مهروماه

به نام پروردگار مهربان

کنکور ۹۹

ویرایش جدید

ریاضیات پایه و حسابان

دهم، یازدهم و دوازدهم

جامع کنکور

▪ عباس اشرفی ▪ وهاب تقی‌زاده
▪ علیرضا نداف‌زاده ▪ شروین سیاح‌نیا

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

فهرست

اتحادها

به جدول اتحادهای زیر توجه کنید:

ردیف	نام یا شهرت	اتحادها	مثال
۱	مربع مجموع دوجمله‌ای	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(x+2)^2=x^2+4x+4$
۲	مربع تفاضل دوجمله‌ای	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(\sqrt{x}-y)^2=x-2\sqrt{x}\,y+y^2$
۳	مزدوج	$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$(x^3-y^3)(x^3+y^3)=x^6-y^6$
۴	جمله مشترک	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	$(x+2)(x-5)=x^2-3x-10$
۵	مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	$(x+y-2z)^2=x^2+y^2+4z^2+2xy-4xz-4yz$
۶	مکعب مجموع دوجمله‌ای	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$
۷	مکعب تفاضل دوجمله‌ای	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$
۸	مجموع مکعب دوجمله‌ای	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$
۹	تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر)	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$27x^3-y^3=(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

ردیف	نام یا شهرت	اتحادهای فرعی	مثال
۱۰	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$	$(x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2=4$
۱۱	اتحاد فرعی مکعب مجموع دوجمله‌ای	$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$	$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$
۱۲	اتحاد فرعی مکعب تفاضل دوجمله‌ای	$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$	$x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})^3+3(x-\frac{1}{x})$
۱۳	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$	$9y^2+4=(3y+2)^2-12y$
۱۴	اتحاد فرعی مربع دوجمله‌ای	$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$	$9y^2+4=(3y-2)^2+12y$

مثال: اگر $4x^2+4xy+y^2=0$ باشد، حاصل $\frac{x}{y}$ (با شرط $y\neq 0$) را بیابید.

پاسخ **روش اول** عبارت $4x^2+4xy+y^2$ مربع مجموع دوجمله‌ای است. $4x^2+4xy+y^2=0 \Rightarrow (2x+y)^2=0 \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow 2x=-y$

طرفین را بر $2y$ تقسیم می‌کنیم: $\frac{2x}{2y}=\frac{-y}{2y} \Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$

روش دوم بعد از به‌دست آوردن رابطهٔ بین x و y یعنی $y=-2x$، خواستهٔ مسئله را محاسبه می‌کنیم: $\frac{x}{y}=\frac{\cancel{x}}{-2\cancel{x}}=-\frac{1}{2}$

دقت کنید که چون y مخالف صفر است، پس مقدار x نیز مخالف صفر بوده و می‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد.

تست: اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد، آن‌گاه $x^3+\frac{1}{x^3}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

پاسخ **گزینه ۳** **روش اول** این تست، یکی از مشهورترین سؤالات در مورد اتحادهاست. در این‌گونه سؤالات معمولاً حاصل‌ضرب دو جملهٔ عبارت داده شده، مقدار ثابتی است به عنوان مثال در این سؤال $x(\frac{1}{x})=1$ است.

۴۴. حاصل $\left(\frac{x+3}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x^2-9}-\frac{5}{3-x}\right)\left(\frac{9-x^2}{5x^2+7x-30}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3-x}$ ۲) $3-x$ ۳) $\frac{1}{3+x}$ ۴) $3+x$

۴۵. برای یکی کردن مخرج کسرهای $A=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ و $B=\frac{2x+5}{(x^2-1)(x^3+3x^2)}$ صورت و مخرج کسر A در کدام عبارت باید ضرب شود؟

۱) x^3+4x^2+3x ۲) x^2+4x+3 ۳) $x^4+4x^3+3x^2$ ۴) $(3x-1)(x^3+4x^2+3x)$

برای ۱۰۰٪

۴۶. اگر $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$ و $x+y+z=6$ باشند، مقدار xyz کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۴۷. اگر $x=(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}+(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ باشد، حاصل $x(x^2-3)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $-2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

۴۸. اتحاد $(ax-y)^2+(bx+cy)^2=65x^2+5y^2+20xy$، برای سه عدد a، b و c که $b<c<0$ برقرار است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۲

۴۹. اگر بدانیم $a+b-c=1$ است، آن‌گاه از روابط زیر چند مورد صحیح است؟

الف) $a^2+b^2-c^2=1-2ab+2c$

ب) $a^2-b^2+c^2=1+2ac-2b$

پ) $a^2+b^2+c^2=1-2ab+2bc+2ca$

ت) $a^2+b^2-c^2=-1-2ab+2a+2b$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰. اگر $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{5}$ باشد، حاصل $\frac{x^2}{x^4+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{25}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{23}$ ۴) $\frac{1}{22}$

۵۱. حاصل عبارت $\frac{(1-x)^{-1}(1-\sqrt{x})^{-1}(1-\sqrt[4]{x})^{-1}}{(1+\sqrt{x})^2(1+\sqrt[4]{x})}$ کدام است؟ $(x\ge 0, x\ne 1)$

۱) $1-x$ ۲) $(1-x)^{-3}$ ۳) $(1-\sqrt{x})^{-3}$ ۴) $1-\sqrt{x}$

۵۲. اگر $a+b+c=0$ باشد که در آن $abc\ne 0$ است، حاصل L کدام است؟

$$L=\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) abc ۴) $a^2+b^2+c^2$

۵۳. چند مورد از عبارات زیر همواره صحیح است؟

الف) $(x^2+2y+1)(x^4+4y^2+4x^2y-x^2-2y+1)=(x^2+2y)^3+1$

ب) $(x^2-2y+1)(x^4+4y^2+2x^2y-x^2-4y+1)=x^6-(2y-1)^3$

پ) $(x^2-2y-1)(x^4+4y^2+2x^2y-2x^2-2y+1)=(x^2-1)^3-8y^3$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۴. حاصل عبارت $\frac{x^3+y^3+z^3-3yxz}{x+y+z}$ به شرط $x+y+z\ne 0$ برابر کدام است؟

۱) $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2$

۲) $\frac{(x-y)^2}{2}+\frac{(x-z)^2}{2}+\frac{(y-z)^2}{2}$

۳) $(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2$

۴) $\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+z)^2}{2}+\frac{(y+z)^2}{2}$

۵۵. اگر $1+x+2x^2-x^3=3+a(x-2)+b(x-2)^2-(x-2)^3$ به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) -7 ۲) -5 ۳) ۵ ۴) ۷

توان‌های گویا

۷۳. اگر x عددی منفی باشد، ساده‌شدهٔ کسر $\frac{\sqrt[5]{x^5}\times\sqrt[4]{x^8}}{\sqrt[7]{x^7}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) x ۳) $-x$ ۴) $-x^2$

۷۴. به‌ازای کدام مقدار k عبارت $\sqrt[3]{a\sqrt[k]{a^4}}$ برابر a است؟ $(a>0)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵. اگر $x>0$ و $\sqrt[n]{8}\times\sqrt[2n]{4}=\sqrt[n]{x}$ باشد، مقدار $\sqrt{\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{2x}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۶

۷۶. حاصل عبارت $\sqrt{4-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{19+8\sqrt{3}}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\sqrt{7}$ ۲) ۷ ۳) $\sqrt{13}$ ۴) ۱۳

۷۷. حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۷۸. اگر x عددی مثبت، a عدد گویایی مثبت و $x^{(\frac{5}{a})}=2$ باشد، ریشهٔ بیستم x کدام است؟

۱) $\pm2^{\frac{a}{100}}$ ۲) $\pm2^{\frac{a}{50}}$ ۳) $\pm2^{\frac{a}{25}}$ ۴) $\pm2^{\frac{a}{10}}$

۷۹. اگر $\frac{(\sqrt{\sqrt{3}+1})^{\frac{2}{3}}\times27^{\frac{1}{9}}\times(\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}}{(2\times324^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{8}}}$ برابر 6^a باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸۰. اگر $a^{\sqrt{2}}=16$ و $b^{\sqrt{2}}=81$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) $6^{2\sqrt{2}}$ ۴) $6^{4\sqrt{2}}$

۸۱. در یک آزمایشگاه نوعی باکتری کشت داده می‌شود که در هر ساعت وزن آن‌ها دوبرابر می‌شود. اگر در ساعت ۸ صبح وزن باکتری‌ها ۴ گرم باشد، در ساعت $'۹:۴۵$ وزن آن‌ها چند گرم می‌شود؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $4\sqrt[4]{4}$ ۲) $8\sqrt[4]{2}$ ۳) $8\sqrt[4]{4}$ ۴) $8\sqrt[4]{8}$

۸۲. معکوس عدد $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\sqrt{2}+1}(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$ کدام است؟

۱) $2^{1-\sqrt{2}}$ ۲) $2^{-(\sqrt{2}+1)}$ ۳) $2^{\sqrt{2}+1}$ ۴) $2^{\sqrt{2}-1}$

۸۳. مساحت کف راهروی مستطیل شکلی ۱۵ واحد مربع و طول آن $\sqrt{27}+\sqrt{12}$ واحد طول است. عرض کف راهرو کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{6}$

۸۴. حاصل عبارت $A=\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}+3}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) -3 ۲) $-2\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{7}$ ۴) $-2\sqrt{7}$

۸۵. در تساوی $\frac{A}{x-4}=\frac{3}{x-4}+\frac{2}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ عبارت A کدام است؟

۱) $3\sqrt{x}-1$ ۲) $3\sqrt{x}+1$ ۳) $3\sqrt{x}$ ۴) $3\sqrt{x}+2$

۸۶. اگر $n\in\mathbb{N}$ و $n>1$، حاصل عبارت $B=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{n-1}$ ۲) $\sqrt{n}-1$ ۳) $\sqrt{n}$ ۴) $\sqrt{n}+1$

۸۷. اگر گویا شدهٔ کسر $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}$ به‌صورت $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2)}{x}$ باشد x کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۱ ۳) ۲۵ ۴) ۲۳

۸۸. کسر $\frac{1}{\sqrt[5]{-2\sqrt[3]{4}}}$ را در چه عددی ضرب کنیم تا حاصل برابر -2 گردد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $2\sqrt[3]{4}$ ۳) $\sqrt[3]{16}$ ۴) $\sqrt[3]{4}$

$$\begin{cases}(-۳x+۳)^۵=۰\Rightarrow -۳x+۳=۰\Rightarrow x=۱\\ ۵x^۲-۱۲x+۴=۰\Rightarrow \frac{۱}{۵}(۵x-۲)(۵x-۱۰)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{۲}{۵}\\ x=۲\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$\times \; ۲۰$

x	$-\infty$		$\frac{۲}{۵}$		۱		۲		$+\infty$
$(-۳x+۳)^۵$		+		+	۰	−		−	
$۵x^۲-۱۲x+۴$		+	۰	−		−	۰	+	
A		+	ت ن	−	۰	+	ت ن	−	

تست: علامت عبارت $A=\frac{(x^۲+۳x-۴)^۷}{(x-۲)^{۲۰}(x-۳)^۵}$ در بازهٔ (a,b) مثبت است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینه ۴ ریشه‌های عوامل کسر را می‌یابیم:

$$(x^۲+۳x-۴)^۷=۰\Rightarrow x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=-۴\end{cases}$$

$$(x-۲)^{۲۰}=۰\Rightarrow x=۲$$

$$(x-۳)^۵=۰\Rightarrow x=۳$$

با توجه به این‌که توان‌های ۷ و ۵ به‌ترتیب در تعیین‌علامت $x^۲+۳x-۴$ و $x-۳$ تأثیری ندارند و علامت عبارت $(x-۲)^{۲۰}$ همواره نامنفی است، جدول تعیین‌علامت آن را رسم می‌کنیم:

عبارت در بازهٔ $(-۴,۱)$ مثبت است، بنابراین حداکثر مقدار $b-a$ برابر $۱-(-۴)=۵$ است.

x	$-\infty$		-۴		۱		۲		۳		$+\infty$
$(x^۲+۳x-۴)^۷$		+	۰	−	۰	+		+		+	
$(x-۲)^{۲۰}$		+		+		+	۰	+		+	
$(x-۳)^۵$		−		−		−		−	۰	+	
A		−	۰	+	۰	−	ت ن	−	ت ن	+	

یک گام فراتر: (تعیین‌علامت تستی)

عبارت‌هایی به‌صورت $(x-x_۰)^{زوج}$ و $|x-x_۰|$ را در روش تستی عبارات **بی‌تأثیر** و سایر عبارت‌های جبری را عبارات **اثرگذار** می‌نامیم.

برای استفاده از تعیین علامت تستی، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) عبارات را تا حد ممکن ساده می‌کنیم و ریشهٔ عبارات موجود را می‌یابیم.

۲) ریشه‌ها را به صورت صعودی در جدول تعیین‌علامت یک‌سطری می‌نویسیم.

۳) علامت جملات پرتوان عبارت‌های اثرگذار را تعیین می‌کنیم.

۴) علامت پیدا شده را در اولین ستون از سمت راست جدول تعیین‌علامت می‌گذاریم.

۵) از سمت راست به چپ برمی‌گردیم در عبور از هر ستون، اگر ریشه، مربوط به عبارت‌های بی‌تأثیر باشد، علامت عوض نمی‌شود و اگر ریشه، مربوط به عبارت‌های اثرگذار باشد، علامت عوض می‌شود.

مثال: عبارت $A=\frac{(x^۲+x-۲)^۴(x^۲-۹)^۷}{(x-۱)^۸(x+۵)^۳|x-۴|}$ را به روش تستی تعیین‌علامت کنید.

پاسخ ۱) عبارت را ساده و ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$A=\frac{(x+۲)^۴(x-۱)^۴(x-۳)^۷(x+۳)^۷}{(x-۱)^۸(x+۵)^۳|x-۴|}=\frac{(x+۲)^۴(x-۳)^۷(x+۳)^۷}{(x-۱)^۴(x+۵)^۳|x-۴|}$$

عبارت‌های $(x+۲)^۴$، $(x-۱)^۴$ و $|x-۴|$ بی‌تأثیر و عبارت‌های $(x+۳)^۷$، $(x-۳)^۷$ و $(x+۵)^۳$ تأثیرگذارند. ریشه‌های این عبارت‌ها به‌ترتیب زیر هستند:
$x=-۵,-۳,-۲,۱,۳,۴$

۲) ریشه‌ها را در جدول قرار می‌دهیم. برای ریشه‌های صورت، صفر و برای ریشه‌های مخرج، تعریف‌نشده (ت‌ن) می‌گذاریم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		-۲		۱		۳		۴		$+\infty$
A			ت ن		۰		۰		ت ن		۰		ت ن		

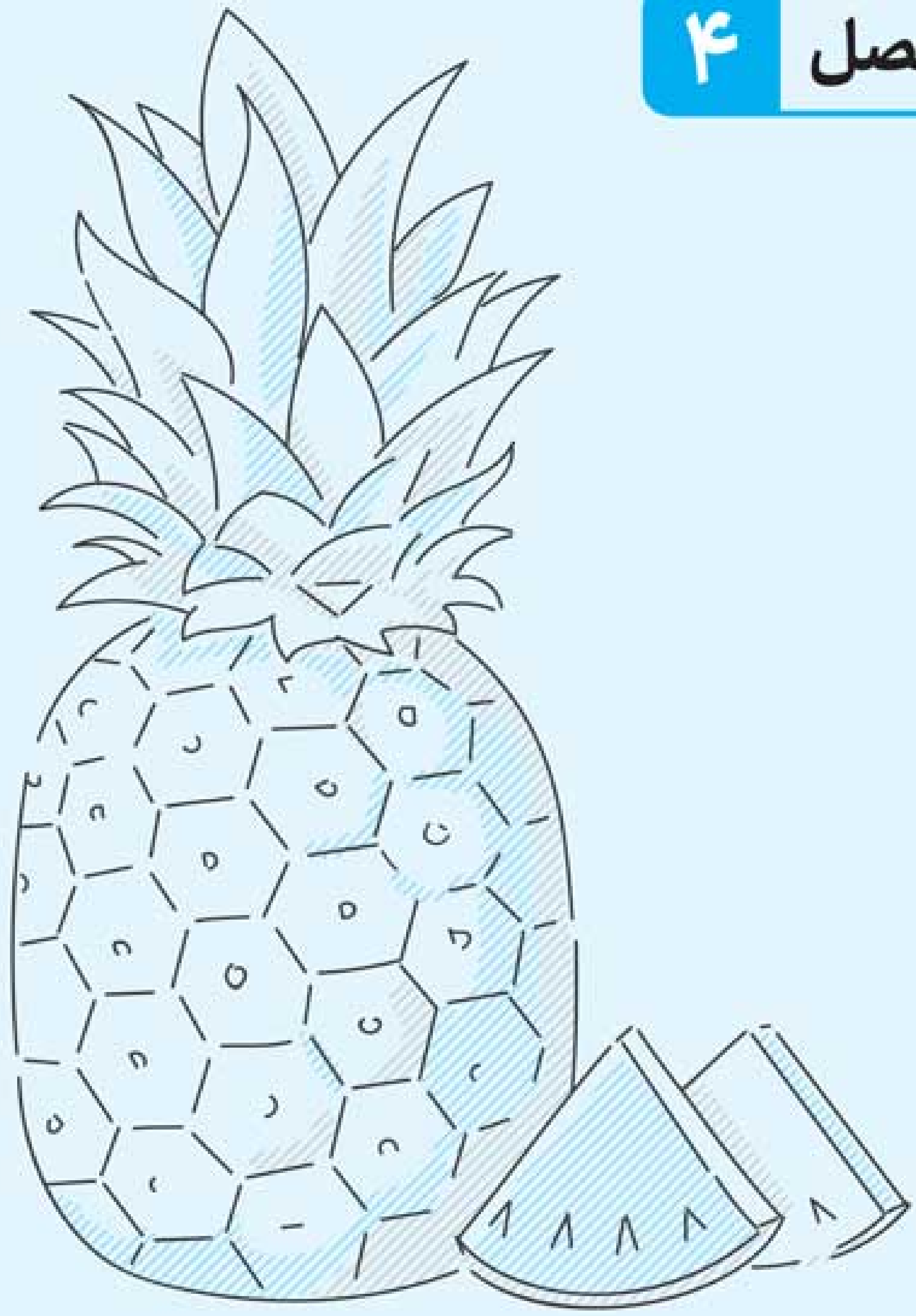
۳) علامت **جمله‌های پرتوان** عبارت‌های اثرگذار را تعیین می‌کنیم:

علامت این جمله، مثبت است. $\frac{x^۷\times x^۷}{x^۳}=+x^{۱۱}$ = جملهٔ پرتوان عبارات اثرگذار

۴) جدول تعیین‌علامت تستی را رسم می‌کنیم و علامت مثبت را (که در قسمت قبل یافتیم) در اولین ستون از سمت راست جدول می‌گذاریم:

x	$-\infty$		-۵		-۳		-۲		۱		۳		۴		$+\infty$
A			ت ن		۰		۰		ت ن		۰		ت ن	+	

فصل ۴



الگو و دنباله

این فصل با بررسی الگوها و نحوهٔ محاسبهٔ جملهٔ n اُم آن‌ها آغاز می‌شود، در ادامه دنبالهٔ حسابی و مجموع جملات آن مطرح می‌شود و در انتها به دنبالهٔ هندسی و مجموع آن ختم می‌شود.

در کتاب‌های نظام جدید به مبحث الگوها توجه بیشتری شده است؛ به همین دلیل، ما نیز در این کتاب توجه ویژه‌ای به این مبحث داریم.

پس حاصل عبارت به‌صورت مقابل درمی‌آید:

$$\underbrace{a_2\times \underbrace{a_4\times \underbrace{a_6\times a_{10}}_{(a_8)^2}\times a_{12}}_{(a_8)^2}\times a_{14}}_{(a_8)^2}=(a_8)^6=(2\sqrt{3})^6=64\times 27=1728$$

نکته: قدرنسبت دنباله‌ای که پس از درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b ایجاد می‌شود عبارت است از: $q^{m+1}=\frac{b}{a}$

داوطلبان فرمول‌گریز می‌تونن این فرمول رو حفظ نکنن و به‌جای آن $m+2$ جمله از یک دنباله هندسی با جملات اول و آخر a و b بسازن.

تست: بین اعداد ۶ و ۴۸ دو عدد چنان قرار داده‌ایم به‌طوری که چهار عدد حاصل، تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. مجموع این دو واسطهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰

پاسخ گزینه ۲ روش اول به کمک فرمول درج m واسطهٔ هندسی بین a و b مقدار q را محاسبه می‌کنیم:

$$q^{m+1}=\frac{b}{a}\xrightarrow[a=6]{b=48}q^{2+1}=\frac{48}{6}\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$$

$$6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48$$

با توجه به $q=2$ واسطه‌ها را می‌یابیم:

مجموع دو واسطهٔ هندسی درج شده $12+24=36$ است.

روش دوم (مخصوص فرمول‌گریزان)

این دنباله، ۴ جمله دارد که جملهٔ اول آن ۶ و جملهٔ چهارم آن ۴۸ است.

$$\begin{cases}a_4=a_1q^3=48\\ a_1=6\end{cases}\Rightarrow a_1q^3=48\Rightarrow 6q^3=48\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$$

به کمک جملهٔ اول و قدرنسبت، جمله‌های دوم و سوم به ترتیب ۱۲ و ۲۴ هستند که مجموعشان برابر ۳۶ است.

نکته: ۱) اگر رابطه‌ای در مورد تعداد **فردی** از جملات یک دنبالهٔ هندسی به ما بدهند، بهتر است جملهٔ وسط را a و بقیهٔ جمله‌ها را به کمک ضرب و تقسیم بر q بسازیم. مانند aq , a , $\frac{a}{q}$.

۲) اگر جمله‌های دنبالهٔ هندسی را در عددی ثابت و غیرصفر ضرب کنیم، دنبالهٔ هندسی جدیدی با قدرنسبت دنبالهٔ قبلی ساخته می‌شود.

۳) اگر جمله‌های یک دنباله هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q را به توان k برسانیم، دنبالهٔ هندسی جدیدی به‌وجود می‌آید که جملهٔ اول آن a_1^k و قدرنسبت آن q^k است.

یک گام فراتر: اگر a_m ، a_k و a_n از یک دنبالهٔ حسابی، خود تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $q=\frac{k-m}{m-n}$ است. $(k>m>n)$

تست: اگر جملات پنجم، هفتم و یازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

پاسخ گزینه ۴ روش اول به کمک نکتهٔ گفته شده داریم:

$$q=\frac{k-m}{m-n}=\frac{11-7}{7-5}=\frac{4}{2}=2$$

روش دوم (مخصوص فرمول‌گریزان) جملات $a_5=a_1+4d$ ، $a_7=a_1+6d$ و $a_{11}=a_1+10d$ جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند. پس a_7 واسطهٔ هندسی a_5 و a_{11} است.

$$(a_7)^2=a_5\times a_{11}\Rightarrow (a_1+6d)^2=(a_1+4d)(a_1+10d)\Rightarrow a_1^2+12a_1d+36d^2=a_1^2+14a_1d+40d^2$$

$$\Rightarrow 2a_1d+4d^2=0\Rightarrow 2d(a_1+2d)=0\Rightarrow a_1=-2d$$

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را محاسبه می‌کنیم:

$$q=\frac{a_7}{a_5}=\frac{a_1+6d}{a_1+4d}=\frac{-2d+6d}{-2d+4d}=\frac{4d}{2d}=2$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

برای یافتن مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ اول a_1 می‌توان از فرمول روبه‌رو استفاده نمود:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

با ساده‌کردن فرمول بالا می‌توان گفت: (با فرض این‌که a_n جملهٔ nاُم باشد.)

$$S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1-(a_1q^{n-1})q}{1-q}=\frac{a_1-a_n\times q}{1-q}$$

تست: حاصل $\frac{2^1+2^2+2^3+\dots+2^{10}}{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\dots+2^{-10}}$ کدام است؟

۱) ۴۰۹۶ ۲) ۲۰۴۸ ۳) ۵۱۲ ۴) ۱۰۲۴

پاسخ گزینه ۲ دنبالهٔ $2^1 , 2^2 , 2^3 , \dots , 2^{10}$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=2$ است و مجموع ده جملهٔ آن برابر می‌شود با:

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{2(1-2^{10})}{1-2}=2\times 1024=2048$$

تست: زاویهٔ بین دو خط $y=2x-1$ و $y=-3x-5$ کدام است؟

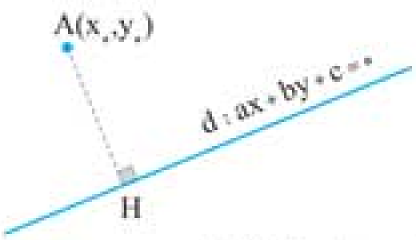
۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

پاسخ (گزینه ۲) شیب‌های دو خط، $m=2$ و $m'=-3$ هستند، پس:
$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{2-(-3)}{1+2\times(-3)}\right|=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

فاصلهٔ نقطه از خط

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط d به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

مُهِم
$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



تذکر: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط افقی $y=k$ برابر $AH=|k-y_0|$ و فاصلهٔ آن از خط قائم $x=c$ برابر $AH=|c-x_0|$ است.

توجه: برای یافتن کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط خط $ax+by+c=0$ از نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:
$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

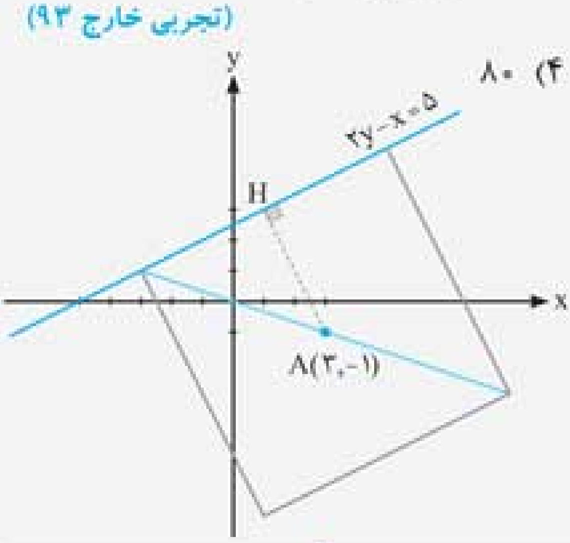
تست: نقطهٔ $(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $2y-x=5$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

پاسخ (گزینه ۴) **(این موضوع خارج از مباحث مطرح‌شده در کنکور رشتهٔ ریاضی در دورهٔ آموزشی قبلی بود به همین دلیل از سؤالات کنکور رشتهٔ تجربی استفاده کرده‌ایم.)**

وسط قطر مربع، مرکز مربع است. فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,-1)$ را از خط $x-2y+5=0$ محاسبه می‌کنیم:
$$AH=\frac{|x_A-2y_A+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|3-2(-1)+5|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

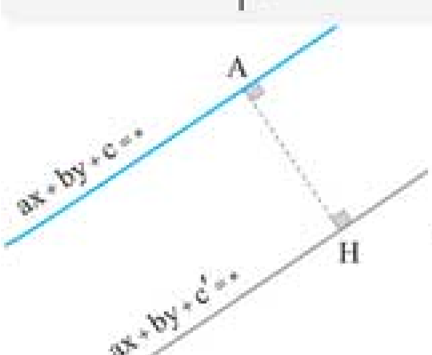
مطابق شکل این فاصله، نصف طول ضلع مربع است، بنابراین طول ضلع مربع $4\sqrt{5}$ و مساحت مربع $S=(4\sqrt{5})^2=80$ است.



فاصلهٔ دو خط موازی

فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با:

مُهِم
$$AH=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



تست: دو خط در صفحهٔ مختصات از خط $y=x$ به فاصلهٔ ۲ واحدی قرار دارند. یکی از آن‌ها محور طول‌ها را در قسمت مثبت آن قطع می‌کند. طول محل برخورد آن کدام است؟

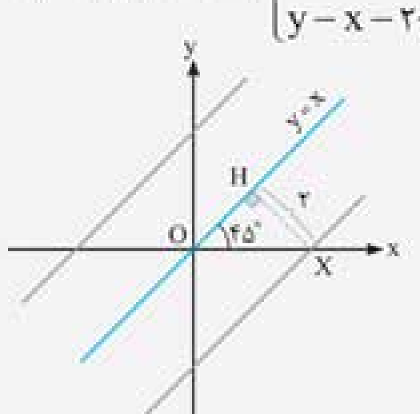
۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ (گزینه ۳) **روش اول** فرض کنیم معادلهٔ دو خطی که از خط $y-x=0$ به فاصلهٔ ۲ واحدی قرار دارند به‌صورت $y-x+k=0$ باشند، پس:
$$\begin{cases}y-x=0\\ y-x+k=0\end{cases}\xrightarrow{a=-1,b=1,\ c=0,c'=k}d=\frac{|0-k|}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|-k|}{\sqrt{2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow k=\pm2\sqrt{2}$$

معادلهٔ خط‌ها را بازنویسی می‌کنیم:
$$y-x+k=0\Rightarrow\begin{cases}y-x+2\sqrt{2}=0\xrightarrow{y=0}x=2\sqrt{2}\\ y-x-2\sqrt{2}=0\xrightarrow{y=0}x=-2\sqrt{2}\end{cases}$$

با توجه به مثبت بودن طول محل برخورد، $x=2\sqrt{2}$ قابل قبول است.

روش دوم



استراتژی حل: شیب خط $y=x$ برابر یک است، پس زاویه‌ای که خط با محور طول‌ها می‌سازد 45° است.

بنابراین مثلث OHX متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

طبق قاعدهٔ فیثاغورس داریم:
$$OH^2+HX^2=OX^2\Rightarrow2^2+2^2=OX^2\Rightarrow OX=2\sqrt{2}$$

معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

معادلات قدرمطلقی

جواب معادلهٔ $|f(x)|=|g(x)|$، همان جواب‌های دو معادلهٔ $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادله که شامل عبارت قدرمطلق هستند، **معادلات قدرمطلقی** می‌گویند.

مثال: معادلهٔ $|x-۲|=|۱-۳x|$ را حل کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ اگر دو عبارت قدرمطلقی با هم برابر باشند یا مقادیر داخل آن‌ها با هم برابرند یا قرینهٔ یکدیگر هستند.

$$|۱-۳x|=|x-۲| \Rightarrow \begin{cases} ۱-۳x=x-۲ \Rightarrow ۴x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۴} \\ ۱-۳x=-(x-۲) \Rightarrow ۲x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ $۲x-\frac{x}{|x|}=۳$ را حل کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ معادله را به کمک تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق حل می‌کنیم:

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
x	−	۰	+

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x-\frac{x}{+x}=۳ & ; \ x>۰ \\ ۲x-\frac{x}{-x}=۳ & ; \ x<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=۳ & ; \ x>۰ \\ ۲x+۱=۳ & ; \ x<۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ & ; \ x>۰ \\ x=۱ & ; \ x<۰ \end{cases}$$

تنها ریشهٔ قابل قبول معادله $x=۲$ است.

تست: معادلهٔ $||۳x-۱|-۴|-۶=۰$ چند ریشه دارد؟

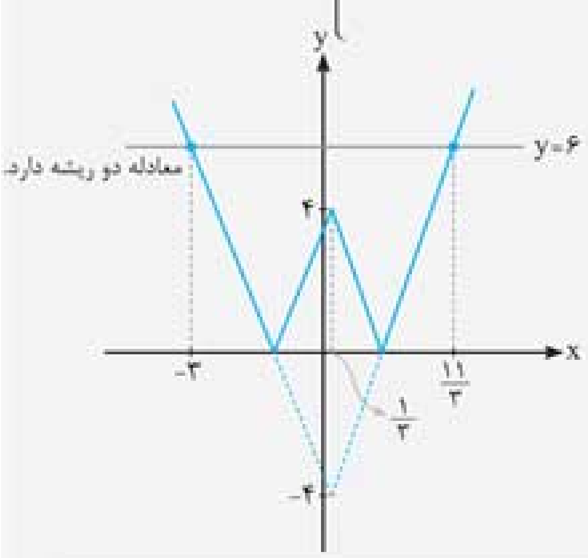
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ گزینه ۳ **روش اول** -۶ را به سمت راست معادله انتقال می‌دهیم، سپس از ویژگی‌های قدرمطلق استفاده می‌کنیم:

$$||۳x-۱|-۴|=۶ \Rightarrow \begin{cases} |۳x-۱|-۴=-۶ \Rightarrow |۳x-۱|=-۲ \quad \text{غیرممکن} \\ |۳x-۱|-۴=۶ \Rightarrow |۳x-۱|=۱۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۱=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۱}{۳} \\ ۳x-۱=-۱۰ \Rightarrow x=-۳ \end{cases} \end{cases}$$

روش دوم به کمک رسم تابع $f(x)=||۳x-۱|-۴|$ و خط $y=۶$ تعداد نقاط برخورد آن‌ها (جواب معادله) را می‌یابیم.

طول نقاط برخورد، همان ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=||۳x-۱|-۴|$ هستند.



تست: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۲|x|+|x-۱|=۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ گزینه ۲ عبارات داخل قدرمطلق را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$ ... ۰	۰ ... ۱	۱ ... $+\infty$
x	−	+	+
x−۱	−	−	+
	$-۲x-x+۱=۳$	$۲x-x+۱=۳$	$۲x+x-۱=۳$
	$x=-\frac{۲}{۳}\in(-\infty,۰)$	$x=۲\notin[۰,۱]$	$x=\frac{۴}{۳}\in(۱,+\infty)$
	قابل قبول	غیر قابل قبول	قابل قبول

این معادله ۲ ریشهٔ قابل قبول دارد که $x=\frac{۴}{۳}$ و $x=-\frac{۲}{۳}$ هستند. مجموع ریشه‌ها برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

نامعادلات قدرمطلقی

نامعادلات قدرمطلقی با استفاده از برخی از ویژگی‌هایشان، به خصوص دو ویژگی زیر راحت‌تر حل می‌شوند $(k \in \mathbb{R}^{\geq ۰})$:
(منظور از $\mathbb{R}^{\geq ۰}$، صفر و تمام اعداد حقیقی مثبت است.)

مُهِم

$$\begin{cases} |u| \leq k \Leftrightarrow -k \leq u \leq k \\ |u| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq k \\ u \leq -k \end{cases} \end{cases}$$

مثال: مجموعه جواب $|\frac{x}{۳}-۱| < \frac{۲}{۳}$ را روی محور طول‌ها نشان دهید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ بهتر است با استفاده از رابطهٔ $|x-y| = |y-x|$ نامعادله را به‌شکل $|\frac{x}{۳}-۱| < \frac{۲}{۳}$ در بیاوریم تا ضریب x مثبت شود.

$$|\frac{x}{۳}-۱| < \frac{۲}{۳} \Rightarrow -\frac{۲}{۳} < \frac{x}{۳}-۱ < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{x}{۳} < \frac{۵}{۳} \Rightarrow ۱ < x < ۵$$

تست: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(|x-۲|-۳)(|x-۲|+۱) < ۰$ بازهٔ (a,b) است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ (گزینه ۴) عبارت $|x-۲|+۱$ همواره مثبت است، بنابراین در نامعادله تأثیری ندارد.

$$|x-۲|-۳ < ۰ \Rightarrow |x-۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < x-۲ < ۳ \Rightarrow -۱ < x < ۵ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۵ \end{cases} \Rightarrow b-a = ۶$$

یافتن نامعادلهٔ قدرمطلقی از روی بازه

برای تبدیل بازهٔ (a,b) به نامعادلهٔ قدرمطلقی باید:

(۱) وسط بازهٔ (a,b) را بیابیم: $\text{وسط بازه} = \frac{a+b}{۲}$

(۲) نصف طول بازهٔ (a,b) را بیابیم: $\text{نصف طول بازه} = \frac{b-a}{۲}$

(۳) نامعادله را بنویسیم: $|x-\frac{a+b}{۲}| < \frac{b-a}{۲}$

مثال: بازهٔ $(-۲,۳)$ را به صورت نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید.

پاسخ (۱) وسط بازهٔ $(-۲,۳)$ را می‌یابیم: $\text{وسط بازه} = \frac{-۲+۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$

(۲) نصف طول بازهٔ $(-۲,۳)$ را می‌یابیم: $\text{نصف طول بازه} = \frac{۳-(-۲)}{۲} = \frac{۵}{۲}$

(۳) نامعادله را می‌نویسیم: $|x-\frac{۱}{۲}| < \frac{۵}{۲} \xrightarrow{\times ۲} |۲x-۱| < ۵$

تذکر:

(۱) اگر بازه، بسته باشد، نامساوی به‌صورت کوچک‌تر یا مساوی درمی‌آید. $[a,b] \Rightarrow |x-\frac{a+b}{۲}| \leq \frac{b-a}{۲}$

(۲) برای تبدیل مجموعهٔ $(-\infty,a) \cup (b,+\infty)$ یا $\mathbb{R}-[a,b]$ به نامعادلهٔ قدرمطلقی، وسط و نصف طول بازه را می‌یابیم و نامعادله را به‌صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $|x-\frac{a+b}{۲}| > \frac{b-a}{۲}$

تست: اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|ax+b| > ۳$ به‌صورت $\mathbb{R}-[-۲,۱]$ باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ (گزینه ۳) وسط بازه و نصف طول بازه $[-۲,۱]$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \text{وسط بازه} = \frac{-۲+۱}{۲} = -\frac{۱}{۲} \\ \text{نصف طول بازه} = \frac{۱-(-۲)}{۲} = \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow |x-(-\frac{۱}{۲})| > \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} |۲x+۱| > ۳$$

در نتیجه $|ax+b| = |۲x+۱|$، پس:

$$\begin{cases} ax+b = ۲x+۱ \Rightarrow a=۲ \,,\, b=۱ \Rightarrow a+b=۳ \\ ax+b = -(۲x+۱) \Rightarrow a=-۲ \,,\, b=-۱ \Rightarrow a+b=-۳ \end{cases}$$

کدام بازه مجموعه جواب نامعادلهٔ $|\frac{x+۱}{۲x-۳}| > ۲$ را نشان می‌دهد؟

۱) $(\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۳})$ ۲) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۳) $(۱,\frac{۷}{۳})$ ۴) $(۱,\frac{۷}{۳})-\{\frac{۳}{۲}\}$

مفهوم جزء صحیح یا براکت

۵

اگر از شما بپرسند که چند سالتونه؟ در اکثر موارد، ما بخش صحیح سنمان را مطرح می‌کنیم. برای نمونه کسی که سنش ۱۷ سال و هشت ماه باشد، می‌گوید ۱۷ ساله هستم. در واقع این کار را در ریاضی توسط جزء صحیح (براکت) انجام می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیشتر از x را **براکت یا جزء صحیح** آن می‌نامیم و به‌صورت $[x]$ نشان می‌دهیم. برای نمونه:

$$[18/3]=18\ ,\ [4/99]=4\ ,\ [-7/1]=-8\ ,\ [-\sqrt{3}]=-2\ ,\ [-\pi]=-4$$

به بیان ریاضی داریم:

n عددی صحیح و $[A]=n$ است اگر و تنها اگر A عددی بزرگ‌تر یا مساوی n و کمتر از $n+1$ باشد: $[A]=n \Leftrightarrow n\le A<n+1$

تست: مجموعه جواب معادلهٔ $[\frac{3x-1}{5}]-2=0$ برابر است با:

۱) $[\frac{10}{3},5)$ ۲) $[\frac{11}{3},\frac{17}{3})$ ۳) $[\frac{11}{3},\frac{16}{3})$ ۴) $[4,5)$

پاسخ گزینه ۳ در تساوی داده‌شده عدد ۲ را به سمت راست انتقال می‌دهیم در نتیجه معادله به‌صورت $[\frac{3x-1}{5}]=2$ تبدیل می‌شود لذا عبارت درون براکت باید بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و کمتر از ۳ باشد، پس:

$$2\le\frac{3x-1}{5}<3 \xrightarrow{\times 5} 10\le 3x-1<15 \xrightarrow[\div 3]{+1} \frac{11}{3}\le x<\frac{16}{3}$$

مقدار عبارت $[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{25}]$ برابر است با:

۱) ۷۳ ۲) ۷۴ ۳) ۷۵ ۴) ۷۶

پاسخ گزینه ۲ می‌دانیم که $\sqrt{2}\simeq 1/4$ و $\sqrt{3}\simeq 1/7$، در نتیجه: $[\sqrt{2}]=[\sqrt{3}]=1$

برای محاسبهٔ بقیهٔ عبارت‌ها به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$4\le x<9 \xrightarrow{\sqrt{}} 2\le\sqrt{x}<3 \Rightarrow [\sqrt{x}]=2 \Rightarrow [\sqrt{4}]=[\sqrt{5}]=\cdots=[\sqrt{8}]=2$$

$$9\le x<16 \xrightarrow{\sqrt{}} 3\le\sqrt{x}<4 \Rightarrow [\sqrt{x}]=3 \Rightarrow [\sqrt{9}]=[\sqrt{10}]=\cdots=[\sqrt{15}]=3$$

$$16\le x<25 \xrightarrow{\sqrt{}} 4\le\sqrt{x}<5 \Rightarrow [\sqrt{x}]=4 \Rightarrow [\sqrt{16}]=[\sqrt{17}]=\cdots=[\sqrt{24}]=4$$

$$[\sqrt{25}]=5$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{25}]=1+1+\underset{\underset{[\sqrt{4}]}{\downarrow}}{2}+\cdots+\underset{\underset{[\sqrt{8}]}{\downarrow}}{2}+\underset{\underset{[\sqrt{9}]}{\downarrow}}{3}+\cdots+\underset{\underset{[\sqrt{15}]}{\downarrow}}{3}+\underset{\underset{[\sqrt{16}]}{\downarrow}}{4}+\cdots+\underset{\underset{[\sqrt{24}]}{\downarrow}}{4}+\underset{\underset{[\sqrt{25}]}{\downarrow}}{5}$$

$$=2+(8-4+1)\times 2+(15-9+1)\times 3+(24-16+1)\times 4+5=2+10+21+36+5=74$$

هرگاه $x^2-3x+2<0$ باشد، در این‌صورت $[x^2]$ چند مقداری است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ گزینه ۲ ابتدا با حل نامعادلهٔ داده‌شده حدود تغییرات x را می‌یابیم و سپس عبارت داخل جزء صحیح (x^2) را می‌سازیم:

$$x^2-3x+2<0 \Rightarrow (x-1)(x-2)<0 \Rightarrow 1<x<2 \xrightarrow{\text{توان } 2} 1<x^2<4$$

از آن‌جایی که تغییرات (x^2) بین دو عدد صحیح متوالی نیست برای محاسبهٔ $[x^2]$ داریم:

$$\begin{cases}1<x^2<2 \Rightarrow [x^2]=1\\ 2\le x^2<3 \Rightarrow [x^2]=2\\ 3\le x^2<4 \Rightarrow [x^2]=3\end{cases}$$

بنابراین $[x^2]$، سه مقداری است.

مجموعه جواب معادلهٔ $[x]^2-[x]=12$ به‌صورت $[a,b)\cup[c,d)$ است. حاصل $a+b+c+d$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ گزینه ۴ معادلهٔ داده‌شده، یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است که مجهول آن $[x]$ بوده و با استفاده از اتحاد جمله مشترک به‌صورت زیر تجزیه و حل می‌شود:

$$[x]^2-[x]-12=0 \Rightarrow ([x]-4)([x]+3)=0 \Rightarrow \begin{cases}[x]=4 \Rightarrow 4\le x<5\\ [x]=-3 \Rightarrow -3\le x<-2\end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب برابر $[-3,-2)\cup[4,5)$ است:

$$a+b+c+d=(-3)+(-2)+4+5=4$$

تست: اگر $[\frac{x}{۳}]-[-\frac{x}{۳}]=۷$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای $[\frac{x}{۲}]$ برابر کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ گزینه ۲ برای ساده‌کردن $[\frac{x}{۳}]$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) $\frac{x}{۳}\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ معادله: $[\frac{x}{۳}]-[-\frac{x}{۳}]=۷ \Rightarrow \frac{x}{۳}+\frac{x}{۳}=۷ \xrightarrow{\times ۳} x+x=۲۱ \Rightarrow ۲x=۲۱ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۲}=۱۰/۵$

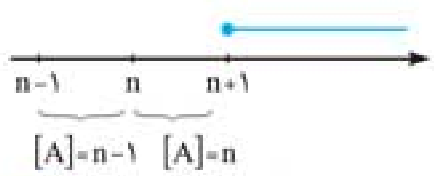
این جواب غیرقابل قبول است، زیرا در شرط اولیهٔ $\frac{x}{۳}\in\mathbb{Z}$ صدق نمی‌کند.

(۲) $\frac{x}{۳}\notin\mathbb{Z} \Rightarrow$ معادله: $[\frac{x}{۳}]-[-\frac{x}{۳}]=۷ \Rightarrow [\frac{x}{۳}]-(-[\frac{x}{۳}]-۱)=۷$

$\Rightarrow ۲[\frac{x}{۳}]=۶ \xrightarrow{\div ۲} [\frac{x}{۳}]=۳ \xrightarrow{\frac{x}{۳}\notin\mathbb{Z}} ۳<\frac{x}{۳}<۴$

$\xrightarrow{\times ۳} ۹<x<۱۲ \xrightarrow{\div ۲} ۴/۵<\frac{x}{۲}<۶ \Rightarrow [\frac{x}{۲}]=۴$ یا $۵ \Rightarrow$ مجموع مقادیر ممکن برای $[\frac{x}{۲}]$ برابر ۹ است.

ویژگی (۳) برای حل نامعادلات براکتی از روابط زیر استفاده می‌کنیم (هیچ‌کدام از این نامعادلات نیاز به حفظ کردن ندارند و کافی است آن‌ها را به‌صورت هندسی تجزیه و تحلیل کنیم).



(۱) $[A]>n \xleftrightarrow{n\in\mathbb{Z}} A\geq n+۱$

برای نمونه مجموعه جواب نامعادلهٔ $[x]>۴$، xهای بزرگ‌تر مساوی ۵ $(x\geq ۵)$ است، زیرا براکت تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۵، از ۴ بزرگ‌تر است.

(۲) $[A]\geq n \xleftrightarrow{n\in\mathbb{Z}} A\geq n$

(۳) $[A]<n \xleftrightarrow{n\in\mathbb{Z}} A<n$

(۴) $[A]\leq n \xleftrightarrow{n\in\mathbb{Z}} A<n+۱$

تست: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x^۲+۳)([x]-۴)\geq ۰$ کدام است؟

۱) $[۴,+\infty)$ ۲) $(۴,+\infty)$ ۳) $[۵,+\infty)$ ۴) $[۳,+\infty)$

پاسخ گزینه ۱ با توجه به این‌که عبارت $x^۲+۳$ همواره مثبت است، در نتیجه برای این‌که نامساوی داده‌شده برقرار شود، باید عبارت $[x]-۴$ نیز مثبت یا صفر شود، یعنی:

$[x]-۴\geq ۰ \Rightarrow [x]\geq ۴ \Rightarrow x\geq ۴ \Rightarrow S=[۴,+\infty)$

مجموعه جواب نامعادلهٔ $[\frac{۳x+۲}{۴}]\geq\frac{۵}{۲}$ برابر است با:

۱) $[۳,+\infty)$ ۲) $[\frac{۱۰}{۳},+\infty)$ ۳) $[۴,+\infty)$ ۴) $[\frac{۱۱}{۳},+\infty)$

پاسخ گزینه ۲ جزءصحیح فقط با اعداد صحیح سروکار دارد درواقع می‌خواهیم اعداد صحیحی را بیابیم که بزرگ‌تر یا مساوی ۲/۵ باشند، در نتیجه اعداد صحیح ۳ به بعد قابل قبول هستند و نامعادله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$[\frac{۳x+۲}{۴}]\geq ۳ \Rightarrow \frac{۳x+۲}{۴}\geq ۳ \Rightarrow ۳x+۲\geq ۱۲ \Rightarrow ۳x\geq ۱۰ \Rightarrow x\geq\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow S=[\frac{۱۰}{۳},+\infty)$

ویژگی (۴) جزء اعشاری یا بخش اعشاری اعداد حقیقی: برای هر عدد حقیقی x، فاصلهٔ x از جزءصحیحش را **بخش اعشاری** آن می‌نامیم و به‌صورت $P(x)$ یا (x) نشان می‌دهیم. در نتیجه: $P(x)=(x)=x-[x]$. برای نمونه داریم:

$P(۷/۲)=(۷/۲)=۷/۲-[۷/۲]=۷/۲-۷=۰/۲$

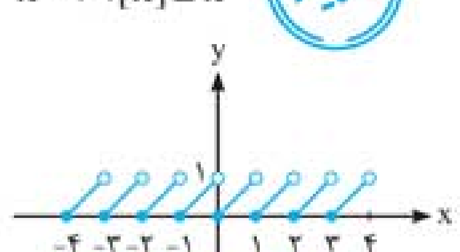
$P(-۹/۴)=(-۹/۴)=-۹/۴-[-۹/۴]=-۹/۴+۱۰=۰/۶$

مُهِم

بخش اعشاری هر عدد حقیقی همواره عددی بین صفر و یک است، یعنی: $۰\leq x-[x]<۱$

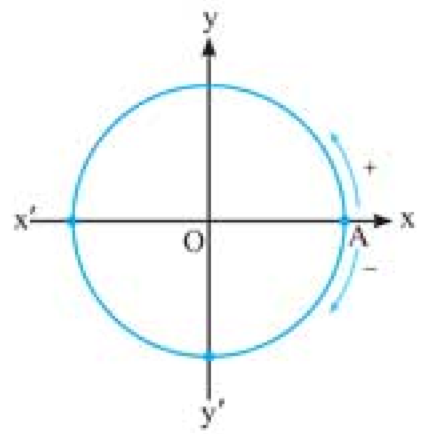
از این نامساوی می‌توان نتیجه گرفت که: $x-۱<[x]\leq x$

نمودار تابع $y=x-[x]$ را می‌توان به‌صورت زیر رسم کرد:



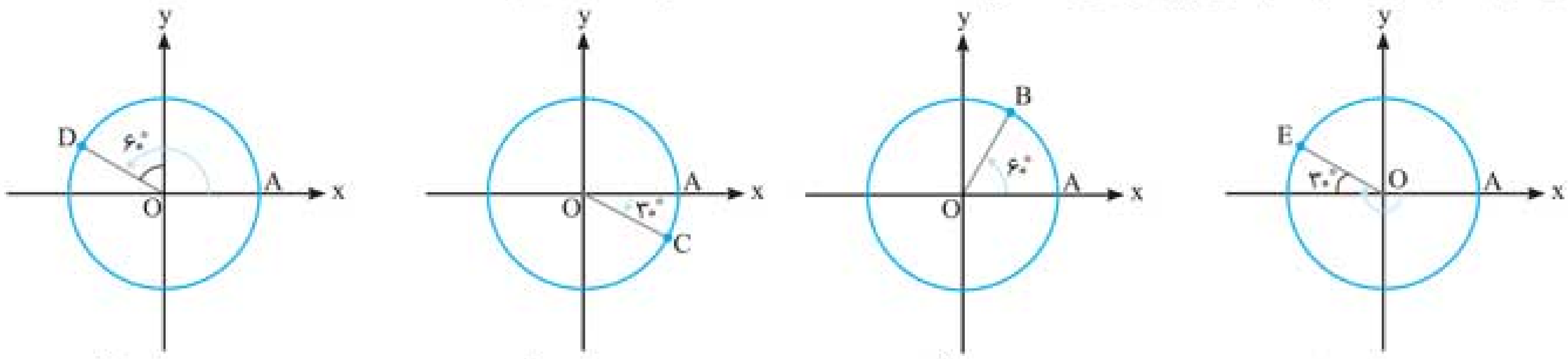
نکته: از نامساوی $۰\leq A-[A]<۱$، معمولاً در محاسبهٔ برد توابع براکتی که می‌توان چنین عبارت‌هایی را از درون ضابطهٔ آن‌ها استخراج کرد، استفاده می‌کنیم.

دایرهٔ مثلثاتی



یادآوری: دایرهٔ مثلثاتی دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، **جهت مثلثاتی** می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است. در شکل زیر نقطهٔ A، نقطهٔ شروع حرکت برای نمایش زوایا بر روی دایره است.

برای نمونه، در هر یک از شکل‌های زیر، زوایای مثلثاتی 60°، -30°، 150°، -210° و 330° نمایش داده شده‌اند:



$A\hat{O}D = 150^\circ$ $A\hat{O}C = -30^\circ$ $A\hat{O}B = 60^\circ$ $A\hat{O}E = -210^\circ$

نواحی در دایره مثلثاتی

در دایرهٔ مثلثاتی زاویهٔ بین 0° تا 90° را ربع اول یا ناحیهٔ اول، 90° تا 180° را ربع دوم یا ناحیهٔ دوم، 180° تا 270° را ربع سوم ناحیهٔ سوم و 270° تا 360° را ربع چهارم ناحیهٔ چهارم می‌نامیم.

زوایای 0°، 90°، 180°، 270° و 360° در هیچ‌کدام از ربع‌ها قرار ندارند و نقاط مرزی هستند.

تست: از ساعت ۲ تا ۴، عقربهٔ دقیقه‌شمار چند درجه می‌چرخد؟

۱) -60° ۲) -120° ۳) -360° ۴) -720°

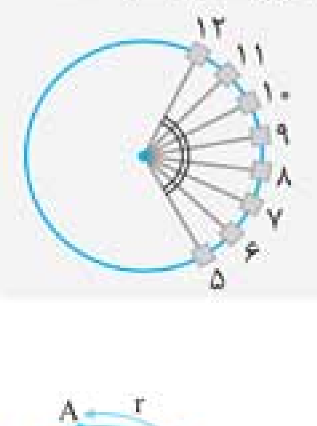
پاسخ گزینه ۴ می‌دانیم که در هر یک ساعت، عقربهٔ دقیقه‌شمار یک دور کامل در جهت منفی مثلثاتی می‌چرخد، در نتیجه از ساعت ۲ تا ۴ عقربهٔ دقیقه‌شمار دو دور کامل در جهت منفی مثلثاتی چرخیده است. بنابراین زاویه $-2\times 360^\circ = -720^\circ$ ایجاد می‌شود.

درجه

اگر محیط یک دایرهٔ دلخواه را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک **درجه** می‌نامیم. به بیان دیگر، یک درجه برابر $\frac{1}{360}$ محیط یک دایره است. یک درجه را به صورت 1° نمایش می‌دهیم.

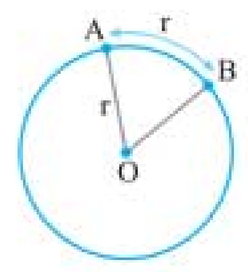
تست: چرخ و فلکی دارای ۱۸ کابین است که با فاصله‌های مساوی از هم قرار گرفته‌اند. زاویهٔ بین کابین‌های شماره پنجم و دوازدهم چقدر است؟

۱) 140° ۲) 150° ۳) 180° ۴) 210°



پاسخ گزینه ۱ کل محیط دایره برابر ۳۶۰ درجه است و چون فاصلهٔ بین هر دو کابین با هم برابر است در نتیجه زاویهٔ بین هر دو کابین متوالی $20 = \frac{360}{18}$ درجه می‌شود. بین دو کابین پنجم و دوازدهم، ۷ زاویه مرکزی وجود دارد. پس زاویه بین آن‌ها برابر $7\times 20^\circ = 140^\circ$ است.

رادیان

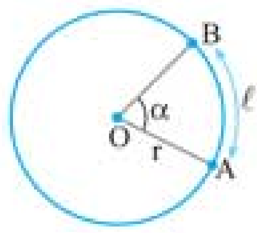


در هر دایرهٔ دلخواه به شعاع r، اگر طول کمان AB برابر شعاع دایره یعنی r باشد اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن را ۱ رادیان می‌نامیم و به صورت 1rad نشان می‌دهیم.

یک رادیان:

$$\widehat{AB} = r \Rightarrow A\hat{O}B = 1\text{rad}$$: طول یا اندازهٔ کمان AB

محاسبهٔ اندازهٔ زاویه مرکزی برحسب رادیان

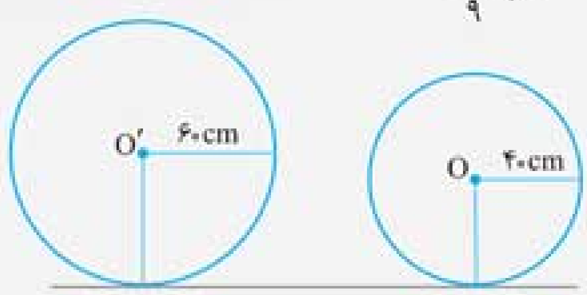


با توجه به تعریف رادیان، اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برحسب رادیان برابر است با نسبت طول کمان روبه‌رو به آن زاویه به شعاع دایره. یعنی:

مُهِم $= \dfrac{\text{اندازه یا طول کمان روبه‌رو به زاویه } (\ell)\alpha}{\text{شعاع دایره } (r)}$ اندازهٔ یک زاویه مانند α برحسب رادیان $\Rightarrow \alpha = \dfrac{\ell}{r}$

تست: در یک تراکتور، شعاع چرخ جلو ۴۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ عقب ۶۰ سانتی‌متر است. اگر چرخ جلو $\frac{\pi}{۶}$ رادیان بچرخد میزان چرخش چرخ عقب برحسب رادیان برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۹}$



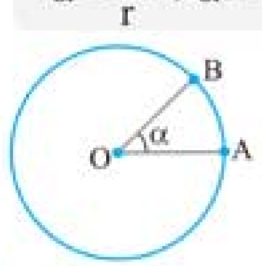
پاسخ **گزینه۴** چرخ جلو یا عقب تراکتور به هر میزان بچرخد زاویهٔ ایجاد شده توسط آن‌ها قطعاً متفاوت بوده ولی مسافت طی شده (رد چرخ‌ها بر روی زمین) توسط آن‌ها با هم برابر است.

حال ابتدا مسافت طی شده توسط چرخ جلو را از رابطهٔ $\alpha = \frac{\ell}{r}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\ell = r\alpha = ۴۰ \times \frac{\pi}{۶} = \frac{۲۰\pi}{۳}\,cm$$

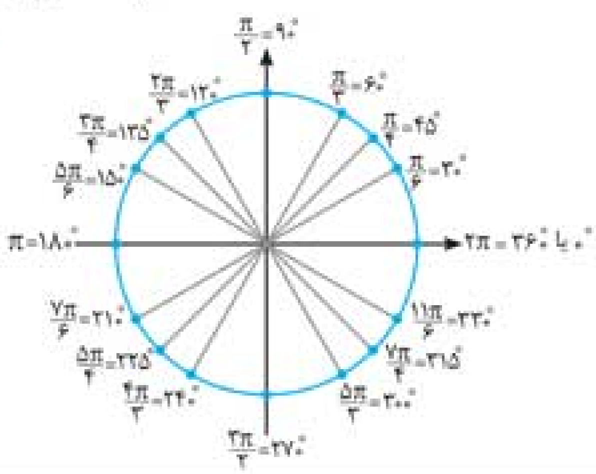
چون چرخ عقب نیز همین مسافت را طی کرده است در نتیجه میزان چرخش چرخ عقب برابر است با: $\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\frac{۲۰\pi}{۳}}{۶۰} = \frac{\pi}{۹}\,rad$

تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر



در دایره به شعاع ۱، محیط دایره برابر ۲π رادیان و برحسب درجه برابر ۳۶۰° است. با توجه به این مطلب، در صورتی‌که تناسب بین زاویه‌ها برحسب درجه و رادیان را به صورت $\frac{D}{۳۶۰} = \frac{R}{۲\pi}$ بنویسیم، با ساده کردن آن به رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ می‌رسیم و از آن برای تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر استفاده می‌کنیم. $\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi}$ (D اندازهٔ زاویه برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه برحسب رادیان است.)

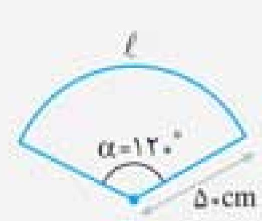
زوایای معروف و پرکاربرد در دایره مثلثاتی



تست: طول برف‌پاک‌کن شیشهٔ عقب یک خودرو برابر ۵۰ سانتی‌متر بوده و زاویه‌ای که طی می‌کند برابر ۱۲۰° است. انتهای این برف‌پاک‌کن در هر بار رفت و برگشت تقریباً چند سانتی‌متر حرکت می‌کند؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۱۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۰

پاسخ **گزینه۳** ابتدا زاویه را برحسب رادیان محاسبه می‌کنیم و سپس با استفاده از رابطهٔ $\ell = r\alpha$ مسافت طی‌شده توسط نوک تیغه برف‌پاک‌کن را محاسبه می‌کنیم.



$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۳}$$

مسافت طی‌شده: $\ell = r\alpha \Rightarrow \ell = ۵۰ \times \frac{۲\pi}{۳} \simeq \frac{۵۰ \times ۲ \times ۳/۱۴}{۳} \simeq ۱۰۵\,cm$

در نتیجه انتهای برف‌پاک‌کن در هر بار رفت‌وبرگشت تقریباً مسافتی به‌اندازهٔ $۲ \times ۱۰۵ = ۲۱۰\,cm$ را طی می‌کند.

تست: اگر طول عقربهٔ دقیقه‌شمار ساعتی، ۲۰ سانتی‌متر باشد، مسافت طی‌شده توسط نوک عقربه بعد از ۴۵ دقیقه چند سانتی‌متر است؟

۱) ۹۱/۲ ۲) ۹۲/۲ ۳) ۹۳/۲ ۴) ۹۴/۲

پاسخ **گزینه۴** زاویهٔ متناظر با ۴۵ دقیقه برابر $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان است، در نتیجه میزان مسافت طی‌شده برابر است با:

$$\ell = r\alpha \Rightarrow \ell = ۲۰ \times \frac{۳\pi}{۲} = ۳۰\pi \simeq ۳۰ \times ۳/۱۴ = ۹۴/۲\,cm$$

۵ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی (اتحادهای مثلثاتی)

با استفاده از تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه می‌توان درستی هریک از روابط زیر را ثابت کرد.

مُهِم ۲) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	۱) $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\begin{cases}\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\theta}\\ \cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\end{cases}$
۴) $\tan\theta.\cot\theta=۱$ یا $\cot\theta=\dfrac{۱}{\tan\theta}$ یا $\tan\theta=\dfrac{۱}{\cot\theta}$	۳) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
۶) $۱+\cot^۲\theta=\dfrac{۱}{\sin^۲\theta}$	۵) $۱+\tan^۲\theta=\dfrac{۱}{\cos^۲\theta}$
۸) $(\sin\theta\pm\cos\theta)^۲=۱\pm۲\sin\theta.\cos\theta$	۷) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{۱}{\sin\theta.\cos\theta}$
۱۰) $\sin^۶\theta+\cos^۶\theta=۱-۳\sin^۲\theta.\cos^۲\theta$	۹) $\sin^۴\theta+\cos^۴\theta=۱-۲\sin^۲\theta.\cos^۲\theta$
	۱۱) $\cos^۴\theta-\sin^۴\theta=\cos^۲\theta.\sin^۲\theta$

تست: اگر انتهای کمان α در ناحیه سوم بوده و $\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$ باشد حاصل $\dfrac{\tan\alpha}{\sin\alpha+\cot\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۰}{۳}$ ۲) $-\frac{۸۰}{۳}$ ۳) $\frac{۲۰}{۳}$ ۴) $-\frac{۲۰}{۳}$

پاسخ گزینه ۲ **روش اول** ابتدا با استفاده از رابطهٔ $۱+\tan^۲\alpha=\dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$، مقدار $\tan\alpha$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}}۱+\tan^۲\alpha=(\frac{۵}{۳})^۲\Rightarrow\tan^۲\alpha=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow\tan\alpha=\pm\frac{۴}{۳}$$

چون α در ناحیهٔ سوم قرار دارد، پس $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ می‌باشد، از طرفی می‌دانیم $\cot\alpha=\dfrac{۱}{\tan\alpha}$، پس $\cot\alpha=\frac{۳}{۴}$ و هم‌چنین می‌دانیم $\sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}$ در نتیجه $\sin\alpha=\pm\frac{۴}{۵}$ است و چون $\sin\alpha$ در ناحیهٔ سوم واقع است، پس $\sin\alpha$ منفی بوده و در نتیجه $\sin\alpha=\frac{-۴}{۵}$ پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha+\cot\alpha}=\frac{\frac{۴}{۳}}{-\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{-۱۶+۱۵}{۲۰}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{-\frac{۱}{۲۰}}=-\frac{۸۰}{۳}$$

روش دوم از اتحاد $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}}\sin^۲\alpha+\frac{۹}{۲۵}=۱\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{۴}{۵}\xrightarrow[\sin\alpha<۰]{\alpha\ \text{در ناحیهٔ سوم}}\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}\quad,\quad\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۳}{۴}$$

حال مقدار عبارت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha+\cot\alpha}=\frac{\frac{۴}{۳}}{-\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۴}}=-\frac{۸۰}{۳}$$

اگر α در ربع چهارم بوده و $\tan\alpha=-\frac{۳}{۴}$ باشد. حاصل $\sin\alpha+\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۲}{۵}$

پاسخ گزینه ۱ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی بیان شده می‌توان نوشت:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow۱+(-\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{۴}{۵}\xrightarrow[\cos\alpha>۰]{\alpha\ \text{در ربع چهارم}}\cos\alpha=+\frac{۴}{۵}$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\pm\sqrt{\frac{۹}{۲۵}}=\pm\frac{۳}{۵}\xrightarrow[\sin\alpha<۰]{\alpha\ \text{در ربع چهارم}}\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{۵}$$

اگر تساوی $\dfrac{a}{\cos^۲x}+\dfrac{b}{\cos^۴x}=\tan^۲x+\tan^۴x$ $(\cos x\neq۰)$ یک اتحاد باشد، مقدار $۲a+۳b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۵ ۴) ۵-

اعمال جبری روی توابع

۵

قبل از هر عمل جبری بر روی دو تابع، ابتدا باید دامنهٔ آن‌ها را طبق تعریف آن محاسبه و سپس عمل جبری خواسته شده را انجام دهیم.
اعمال روی توابع دلخواهی مانند f و g به ترتیب با دامنه‌های D_f و D_g عبارت‌اند از: جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم.

نام عمل	نماد	دامنهٔ تابع	تعریف و نحوهٔ محاسبهٔ ضابطه	تفسیر عمل	تفسیر دامنهٔ تابع حاصل از عمل جبری روی دو تابع
جمع	$(f+g)(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	مقدار مجموع دو تابع در یک عدد، برابر مجموع مقدار هر کدام از آن دو تابع در عدد داده شده است.	یعنی دامنهٔ مجموع دو تابع برابر اشتراک دامنهٔ آن‌ها است.
تفاضل	$(f-g)(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	مقدار تفاضل دو تابع در یک عدد، برابر تفاضل مقدار هر کدام از آن‌ها در آن عدد داده شده است.	یعنی دامنهٔ تفاضل دو تابع برابر اشتراک دامنهٔ آن‌ها است.
ضرب	$(f.g)(x)$	$D_{f\times g}=D_f\cap D_g$	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	مقدار حاصل‌ضرب دو تابع در یک عدد، برابر حاصل‌ضرب مقدار هر کدام از آن‌ها در آن عدد است.	یعنی دامنهٔ حاصل‌ضرب دو تابع برابر اشتراک دامنهٔ آن‌ها است.
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x)$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	مقدار تقسیم دو تابع در یک عدد، برابر تقسیم مقادیر دو تابع در آن عدد است.	یعنی دامنهٔ تابع حاصل از تقسیم دو تابع برابر اشتراک دامنهٔ آن‌ها منهای ریشه‌های مخرج است.
حاصل‌ضرب عدد در تابع	$(kf)(x)$	$D_{kf}=D_f$	$(kf)(x)=kf(x)$	اگر عددی در تابعی ضرب شود، باید مقادیر تابع را در آن عدد ضرب کنیم.	حاصل‌ضرب عدد در تابع تأثیری در دامنهٔ تابع ندارد.

از تعاریف اعمال جبری روی توابع می‌توان نتیجه گرفت که:

۱) اعمال جمع، تفریق و ضرب دو تابع فقط بر روی اعدادی قابل انجام است که در دامنهٔ هر دو تابع قرار گرفته باشند، در نتیجه قبل از انجام اعمال جبری (+، − و ×) بر روی دو تابع بهتر است که ابتدا دامنهٔ آن‌ها را محاسبه و اشتراکشان را بیابیم.

۲) تقسیم دو تابع فقط بر روی اعدادی قابل انجام است که **اولاً** آن اعداد در قسمت مشترک دامنهٔ دو تابع باشند، **ثانیاً** مخرج کسر به ازای آن اعداد مخالف صفر شود.

۳) در توابعی که به‌صورت زوج مرتب تعریف می‌شوند، برای محاسبهٔ عمل جبری خواسته‌شده کافی است آن عمل را بر روی مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌هایی که دارای مؤلفهٔ اول یکسان در دو تابع می‌باشند، انجام دهیم.

۴) توان و ضریب تأثیری در دامنهٔ توابع ندارند، برای نمونه داریم: $D_{f^2-3g}=D_{f-g}=D_f\cap D_g\ ,\ D_{2f+g^2}=D_{f+g}=D_f\cap D_g$

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-2x}$ باشند، دامنهٔ تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(0,2)$ ۲) $\mathbb{R}-[0,2]$ ۳) $\mathbb{R}-[0,4]$ ۴) $\mathbb{R}-(0,4)$

پاسخ (گزینه ۴) ابتدا دامنهٔ هر کدام از توابع داده شده را تعیین و سپس اشتراک آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$D_f: x^2-4x\ge 0\Rightarrow x(x-4)\ge 0$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		+	0	−	0	+	
		جواب				جواب	

$\Rightarrow D_f=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

$D_g: x^2-2x\ge 0\Rightarrow x(x-2)\ge 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		+	0	−	0	+	
		جواب				جواب	

$\Rightarrow D_g=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

حال اشتراک دو دامنهٔ به دست آمده را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$D_{f-g}=((-\infty,0]\cup[4,+\infty))\cap((-\infty,0]\cup[2,+\infty))=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)=\mathbb{R}-(0,4)$$

برای ۱۰۰٪

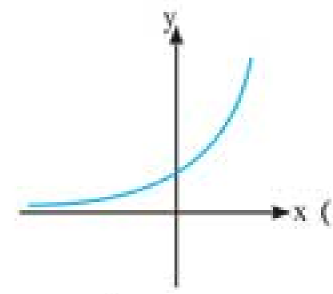
۷۴۷. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2^{x-1}-2^{2x-7}}$ کدام است؟

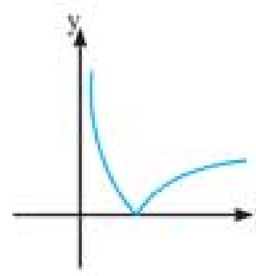
۱) $[6,+\infty)$ ۲) $(-\infty,6]$ ۳) $(0,6]$ ۴) $[0,6]$

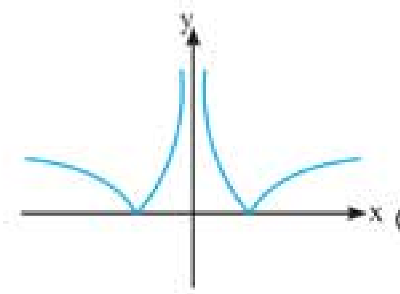
۷۴۸. اگر $5^x = 200$ باشد، آن‌گاه $[x]$ کدام است؟

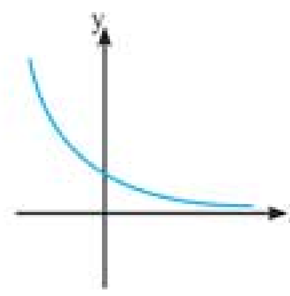
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۴۹. نمودار تابع $f(x)=\left|\,\log|x|\,\right|$ به کدام صورت زیر می‌باشد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۷۵۰. حاصل $\log\tan 5^\circ + \log\tan 10^\circ + \ldots + \log\tan 80^\circ + \log\tan 85^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\log\tan 50^\circ$ ۴) $(\log\tan 50^\circ)^{16}$

۷۵۱. اگر $f(x)=\dfrac{4^x-1}{2^x}$ باشد، مقدار $f(\log 2)+f(\log\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) صفر

۷۵۲. اگر $\log(\dfrac{3x+2y}{4})=\dfrac{\log x+\log y}{2}$ باشد، $9x^2+4y^2$ کدام است؟

۱) $3xy$ ۲) $4xy$ ۳) $6xy$ ۴) $16xy$

۷۵۳. جواب معادلهٔ $\log(x^3+6x^2+12x+9)-\log(x+3)=1$ به صورت $\frac{1}{2}(-3+\sqrt{a})$ است. a کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۹ ۳) ۳۵ ۴) ۳۷

۷۵۴. هرگاه $2^{x+2}+4^{x+2}=72$ مفروض باشد، آن‌گاه $\log_4\sqrt{x+7}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷۵۵. از دستگاه معادلات $\begin{cases}\log(x^2+4y^2)=2\log\sqrt{2}+\log 23\\ \log x+\log y=2\log 3-\log 2\end{cases}$، حاصل لگاریتم $x+2y$ در مبنای ۱۶ کدام است؟

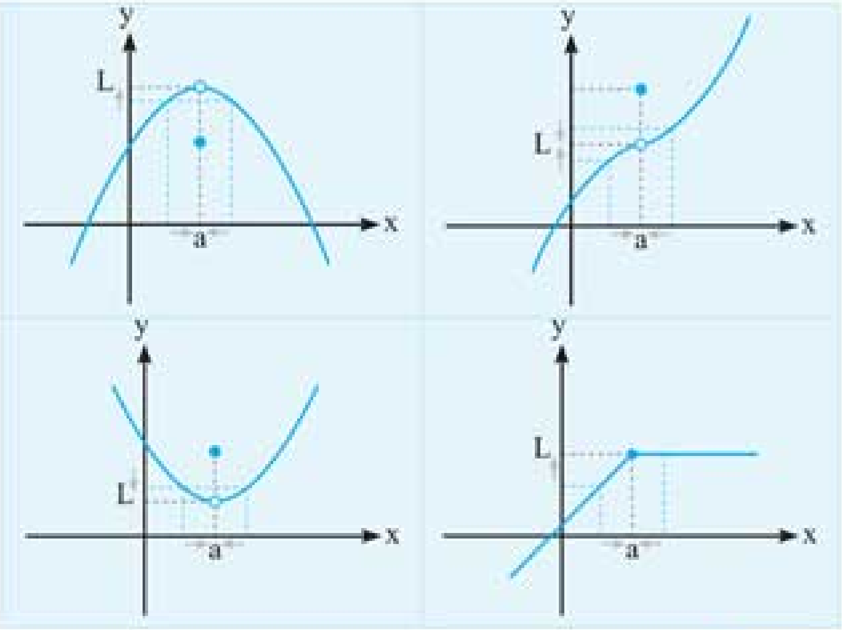
۱) ۰/۵ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱/۵

۷۵۶. حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\log_3 x\times\log_3\dfrac{x}{27}=10$ کدام است؟

۱) ۲۴۳ ۲) ۲۷ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) -90

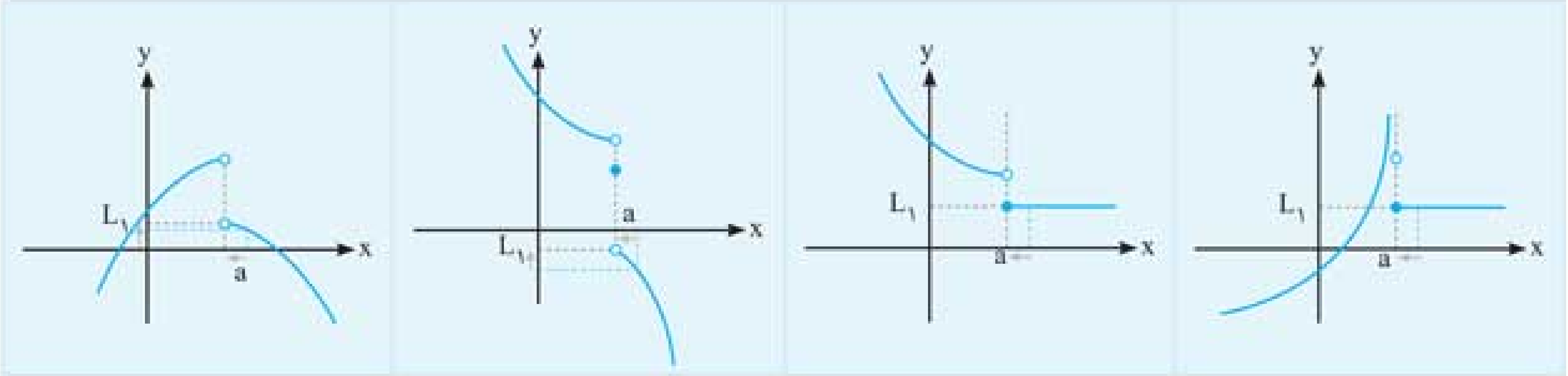
حد تابع در یک نقطه

حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر عدد حقیقی L است و آن را با نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ نمایش می‌دهند. هرگاه در یک همسایگی محذوف عدد a واقع در دامنهٔ f، متغیر x به عدد حقیقی a نزدیک و نزدیک‌تر شود، آن‌گاه مقادیر تابع f واقع بر محور yها به عدد حقیقی L نزدیک و نزدیک‌تر شده و یا ممکن است با آن برابر شوند. مانند:

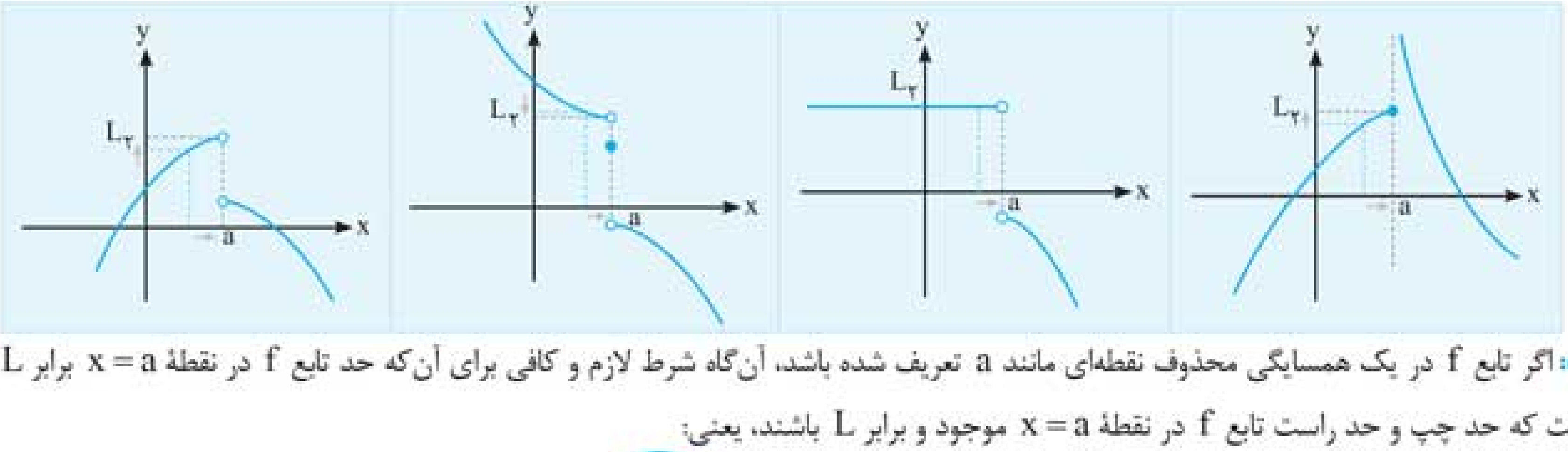


حدهای یک‌طرفه (حد راست و حد چپ)

حد راست: حد راست تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر عدد حقیقی L_1 است و آن را با نماد $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$ نمایش می‌دهند. هرگاه در یک همسایگی محذوف راست عدد a واقع در دامنهٔ f، متغیر x به عدد حقیقی a نزدیک و نزدیک‌تر شود، آن‌گاه مقادیر تابع f واقع بر محور yها به عدد حقیقی L_1 نزدیک و نزدیک‌تر شده و یا ممکن است با آن برابر شوند. مانند:



حد چپ: می‌گویند حد چپ تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر عدد حقیقی L_2 است و آن را با نماد $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$ نمایش می‌دهند. هرگاه در یک همسایگی محذوف چپ عدد a واقع در دامنهٔ f، متغیر x به عدد حقیقی a نزدیک و نزدیک‌تر شود، آن‌گاه مقادیر تابع f ، واقع بر محور yها به عدد حقیقی L_2 نزدیک و نزدیک‌تر شده و یا ممکن است با آن برابر شوند. مانند:

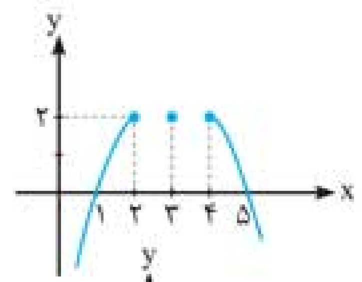


قضیه: اگر تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر L باشد، آن است که حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=a$ موجود و برابر L باشند، یعنی:

مُهِم

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=L=\lim_{x\to a^-} f(x)$$

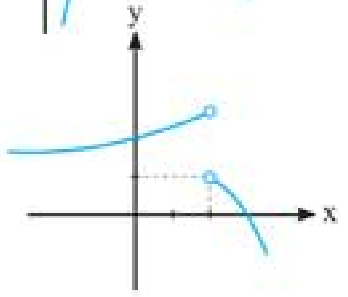
حد یک تابع و حدهای یک‌طرفه



۷۶۲. با توجه به نمودار مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]$ و $f(1)$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) صفر، صفر، صفر ۲) صفر، وجود ندارد، صفر

۳) وجود ندارند، صفر، صفر ۴) وجود ندارد، وجود ندارد، صفر



۷۶۳. اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(f(2-x)+f(x+2))$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) وجود ندارد

۷۶۴. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ چقدر است؟

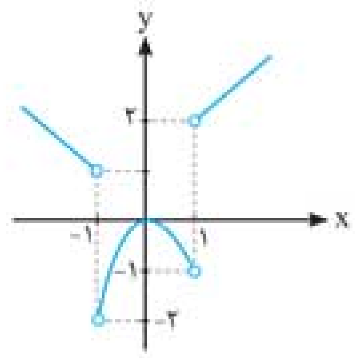
۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) وجود ندارد

۷۶۵. کدام تابع در نقطهٔ $x=-1$ شرط لازم را برای داشتن حد دارد؟

۱) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ۲) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ۳) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{[x]+1}$

۷۶۶. در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; \quad x\geq 0\\ 2x-1 & ; \quad x<0\end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۲ ۴) وجود ندارد



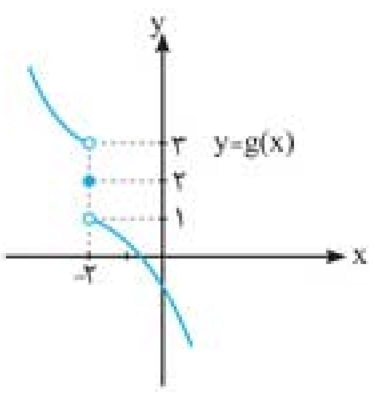
۷۶۷. با توجه به نمودار مقابل، حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-} 2f^2(x)+f(|x|)$ کدام است؟

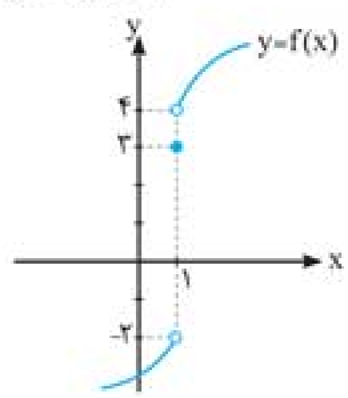
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۷۶۸. در تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad x>0\\ x^2+2x & ; \quad x<0\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}[f(x)]$ به ترتیب کدام‌اند؟

۱) ۱، صفر ۲) ۱، -1 ۳) صفر، -1 ۴) صفر، صفر





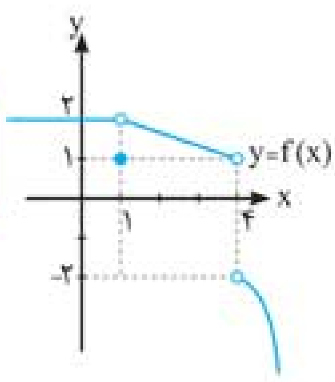
۷۶۹. با توجه به نمودارهای f و g ، حاصل $\lim\limits_{x\to(-2)^+} fog(x)$ کدام است؟

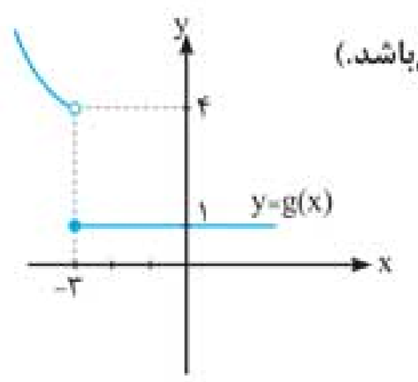
۱) -2

۲) ۳

۳) ۴

۴) وجود ندارد.





۷۷۰. با توجه به نمودار f و g حاصل $\lim\limits_{x\to(-3)^+}[fog(x)]$ چقدر است. ([ ] جزء صحیح می‌باشد.)

۱) ۱

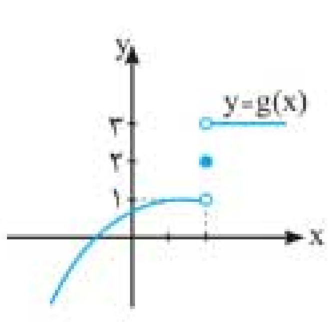
۲) -2

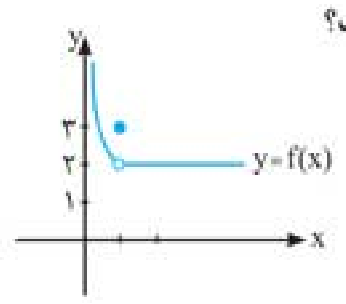
۳) -3

۴) صفر

۷۷۱. در تست قبل حاصل $\lim\limits_{x\to(-3)^-}[fog(x)]$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) -3





۷۷۲. با توجه به نمودار تابع $f(x)$ و $g(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} gof(x)+\lim\limits_{x\to 3^-} fog(x)$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

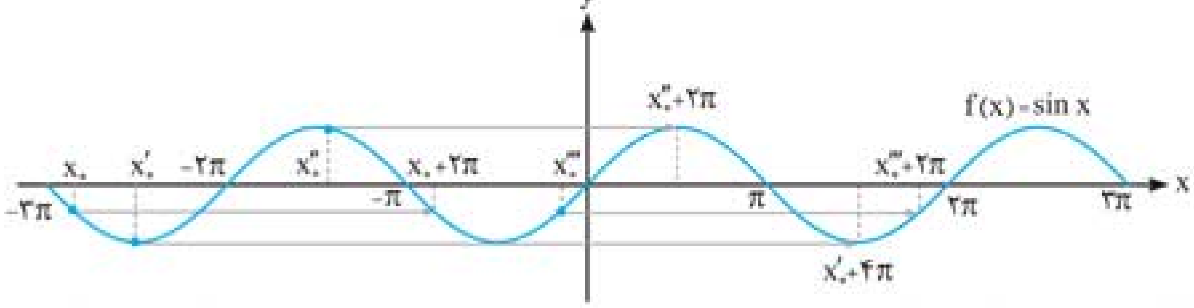
۷۷۳. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+[x]}{|x|} & ; \quad x<-1\\ 3x+b & ; \quad x>-1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-1$ حد داشته باشد، b کدام است؟

۱) -2 ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

مثلثات

تابع متناوب

برخی توابع ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را از سایر توابع متمایز می‌کند. برای نمونه به نمودار تابع $f(x)=\sin x$ نگاه کنید:

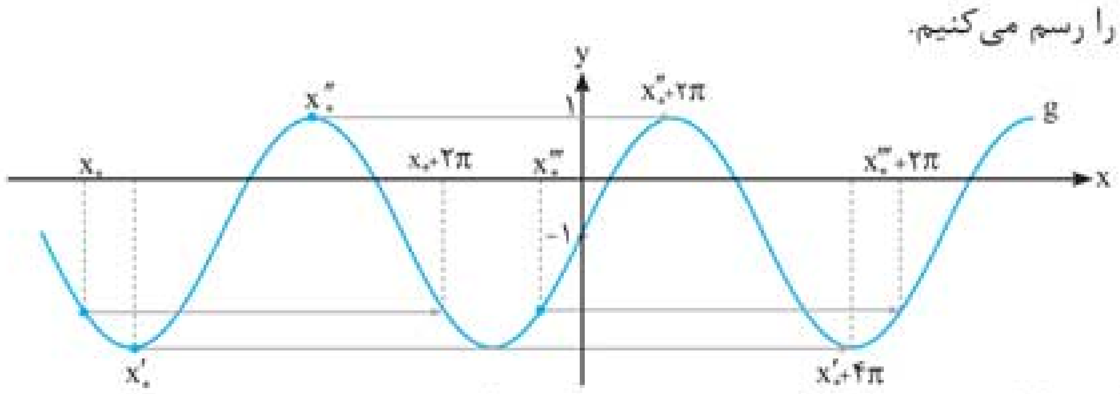


اگر به طول هر نقطه از نمودار این تابع مقدار ۲π اضافه کنیم، عرض نقاط نظیر تغییر نمی‌کند. همین‌طور اگر مقدار ثابت را به ۴π یا ۶π یا ... افزایش دهیم، این اتفاق تکرار می‌شود. حتی اگر اعداد ثابت منفی مانند -۲π یا -۴π یا -۶π یا... را نیز به طول هر نقطه از تابع اضافه کنیم همچنان عرض نقاط نظیر بدون تغییر باقی می‌مانند. به زبان نمادین در تابع $f(x)=\sin x$ می‌توان گفت:

$$f(x)=f(x\pm ۲\pi)=f(x\pm ۴\pi)=f(x\pm ۶\pi)=\cdots=f(x\pm ۲k\pi)\quad,\quad k\in\mathbb{Z}$$

در این تابع با افزودن یا کاستن مقادیر ثابت $۲k\pi$ $(k\in\mathbb{Z}\,,\,k\neq ۰)$ به طول هر نقطه از دامنهٔ تابع، مقدار تابع (عرض تابع) تغییر نمی‌کند. به این ویژگی تابع $f(x)=\sin x$ **متناوب بودن** آن می‌گویند و به مقادیر ثابت نیز **دورهٔ تناوب** می‌گوییم. تابع $f(x)=\sin x$ دارای بی‌شمار دورهٔ تناوب است. کوچک‌ترین دورهٔ تناوب مثبت تابع $f(x)=\sin x$ یعنی $T=۲\pi$ را **دورهٔ تناوب اصلی** آن می‌نامیم. حال با یک مثال می‌خواهیم نشان دهیم که دورهٔ تناوب اصلی تابع $g(x)=a\sin x+b$ با شرط $a\neq ۰$ نیز برابر $T=۲\pi$ است.

نمودار تابع $g(x)=۲\sin x-۱$ را رسم می‌کنیم.

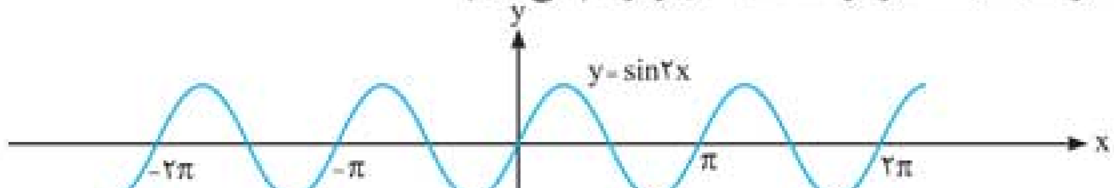


با توجه به نمودار، تابع $g(x)=۲\sin x-۱$ نیز متناوب است و دورهٔ تناوب اصلی آن ۲π است.

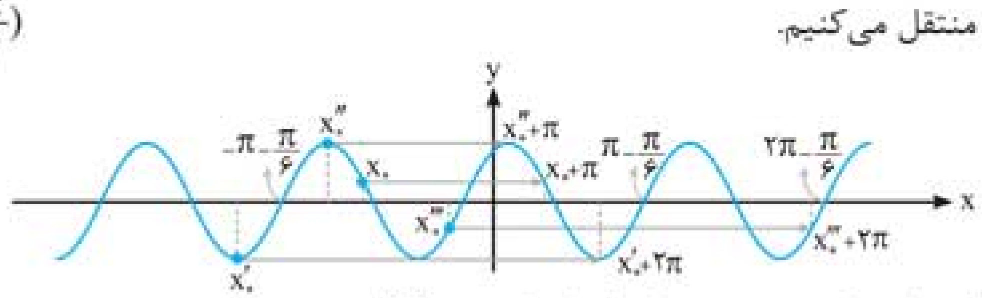
نکته: به‌طور کلی اگر تابع $y=f(x)$ متناوب و دورهٔ تناوب اصلی آن T باشد، تابع $y=af(x)+b$ نیز متناوب بوده و دورهٔ تناوب اصلی آن T است. $(a\,,\,b\in\mathbb{R}\,,\,a\neq ۰)$

حال نمودار تابع $h(x)=\sin(۲x+\frac{\pi}{۳})$ را رسم می‌کنیم.

بر اساس آنچه در فصل گذشته آموختید، ابتدا نمودار $y=\sin ۲x$ را رسم می‌کنیم.



سپس آن را $\frac{\pi}{۶}$ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. $y=\sin ۲(x+\frac{\pi}{۶})=\sin(۲x+\frac{\pi}{۳})$

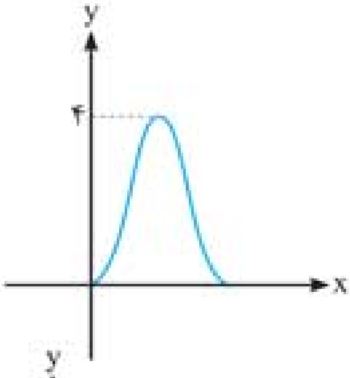


در شکل مشخص است که تابع $h(x)$ متناوب است و دورهٔ تناوب اصلی آن $T=\pi$ است.

نکته: به‌طور کلی توابع مثلثاتی $y=\sin(ax+b)$ (با شرط $a\,,\,b\in\mathbb{R}\,,\,a\neq ۰$) توابعی متناوب با دورهٔ تناوب اصلی $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ هستند.

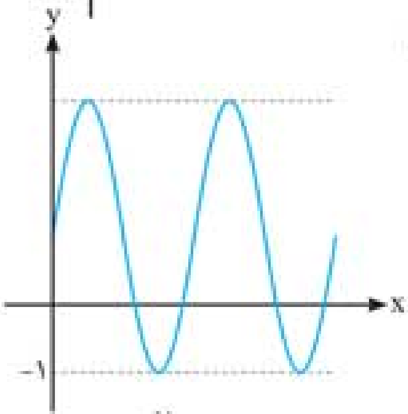
تذکر: با توجه به مطالب گفته شده می‌توان گفت تابع $y=k\sin(ax+b)+c\ (a\,,\,b\,,\,c\,,\,k\in\mathbb{R})$ با شرط $a\,,\,k\neq ۰$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب اصلی $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

۱۰۳۹. شکل مقابل نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$، در بازهٔ $(۰,۴)$ است. b کدام است؟ (ریاضی۹۷)



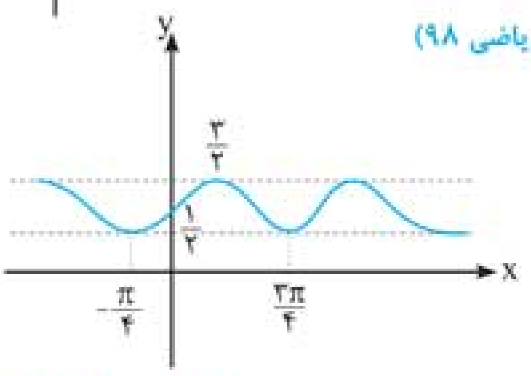
۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۰۴۰. شکل زیر نمودار تابع $y=۱+a\sin(b\pi x)$، در بازهٔ $(۰,\frac{۴}{۳})$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۰۴۱. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=۱+a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۱۰۴۲. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

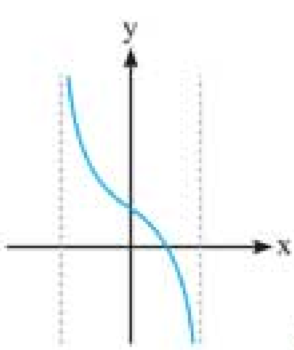
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

تابع تانژانت

۱۰۴۳. نمودار مقابل مربوط به ضابطهٔ کدام‌یک از توابع زیر می‌تواند باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

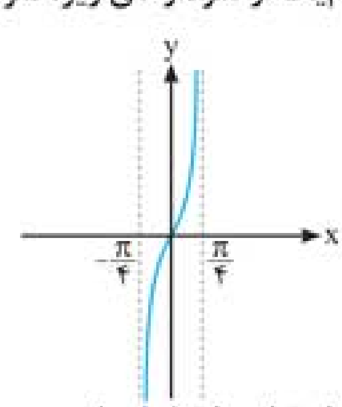
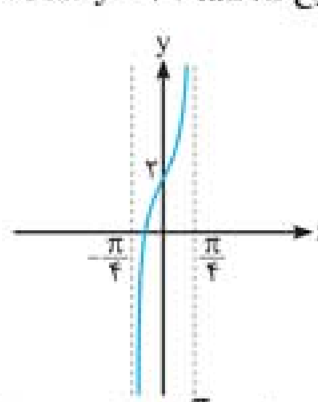
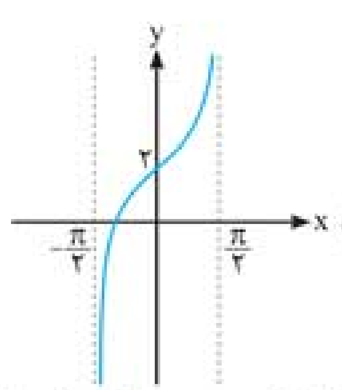
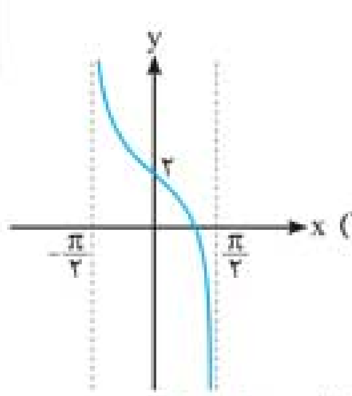
۱) $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{۳})-۱$ ۲) $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۳})+۱$
۳) $f(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۴})+۱$ ۴) $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{۴})-۱$

۱۰۴۴. ضابطهٔ تابع مقابل کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟



۱) $y=\tan(x-\frac{\pi}{۲})$ ۲) $y=۳\tan x$
۳) $y=-\tan x+۱$ ۴) $y=-۲\tan ۲x$

۱۰۴۵. کدام‌یک از نمودارهای زیر، نمودار تابع $y=۲+\tan ۲x$ است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۰۴۶. نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\tan x$ و $y=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) چهار نقطه ۲) سه نقطه ۳) دو نقطه ۴) یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

۱۰۴۷. نمودار تابع $y=\tan x$ و خط $y=\frac{۱}{۲}x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) دو نقطه ۲) سه نقطه ۳) یک نقطه ۴) چهار نقطه

۱۰۴۸. مساحت مثلثی که از برخورد نمودار تابع تانژانت با محور xها در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ و خط $y=x+۳$ با محور yها حاصل می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۱۱۰۹. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۴x = \sin^۴ x - \cos^۴ x$، در بازهٔ $[۰,\pi]$، برابر کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

۱۱۱۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۱۱۱۱. جواب کلی معادلهٔ $\sin x \cdot \sin ۳x = \cos ۲x$، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{k\pi}{۳}$

۱۱۱۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x=۰$، با شرط $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

۱۱۱۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x+\cos^۳ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) ۳π

۱۱۱۴. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۴) ۴π

برای ٪۱۰۰

۱۱۱۵. اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۵\sin^۲(\frac{۳\pi}{m}x)+۱$، برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۱۱۱۶. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۳\sin x-۴\sin^۳ x$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

۱۱۱۷. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cot x-\tan x-۲\tan ۲x-۴\tan ۴x$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۱۱۸. دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x+۳\cos \pi x$، در صورت وجود کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲π ۳) ۴π ۴) وجود ندارد

۱۱۱۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\tan^۲ x)\cos ۲x+۲=۰$، کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

۱۱۲۰. اگر $۳\sin x-۴\cos x=۵$ باشد، حاصل $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) ۰/۲۸ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲۶ ۴) ۰/۳۲

۱۱۲۱. جواب کلی معادلهٔ $\sqrt{۳}(\sin x+\cos x)=۱+\sin ۲x$ کدام است؟

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi-\frac{\pi}{۴}$

۱۱۲۲. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\tan x+\cot x=۲\sqrt{۳}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۳π ۴) $\frac{۵\pi}{۲}$

۱۱۲۳. معادلهٔ $\sin x+\cos x+۲\sin x\cos x=\sqrt{۲}+۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۲۴. معادلهٔ $\sin^۲ x+۲\cos^۲ x+\sin x\cos x=۳$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آزمون فصل

۱. اگر $f(x)=\dfrac{4x+7}{x^2-5x+6}$ و $g(x)=3^{-x}$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 3^-}(gof)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۲. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{3x+1}{4+3^{\tan x}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$ ۲) صفر ۳) $-\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$ ۴) وجود ندارد.

۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{2x+1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x-3}\right)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۳ ۴) -2

۴. اگر $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|9-x^2|}{ax^2+3x+\frac{8}{3}}=3$ آن‌گاه حد چپ این عبارت در نقطهٔ $x=-1$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۵. حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}|x|[\dfrac{-3}{2x}]$ کدام گزینه است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) $-\dfrac{3}{2}$

۶. اگر $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x+2)^2(3-x)}{(ax+3)^3+2x^3}=-2$ مقدار a کدام است؟

۱) $\dfrac{3}{2}$ ۲) $-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$ ۳) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ ۴) $\dfrac{1}{4}$

۷. حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty}[\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+3}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۸. مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\dfrac{4+3x^2}{9-x^2}$ در دو نقطه A و B همدیگر را قطع می‌کنند اگر O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷

۹. اگر خط $y=\dfrac{2}{5}$ مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{Ax^4+3}{(2A-3)x^4+15}$ باشد، معادلهٔ مجانب‌های قائم تابع f کدام است؟

۱) $\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\x=-\sqrt{3}\end{cases}$ ۴) مجانب قائم نمی‌تواند داشته باشد.

۱۰. تابع $f(x)=\dfrac{x^2+2}{3x+2x^2}$ مجانب خود را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(1,\dfrac{3}{5})$ ۲) $(-1,-3)$ ۳) $(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3})$ ۴) $(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{2})$

برای دریافت پاسخ‌نامهٔ تشریحی برای ۱۰۰٪ و آزمون فصل، رمزینهٔ مقابل را با گوشی هوشمند خود اسکن کنید یا به سایت مهروماه، صفحه مربوط به این کتاب مراجعه نمایید.

مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱۲۹۸. اگر $f(x)$ ضابطهٔ تابعی باشد که $f(۱۰۰)=۳۵$ و $f'(۱۰۰)=۳$، مقدار تقریبی $f(۱۰۲)$ چقدر است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۲ ۳) ۴۰ ۴) ۴۳

۱۲۹۹. اگر در تابع f داشته باشیم: $f'(۵)=۴$ و $f(۵)=۷$، مقدار $f(۶)$ به کدام‌یک از مقادیر زیر نزدیک‌تر است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۸

۱۳۰۰. اگر $f(x)=۵x^۲$، کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۵h+۳۰$ ۲) $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۵h-۲۰$

۳) $\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=۵h+۲۰$ ۴) $\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=۵h+۳۰$

۱۳۰۱. اگر داشته باشیم: $f(۲+h)-f(۲)=۳h^۲+۵h$، مقدار $f'(۲)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۳۰۲. مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۲$ به‌صورت $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=۱۲$ بیان شده است، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

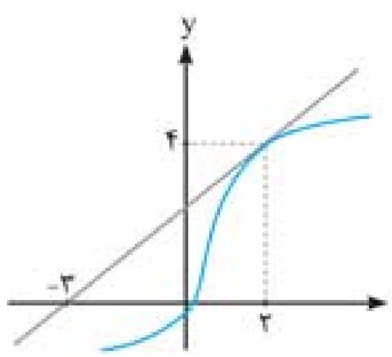
۱۳۰۳. اگر $f'(-۲)=۲$، مقدار $\lim\limits_{t\to -۲}\frac{f(t)-f(-۲)}{۲(t+۲)}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۰۴. $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{x-۲}$ مربوط به مشتق چند تابع در $x=۲$ است؟

۱) فقط یک تابع ۲) بی‌شمار تابع ۳) مربوط به مشتق نیست. ۴) هیچ‌کدام

۱۳۰۵. با توجه به نمودار مقابل حاصل $A=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۴-f(x)}{x-۲}$ کدام است؟



۱) ۱/۲۵
۲) ۰/۸
۳) $-۰/۸$
۴) وجود ندارد.

۱۳۰۶. اگر $f(x)=[x]+[-x]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}\frac{f(x)(f(x)+۱)}{x-\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) موجود نیست.

۱۳۰۷. فرض کنید تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر است و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-h}{h}=۳$، مقدار $f(۱)+f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

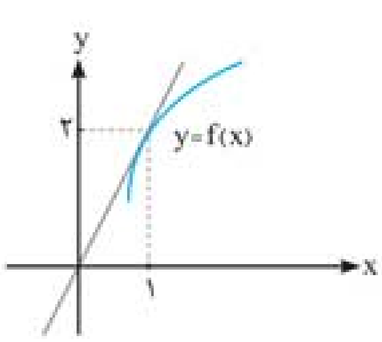
۱۳۰۸. اگر تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد، $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{\sqrt{x}-۱}$ کدام است؟

۱) $f'(۱)$ ۲) $۲f'(۱)$ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}f'(۱)$

۱۳۰۹. اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ برابر کدام است؟

۱) $af'(a)$ ۲) $f'(a)-af(a)$ ۳) $f(a)-af'(a)$ ۴) $af(a)$

۱۳۱۰. قسمتی از نمودار $y=f(x)$ به‌صورت شکل مقابل است $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^۳(x)-۸}{x-۱}$ کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۱۶
۴) ۴۸

۱۳۱۱. اگر شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(۱,۲)$ برابر ۳ باشد، حد کسر $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^۲(x)-۴}{x^۲-۳x+۲}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۲ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۳۱۲. اگر تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(۱)=۲$ در این‌صورت حاصل حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+۳h)-f(۱)}{h}$ برابر چند است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۱۵۱۹. برد تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^۲+۳}$ برابر است با:

۱) $[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۶}]$ ۲) $[-\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۲}]$ ۳) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ ۴) $[-\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۴}]$

۱۵۲۰. اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=x^۲+۲x$، آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $(-۱,۰]$ ۴) $[-۱,۰)$

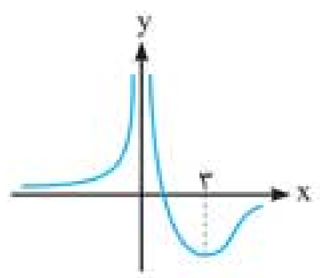
۱۵۲۱. برد تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x+۲}$ برابر است با:

۱) $(-۴,۰)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۴,۰)$ ۳) $\mathbb{R}-[-۴,۰]$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۵۲۲. برد تابع $y=[\frac{۳x}{x^۲+۱}]$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵۲۳. نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۳}{x^۲+bx}$ به صورت مقابل است. دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۰)



۱) $(-۲,۲)$
۲) $(-۲,۰)$
۳) $(۲,۰)$
۴) $(۲,۲)$

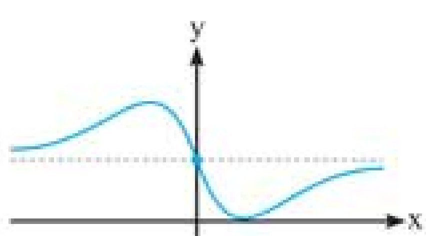
۱۵۲۴. تابع $f(x)=x^۴-۶x^۲+۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی ۴) فاقد اکسترمم نسبی

۱۵۲۵. اگر $a>۰$ ثابت و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{۳a+x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

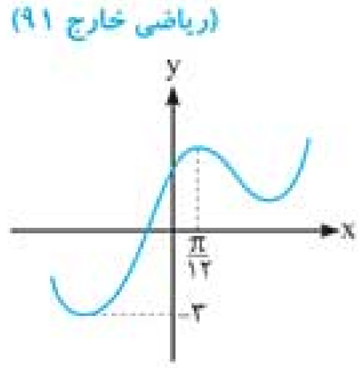
۱) ۲a ۲) ۳a ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۲۶. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^۲+bx+۲}{x^۲+۱}$ است، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۱)



۱) $(۱,-۲)$
۲) $(۱,۲)$
۳) $(۲,-۴)$
۴) $(۲,۴)$

۱۵۲۷. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos۴x+b\sin۲x$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)



۱) ۲
۲) −۲
۳) ۳
۴) −۳

۱۵۲۸. طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-۱)^۲\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۵۲۹. فاصلهٔ نقطهٔ می‌نیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۵۳۰. فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{۲x-x^۲}{(x+۱)^۲}$، از خط مجانب افقی آن، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۷۸. گزینه ۱ با استفاده از اتحاد مزدوج، می‌توان کسر داده‌شده را به صورت زیر ساده کرد:

$$\frac{\tan^{۲}۲۵^\circ-\tan^{۲}۲۰^\circ}{۱-\tan^{۲}۲۵^\circ\times\tan^{۲}۲۰^\circ}$$
$$=\frac{\tan۲۵^\circ-\tan۲۰^\circ}{۱+\tan۲۵^\circ\times\tan۲۰^\circ}\times\frac{\tan۲۵^\circ+\tan۲۰^\circ}{۱-\tan۲۵^\circ\times\tan۲۰^\circ}$$
$$=\tan(۲۵^\circ-۲۰^\circ)\times\tan(۲۵^\circ+۲۰^\circ)=\tan۵^\circ\times\underbrace{\tan۴۵^\circ}_{۱}=\tan۵^\circ$$

۴۷۹. گزینه ۳ از روابط بیان‌شده برای $\tan$ و $\cot$ نتیجه می‌گیریم که:

$$f(x)=\cot x-\tan x=۲\cot۲x$$
$$\Rightarrow f(۲۲/۵^\circ)=۲\cot۴۵^\circ=۲\times۱=۲$$
$$g(x)=\frac{۲}{\tan x+\cot x}=\frac{۲}{\frac{۲}{\sin۲x}}=\sin۲x$$
$$\Rightarrow g(۲۲/۵^\circ)=\sin۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

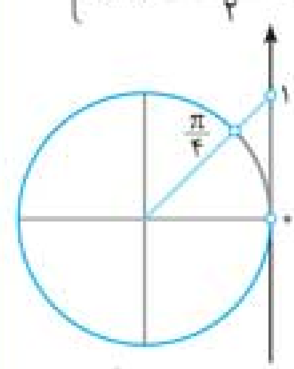
بنابراین کسر داده‌شده برابر است با:

$$\frac{f(۲۲/۵^\circ)}{g(۲۲/۵^\circ)}=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=۲\sqrt{۲}$$

۴۸۰. گزینه ۴ با استفاده از رابطهٔ $\sin۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}$ به محاسبهٔ $\tan x$ می‌پردازیم:

$$\sin۲x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}\Rightarrow ۲+۲\tan^{۲}x=۶\tan x$$
$$\xrightarrow{\div۲}\tan^{۲}x-۳\tan x+۱=۰$$
$$\Rightarrow\tan x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}\simeq\frac{۳\pm۲/۲}{۲}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\tan x\simeq\frac{۵/۲}{۲}=۲/۶\\ \tan x\simeq\frac{۰/۸}{۲}=۰/۴\end{cases}$$

در حالتی که $۰<x<\frac{\pi}{۴}$ است مقدار $\tan x$ در بازهٔ $(۰,۱)$ قرار دارد در نتیجه $\tan x=۰/۴=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول است.



۴۸۱. گزینه ۳ می‌دانیم که شیب خط $ax+by+c=۰$ برابر $m=-\frac{a}{b}$ است در نتیجه:

$$(۳\sin\theta)x+(۵\cos\theta)y=۱۱\tan\theta\Rightarrow m=-\frac{\cancel{۳}\sin\theta}{۵\cos\theta}=\cancel{۳}$$
$$\Rightarrow-\sin\theta=۵\cos\theta\Rightarrow\sin\theta=-۵\cos\theta$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$A=\frac{-۲\sin\theta+۷\cos\theta}{۵\cos\theta+۴\sin\theta}=\frac{-۲(-۵\cos\theta)+۷\cos\theta}{۵\cos\theta+۴(-۵\cos\theta)}$$
$$=\frac{۱۰\cos\theta+۷\cos\theta}{۵\cos\theta-۲۰\cos\theta}=\frac{۱۷\cos\theta}{-۱۵\cos\theta}=-\frac{۱۷}{۱۵}$$

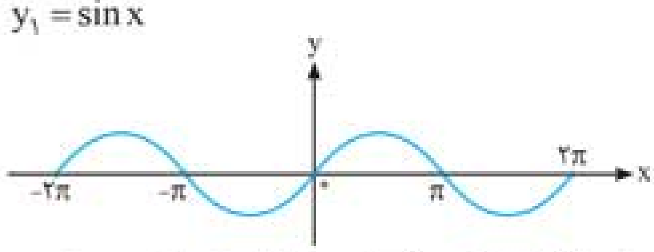
۴۸۲. گزینه ۲ با استفاده از رابطهٔ توان‌شکن یعنی $\cos^{۲}\alpha=\frac{۱+\cos۲\alpha}{۲}$ به محاسبهٔ عبارت داده‌شده می‌پردازیم.

$$\cos^{۲}۲۲/۵^\circ-\cos^{۲}۶۷/۵^\circ=\frac{۱+\cos۴۵^\circ}{۲}-\frac{۱+\cos۱۳۵^\circ}{۲}$$
$$=\frac{\cos۴۵^\circ-\cos۱۳۵^\circ}{۲}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\cos(۹۰^\circ+۴۵^\circ)}{۲}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\sin۴۵^\circ}{۲}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

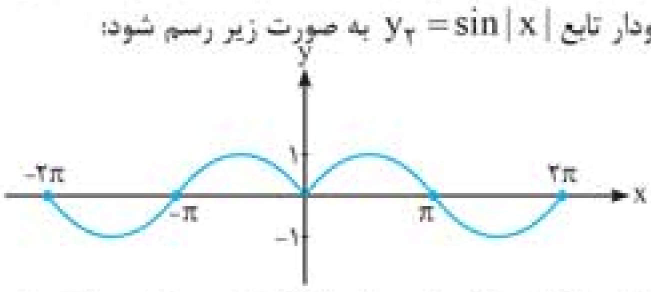
۴۸۳. گزینه ۴ کافی است در هر کدام از گزینه‌ها مقدار تابع را در نقاط مشخص‌شده مانند ۰، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$ و ۲π بررسی کنید. گزینهٔ «۱» نادرست است زیرا $f(۰)=۲\sin۰-۱=-۱$ در حالی که در شکل $f(۰)=۱$ است. گزینهٔ «۲» نیز نادرست است زیرا $f(۰)=۲\cos۰+۱=۳$ در حالی که در شکل $f(۰)=۱$ است. در گزینهٔ «۳» مقدار تابع در $x=۰$ برابر -۲ است پس نادرست است. در گزینهٔ «۴» همهٔ مقادیر داده‌شده در شکل در تابع صدق می‌کنند.

۴۸۴. گزینه ۳ نمودار تابع $y=\sin|x|+۱$ را در مراحل زیر رسم می‌کنیم.

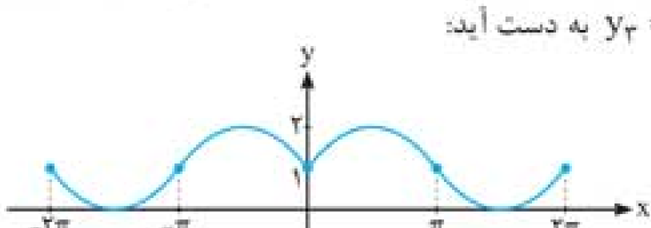
$y_{۱}=\sin x$



حال سمت چپ نمودار بالا را حذف و قرینهٔ سمت راست را در سمت چپ رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $y_{۲}=\sin|x|$ به صورت زیر رسم شود:

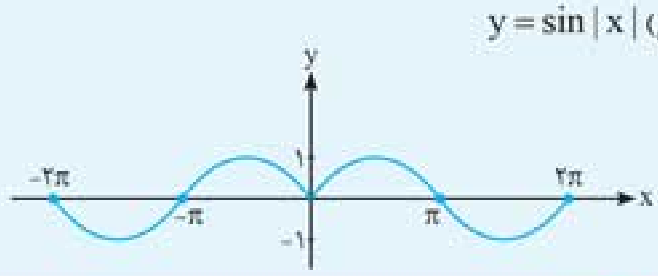


حال نمودار تابع فوق را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y_{۳}=\sin|x|+۱$ به دست آید:



هشدار: به تفاوت شکل‌های زیر دقت شود.

$y=\sin|x|$ (سیبیل)



۴۸۵. گزینه ۳ با توجه به شکل رسم‌شده، در $\overset{\Delta}{OBH}$ می‌توان سینوس زاویهٔ $\pi-\alpha$ را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\sin(\pi-\alpha)=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{BH}{OB}=\frac{BH}{۱۰}$$
$$\Rightarrow BH=۱۰\sin\alpha$$