

عبارت‌های جبری

درسی اول

اتحادهای جبری و کاربرد آنها

یادآوری

تعریف اتحاد

اگر یک تساوی جبری به گونه‌ای باشد که به ازای همه مقادیر برای متغیرهایش، تساوی برقرار باشد، آن تساوی را اتحاد می‌نامیم.

نکته

همان‌طور که از این تعریف مشخص است، می‌توان تساوی‌های جبری دلخواهی ساخت که اتحاد باشند. بنابراین به عنوان مثال تساوی‌های جبری ساده $a - a = b - b$ هم چون به ازای همه مقادیر متغیرهای a و b صادق و برقراراند، اتحاد به حساب می‌آیند. البته اتحادهای ساده اینچنینی ممکن است کاربردی در جبر برای ما نداشته باشند. در زیر تعدادی از اتحادهای معروف و پرکاربرد، شرح داده می‌شوند:

$$(۱) \begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases} \quad \text{اتحاد مربع دو جمله‌ای} \quad \checkmark$$

نکته

سمت راست اتحاد مربع دو جمله‌ای را به زبان خودمانی این‌گونه حفظ کنید: اولی به توان دو + دو برابر اولی در دومی + دومی به توان دو.

$$(۲) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج} \quad \checkmark$$

نکته

سمت راست اتحاد مزدوج را به زبان خودمانی این‌گونه حفظ کنید: یکی از جملات هم علامت به توان دو منهای یکی از جملات مختلف علامت به توان دو.

$$(۳) (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad \text{اتحاد جمله مشترک} \quad \checkmark$$

نکته

سمت راست اتحاد جمله مشترک را به زبان خودمانی این‌گونه حفظ کنید: جمله مشترک به توان دو + غیر مشترک‌ها با هم جمع و در مشترک ضرب + غیر مشترک‌ها در هم ضرب.

• تساوی‌های زیر را با استفاده از الگوی سه اتحاد گفته شده کامل کنید.

الف) $(x+6)^2 = x^2 + \dots + \dots$

ب) $(-3x+2)^2 = \dots + \dots + 4$

ج) $(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}y)^2 = \dots + \dots + \dots$

د) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = \dots - \dots$

هـ) $(-\sqrt{5} + \dots)(\dots - \sqrt{5}) = 5 - 10 = -5$

و) $(2x + 7)(2x - 3) = \dots + \dots + \dots$

ز) $(-5x + \dots)(-5x - \dots) = 25x^2 + 15x - 28$

پاسخ الف: همان‌طور که می‌بینید این اتحاد از الگوی اتحاد مربع دو جمله‌ای پیروی می‌کند که جمله اول آن یک متغیر و جمله دوم آن یک عدد است. بنابراین طرف راست اتحاد را می‌نویسیم و به جای a متغیر x و به جای b عدد 6 را جایگذاری می‌کنیم.

$$(x + 6)^2 = x^2 + 2 \times (x) \times (+6) + (+6)^2 = x^2 + 12x + 36$$

پاسخ ب: در این مثال هم مانند مثال قبل از الگوی اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم و دقت می‌کنیم که به جای a جمله جبری $-3x$ و به جای b عدد 2 را جایگذاری کنیم.

$$(-3x + 2)^2 = (-3x)^2 + 2 \times (-3x) \times (+2) + 4 = 9x^2 - 12x + 4$$

پاسخ ج: باید دقت کنیم که در سوالات اتحادها، به جای دو جمله اصلی a و b ، هر عبارت جبری می‌تواند قرار بگیرد و ممکن است کسری، رادیکالی یا اعشاری باشد. اما ما بدون توجه به نوع عبارت، هر یک از جملات اصلی را به جای a و b جایگذاری می‌کنیم و سپس نتیجه را ساده می‌کنیم.

$$(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}y)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(-\frac{1}{\sqrt{2}}y) + (\frac{-1}{\sqrt{2}}y)^2 = 2 - 2y + \frac{1}{2}y^2$$

پاسخ د: این سوال از الگوی اتحاد مزدوج پیروی می‌کند که به جای a متغیر x و به جای b عدد $\sqrt{3}$ نوشته شده است.

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = x^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 3$$

پاسخ هـ: ظاهر این سوال شبیه الگوی اتحاد مزدوج است. اما ابتدا باید کشف کنیم که جمله‌ای که در هر دو برانتز هم علامت است یا همان a ، کدام است و جمله غیر هم علامت یا همان b کدام. برای این کار به جواب تساوی دقت می‌کنیم و سعی می‌کنیم با الگوی $a^2 - b^2$ تطبیق دهیم. همان‌طور که مشخص است، جمله هم‌علامت در دو برانتز $\sqrt{5}$ است و جمله غیر هم‌علامت هم عددی است که به توان دوی آن برابر با 10 شده است. پس داریم:

$$(-\sqrt{5} + \sqrt{10})(-\sqrt{10} - \sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^2 - (\sqrt{10})^2 = 5 - 10 = -5$$

پاسخ و: این سوال را با الگوی اتحاد جمله مشترک حل می‌کنیم و ابتدا مشخص می‌کنیم که جمله مشترک اینجا عبارت $2x$ و جملات غیر مشترک به ترتیب اعداد $+7$ و -3 هستند. بنابراین طبق رابطه اتحاد جایگذاری می‌کنیم.

$$(2x + 7)(2x - 3) = (2x)^2 + (+7 - 3)(2x) + (7)(-3) = 4x^2 + 8x - 21$$

پاسخ ز: اگر دقت کنیم می‌بینیم که این سوال از الگوی اتحاد جمله مشترک پیروی می‌کند. اما در طرف چپ تساوی فقط جمله مشترک مشخص است و باید جملات غیر مشترک را به کمک طرف راست تساوی پیدا کنیم. طبق اتحاد جمله مشترک باید دنبال دو عدد بگردیم که اگر جمع‌شان کنیم حاصل $(-5) \div (15) = -3$ و اگر ضرب‌شان کنیم حاصل -28 شود. با کمی آزمون و خطا می‌فهمیم که این دو عدد می‌توانند -7 و $+4$ باشند.

$$(-5x + 4)(-5x - 7) = 25x^2 + (-3)(-5x) + (4)(-7)$$

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(998)^2 = (1000 - 2)^2 =$

ب) $98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2) = \dots$

ج) $107 \times 98 = (100 + 7)(100 - 2) = \dots$

پاسخ الف: در این سوال‌ها سعی می‌کنیم دو عددی که در هم ضرب می‌شوند را به شکل یکی از اتحادها در آوریم.

$$(1000 - 2)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(-2) + (-2)^2 = 1000000 - 4000 + 4 = 996000 + 4 = 996004$$

$$(100 - 2)(100 + 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$$

پاسخ ب:

پاسخ ج:

$$(100 + 7)(100 - 2) = (100)^2 + (7 - 2)(100) + (7)(-2) = 10000 + 500 - 14 = 10500 - 14 = 10486$$

مثلت خیام - پاسکال

مثلت خیام پاسکال یک جدول مثلثی از اعداد است که از پایین می‌توان آن را تا بی‌نهایت ادامه داد. دو ضلع کناری این مثلث از اعداد یک ساخته شده است. اعداد داخل مثلث هم هر یک توسط این قانون تولید شده‌اند: «هر عدد، حاصل جمع دو عدد بالای سر خود است» (که یکی در بالا-راست و دیگری در بالا-چپ آن عدد قرار دارند). مرتب نمودن این اعداد به صورت زیر را ابتدا خیام و سپس پاسکال انجام داد و به همین خاطر این مثلث، به مثلث خیام-پاسکال معروف است.

خواص مثلث خیام پاسکال

هر عدد برابر است با مجموع دو عددی که در سطر بالایی و در سمت چپ و راست آن عدد قرار دارند. اگر به سطر سوم مثلث خیام پاسکال توجه کنیم، می‌بینیم که اعداد (۱ و ۲ و ۱) در این سطر قرار گرفته‌اند. این اعداد دقیقاً ضرایب جمله‌های سمت راست اتحاد دو جمله‌ای هستند. در حالت کلی می‌توان گفت اعدادی که سطر $(k+1)$ ام مثلث خیام پاسکال را تشکیل داده‌اند، ضرایب بسط دو جمله‌ای $(a + b)^n$ هستند.

			۱			
			۱	۱		
		۱	۲	۱		
		۱	۳	۳	۱	
	۱	۴	۶	۴	۱	
۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱	
۱	۶	۱۵	۱۵	۶	۱	
۱	۷	۲۱	۲۱	۷	۱	
۱	۸	۲۸	۲۸	۸	۱	
۱	۹	۳۶	۳۶	۹	۱	
۱	۱۰	۴۵	۴۵	۱۰	۱	
۱	۱۱	۵۵	۵۵	۱۱	۱	
۱	۱۲	۶۶	۶۶	۱۲	۱	
۱	۱۳	۷۸	۷۸	۱۳	۱	
۱	۱۴	۹۱	۹۱	۱۴	۱	
۱	۱۵	۱۰۵	۱۰۵	۱۵	۱	
۱	۱۶	۱۲۰	۱۲۰	۱۶	۱	
۱	۱۷	۱۳۶	۱۳۶	۱۷	۱	
۱	۱۸	۱۵۳	۱۵۳	۱۸	۱	
۱	۱۹	۱۷۱	۱۷۱	۱۹	۱	
۱	۲۰	۱۹۰	۱۹۰	۲۰	۱	
۱	۲۱	۲۱۰	۲۱۰	۲۱	۱	
۱	۲۲	۲۳۱	۲۳۱	۲۲	۱	
۱	۲۳	۲۵۳	۲۵۳	۲۳	۱	
۱	۲۴	۲۷۶	۲۷۶	۲۴	۱	
۱	۲۵	۳۰۰	۳۰۰	۲۵	۱	
۱	۲۶	۳۲۵	۳۲۵	۲۶	۱	
۱	۲۷	۳۵۱	۳۵۱	۲۷	۱	
۱	۲۸	۳۷۸	۳۷۸	۲۸	۱	
۱	۲۹	۴۰۶	۴۰۶	۲۹	۱	
۱	۳۰	۴۳۵	۴۳۵	۳۰	۱	
۱	۳۱	۴۶۵	۴۶۵	۳۱	۱	
۱	۳۲	۴۹۶	۴۹۶	۳۲	۱	
۱	۳۳	۵۲۸	۵۲۸	۳۳	۱	
۱	۳۴	۵۶۱	۵۶۱	۳۴	۱	
۱	۳۵	۵۹۵	۵۹۵	۳۵	۱	
۱	۳۶	۶۳۰	۶۳۰	۳۶	۱	
۱	۳۷	۶۶۶	۶۶۶	۳۷	۱	
۱	۳۸	۷۰۳	۷۰۳	۳۸	۱	
۱	۳۹	۷۴۱	۷۴۱	۳۹	۱	
۱	۴۰	۷۸۰	۷۸۰	۴۰	۱	
۱	۴۱	۸۲۰	۸۲۰	۴۱	۱	
۱	۴۲	۸۶۱	۸۶۱	۴۲	۱	
۱	۴۳	۹۰۳	۹۰۳	۴۳	۱	
۱	۴۴	۹۴۶	۹۴۶	۴۴	۱	
۱	۴۵	۹۹۰	۹۹۰	۴۵	۱	
۱	۴۶	۱۰۳۵	۱۰۳۵	۴۶	۱	
۱	۴۷	۱۰۸۱	۱۰۸۱	۴۷	۱	
۱	۴۸	۱۱۲۸	۱۱۲۸	۴۸	۱	
۱	۴۹	۱۱۷۶	۱۱۷۶	۴۹	۱	
۱	۵۰	۱۲۲۵	۱۲۲۵	۵۰	۱	

قانونی که در بالا گفته شد، در اتحاد مکعب دو جمله‌ای هم در ادامه دیده می‌شود.

اتحاد مکعب دو جمله‌ای: ✓

$$\begin{cases} (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

می‌توان برای محاسبه اتحاد مکعب دو جمله‌ای از فرمول زیر نیز استفاده نمود:

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \\ (a-b)^3 = a^3 + (-b)^3 + 3a(-b)(a-b) \end{cases}$$

تقریباً مانند اتحاد مربع دو جمله‌ای است فقط با این اختلاف که در مکعب دو جمله‌ای ما حاصل ضرب سه پرانتز دو جمله‌ای را می‌خواهیم به دست آوریم، یعنی یک پرانتز بیشتر از اتحاد مربع دو جمله‌ای. پس اتحاد مکعب دو جمله‌ای را به زبان خودمانی این‌گونه به خاطر می‌پساریم: اولی به توان سه + دومی به توان سه + سه برابر اولی در دومی، در خود پرانتز با توان یک.

مثال کاربردی

• حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(3x+2)^3 = 27x^3 + \dots + 36x + \dots$

ب) $(-\frac{2}{3}x+1)^3 = \dots$

ج) $(1001)^3 = \dots$

پاسخ الف: با توجه به این مثال می‌فهمیم که رابطه جبری‌ای که از ما خواسته شده است شبیه اتحاد مکعب دو جمله‌ای است که به جای a جمله $3x$ و به جای b عدد ثابت ۲ گذاشته شده است. بنابراین در الگوی طرف راست، اتحاد مکعب دو جمله‌ای را طبق همین مقادیر جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (3x+2)^3 &= (3x)^3 + 3(3x)^2(2) + 3(3x)(2)^2 + (2)^3 \\ &= 27x^3 + 3(9x^2)(2) + 9x(4) + 8 = 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 \end{aligned}$$

پاسخ ب: نکته‌ای که باید توجه کنیم این است که در اینگونه سوال‌ها مهم این است که تشخیص بدهیم فارغ از کسری یا رادیکالی یا اعشاری بودن، عبارتی که از ما خواسته شده است از الگوی کدام اتحاد پیروی می‌کند و در ادامه باید فقط به جای جملات a و b مقادیر مناسب را جایگذاری کنیم.

$$\begin{aligned} (-\frac{2}{3}x+1)^3 &= (-\frac{2}{3}x)^3 + 3(-\frac{2}{3}x)^2(+1) + 3(-\frac{2}{3}x)(+1)^2 + (+1)^3 \\ &= -\frac{8}{27}x^3 + 3(+\frac{4}{9}x^2)(+1) + 3(-\frac{2}{3}x)(+1) + 1 = -\frac{8}{27}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

پاسخ ج: در این سوال توان سوم عددی بزرگ از ما خواسته شده است. با دیدن توان ۳ به یاد اتحاد مکعب دو جمله‌ای می‌افتیم. بنابراین اگر بتوانیم این عدد بزرگ را به صورت جمع دو عدد $(a+b)$ بنویسیم که به توان رساندن‌شان برایمان ساده باشد، می‌توانیم با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای حاصل را به دست بیاوریم.

$$\begin{aligned} (1001)^3 &= (1000+1)^3 = (1000)^3 + 3(1000)^2(1) + 3(1000)(1)^2 + (1)^3 \\ &= 1000000000 + 3(1000000)(1) + 3000(1) + 1 \\ &= 1000000000 + 3000000 + 3000 + 1 = 1003003001 \end{aligned}$$

مثال کاربردی

• حاصل عبارت زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$(x-\frac{1}{2})^3 = \dots$

پاسخ: طبق معمول ابتدا تشخیص می‌دهیم که باید به جای a جمله x و به جای b عدد ثابت $-\frac{1}{2}$ را جایگذاری

کنیم. این بار به عنوان تمرین با استفاده از نکته گفته شده جایگذاری می‌کنیم.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 = \left(x^3\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3(x)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^3 - \frac{1}{8} - \frac{3}{2}x\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^3 - \frac{1}{8} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x$$

اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله‌ای (یا همان اتحاد چاق و لاغر):

$$\begin{cases} (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \end{cases}$$

نکته

اتحاد چاق و لاغر را به زبان خودمانی اینگونه حفظ می‌کنیم؛ هرگاه دو برانتز لاغر و چاق داشتیم به شرطی که عبارت برانتز لاغر دو جمله‌ای باشد و برانتز چاق سه جمله‌ای و برانتز چاق شامل مربع اولی، مربع دومی و قرینه حاصلضرب اولی در دومی جمله‌ای باشد، نیازی به ضرب تک تک جملات در هم نیست؛ حاصل برابر است با اولی به توان سه بعلاوه یا منهای دومی به توان سه (که بستگی به علامت داخل برانتز لاغر دارد).

مثال کاربردی

با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(-3x+4)(9x^2+12x+16) = \dots$$

پاسخ: در نگاه اول دو برانتز چاق و لاغر داریم، اما باید مطمئن شویم که ترکیب جملات جبری آن همانند الگوی اتحاد چاق و لاغر است. اگر به دو جمله تشکیل دهنده برانتز لاغر یعنی $-3x$ و 4 توجه کنیم، متوجه می‌شویم که برانتز دوم (چاق) شرایط بالا را دارد و دقیقاً شامل مربع جمله اولی $(-3x)^2$ و مربع جمله دومی 4^2 و همچنین قرینه حاصلضرب جمله اولی در دومی $12x = (-3x) \times 4$ است. لذا پاسخ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (-3x+4)(9x^2+12x+16) &= (-3x)^3 + (4)^3 \\ &= -27x^3 + 64 = 64 - 27x^3 \end{aligned}$$

مثال کاربردی

عبارات زیر را تجزیه کنید.

الف) $a^3 + 125 =$

ب) $64x^3 - 27 =$

پاسخ الف: چون حاصل جمع دو جمله را داریم و هر کدام ریشه سوم (کعب) دارند ($\sqrt[3]{125} = 5$)، پس از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم و در برانتزهای چاق و لاغر به جای جمله اول همان a و به جای جمله دوم عدد 5 را قرار می‌دهیم. یعنی در برانتز لاغر ابتدا کعب جمله اول + کعب جمله دوم، سپس در برانتز چاق ابتدا مربع جمله اولی، سپس قرینه حاصلضرب اولی در دومی و در انتها مربع جمله دومی را می‌نویسیم.

$$a^3 + 125 = (a+5)(a^2 - 5a + 25)$$

پاسخ ب: این سوال هم مانند سوال قبل است. یعنی ما با حاصل جمع دو جمله طرفیم که هر دو توان سوم جمله‌ای بوده‌اند؛ به عبارت دیگر هم $64x^3 = (4x)^3$ و هم $-27 = (-3)^3$. پس الگوی اتحاد مکعب دو جمله‌ای را دنبال می‌کنیم و به جای جملات a و b ، جملات $4x$ و -3 را جایگذاری می‌کنیم.

$$64x^3 - 27 = (4x-3)(16x^2 + 12x + 9)$$

تمرین‌های درسی اول از فصل اول

۱. کدامیک از عبارات زیر اتحاد است؟

الف) $2x(x+3) = 2x^2 + 3$

ب) $2(3x-1) = 6x-2$

۲. مقادیر x ، y ، z را چنان تعیین کنید که تساوی زیر یک اتحاد هستند یا نه؟

$(x-y)t^2 + 2y(t-1) + x + z = t^2 - 4t + 3$

۳. مشخص کنید هر یک از عبارتهای زیر اتحاد هست یا نه.

الف) $x+x = x^2$

هـ) $x^2 + x^2 = 2x^2$

ب) $x+x = 2x$

و) $3x+y = x+3y$

ج) $x^2 + x^2 = x^4$

ز) $x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$

د) $y^2 + 1 = y$

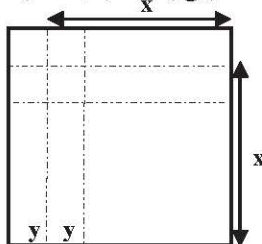
ح) $(x-1)(x+1)(x^2 + x^2 + 1) = x^6 - 1$

۴. تساوی روبه‌رو یک اتحاد است (x متغیر و k عدد معلوم). مقدار k را به دست آورید.

$(2x-k)(x+k) = 2x^2 + 3x - k^2$

۵. در حالتی که x و y اعداد مثبتی باشند و $x > y$ باشد، تساوی زیر را به کمک شکل زیر ثابت کنید.

$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$



۶. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

الف) $(2x - \frac{1}{y})^2 =$

ب) $(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2})^2 =$

ج) $(3x+y)^2 + (3x-y)^2 =$

د) $(x+2)^2 - (x-1)^2 =$

هـ) $(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}) =$

و) $(a-1)(a+1)(a^2+1) =$

ز) $(-\frac{1}{y} - x)(x - \frac{1}{y}) =$

ح) $(-\frac{x}{p} + \frac{2y}{\delta})(\frac{x}{p} + \frac{2y}{\delta}) =$

ط) $(4x+5)(4x+3) =$

ی) $(3x-4)(3x+1) =$

ک) $(5x-y)(5x+4y) =$

ل) $(\frac{1}{p} - 2x)(\frac{1}{p} - x) =$

م) $(x+y+2)(x+y+3) =$

ن) $(3x^2 - x + 1)(3x^2 - x + 2) =$

کاربرد اتحادها

۷. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $52^2 =$

ب) $997^2 =$

ج) $1002^2 + 998^2 =$

د) $198^2 - 202^2 =$

هـ) $850^2 - 750^2 =$

و) $103 \times 97 =$

ز) $(1003)^2 - 9 =$

ح) $1002^3 =$

ط) $999^3 =$

الف) $(x-2)^3 =$

ب) $(x+\frac{1}{3})^3 =$

ج) $(ax-1)^3 =$

د) $(\sqrt[3]{x}-1)^3 =$

هـ) $(2\sqrt{x}-3)^3 =$

و) $(\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{2y^2})^3 =$

ز) $(x+y+1)^3 =$

الف) $x^2-4x+4 =$

ب) $4x^2+4x+1 =$

ج) $x^2-x+\frac{1}{4} =$

د) $9y^2-6y+1 =$

هـ) $x^2-2x^2yz+y^2z^2 =$

و) $x^2y^2-8xy+16 =$

ز) $x^2-9 =$

ح) $32a^2-2b^2 =$

ط) $x^3y-xy^3 =$

الف) $y^3-6y^2+12y-8 =$

ب) $27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3 =$

ج) $8a^3-12a^2+6a-1 =$

د) $\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{6}xy^2-\frac{y^3}{27} =$

هـ) $\sqrt[3]{0.001a^3+\sqrt[3]{0.3a^2b+\sqrt[3]{3ab^2+b^3}} =$

الف) $235^2-230^2-5^2 =$

ی) $52^3 =$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

ط) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) =$

ی) $(x-2)(x^2+2x+4) =$

ک) $(x+\frac{1}{4})(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}) =$

ل) $(x^2-1)(x^2+x^2+1) =$

م) $[(2x+y)-2][(2x+y)^2+2(2x+y)+9] =$

ن) $(\sqrt[3]{x+2})(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x+4}) =$

ح) $(x-y-1)^3 =$

ک) $(x-1)^2-y^2 =$

ل) $1-x^{16} =$

م) $x^2+10x+16 =$

ن) $x^2-x-12 =$

س) $x^2-5x+6 =$

ع) $x^2+5x-6 =$

ف) $x^2+x+\frac{1}{4} =$

ص) $x^2+2x-8 =$

ی) $16x^2-36y^2 =$

۱۰. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

و) $x^3-8 =$

ز) $27x^3-\frac{1}{8} =$

ح) $\frac{8}{27}+a^3 =$

ط) $(x+1)^3+y^3 =$

ی) $x^6-1 =$

مسائل ترکیبی از اتحادها

۱۱. محاسبات زیر را به کمک اتحادها انجام دهید.

ب) $250^2-200^2-50^2 =$

۱۲. در اتحاد $(a+b)^2$ ضریب جمله a^2b^2 چه عددی است؟

۱۳. حاصل $(\sqrt{2}-1)^4$ را به دست آورید.

سوالات چهارگزینه‌ای درس اول از فصل اول

۱۴. عبارت $8x^3 - 1$ برابر کدام است؟
 ۱ $(2x+1)(4x^2+2x+1)$ ۲ $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
 ۳ $(2x-1)(4x^2+2x+1)$ ۴ $(2x-1)(4x^2-2x+1)$
۱۵. اگر $x + \frac{1}{x} = 2$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ برابر است با،
 ۱ ۸ ۲ ۶ ۳ ۴ ۴ ۲
۱۶. اگر $(x - \frac{1}{x})^2 = 2$ باشد، آنگاه مقدار $x^4 + \frac{1}{x^4}$ برابر است با،
 ۱ ۱۰ ۲ ۱۴ ۳ ۱۲ ۴ ۱۶
۱۷. اگر $x + y = 9$ و $xy = 20$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟
 ۱ ۱۸۸ ۲ ۱۰۸ ۳ ۱۲۶ ۴ ۱۸۹
۱۸. اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟
 ۱ ۲۱۶ ۲ ۲۳۸ ۳ ۲۴۴ ۴ ۲۶۴
۱۹. اگر $a - b = 1$ و $a^2 + b^2 = 5$ باشد، مقدار $a^3 - b^3$ «چه عددی» است؟
 ۱ ۱۰ ۲ ۹ ۳ ۷ ۴ ۶
۲۰. اگر $xy = 4xy^2 = 4x^2y$ باشد، مقدار $x^2 - 4y^2$ کدام است؟
 ۱ ۵ ۲ ۲ ۳ -۳ ۴ صفر
۲۱. حاصل عبارت $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ به ازای $x = \sqrt[3]{-3}$ چقدر است؟
 ۱ $-\sqrt[3]{-3}$ ۲ -۳ ۳ $3\sqrt[3]{-3}$ ۴ ۳
۲۲. در محاسبه‌ی حاصل عبارت $101^3 - 98^3$ ؛ کدام یک از اتحادها، کاربرد ندارد؟
 ۱ $(a+b)^2$ ۲ $(a-b)^2$ ۳ $(a+b)(a+c)$ ۴ $a^2 - b^2$
۲۳. اگر $(a-b)^2 = 625$ و $a^2 + b^2 = 857$ باشد، مقدار ab چقدر است؟
 ۱ ۷۴۱ ۲ ۴۴۱ ۳ ۴۱۶ ۴ ۱۱۶
۲۴. کدام عبارت به حاصل ضرب a و $a+3$ اضافه گردد تا مربع یک دوجمله‌ای به دست آید؟
 ۱ $a+5$ ۲ $a+1$ ۳ $a+4$ ۴ $a+2$
۲۵. با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ ، مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟
 ۱ ۲ ۲ $\frac{15}{4}$ ۳ ۶ ۴ ۱۲
۲۶. کدام مقدار A ، عبارت $9x^2y^2 + x^4 + A$ را به صورت توان دوم یک دوجمله‌ای در می‌آورد؟
 ۱ $-3x^3y$ ۲ $6x^3y$ ۳ $2x^2y^2$ ۴ $6x^2y^2$
۲۷. حاصل عبارت $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$ برابر است با،
 ۱ $x^4 + y^4$ ۲ $x^4 - x^2y^2 + y^4$ ۳ $(x^2 - y^2)^2$ ۴ $x^4 + x^2y^2 + y^4$



۲۸. شرط برقراری $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2$ چیست؟ آزادی-۸۴

$a^2 = 2bc$ $b^2 = 2ac$
 $c^2 = 2ab$ $a+b+c = abc$

۲۹. حاصل عبارت $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2$ برابر است با، آزادی-۸۶

$a^2 + b^2 + c^2$ $ab + bc + ac$
 $(a+b+c)^2$ $2(ab+bc+ac)$

۳۰. کدام عامل ضرب، در تجزیه عبارت $x^3 - 7x^2 + 6x$ وجود دارد؟ سراسری-۷۴

$x-1$ $x-2$ $x-3$ $x+6$

۳۱. در تجزیه عبارت $4x^2 - 4x - 24$ کدام عامل وجود دارد؟ سراسری-۷۷

$x-6$ $x-2$ $x+2$ $x+3$

۳۲. در تجزیه عبارت $4a^2 - 4a - b^2 - 4b - 3$ کدام عامل وجود دارد؟ سراسری-۸۸

$2a+b+3$ $2a-b+1$ $2a+b-3$ $2a+b+1$

۳۳. در تجزیه عبارت $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟ سراسری-۹۰

$a-6$ $a-3$ $a-2$ $a+2$

۳۴. در تجزیه عبارت $a(a-2)(a-3) - 4a + 8$ کدام عامل وجود ندارد؟ سراسری خارج از کشور-۸۸

$a-1$ $a-2$ $a+1$ $a-4$

۳۵. اگر $a+2b=3$ ، حاصل $a(a+2) + 4b(b+1) + 4ab$ کدام است؟ سراسری خارج از کشور-۸۸

15 16 17 18

۳۶. در تجزیه عبارت $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟ سراسری خارج از کشور-۹۰

$x-8$ $x-4$ $x+2$ $x+4$

۳۷. در تجزیه عبارت $x^6 - 3x^3 + 8x - 24$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟ سراسری-۹۳

$x-4$ $x-2$ $x+2$ $x+3$

۳۸. یکی از عامل‌های عبارت $x^6 + 3x^2 + 4$ کدام است؟ آزادی-۷۷

$x^2 + x + 4$ $x^2 + x + 2$
 $x^2 - x + 4$ $x^2 - 2x + 4$

۳۹. عبارت $x^2 + (x-1)(y+1) - x$ را به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کرده‌ایم یکی از دو عبارت کدام است؟ سراسری-۷۵

$x-y+1$ $x-y-1$ $x+y-1$ $x+y+1$

۴۰. در تجزیه عبارت $x^6 + 2x^3 - x - 2$ کدام عامل وجود ندارد؟ سراسری-۷۷

$x-1$ $x+1$ $x+2$ $x^2 - x + 1$

۴۱. عبارت $x^4 - xy^3 + x^3y - y^4$ بر «کدام چندجمله‌ای»، بخش پذیر است؟ آزادی-۸۳

$x^2 + y^2$ $x^2 - xy + y^2$
 $x^3 + y^3$ $x^2 - xy + y^2$

۴۲. عبارت $x^5 - x^4 - 4x + 4$ بر «کدام» بخش پذیر نیست؟ آزادی-۸۲
- ۱ $x^2 - 2$ ۲ $x + 1$ ۳ $x^2 + 2$ ۴ $x - 1$
۴۳. عبارت $x^3 + 8$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش پذیر است؟ آزادی-۷۲
- ۱ $x^2 - 2x + 4$ ۲ $x - 2$ ۳ $x^2 + 2x + 4$ ۴ $x^2 + 2$
۴۴. عبارت $x^4 - 3x^2 - 4$ بر کدام یک از عبارت‌های زیر بخش پذیر است؟ آزادی-۷۵
- ۱ $x^2 + 2$ ۲ $x + 1$ ۳ $x - 1$ ۴ $x + 2$
۴۵. عبارت نادرست حاصل تجزیه دو جمله‌ای $1 - a^6$ ، کدام است؟ آزادی-۷۸
- ۱ $1 + a$ ۲ $1 - a^2 + a^6$ ۳ $1 - a$ ۴ $1 + a^2 + a^6$
۴۶. به ازای کدام مقدار m ، عبارت $4x^2 + mx + 9$ به صورت مربع مجموع دو جمله است؟ هراسی-۷۷
- ۱ -6 ۲ 6 ۳ 8 ۴ 12
۴۷. به ازای چه مقداری از m عبارت $x^2 + m\sqrt{2}x + 2$ مربع کامل است؟ آزادی-۷۵
- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ 4 ۳ 2 ۴ $2\sqrt{2}$
۴۸. جذر $2(2 + \sqrt{3})^2(2 - \sqrt{3})^3$ می‌شود، آزادی-۸۰
- ۱ $2 - \sqrt{3}$ ۲ $\sqrt{3} + 1$ ۳ $2 + \sqrt{3}$ ۴ $\sqrt{3} - 1$



درس دوم

عبارت‌های گویا

یادآوری

تعریف عبارت گویا، به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن یک عبارت جبری (تک جمله‌ای یا چند جمله‌ای) باشد، به همراه این شرط که مخرج همواره باید مخالف صفر باشد.

مثال کاربردی

• مشخص کنید کدام یک از عبارت‌های جبری زیر یک عبارت گویا است و کدام یک عبارت گویا نیست؟

$\sqrt{9}$ (ج) <input type="checkbox"/>	$\frac{x - x^2 y}{x + y}$ (ب) <input type="checkbox"/>	$\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + x^2 - 1}$ (الف) <input type="checkbox"/>
$\frac{x^2 - x + 2}{z + \sqrt{\pi}}$ (و) <input type="checkbox"/>	$\sqrt[5]{x^5}$ (هـ) <input type="checkbox"/>	$\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ (د) <input type="checkbox"/>
$2x - 7$ (ط) <input type="checkbox"/>	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{\pi}}{z}$ (ح) <input type="checkbox"/>	$\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y}}$ (ز) <input type="checkbox"/>
	$\frac{ x - y }{x}$ (ک) <input type="checkbox"/>	$\frac{z(y+1)(\sqrt{x^2+1})}{(y+2)(\sqrt{x^2+1})}$ (ی) <input type="checkbox"/>

پاسخ

- (الف) یک عبارت گویا است. زیرا هم صورت و هم مخرج یک چند جمله‌ای اند.
- (ب) یک عبارت گویا است. زیرا هم صورت و هم مخرج یک چند جمله‌ای اند.
- (ج) یک عبارت گویا است. زیرا می‌دانیم هر عدد ثابت به عنوان یک جمله‌ای محسوب می‌شود.
- (د) یک عبارت گویا نیست. زیرا مجهول زیر رادیکال با فرجهٔ زوج است و عبارت جبری که در آن عبارت زیر رادیکال وجود دارد را یک چند جمله‌ای گویا به حساب نمی‌آوریم.
- (هـ) یک عبارت گویا است. با اینکه در این عبارت جبری نیز یک رادیکال وجود دارد، چون مجهول زیر رادیکال با فرجهٔ فرد است، عبارت پس از ساده کردن به صورت $\sqrt[5]{x^5} = x$ در می‌آید و بنابراین می‌توان آن را یک چند جمله‌ای گویا به حساب آورد.
- (و) یک عبارت گویا است. در این عبارت جبری هم رادیکال وجود دارد، اما عبارتی که زیر رادیکال است عدد بی (π) است و بنابراین جذر آن هم یک عدد حقیقی است و تمامی اعداد حقیقی را به عنوان یک تک جمله‌ای گویا در نظر می‌گیریم.
- (ز) یک عبارت گویا است. در این مثال نیز رادیکال وجود دارد، اما با کمی دقت درمی‌یابیم که پس از ساده کردن $\sqrt{x^2}$ که با فرجهٔ فرد است عبارت به صورت $\frac{x - y}{x + y}$ ساده خواهد شد و ملاحظه می‌شود که صورت و مخرج کسر هر کدام چند جمله‌ای هستند و کل کسر در مجموع یک عبارت گویا به شمار می‌رود.

ج) یک عبارت گویا است.

ط) یک عبارت گویا است.

ی) یک عبارت گویا است. در نگاه اول چون رادیکال با فرجهٔ زوج ملاحظه می‌شود شاید گفته شود که یک عبارت گویا نیست، ولی با کمی دقت ملاحظه می‌شود که می‌توان صورت و مخرج را با هم ساده نمود و عبارت

پس از ساده شدن به صورت $\frac{z(y+1)}{y+2}$ ظاهر خواهد شد که بیانگر یک عبارت گویاست.

ک) یک عبارت گویا نیست. می‌دانیم عبارت‌های مجهولی را که داخل قدر مطلق باشند نمی‌توان به عنوان عبارت گویا در نظر گرفت.

تعریف شده یا نشده بودن عبارات گویا

یادآوری

برای تعیین همهٔ مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود (با معنی است)، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آن مقادیر، مخرج کسر صفر می‌شود. یعنی مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرج کسر صفر نباشد.

نکته

پس در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود. آنگاه عبارت گویا تعریف نشده است و مقدار ندارد.

توجه

هنگامی یک کسر شامل عبارت‌های جبری، یک عبارت گویا است که مخرج آن کسر در محدودهٔ گفته شده، همواره مخالف صفر باشد. بنابراین در حل سوالات شبیه به این، می‌خواهیم محدوده‌ای را پیدا کنیم که مخرج کسر در آن محدوده هیچگاه صفر نشود. به همین خاطر مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم و بازه‌هایی را که در آنها مخرج کسر برابر صفر و کسر تعریف نشده می‌شود پیدا می‌کنیم و در نتیجه در باقی محدوده‌ها و به ازای باقی اعداد، کسر ما یک عبارت گویای با معنی خواهد بود.

مثال کاربردی

• تعیین کنید عبارت‌های زیر در چه نقاطی تعریف نشده‌اند.

الف) $\frac{1}{x}$

ب) $\frac{x}{x-1}$

ج) $\frac{2x^2+1}{x+a}$

د) $\frac{3-2x}{(x-2)(2x+3)}$

ه) $4x+6$

و) $\frac{x^2+5}{x^2-1}$

ز) $\frac{5-3x}{x^2+4}$

پاسخ الف: می‌دانیم برای یافتن محدودهٔ گویا بودن کافی است مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم یعنی $x = 0$.

بنابراین عبارت گویای $\frac{1}{x}$ به ازای $x = 0$ تعریف نشده است.

پاسخ ب: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

بنابراین عبارت گویای $\frac{x}{x-1}$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده است.

پاسخ ج: $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$

پس عبارت گویا به ازای $x = -a$ تعریف نشده است.

$$(x-2)(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

پاسخ د:

بنابراین عبارت گویا به ازای $x=2$ و $x=-\frac{3}{2}$ تعریف نشده خواهد بود.

پاسخ ه: چون در مخرج این عبارت هیچ مجهولی ملاحظه نمی‌شود $(\frac{4x+6}{1})$ ، لذا عبارت داده شده یک چند

جمله‌ای است و می‌دانیم تمام چند جمله‌ای‌ها در تمام نقاط و اعداد تعریف شده می‌باشند.

پاسخ و:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویا به ازای $x=1$ و $x=-1$ تعریف نشده است.

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$$

پاسخ ز:

معادله جواب ندارد زیرا هیچ عددی نداریم به جای x قرار دهیم و پس از به توان رسیدن، حاصلش منفی شود. یعنی برای x هیچ جوابی پیدا نخواهیم نمود. لذا این عبارت گویا در تمام نقاط و اعداد، تعریف شده خواهد بود.

ساده کردن عبارت‌های گویا

یادآوری

برای ساده کردن هر عبارت گویا، می‌توان صورت و مخرج آن عبارت را بر عبارتی غیرصفر تقسیم کرد یعنی:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad (k \neq 0, b \neq 0)$$

و یا:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\frac{ka}{k}}{\frac{kb}{k}} = \frac{a}{b} \quad (k \neq 0, b \neq 0)$$

لذا برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تا حد امکان تجزیه کنیم، سپس عوامل مشترک را از صورت و مخرج کسر ساده کنیم، یعنی صورت و مخرج را بر عامل‌های مشترک تقسیم کنیم، به این وسیله عبارت گویا ساده می‌شود.

البته باید توجه داشت عوامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر حذف می‌کنیم، باید مخالف صفر باشند.

• عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{ax+ay}{xy+y^2}$

ب) $\frac{x^2-16}{4-x}$

ج) $\frac{x^2-5x+6}{4x-12}$

د) $\frac{16x^2-54}{16x^2+24x+36}$

ه) $\frac{5x^2-13x-6}{x^2-9}$

و) $\frac{6x^2+x-1}{9x^2+9x-4}$

مثال کاربردی

$$\frac{\text{با فاکتورگیری}}{\text{از صورت و مخرج}} \rightarrow \frac{a(x+y)}{y(x+y)} = \frac{a}{y}$$

پاسخ الف:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{تجزیه صورت به کمک اتحاد مزدوج}} \frac{(x-4)(x+4)}{4-x} \quad \text{برای آنکه عبارت مخرج همانند یکی از عبارت‌های صورت باشد باید در مخرج از منفی فاکتور بگیریم} \\ & = \frac{(x-4)(x+4)}{-(-4+x)} = \frac{(x-4)(x+4)}{-(x-4)} = -(x+4) \end{aligned}$$

پاسخ ب:

$$\frac{\text{تجزیه صورت به کمک اتحاد جمله مشترک و تجزیه مخرج به کمک فاکتورگیری}}{\rightarrow} \frac{(x-3)(x-2)}{4(x-3)} = \frac{x-2}{4}$$

پاسخ ج:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{تجزیه صورت به کمک فاکتورگیری و اتحاد جاق و لاغر تجزیه مخرج به کمک فاکتورگیری}} \frac{2(8x^3 - 27)}{4(4x^2 + 6x + 9)} \\ & = \frac{2[(2x)^3 - (3)^3]}{4(4x^2 + 6x + 9)} = \frac{2(2x-3)(4x^2 + 6x + 9)}{4(4x^2 + 6x + 9)} = \frac{2x-3}{2} \end{aligned}$$

پاسخ د:

$$\frac{\text{تجزیه صورت به کمک روش A}}{\text{تجزیه مخرج به کمک اتحاد مزدوج}} \rightarrow \frac{(x-3)(5x+2)}{(x+3)(x-3)} = \frac{5x+2}{x+3}$$

پاسخ ه:

نکته
(توضیح روش A)

در تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک، هرگاه ضریب جمله x^2 برابر عدد یک نباشد (مانند همین مثال که ۵ است)، آنگاه می‌توانیم برای تجزیه از روش A استفاده نماییم. بدین صورت که:

ابتدا نام چند جمله‌ای را A می‌نامیم، سپس تمام جملات عبارت نام‌گذاری شده را در ضریب x^2 (در این جا یعنی ۵) ضرب می‌کنیم و حاصل آنها را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x^2 - 13x - 6 = A \xrightarrow{\text{ضرب تمام جملات در 5}} 5\Delta x^2 - 13(5x) - 30 = 5A$$

واسطه

ضریب عبارت واسطه را تغییر نمی‌دهیم و عدد را فقط در متغیر ضرب می‌کنیم. بعد از ضرب کردن، همانند تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک عمل می‌کنیم و در آخر باید تا حد امکان از پرانتزها فاکتور بگیریم تا جملاتی را که در

ضریب x^2 ضرب نموده بودیم بتوانیم با ضریب A ساده نماییم. یعنی داریم:

$$5\Delta x^2 - 13(5x) - 30 = 5A \xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک}} (5x-15)(5x+2) = 5A$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{ضرب دو عدد}} \Rightarrow (x-3)(5x+2) = A \Rightarrow (x-3)(5x+2) = A \\ & \xrightarrow{\text{جمع دو عدد}} \Rightarrow \text{فاکتورگیری از پرانتزها} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{تجزیه صورت و مخرج به روش A}}{\rightarrow} \frac{(3x-1)(2x+1)}{(3x+4)(3x-1)} = \frac{2x+1}{3x+4}$$

پاسخ و:

$$6x^2 + x - 1 = A \xrightarrow{\times 6} 36x^2 + 6x - 6 = 6A$$

ضرب دو عدد جمع دو عدد