‌ی q می‌گوییم.

◀ **نکته:** برای اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم، به طوری که تمام حالات منطقی را برای گزاره‌ها به دست می‌آوریم، سپس با توجه به جدول ارزشی گزاره‌ها، ارزش گزاره‌ها را با استفاده از رابطه‌های آن‌ها به دست می‌آوریم.

۴- ترکیب عطفی دو گزاره:

ترکیب دو گزاره به وسیله لفظ «و» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گویند.

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی این دو گزاره را به صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت « p و q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول ارزشی زیر تعیین می‌گردد.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان‌طور که از جدول ارزش‌ها ملاحظه می‌کنید ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، « $p \wedge q$ » نادرست است.

مثال

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید؟

الف) ۲ عددی فرد است و ۵ عددی اول است.

ب) تهران پایتخت ایران است و ۱۹ عددی اول است.

پ) $\sqrt{2}$ عددی گویا است و $1 - \sqrt{2}$ عددی مثبت است.

کلاس پاسخ:

الف) گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» گزاره‌ای نادرست و گزاره‌ی «۵ عددی اول است» گزاره‌ای درست، پس ترکیب عطفی دو گزاره دارای ارزش نادرست است.

ب) گزاره‌ی «تهران پایتخت ایران است» گزاره‌ای درست و گزاره‌ی «۱۹ عددی اول است» نیز گزاره‌ای درست است. پس ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

پ) گزاره‌ی « $\sqrt{2}$ عددی گویا است» گزاره‌ای نادرست و گزاره‌ی « $1 - \sqrt{2}$ عددی مثبت است» نیز گزاره‌ای نادرست پس ترکیب عطفی آن‌ها نیز نادرست است.

۵- ترکیب فصلی دو گزاره:

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب حاصل از ترکیب دو گزاره با لفظ «یا» را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. ترکیب فصلی دو گزاره p و q را با نماد « $p \vee q$ » نشان می‌دهیم و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول ارزشی زیر تعیین می‌گردد.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

همان‌طور که از جدول بالا ملاحظه می‌کنید ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

مثال

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید؟

الف) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا یا گنگ است.

ب) بغداد پایتخت فلسطین یا عربستان است.

پ) $-7 < -4$ یا $-\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ است.

گهر پاسخ:

الف) گزاره‌ی «عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا یا عددی گنگ است» ترکیب فصلی دو گزاره است که گزاره‌ی اول نادرست و گزاره دوم درست پس ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

ب) گزاره‌ی «بغداد پایتخت فلسطین یا پایتخت عربستان است» ترکیب فصلی دو گزاره است که هر دو گزاره نادرست هستند، پس ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

پ) گزاره‌ی « $-7 < -4$ یا $\frac{1}{3} > -\frac{1}{4}$ » ترکیب فصلی دو گزاره است که گزاره‌ی اول نادرست و گزاره‌ی دوم درست است، پس ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

◀ **نکته:** نقیض ترکیب عطفی دو گزاره هم‌ارز است با ترکیب فصلی نقیض‌های آن گزاره‌ها، داریم:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

◀ **نکته:** هم‌چنین نقیض ترکیب فصلی دو گزاره هم‌ارز است با ترکیب عطفی نقیض‌های آن گزاره‌ها، داریم:

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

که دو هم‌ارزی بالا به قوانین دمورگان معروفند که با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی آن‌ها ثابت می‌شود.

مثال

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ را ثابت کنید؟

گهر پاسخ:

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د

که با توجه به جدول بالا هم‌ارزی $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ثابت شد.

◀ **نکته:** گزاره‌هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم. با استفاده از این گزاره‌ها بعضی از هم‌ارزی‌ها را می‌توان بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کرد.

◀ **نکته:** در گزاره‌های مرکب رابطه‌ی «و» روی «یا» توزیع پذیر است، داریم:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

به همین صورت رابطه‌ی «یا» نیز روی «و» توزیع پذیر است، یعنی داریم:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

که هم‌ارزی‌های فوق نیز با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نیز ثابت می‌شود.

مثال

هم‌ارزی گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p$ را ثابت کنید؟

گهر پاسخ:

با استفاده از توزیع رابطه‌ی «و» روی «یا» داریم:

$$(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (\sim q \vee q)$$

گزاره‌ی $(\sim q \vee q)$ گزاره‌ای همواره درست است که اگر آن را با T نشان دهیم، داریم:

$$p \wedge (\sim q \vee q) \equiv p \wedge T$$

ترکیب عطفی گزاره‌ی T که همواره درست است و گزاره‌ی p بستگی به ارزش گزاره‌ی p دارد، در نتیجه داریم:

$$p \wedge T \equiv p$$

۶- ترکیب شرطی گزاره‌ها

هرگاه بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم از لفظ «اگر ... آنگاه ...» استفاده می‌کنیم و آن را به صورت « $p \Rightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانیم:
(اگر p آنگاه q)، (p نتیجه می‌دهد q را)، (q از p نتیجه می‌شود)
در گزاره‌ی شرطی ($p \Rightarrow q$)، p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.
جدول ارزش گزاره‌ی شرطی به صورت زیر می‌باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، گزاره‌ی شرطی فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم یعنی p درست بوده ولی تالی آن یعنی q دارای ارزش نادرست باشد و در بقیه موارد ارزش گزاره‌ی شرطی درست است.
وقتی که ارزش مقدم گزاره‌ی شرطی نادرست باشد در هر حالت خود گزاره شرطی درست خواهد بود که در این حالت می‌گوییم گزاره‌ی شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید؟

الف) اگر ۷ عددی اول است آنگاه ۱۶ فرد و مربع کامل است.

ب) اگر $2 < 3$ آنگاه $3 < 2^3$ است.

پ) اگر -3 عددی طبیعی یا گویا است آنگاه تنها عدد اول زوج عدد ۲ است.

گزینه‌ها:

الف) گزاره‌ی «اگر ۷ عددی اول است آنگاه ۱۶ فرد و مربع کامل است» دارای گزاره‌ی مقدم درست و گزاره‌ی تالی نادرست است زیرا گزاره‌ی تالی آن ترکیب عطفی دو گزاره است که گزاره‌ی «۱۶ عددی فرد و مربع کامل است» دارای ارزش نادرست است، پس ترکیب شرطی دو گزاره نادرست است.

ب) گزاره‌ی «اگر $2 < 3$ آنگاه $3 < 2^3$ است» دارای گزاره‌ی مقدم نادرست و تالی آن نیز نادرست است پس ترکیب شرطی آن‌ها درست است.

پ) مقدم گزاره یعنی « -3 عددی طبیعی یا گویا است» دارای ارزش درست است زیرا -3 عددی طبیعی نیست ولی گویا است پس ترکیب فصلی آن درست است و تالی آن که «تنها عدد اول زوج عدد ۲ است» گزاره‌ای درست است، پس ترکیب شرطی گزاره‌های مقدم و تالی درست است.

مثال

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ی دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \vee r) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ کدام است؟

گزینه‌ها:

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \vee r$	$(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$
د	ن	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	د	د

پس ارزش گزاره‌ی مورد نظر بستگی به گزاره‌ی r ندارد و همواره درست است.

نکته: هم‌ارز گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \vee \sim q$ است که با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نیز قابل اثبات است.

۷- ترکیب دو شرطی گزاره‌ها

هرگاه بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم و از گزاره‌ی q گزاره‌ی p را نتیجه بگیریم آن را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان می‌دهیم و به یکی از صورت‌های زیر خوانده می‌شود.

«نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را»، «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p »، «اگر p آنگاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی است برای q » و «اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم.

به عبارت دیگر ترکیب دو شرطی گزاره‌های p و q به صورت ترکیب عطفی دو گزاره‌ی شرطی « $p \Rightarrow q$ » و « $q \Rightarrow p$ » است و هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

بنابراین طبق جدول ارزش گزاره‌های شرطی و عطفی ارزش گزاره‌های دو شرطی داریم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

◀ **نکته:** همان‌طور که از جدول بالا ملاحظه می‌شود اگر دو گزاره‌ی p و q هم‌ارزش باشند یعنی $p \equiv q$ (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزاره‌ی دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همواره درست است.

مثال

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید؟

(الف) اگر ۴ عدد فرد است، آنگاه $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ عددی مثبت است و برعکس.
(ب) اگر دو عدد، فرد باشند، آنگاه حاصل ضرب آن‌ها فرد است و برعکس.

گزینه پاسخ:

(الف) گزاره‌ی دو شرطی «اگر ۴ عدد فرد است، آنگاه $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ عددی مثبت است و برعکس» دارای ارزش درست است زیرا گزاره‌های «۴ عددی فرد است» و « $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ عددی مثبت است» نادرست هستند و در نتیجه ترکیب دو شرطی آن‌ها درست است.

(ب) گزاره‌ی دو شرطی «اگر دو عدد، فرد باشند، آنگاه حاصل ضرب آن‌ها عدد فرد است و برعکس» نیز دارای ارزش درست است، زیرا اولاً که گزاره‌ی شرطی اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه حاصل ضرب آن‌ها فرد است گزاره‌ای درست و برعکس آن نیز اگر حاصل ضرب دو عدد فرد باشد، آنگاه دو عدد فرد هستند. نیز درست است. پس گزاره‌ی دو شرطی آن‌ها که ترکیب عطفی این دو گزاره‌ی شرطی است، درست است.

مثال

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره‌ی مرکب « $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ » را مشخص کنید؟

گزینه پاسخ:

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
د	ن	ن	ن	ن	د

پس ارزش گزاره‌ی مورد نظر درست است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مفهوم‌گزاره

(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۲ کتاب درسی)

- ① آیا ۱۹ عددی اول است؟
② لباس شما چه زیباست.
③ موز از آناناس خوش‌مزه‌تر است.
④ عدد یک عددی اول است.

(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۲ کتاب درسی)

④ ۵

③ ۴

(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۲ کتاب درسی)

④ ۴

③ ۳

(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۴ کتاب درسی)

- ① عدد ۸ عددی اول نیست.
② افلاطون شاگرد سقراط است.
③ عددی گویا است.
④ پایتخت عراق بغداد است.

(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۴ کتاب درسی)

① $10^2 + 10^3 < 10^5$ ← نقیض
② $10^2 + 10^3 = 10^5$ ← نقیض

③ a مثبت است ← نقیض a منفی است.
④ a عددی گویا است ← نقیض a عددی گنگ است.

(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۸ کتاب درسی)

گزاره‌ی «۱۰ عددی اول است» با کدام یک از گزاره‌های زیر هم ارز است؟

① عددی فرد است
② $2^4 = 4^2$

③ هر ساعت ۶۰ ثانیه است.

④ $n \in \mathbb{N} \quad n^2 + (n+1)^2 < (2n+1)^2$

(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۲ و کار در کلاس صفحه‌ی ۴ و تذکر صفحه‌ی ۸ کتاب درسی)

گزاره‌ی «۱۰ عددی اول است» با کدام یک از گزاره‌های زیر دو گزاره هم ارزند؟

① قرآن دارای ۳۰ جزء است \equiv عدد π عددی گویا است.

② $4^2 > 3^2 + 2^2 \equiv$ مرکز استان خوزستان اهواز است.

③ رنگ خرمالو نارنجی است \equiv پایه‌گذار حکومت صفویه شاه طهماسب است.

④ $x = \frac{1}{2}$ جواب معادله $2x + 1 = 0$ است \equiv زاپن جز کشورهای خاورمیانه است.

۸. تعداد حالت‌های ارزشی ۵ گزاره از تعداد حالت‌های ارزشی ۳ گزاره چقدر بیشتر است؟ (مکمل جدول‌های صفحه‌ی ۳ کتاب درسی)

- ① ۱۶ ② ۲۴ ③ ۳۲ ④ ۴۸

۹. هنگامی که ۳ گزاره به تعدادی گزاره اضافه می‌کنیم، تعداد حالت‌های ارزشی ۲۲۴ تا بیشتر می‌شود، تعداد گزاره‌های اولیه کدام است؟ (مکمل جدول صفحه‌ی ۳ کتاب درسی)

- ① ۴ ② ۵ ③ ۶ ④ ۸

۱۰. اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، در مورد گزاره $n(n+1)(n+2) < n(n+3)$ کدام عبارت صحیح نیست؟

(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۴ و تذکر صفحه‌ی ۹ کتاب درسی)

① نقیض آن $n(n+1)(n+2) > n(n+3)$ است که درست است. ② نقیض آن $n(n+1)(n+2) \geq n(n+3)$ است که درست است.

③ هم ارز گزاره‌ی «عدد ۴ فرد است» می‌باشد. ④ هم ارز گزاره‌ی « $11^5 = 15101051$ » است.

ترکیب عطفی گزاره‌ها

۱۱. ارزش کدام‌یک از گزاره‌های مرکب زیر صحیح است؟ (مکمل فعالیت صفحه‌ی ۵ کتاب درسی)

① عدد ۲ عددی زوج و اول است. ② قرآن ۱۱۴ سوره و ۱۲۰ جزء دارد.

③ اسفند، ماه دوازدهم سال است و در سال کبیسه اسفند ۲۹ روز است. ④ $(\pi \in \mathbb{Z})$ و به ازای هر عدد حقیقی $a < -a^2$ است.

۱۲. ارزش کدام‌یک از گزاره‌های مرکب زیر با بقیه متفاوت است؟ (مکمل فعالیت صفحه‌ی ۵ کتاب درسی)

① عبارت $a^2 + 2ab + b^2$ مربع کامل است و ۹۳ عددی اول است.

② $2^4 > 4^2$ و در مثلث متساوی‌الاضلاع همه زوایا 60° هستند.

③ $2^6 + 1$ بر ۵ بخش‌پذیر است و معادله $2x + 1 = 0$ تنها یک ریشه دارد.

④ مجموع دو عدد فرد همواره فرد است و هیچ عدد زوجی بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۱۳. اگر p گزاره‌ی «۹ عددی ...» و q گزاره‌ی « $(\sqrt{2})^2 \dots$ » (مکمل فعالیت صفحه‌ی ۵ کتاب درسی)

در جاهای خالی به ترتیب از راست به چپ کدام عبارت‌ها قرار می‌گیرد، تا ترکیب عطفی دو گزاره دارای ارزش متفاوت با دیگر گزینه‌ها باشد؟

① مربع کامل است - زوج است. ② فرد است - اول است.

③ مربع کامل است - گنگ است. ④ فرد است - طبیعی است.

۱۴. در ترکیب عطفی ۴ گزاره تعداد حالت‌های نادرست آن کدام است؟ (مکمل جداول صفحه‌ی ۳ و متن درس صفحه‌ی ۵ کتاب درسی)

- ① ۷ ② ۸ ③ ۱۵ ④ ۱۶

۱۵. اگر p گزاره‌ی « $3 < 4$ » و q گزاره‌ی «کانون فرهنگی آموزش قلم چی وقف عام است» باشد، در این صورت گزاره $p \wedge q \sim p \wedge q$ دارای

ارزش ... و گزاره‌ی $p \wedge q \sim p \wedge q$ دارای ارزش ... است.

① درست - نادرست ② درست - درست ③ نادرست - درست ④ نادرست - نادرست

ترکیب فصلی گزاره‌ها

۱۶. چه تعداد از گزاره‌های مرکب زیر نادرست است؟ (مکمل فعالیت صفحه‌ی ۶ کتاب درسی)

الف) $3 + 4$ عددی اول است یا $3 - 4$ عددی اول است.

ب) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ عددی گویا است یا -5 عضو اعداد طبیعی است.

پ) $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ اتحاد مزدوج است یا هر سال ۱۲ ماه دارد.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۱۷. در ترکیب فصلی ۵ گزاره، تعداد حالات درست آنها کدام است؟ (مکمل جداول صفحه‌ی ۳ و پاراگراف اول صفحه‌ی ۶ کتاب درسی)

- ① ۱۵ ② ۱۶ ③ ۳۱ ④ ۳۲

۱۸. اگر گزاره p «مربع عدد فرد عددی ...» و q گزاره «واریانس داده‌های a, a, a, \dots » باشند، در این صورت در جاهای خالی چه عبارتی قرار گیرد تا ترکیب فعلی این دو گزاره نادرست باشد؟
(مکمل فعالیت صفحه ۹ کتاب درسی)

- ① فرد است - مخالف صفر است
② زوج است - صفر است
③ فرد است - صفر است
④ زوج است - مخالف صفر است

۱۹. اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، در این صورت ارزش گزاره‌های $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$ و $(p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟
(مکمل مثال صفحه ۹ کتاب درسی)

- ① درست - نادرست
② درست - درست
③ نادرست - درست
④ نادرست - نادرست

۲۰. اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، در چه صورت گزاره مرکب $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ درست است؟
(مکمل مثال صفحه ۹ کتاب درسی)

- ① p و q هر دو درست باشند.
② p و q هر دو نادرست باشند.
③ یکی از آن‌ها درست و دیگری نادرست
④ گزینه‌ی ۱ و ۲

۲۱. اگر p و q دو گزاره دارای ارزش یکسان باشند، در این صورت به ترتیب از راست به چپ ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره $(\sim p \vee q)$ و $(p \vee \sim q)$ دارای چه ارزشی هستند؟
(مکمل مثال صفحه ۹ کتاب درسی)

- ① درست - نادرست
② نادرست - درست
③ درست - درست
④ نادرست - نادرست

۲۲. اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، در این صورت به ترتیب از راست به چپ ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ و $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ کدام است؟
(مکمل تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① درست - نادرست
② نادرست - نادرست
③ درست - درست
④ درست - درست

۲۳. اگر گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد و r گزاره‌ای دلخواه در این صورت کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر دارای ارزش درستی است؟
(مکمل تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① $(p \vee r) \wedge (q \wedge r)$
② $(p \wedge r) \vee (\sim q \wedge r)$
③ $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee r)$
④ $(p \wedge \sim q) \vee (q \vee r)$

۲۴. اگر گزاره‌ای ... و q گزاره‌ای ... و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت گزاره مرکب $(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \wedge r)$ دارای ارزش ... است.
(مکمل تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① درست - نادرست - نادرست
② درست - درست - درست
③ نادرست - درست - نادرست
④ نادرست - نادرست - درست

۲۵. اگر گزاره مرکب $(p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)$ دارای ارزش درست باشد، در این صورت گزاره‌های p, q به ترتیب از راست به چپ کدام می‌توانند باشند؟
(مکمل تمرین ۱ صفحه ۱۰ کتاب درسی)

- ① گزاره p : «۵ عددی اول است» - گزاره q : «پایتخت عراق بغداد است»
② گزاره p : $10 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ - گزاره q : « $\frac{1}{4}$ عددی گویاست»
③ گزاره p : «در هر مثلث مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است» - گزاره q : «ارسطو نویسنده‌ی کتاب ارغنون است»
④ گزاره p : $2 + 2^{1396}$ عددی اول است» - گزاره q : « $-7 < -4$ »

۲۶. اگر p و q و r سه گزاره دلخواه باشند، هم‌ارز گزاره $p \wedge (q \vee r)$ کدام است؟
(مکمل تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
② $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
③ $p \vee (q \wedge r)$
④ $q \wedge (p \vee r)$

۲۷. اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، در این صورت هم‌ارز گزاره $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$ کدام است؟
(مکمل تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① $\sim p$
② $\sim q$
③ p
④ q

۲۸. اگر p ، q و r گزاره‌های دلخواه و F گزاره‌ای نادرست و T گزاره‌ای درست باشد، در این صورت چه تعداد از هم‌ارزی‌های زیر صحیح است؟
(مکمل تذکره‌های صفحه‌ی ۱۰ کتاب درسی)

الف) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

ب) $p \vee T \equiv T$

پ) $p \wedge p \equiv p$

ت) $p \wedge \sim p \equiv T$

ث) $p \vee \sim p \equiv F$

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۹. اگر p و q و r گزاره‌های دلخواه باشند، در این صورت چه تعداد از هم‌ارزی‌های زیر صحیح است؟
(مکمل تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

الف) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ب) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

پ) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۳۰. اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، در این صورت به ترتیب از راست به چپ هم‌ارز گزاره‌ی $(p \vee (\sim p \wedge q))$ و $(p \wedge (\sim p \vee q))$ کدام است؟
(مکمل مثال صفحه‌ی ۹ و تذکر صفحه‌ی ۱۰ کتاب درسی)

- ① $p \wedge q$ و $p \vee q$ ② $p \wedge q$ و $p \vee q$ ③ $p \vee \sim q$ و $p \wedge \sim q$ ④ $p \wedge \sim q$ و $p \vee \sim q$

ترکیب شرطی گزاره‌ها

۳۱. کدام یک از گزاره‌های شرطی زیر دارای ارزش نادرست است؟
(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۷ کتاب درسی)

① اگر $4^2 = 8$ آنگاه ۵ اول است.

② اگر $3 < 5$ آنگاه ۱۷ فرد است.

③ اگر $3 \in \mathbb{Z}$ آنگاه ۸ فرد است.

④ اگر $2^3 = 3^2$ آنگاه $2 < 1$ است.

۳۲. گزاره‌ی شرطی فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم ... و تالی آن ... باشد.
(مکمل تذکر صفحه‌ی ۸ کتاب درسی)

- ① درست - درست ② درست - نادرست ③ نادرست - درست ④ نادرست - نادرست

۳۳. ارزش کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر با بقیه تفاوت دارد؟
(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۷ کتاب درسی)

① اگر ۵ جزء اعداد طبیعی است آن‌گاه $\frac{1}{5}$ عددی گویاست.

② اگر ۹۱ عدد مرکب است آن‌گاه $(\sqrt{2})^3$ عددی گویاست.

③ اگر ۱۰۰ مربع کامل نیست آن‌گاه ۱۰۰ کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی است.

④ اگر ۳ تنها عدد فرد اول است آن‌گاه ۲ تنها عدد زوج اول است.

۳۴. چه تعداد از گزاره‌های شرطی زیر به انتهای مقدم دارای ارزش درست است؟
(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۷ کتاب درسی)

الف) اگر ۱۸ اول است آن‌گاه ۱۷ اول است.

ب) اگر $2^3 < 3^2$ آن‌گاه $\sqrt{5}$ مربع کامل است.

پ) اگر ۲۹ اول است آن‌گاه ۳۰ مرکب است.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۳۵. اگر گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش گزاره‌های $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow r$ و

$(\sim p \Rightarrow q) \vee r$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟
(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۷ کتاب درسی)

① درست - درست ② بستگی به ارزش گزاره‌ی r دارد - نادرست

③ بستگی به ارزش گزاره‌ی r دارد - درست ④ نادرست - درست

۳۶. اگر گزاره‌ی نادرست و q گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر با بقیه

متفاوت است؟
(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۷ کتاب درسی)

① $r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ② $(p \Rightarrow r) \wedge q$ ③ $(q \Rightarrow r) \Rightarrow \sim p$ ④ $(\sim r \Rightarrow q) \Rightarrow p$

۳۷. اگر p, q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت ترکیب ... دو گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim q)$ و $(\sim p \Rightarrow q)$ همواره دارای ارزش ...

است.
(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۷ کتاب درسی)

① عطفی - درست ② عطفی - نادرست ③ فصلی - درست ④ فصلی - نادرست

۳۸. اگر p, q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ هم‌ارز کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

(مکمل کار در کلاس صفحه‌ی ۷ کتاب درسی)

① $\sim p \Rightarrow q$ ② $p \Rightarrow q$ ③ $p \Rightarrow \sim q$ ④ $\sim p \Rightarrow \sim q$

۳۹. ارزش گزاره‌ی p, q به ترتیب از راست به چپ چگونه باشد تا ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ نادرست باشد؟

(مکمل تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

① درست - نادرست ② نادرست - درست ③ درست - درست ④ نادرست - نادرست

۴۰. ارزش گزاره‌های p, q به ترتیب از راست به چپ چگونه باشد تا ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$ درست باشد؟

(مکمل تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۱ کتاب درسی)

① درست - درست ② درست - نادرست ③ نادرست - درست ④ نادرست - نادرست

۴۱. نقیض گزاره‌ی شرطی $(p \Rightarrow q)$ هم‌ارز کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

① $\sim p \vee q$ ② $\sim p \wedge q$ ③ $p \wedge \sim q$ ④ $p \vee \sim q$

۴۲. گزاره‌ی شرطی $(p \Rightarrow q)$ هم‌ارز کدام یک از گزاره‌های زیر است؟

① $\sim p \wedge q$ ② $\sim p \vee q$ ③ $p \wedge \sim q$ ④ $p \vee \sim q$

۴۳. کدام یک از هم‌ارزی‌های زیر صحیح است؟

① $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ ② $(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

③ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ④ هر سه مورد

۴۴. نقیض گزاره‌ی «اگر ۱۱۹ عدد مرکب است، آنگاه $-\frac{1}{4} < -3$ » کدام است؟
(مکمل مثال صفحه‌ی ۹ کتاب درسی)

① اگر $-\frac{1}{4} \leq -3$ آنگاه ۱۱۹ عددی اول است. ② ۱۱۹ عددی اول است یا $-\frac{1}{4} < -3$ است.

③ ۱۱۹ عددی مرکب است و $-\frac{1}{4} \leq -3$ است. ④ ۱۱۹ عددی اول است یا $-\frac{1}{4} < -3$ نیست.

۴۵. نقیض گزاره‌ی «اگر a عددی گنگ یا گویا باشد، آنگاه مربع هر عدد فرد عددی فرد است» با کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز

است؟ ($a \in \mathbf{R}$)
(مکمل فعالیت صفحه‌ی ۷ و ۸ کتاب درسی)

① اگر عدد ۱ اول است و عدد ۷ فرد است آنگاه عدد ۱۶ مربع کامل است.

② اگر عدد صحیح a زوج یا فرد باشد، آنگاه به ازای هر عدد طبیعی $n = (-1)^{2n}$ است.

③ اگر $1 < x < 4$ آنگاه $1 < x^2 < 16$ است.

④ اگر x و y دو عدد اول باشند، آنگاه x^y و y^x نیز اعدادی اول هستند.

(مکمل تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

۴۶. ارزش گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$ همواره ...

- ① نادرست است. ② درست است.
③ به ارزش گزاره‌ی p بستگی دارد. ④ به ارزش گزاره‌ی q بستگی دارد.

(مکمل تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

۴۷. ارزش گزاره‌ی $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ همواره ...

- ① درست است. ② نادرست است.
③ به ارزش p بستگی دارد. ④ به ارزش q بستگی دارد.

۴۸. اگر p گزاره‌ای ... و q گزاره‌ای ... باشد، در این صورت گزاره‌ی مرکب $(p \wedge \sim q) \wedge (q \Rightarrow p)$ دارای ارزش درست است.

(مکمل تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① درست - درست ② درست - نادرست ③ نادرست - درست ④ نادرست - نادرست

۴۹. اگر p ، q و r گزاره‌های دلخواه باشند در این صورت هم‌ارز گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow r$ کدام است؟

(مکمل تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ② $q \wedge (p \Rightarrow r)$ ③ $p \Rightarrow (q \wedge r)$ ④ $p \Rightarrow (q \vee r)$

ترکیب دوشروط گزاره‌ها

۵۰. اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت هم‌ارز گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ کدام است؟

(مکمل تمرین ۲ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

- ① $q \Rightarrow p$ ② $p \Rightarrow q$ ③ $p \Leftrightarrow q$ ④ $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

(مکمل جدول صفحه ۸ کتاب درسی)

۵۱. هم‌ارز ترکیب دو شرطی گزاره‌ی $(p \Leftrightarrow q)$ کدام است؟

- ① $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ ② $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
③ $(q \vee p) \Rightarrow (p \wedge q)$ ④ گزینه‌ی «۲» و «۳» صحیح است.

۵۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر با بقیه متفاوت است؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۹ کتاب درسی)

- ① $r \Rightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$ ② $(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow q$
③ $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim p$ ④ $(\sim p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

۵۳. اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت ارزش گزاره $(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$ کدام است؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۹ کتاب درسی)

- ① نادرست ② درست ③ هم‌ارز گزاره‌ی p ④ هم‌ارز گزاره‌ی q

(مکمل فعالیت صفحه ۸ کتاب درسی)

۵۴. کدام یک از گزاره‌های زیر دارای ارزش درست نیست؟

- ① اگر ۴ عددی اول است آنگاه ۵ عددی زوج است و برعکس
② اگر دو عدد فرد باشند آنگاه حاصل ضرب آن‌ها فرد است و برعکس
③ اگر میانگین داده‌ها با یکی از داده‌ها برابر باشد آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس
④ اگر دو عدد قرینه یکدیگر باشند آنگاه مجموع آن‌ها صفر است و برعکس

۵۵. نقیض گزاره‌ی «اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس» کدام است؟

(مکمل فعالیت صفحه ۸ کتاب درسی)

- ① اگر داده‌ها با یکدیگر برابر نباشند آنگاه واریانس داده‌ها برابر صفر است و برعکس
② اگر واریانس داده‌ها مخالف صفر باشد آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابر نیستند و برعکس
③ اگر واریانس داده‌ها مخالف صفر باشد آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس
④ اگر داده‌ها با یکدیگر برابر باشند آنگاه واریانس داده‌ها برابر صفر است و برعکس

۱- زبان ریاضی (نماد ریاضی)

استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است. اولین گام در استدلال ریاضی تبدیل گزاره‌های شفاهی (کلامی) به زبان ریاضی (نماد ریاضی) است. برای تبدیل گزاره‌های شفاهی (عبارت کلامی) به نمادهای ریاضی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- تشخیص مجهول مسأله: گزاره‌ای که یافتن ارزش آن برای ما مهم است و خواسته مسأله است که در این مرحله برای پیدا کردن مقدار مجهول (ارزش گزاره‌ای) که مسأله از ما می‌خواهد و در اکثر موارد در انتهای مسأله است، این مقادیر مجهول (گزاره‌ها) را معمولاً با یکی از حروف x ، y و ... برای عبارتهای جبری و p ، q و ... برای گزاره‌ها نام‌گذاری می‌کنیم.

۲- بیان مسأله به زبان ریاضی و ساخت معادله (ساخت ترکیب گزاره‌ها): در این قسمت مسأله را شبیه‌سازی ریاضی کرده و داده‌های مسأله را که نام‌گذاری کرده بودیم، دسته‌بندی و به صورت معادله (با استفاده از حروف ربط و منطق گزاره‌ها رابطه‌ی بین گزاره‌ها را می‌یابیم) و به صورت نماد ریاضی می‌نویسیم.

۳- حل معادله (تحلیل ترکیب گزاره‌ها و بدست آوردن ارزش ترکیب آنها): در این بخش معادله‌ی بدست آمده (ترکیب گزاره‌ها) را تحلیل می‌کنیم و پاسخ نهایی را چک می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال

عددی به علاوه‌ی نصف خودش از مربع ثلث آن دو واحد کم‌تر است؟

برای تبدیل این عبارت کلامی به نماد ریاضی چون تنها یک مجهول در عبارت کلامی وجود دارد، پس عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم و خود عدد به علاوه‌ی نصف خودش معادل $x + \frac{x}{2}$ است که از مربع ثلث خود $(\frac{x}{3})^2$ دو واحد کمتر است، یعنی داریم:

$$x + \frac{x}{2} = (\frac{x}{3})^2 - 2$$

مثال

نماد ریاضی ترکیب گزاره‌های زیر کدام است؟

(۱) مقدمه (۱): اگر هوا بارانی باشد یا مهمان به خانه ما بیاید، در نتیجه ما به سینما نمی‌رویم.

(۲) مقدمه (۲): ما به سینما می‌رویم.

∴ هوا بارانی نیست و مهمان به خانه ما نیامده‌است.

نگه‌پاسخ: برای تبدیل این عبارت کلامی به نماد ریاضی هر یک از گزاره‌ها را با یکی از حروف p ، q و r نام‌گذاری می‌کنیم. و نقیض آنها را با $\sim p$ ، $\sim q$ و $\sim r$ نشان می‌دهیم.

گزاره‌ی p : هوا بارانی باشد، گزاره‌ی q : مهمان به خانه ما بیاید r : ما به سینما نمی‌رویم

$\sim p$: هوا بارانی نیست، $\sim q$: مهمان به خانه ما نیامده است $\sim r$: ما به سینما می‌رویم

که نماد ریاضی آن به یکی از دو صورت شکل زیر می‌باشد.

$$(1) \text{ مقدمه (۱): } (p \vee q) \Rightarrow r$$

$$(2) \text{ مقدمه (۲): } \sim r$$

$$\text{یا } ((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge \sim r \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$$

$$\therefore \sim p \wedge \sim q$$

در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به ویژه استدلال ریاضی هستند.

انواع منطق‌ها عبارتند از قیاس - استقراء - تمثیل - مغالطه.

۲- قیاس استثنایی

یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلال‌های ریاضی کاربرد فراوانی دارد «قیاس استثنایی» است. که عبارت کلامی و نماد ریاضی آن بر یکی از دو شکل زیر است:

عبارت کلامی: نماد ریاضی :

مقدمه (۱): اگر الف آنگاه ب

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array} \quad \text{یا} \quad ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q \quad \text{مقدمه (۲): الف}$$

∴ ب

مثال

مقدمه (۱): اگر سال کبیسه باشد، آنگاه اسفند ۳۰ روز است.

مقدمه (۲): امسال، سال کبیسه است.

∴ ماه اسفند ۳۰ روزه است.

۳- مغالطه

گاهی از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده می‌شود. که در نتیجه منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود، به این گونه استدلال‌های مغالطه می‌گویند.

مثال

مقدمه (۱): اگر فردا عید فطر باشد، آنگاه مدرسه تعطیل است.

مقدمه (۲): فردا مدرسه تعطیل است.

∴ فردا عید فطر است.

این استدلال نوعی مغالطه است و نتیجه ممکن است درست یا نادرست باشد، زیرا ممکن است فردا روز جمعه باشد که مدرسه تعطیل است.

گاهی اوقات اگر اثبات گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ که درست و دشوار است، کار راحتی نباشد. برای راحتی کار می‌توان هم‌ارز آن، گزاره‌ی شرطی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را که درست است، اثبات کرد، در این حالت می‌گوئیم عکس نقیض گزاره‌ی اصلی را ثابت می‌کنیم.

۴- عکس نقیض

مثال

ثابت کنید «اگر دو خط در یک صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، آنگاه این دو خط با یکدیگر موازی‌اند.»

نگار پاسخ: اگر فرض کنیم:

گزاره‌ی p : دو خط در یک صفحه هیچ نقطه مشترکی ندارند.

گزاره‌ی q : دو خط موازی یک‌دیگرند.

برای اثبات از عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ استفاده می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم اگر دو خط موازی یک‌دیگر نباشند، در این صورت در یک نقطه یک‌دیگر را حتماً قطع می‌کنند و این به معنی این است که دو خط با یک‌دیگر در یک نقطه مشترکند. پس حکم درست است.

۵- یافتن خطا در استدلال ریاضی

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می‌شویم، یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است، کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد.

مثال در ساده کردن عبارت گویای زیر، خطا در کدام مرحله رخ داده است؟

$$\text{گام اول } A = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x}$$

$$\text{گام دوم } A = \frac{x^3 + (x-1)(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\text{گام سوم } A = \frac{x^3 + (x-1)(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\text{گام چهارم } A = x^2 + x - 1$$

نگار پاسخ:

برای ساده کردن عبارت گویا، خطا در گام سوم رخ داده است. زیرا در جمع دو عبارت جبری صورت کسر نمی‌توان عوامل آن را با مخرج کسر ساده کرد و این کار خطا است. اگر به جای جمع ضرب داشتیم، مجاز به این کار بودیم.

۵۶. در عبارت کلامی «مجموع ثلث و ربع یک عدد حقیقی از خمس آن بیشتر است.» نماد ریاضی آن کدام است؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۳ کتاب درسی)

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{x} < \frac{5}{x} \quad (۴) \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{4} > \frac{x}{5} \quad (۳) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{5} \quad (۲) \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{4} > \frac{5}{x} \quad (۱)$$

۵۷. نماد ریاضی عبارت کلامی « ۲۰ درصد قیمت فروش کالایی برابر نصف سود آن است » کدام است؟ (x را قیمت فروش کالا و y را

قیمت خرید آن در نظر بگیرید)

$$y = 1/4x \quad (۲) \quad y = 0/6x \quad (۱) \\ y = 1/2x \quad (۴) \quad y = 0/8x \quad (۳)$$

۵۸. نماد ریاضی گزاره‌ی «دو برابر تفاضل عددی از ۲۰ برابر مجموع همان عدد با ۱۵ است.» کدام است؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۳ کتاب درسی)

$$20 - 2x = x + 15 \quad (۲) \quad 2(20 - x) = x + 15 \quad (۱) \\ 2x - 20 = x + 15 \quad (۴) \quad 2(x - 20) = x + 15 \quad (۳)$$

۵۹. نماد ریاضی عبارت کلامی «مجموع مربع‌های دو عدد طبیعی متوالی از مربع مجموع دو عدد کوچک‌تر است.» کدام است؟

(مکمل تمرین ۱ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

$$n^2 + (n+1)^2 < (2n+1)^2 \quad (۲) \quad (2n+1)^2 < n^2 + (n+1)^2 \quad (۱) \\ n^2 + (n+1)^2 < (n+2)^2 \quad (۴) \quad (2n+1)^2 < (n+2)^2 \quad (۳)$$

۶۰. نماد ریاضی عبارت کلامی «مجموع هر عدد حقیقی منفی با معکوسش کوچک‌تر یا مساوی -۲ است.» کدام است؟

(مکمل تمرین ۱ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

$$(x < 0) \Rightarrow (x - \frac{1}{x} \geq -2) \quad (۲) \quad (x < 0) \Rightarrow (x - \frac{1}{x} \leq -2) \quad (۱) \\ (x < 0) \Rightarrow (x + \frac{1}{x} \geq -2) \quad (۴) \quad (x < 0) \Rightarrow (x + \frac{1}{x} \leq -2) \quad (۳)$$

(مکمل تمرین ۱ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۶۱. عبارت ریاضی چه تعداد گزاره‌های زیر صحیح است؟

(الف) تفاضل معکوس هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از یک، از خود همان عدد، مثبت است. $x - \frac{1}{x} > 0$ ($x > 1$)

(ب) مجموع مربع هر عدد حقیقی با یک، از دو برابر آن عدد بزرگ‌تر است. $a^2 + 1 > 2a$

(پ) مجموع مربع‌های هر عدد حقیقی ناصفر و معکوسش بزرگ‌تر از ۲ است. $x^2 + \frac{1}{x^2} > 2$

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۶۲. نماد ریاضی عبارت کلامی «مجموع تعدادی عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از یک برابر است با مربع تعداد اعداد فرد» کدام

است؟ (مکمل تمرین ۱ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (۲) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = n^2 \quad (۱)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (2n-1)^2 \quad (۴) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = (2n+1)^2 \quad (۳)$$

۶۳. نماد ریاضی عبارت کلامی «مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی با شروع از یک برابر است با میانگین مربع عدد آخر و خودش»

کدام است؟ (مکمل تمرین ۱ صفحه ۱۸ کتاب درسی)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (۲) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n-1)^2 + n^2}{2} \quad (۱)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times n^2}{2} \quad (۴) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2}{2} \quad (۳)$$

(مکمل تمرین صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۶۴. نماد ریاضی کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- ① نسبت دو عدد حقیقی ناصفر از مجموع مربعات آنها کوچکتر است. $\frac{x}{y} < x^2 + y^2$
- ② مربع عددی ۴۲ واحد از خود آن بزرگتر است. $x^2 = x + 42$
- ③ مجموع دو عدد مثبت از مربع مجموع جذرهای آن دو عدد کوچکتر است. $(\alpha, \beta > 0) \Rightarrow (\alpha + \beta < (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2)$
- ④ مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی از حاصل ضرب آنها کوچکتر است. $3x < x^2 - 4x$

(مکمل تمرین صفحه ۱۸ کتاب درسی)

۶۵. نماد ریاضی کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نوشته شده است؟

- ① جذر دو برابر عددی برابر مربع خود آن عدد است. $2\sqrt{x} = x^2$
- ② مجموع معکوس‌های دو عدد، بزرگتر یا مساوی معکوس مجموع آن دو عدد است. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x+y}$
- ③ مکعب هر عدد از مربع آن به اندازه خود عدد بیشتر است. $x^3 > x^2 + x$
- ④ به ازای هر عدد حقیقی بزرگتر از یک، ریشه‌ی سوم مربع آن از جذر مکعب آن کوچکتر است. $\sqrt[3]{x^2} < x^6$

قیاس استثنایی

۶۶. اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت ارزش قاعده‌ی قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ همواره است.

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی)

- ① درست است
- ② نادرست است
- ③ به ارزش گزاره p بستگی دارد
- ④ به ارزش گزاره q بستگی دارد.

(مکمل مثال صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۶۷. کدام گزینه در مورد استدلال زیر صحیح نیست؟

مقدمه ۱: اگر مثلثی متساوی الاضلاع باشد، آن‌گاه زاویه‌ی یکی از رأس‌های آن 60° است.

مقدمه ۲: یکی از زاویه‌های مثلث ABC ، 60° می‌باشد.

∴ مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

- ① این استدلال، یک استدلال قیاس استثنایی است.
- ② نتیجه‌ی بدست آمده، ممکن است نادرست باشد.
- ③ این استدلال مغالطه است.
- ④ از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده شده است.

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی)

۶۸. در استدلال با قیاس استثنایی برای گزاره‌ی زیر کدام گزینه صحیح است؟

اگر دانش آموزانی که معدل بالای ۱۸ دارند و به دلیل مشکل مالی توانایی ثبت نام در آزمون‌های برنامه‌ای کانون را ندارند آن‌گاه می‌توانند بورسیه‌ی بنیاد علمی آموزشی قلمچی شوند.

- ① حمید معدل ۱۸/۵ دارد، در نتیجه می‌تواند بورسیه‌ی بنیاد علمی آموزشی قلمچی شود.
- ② حمید معدل ۱۶ دارد و مشکل مالی برای ثبت نام در آزمون را دارد در نتیجه می‌تواند بورسیه‌ی بنیاد علمی آموزشی قلمچی شود.
- ③ حمید بورسیه بنیاد علمی آموزشی قلمچی می‌شود، در نتیجه معدل حمید ۱۹ است و مشکل مالی نیز دارد.
- ④ حمید بورسیه بنیاد علمی آموزشی قلمچی نمی‌شود در نتیجه حمید مشکل مالی ندارد یا معدل او پایین‌تر از ۱۸ است.

۶۹. در استدلال با قیاس استثنایی برای گزاره‌ی زیر، کدام یک از موارد زیر، هم ارز آن درست نوشته شده است؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی)

مقدمه (۱): «اگر دانش آموزی در آزمون سطح اول زبان نمره‌ی برابر یا بالاتر از ۶۰ بگیرد، آن‌گاه در کلاس سطح (۲) زبان می‌تواند ثبت نام کند.»

مقدمه (۲): علی در آزمون سطح (۱) زبان نمره بالای ۷۰ گرفته است.

∴ در نتیجه علی می‌تواند در کلاس سطح (۲) زبان شرکت کند.

A مقدمه (۱): اگر دانش‌آموزی در آزمون سطح اول زبان نمره پایین‌تر از ۶۰ بگیرد آن‌گاه در کلاس (۲) زبان نمی‌تواند ثبت نام کند.

مقدمه (۲): علی در کلاس سطح (۲) زبان نمی‌تواند ثبت نام کند.

∴ نمره‌ی سطح اول زبان او کمتر از ۶۰ است.

B مقدمه (۱): اگر دانش‌آموزی در آزمون سطح اول زبان نمره‌ی برابر یا بالاتر از ۶۰ بگیرد، آن‌گاه در کلاس سطح (۲) زبان می‌تواند ثبت نام کند.

مقدمه (۲): علی در سطح (۲) زبان نمی‌تواند ثبت نام کند.

∴ نمره سطح اول زبان او کمتر از ۶۰ است.

④ هیچ کدام

③ A و B

② فقط B

① فقط A

۷۰. اگر نماد ریاضی گزاره استدلال «قیاس استثنایی» به صورت $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ باشد، در این صورت هم‌ارز آن کدام گزینه نیست؟

(مکمل کار در کلاس ۲ صفحه‌ی ۱۵ کتاب درسی)

- ① $((\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
 ② $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
 ③ $((q \vee \sim q) \wedge p) \Rightarrow q$
 ④ $((p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)) \Rightarrow q$

مناظره

۷۱. کدام یک از استدلال‌های زیر مغالطه است؟

(مکمل مثال ۱ صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی)

- ① مقدمه (۱): اگر a و b دو عدد فرد باشند، در این صورت مجموع آن‌ها عددی زوج است.
 مقدمه (۲): ۳ و ۵ دو عدد فرد هستند.
 ∴ مجموع ۳ و ۵ عددی زوج است.
- ② مقدمه (۱): اگر n^2 فرد باشد، آن‌گاه n فرد است.
 مقدمه (۲): ۲۵ عددی فرد است.
 ∴ ۵ عددی فرد است.
- ③ مقدمه (۱): اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.
 مقدمه (۲): در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 90^\circ$ است.

∴ در این صورت ضلع روبه‌رو به زاویه \hat{B} بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه \hat{A} است.
 ④ مقدمه (۱): اگر یک مثلث متساوی الاضلاع باشد، آن‌گاه آن مثلث متساوی‌الساقین است.
 مقدمه (۲): مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

∴ در این صورت تمام زوایای مثلث ABC برابر 60° است.

(مکمل مثال ۱ صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی)

۷۲. چه تعداد از موارد زیر، در مورد استدلال زیر، صحیح است؟

مقدمه ۱: اگر باران ببارد آن‌گاه زمین خیس می‌شود.
 مقدمه ۲: زمین خیس است.

∴ باران می‌بارد.

الف) نماد ریاضی آن به صورت $(p \Rightarrow q) \wedge p$ است.

ب) این استدلال مغالطه است.

پ) نتیجه به دست آمده درست است.

ت) از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده شده است.

- ① ۱
 ② ۲
 ③ ۳
 ④ ۴
- (مکمل مثال ۱ صفحه‌ی ۱۴ کتاب درسی)

۷۳. در کدام گزینه از قیاس استثنایی نادرست استفاده شده است؟

① مقدمه (۱): اگر a عددی گویا باشد a^2 عددی گویا است.

مقدمه (۲): $\frac{2}{3}$ عددی گویا است.

∴ عددی گویاست $\frac{4}{9}$.

② مقدمه (۱): اگر a عددی گنگ باشد در این صورت $\frac{1}{a}$ عددی گنگ است.

مقدمه (۲): عددی گنگ $\sqrt{2}$ است.

∴ عددی گنگ است $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

③ مقدمه (۱): اگر a و b اعدادی اول باشند در این صورت ab عددی مرکب است.

مقدمه (۲): ۳۵ عددی مرکب است.

∴ ۱ و ۳۵ اعدادی اول هستند.

④ مقدمه (۱): اگر a و b دو عدد فرد باشند در این صورت $a^n b^n - 1$ عددی زوج است.

مقدمه (۲): ۷ و ۵ اعدادی فرد هستند

∴ $۵^۳ \times ۷^۳ - ۱$ عددی زوج است.

۷۴. در اثبات حکم «اگر n^2 فرد باشد، آن گاه n فرد است.» $(n \in \mathbb{Z})$ به کمک عکس نقیض گزاره، کدام گزاره شرطی را می توان

(مکمل مثال ۳ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

راحت اثبات کرد؟

- ① اگر n^2 فرد باشد، آن گاه n زوج است.
 ② اگر n زوج باشد، آن گاه n^2 زوج است.
 ③ اگر n فرد باشد، آن گاه n^2 فرد است.
 ④ اگر n زوج باشد، آن گاه n^2 فرد است.

۷۵. در اثبات حکم «اگر رابطه f تهی باشد، یعنی $f = \{\} = \phi$ آن گاه رابطه f یک تابع است.» به کمک کدام یک از گزاره های

(مکمل مثال ۳ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

شرطی زیر می توان این حکم را ثابت کرد؟

- ① اگر رابطه f تهی نباشد آن گاه رابطه f تابع نیست.
 ② اگر رابطه f تهی نباشد آن گاه رابطه f تابع است.
 ③ اگر رابطه f تابع باشد، آن گاه رابطه f تهی نیست.
 ④ اگر رابطه f تابع نباشد آن گاه رابطه f تهی نیست.

یافتن خطا در استدلال ریاضی

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۷ کتاب درسی)

۷۶. اگر $y = \frac{2x-3}{x-2}$ آن گاه در کدام گزینه x بر حسب y صحیح به دست آمده است؟

- ① $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۱) $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۲) $y(x-2) = 2x-3$
 ۳) $yx-2 = 2x-3$
 ۴) $yx-2x = 2-3$
 ۵) $x(y-2) = -1$
- ② $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۱) $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۲) $y(x-2) = 2x-3$
 ۳) $yx-2 = 2x-3$
 ۴) $yx-2x = 2-3$
 ۵) $x(y-2) = -1$

- ③ $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۱) $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۲) $x-2 = y(2x-3)$
 ۳) $x-2 = 2yx-3$
 ۴) $x-2yx = 2-3$
 ۵) $x(1-2y) = -1$
- ④ $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۱) $y = \frac{2x-3}{x-2}$
 ۲) $y(x-2) = 2x-3$
 ۳) $yx-2y = 2x-3$
 ۴) $yx-2x = 2y-3$
 ۵) $x(y-2) = 2y-3$
 ۶) $x = \frac{2y-3}{y-2}$

۷۷. دانش آموزی ادعا می کند که معادله $x^2 + 2 = 0$ دو ریشه دارد و ریشه های آن $x = \sqrt{-2}$ و $x = -\sqrt{-2}$ است. استدلال او در زیر

(مکمل مثال ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

آمده است، ایراد اولیه این استدلال در کدام گام می باشد؟

گام اول: $x^2 + 2 = 0$

گام دوم: $x^2 - (-2) = 0$

گام سوم: $(x^2) - (\sqrt{-2})^2 = 0$

گام چهارم: $(x - \sqrt{-2})(x + \sqrt{-2}) = 0$

گام پنجم: $x = \sqrt{-2}$ و $x = -\sqrt{-2}$

④ گام پنجم

③ گام چهارم

② گام سوم

① گام دوم

۷۸. در اثبات گزاره‌ی زیر، خطا در کدام گام استدلال زیر باعث شده تا استدلال غلطی به دست آید؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۷ کتاب درسی)

اگر $x < 0$ باشد، آن گاه $\frac{x-1}{x} < 1$

گام اول: $x < 0$

گام دوم: $\frac{1}{x} < 0$

گام سوم: $-\frac{1}{x} < 0$

گام چهارم: $1 - \frac{1}{x} < 1$

گام پنجم: $\frac{x-1}{x} < 1$

④ گام پنجم

③ گام چهارم

② گام سوم

① گام دوم

۷۹. ۳ لیوان همانند شکل زیر داریم که دو تا از آن‌ها وارونه است می خواهیم همه آنها در حالت رو به بالا قرار گیرند ولی مجاز هستیم

(مکمل مثال ۲ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

در هر تغییر دقیقاً ۲ لیوان را تغییر وضعیت دهیم. اگر وارونه آن را درست کنیم و برعکس.



آیا این کار امکان پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز و اگر نه تعداد حالت‌های ممکن در هر حرکت مجاز چند تا است؟

④ خیر- ۳

③ خیر- ۲

② بلی- ۱۳

① بلی- ۷

۸۰. شش لیوان مطابق شکل زیر داریم که سه تا از آن‌ها وارونه است در هر بار مجاز هستیم دقیقاً ۴ لیوان را تغییر وضعیت دهیم. اگر وارونه است آن را درست کنیم و برعکس. تعداد لیوان‌های وارونه در حرکت‌های مجاز که انجام می‌دهیم، کدام گزینه نیست؟

(مکمل مثال ۲ صفحه ۱۵ کتاب درسی)



۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

۸۱. هفت لیوان همانند شکل زیر داریم که دو تا از آن‌ها وارونه هستند می‌خواهیم همه آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند ولی مجاز هستیم تا در هر بار دقیقاً ۳ لیوان را تغییر وضعیت دهیم. اگر وارونه است آن را درست کنیم و برعکس. آیا این کار امکان پذیر است؟ اگر بلی حداقل با چند حرکت مجاز می‌توان این کار را انجام داد؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۵ کتاب درسی)



۴- بلی (۲)

۱- بلی (۱)

(۴) این حالت امکان پذیر نیست.

۷- بلی (۳)

۸۲. در مورد گزاره‌ی زیر اگر یک استدلال نادرست برای آن ارائه شده باشد در کدام گام خطا رخ داده است؟

(مکمل مثال ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی)

دانش‌آموزی به صورت زیر اثبات کرده است که معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ ریشه ندارد.

گام اول: $x^2 - 8x + 4 = 0$

$$\text{گام دوم: مقایسه فرم استاندارد} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 4 \end{cases}$$

گام سوم: $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(4)$

گام چهارم: $\Delta = -64 - 16 = -80$

گام پنجم: $\Delta < 0 \Rightarrow$ در نتیجه معادله ریشه ندارد

(۴) گام پنجم

(۳) گام چهارم

(۲) گام سوم

(۱) گام دوم

۸۳. در مورد گزاره‌ی $\frac{x^3 - y^3}{(x-y)^2} - \frac{x^3 + y^3}{(x+y)^2} = -2y$ که مراحل اثبات آن در زیر آمده است، کدام عبارت صحیح است؟

(مکمل کار در کلاس صفحه ۱۷ کتاب درسی)

گام اول: $\frac{x^3 - y^3}{(x-y)^2} - \frac{x^3 + y^3}{(x+y)^2}$

گام دوم: $\frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} - \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

گام سوم: $x - y - (x + y)$

گام چهارم: $x - y - x - y$

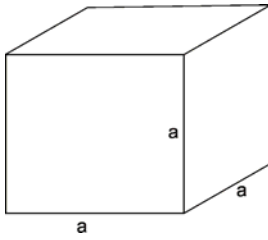
گام پنجم: $-2y$

(۱) گزاره‌ای نادرست است و خطای آن فقط در گام سوم رخ داده است.

(۳) گزاره‌ای نادرست است و خطای آن در گام چهارم رخ داده است.

(۴) این گزاره همواره درست است و خطایی در اثبات استدلال آن رخ نداده است.

در یک مکعب به ضلع a همانند شکل روبه‌رو طول اضلاع مکعب را دو برابر می‌کنیم، آن‌گاه حجم آن ۶ برابر می‌شود.



گام اول: می‌دانیم حجم یک مکعب از رابطه‌ی $V = a^3$ به‌دست می‌آید، اکنون این رابطه را برای مکعب جدید می‌نویسیم:

گام دوم: $V' = (2a) \times (2a) \times (2a)$

گام سوم: $V' = 6a^3$

① این استدلال نادرست است و خطای آن در گام اول رخ داده است.

② این استدلال درست است.

③ این استدلال نادرست است و خطای آن در گام دوم رخ داده است.

④ این استدلال نادرست است و خطای آن در گام سوم رخ داده است.

۸۵. اگر $A = 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$ آن‌گاه مقدار A در کدام گزینه مرحله به مرحله به درستی به‌دست آمده است؟

②

۱) $A = 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$

۱) $A = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$

۲) $A = (2+2+2+2)^2$

۲) $A = 2^2 + 2 + 2 + 2$

۳) $A = 8^3$

۳) $A = 2^{12}$

④

۱) $A = 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$

۱) $A = 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$

۲) $A = 4 \times 2^3$

۲) $A = 4 \times 2^3$

۳) $A = 2^2 \times 2^3$

۳) $A = 2^2 \times 2^3$

۴) $A = 2^6$

۴) $A = 2^5$

③