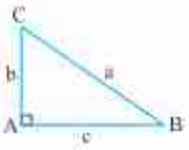
فصل ۹ مثلثات

قسمت اول: نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه



۱۰۱۶. در مثلث ABC، $\hat{A}=90^\circ$، $\tan B=\sqrt{2}$ و $a=3\sqrt{3}$ می‌باشد، اندازهٔ ضلع c کدام است؟

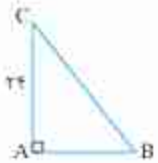
۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۱۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ A قائمه و $\sin B=\frac{15}{17}$ است. مقدار $\cos B+\sin C$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{16}{17}$ ۳) $\frac{18}{17}$ ۴) $\frac{19}{17}$

۱۰۱۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=90^\circ)$، اگر $a=\sqrt{3}$ و $c=\sqrt{5}$ باشد، حاصل $\sin^2 A+\cot^2 A$ کدام است؟

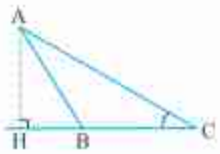
۱) $\frac{49}{24}$ ۲) $\frac{65}{24}$ ۳) $\frac{49}{40}$ ۴) $\frac{39}{40}$



۱۰۱۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، $\hat{A}=90^\circ$، $AC=24$ و $\cos C=\frac{4}{5}$ است. محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۵۸ ۲) ۶۴

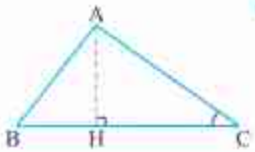
۳) ۷۲ ۴) ۸۰



۱۰۲۰. در شکل مقابل، فرض کنید $\sin C=\frac{5}{13}$ و $CH=9$، اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۹)

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵

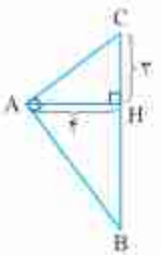
۳) ۳/۶ ۴) ۳/۷۵



۱۰۲۱. در شکل مقابل، $\cot C=\frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC=96$، اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱) ۴۸ ۲) ۵۶

۳) ۶۴ ۴) ۷۲



۱۰۲۲. در شکل مقابل، مقدار کسینوس زاویهٔ B کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۱۰۲۳. در مثلث ABC، $a=9$، $b=6$ و $c=3\sqrt{3}$ است. مقدار $\cos C$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{4}{5}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

۱۰۲۴. مقدار عددی عبارت $(\cos 30^\circ+\cos 45^\circ)(\sin 60^\circ-\sin 45^\circ)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۰۲۵. مقدار x از رابطهٔ $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}=\tan x$ کدام است؟

۱) 30° ۲) 45° ۳) 60° ۴) 120°

۱۰۲۶★ حاصل عبارت $(x+y)^2\sin^2 30^\circ-(x-y)^2\cos^2 60^\circ$ کدام است؟

۱) $2xy$ ۲) xy ۳) $2(x^2+y^2)$ ۴) $2(x^2-y^2)$

۱۰۲۷ اگر x زاویهٔ حاده و $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$، حاصل $\cos 3x+\sin\frac{x}{2}+\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{-3}{2}$

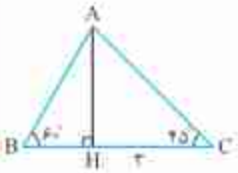
۱۰۲۸ اگر x و y دو زاویهٔ حاده، $\tan(x+y)=1$ و $\cos\left(2y-\frac{x}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشند، $2x-y$ کدام است؟

۱) 60° ۲) 90° ۳) 105° ۴) 15°

۱۰۲۹ اگر x و y زوایای حاده و $\sin(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$، حاصل $\sin(x+15^\circ)+\cos 2y$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۱۰۳۰★ در مثلث شکل مقابل، اندازهٔ ضلع BH چقدر است؟



۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) 3

۱۰۳۱ در مثلث ABC، $\hat{C}=45^\circ$، $\hat{B}=60^\circ$ و $AC=6\sqrt{2}$ است. طول ضلع AB کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{3}$ ۳) 3 ۴) 4

۱۰۳۲● در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC=3+\sqrt{3}$ و زاویه‌های $\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{C}=45^\circ$، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۶)

۱) 3 ۲) 4 ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۱۰۳۳ طول دو قاعدهٔ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ۶ و ۱۰ و یک زاویهٔ آن 30° می‌باشد. طول ساق ذوزنقه چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

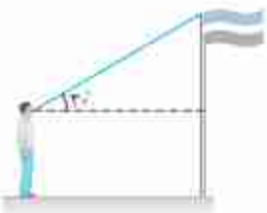
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) 2

کاربرد مثلثات

۱۰۳۴ یک هواپیما با زاویهٔ 12° از زمین بلند می‌شود. پس از طی تقریباً چند کیلومتر با همین زاویه به ارتفاع ۴ کیلومتری از سطح زمین می‌رسد؟ $(\sin 12^\circ\approx 0/2)$

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۰۳۵ شخصی با قد ۱۷۰ سانتی‌متر در ۱۲ متری یک پرچم، مطابق شکل ایستاده است. اگر زاویهٔ بین نوک پرچم و محور افقی که در چشم این شخص تشکیل می‌شود، ۳۰ درجه باشد، طول میلهٔ پرچم حدوداً چند متر است؟

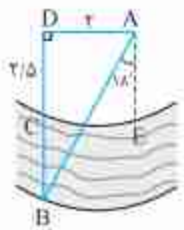


۱) ۶/۸ ۲) ۷/۲
۳) ۸/۱ ۴) ۸/۵

۱۰۳۶ یک بالن مطابق شکل، توسط دو طناب به زمین بسته شده است. اگر طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر باشد، طول طناب دوم تقریباً چند متر است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱
۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۱۰۳۷ برای تعیین عرض رودخانه‌ای (شکل مقابل)، دو نقطهٔ B و C را در دو طرف آن و نقطهٔ D را در امتداد BC چنان در نظر می‌گیریم که طول DC برابر ۲/۵ متر و نقطهٔ A چنان باشد که طول AD برابر ۲ متر بوده و AD بر DC و AE عمود باشد و $\hat{BAE}=18^\circ$. عرض رودخانه (طول BC) تقریباً چندمتر است؟ $(\tan 72^\circ=3)$



۱) ۳/۵ ۲) ۳
۳) ۴/۵ ۴) ۴

۱۰۳۸★ ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. اگر زاویهٔ رؤیت ابتدا و انتهای مجسمه با سطح افقی به‌ترتیب برابر 40° و 45° باشد، ارتفاع مجسمه به‌طور تقریبی چند متر است؟ $(\tan 40^\circ=0/8)$ (سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۴)

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲

مساحت

۱۰۳۹ در مثلث ABC، $\hat{A}=30^\circ$، $AB=4$ و $AC=6$، مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۰۴۰ در مثلث ABC، $\hat{C}=15^\circ$، $\hat{B}=45^\circ$، $AC=\sqrt{3}$ و $AB=8$، مساحت مثلث ABC چند واحد سطح است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) $6\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۰۴۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\hat{B}=90^\circ$، $\tan A=\frac{\sqrt{5}}{2}$ و $b=6$، مساحت مثلث ABC برابر کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰۴۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، طول قاعده برابر $BC=4\sqrt{3}$ و $\hat{B}=30^\circ$ است. مساحت مثلث کدام است؟

۱) $6\sqrt{2}$ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{3}$

۱۰۴۳ مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b=8$ و $c=5$ باشد، اندازهٔ ضلع متوسط a کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۶)

۱) $\sqrt{39}$ ۲) $\sqrt{41}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{2}$

۱۰۴۴ مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ واحد مربع است. اگر $AB=4$، $\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{C}=45^\circ$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۴

۱۰۴۵ در یک متوازی‌الاضلاع، طول دو ضلع ۴ و ۶ سانتی‌متر و یکی از زوایای داخلی آن 150° است. مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۰۴۶ متوازی‌الاضلاعی با طول یک ضلع $6\sqrt{3}$ و اندازهٔ یک زاویه 120°، مساحتی برابر ۱۸ دارد. طول ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۴۷ در متوازی‌الاضلاعی اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویهٔ بین دو قطر 135° است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (سراسری تجربی - ۹۶)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

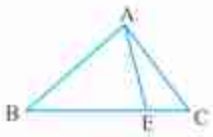
۱۰۴۸ مساحت شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع $2\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $9\sqrt{3}$ ۲) $18\sqrt{3}$ ۳) $24\sqrt{3}$ ۴) $30\sqrt{3}$

۱۰۴۹ قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع $\sqrt{3}$، طول ضلع یک شش‌ضلعی منتظم دیگر است. مساحت این شش‌ضلعی چند برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۱۰۵۰ در شکل مقابل اگر $BE=5EC$ باشد، نسبت $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}}$ کدام است؟



۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{2}{3}$

قسمت دوم: دایرهٔ مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی در آن

علامت نسبت‌های مثلثاتی

۱۰۵۱ کدام گزینه درست است؟

۱) $\sin 190^\circ > 0$ ۲) $\cos(-350^\circ) > 0$ ۳) $\sin(-230^\circ) < 0$ ۴) $\tan 310^\circ > 0$

۱۰۵۲ اگر $\sin\alpha\cos\alpha > 0$ و $\cos\alpha\tan\alpha < 0$ باشد، آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی واقع است؟ (سراسری ریاضی)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۰۵۳ اگر $\sin x+\tan x > 0$ و $-\sin x\tan x < 0$ باشد، انتهای کمان $\frac{1}{\cos x}$ در کدام ناحیه است؟ (سراسری تجربی)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۰۵۴ اگر $\cos x\sqrt{1+\tan^2 x}=-1$ و $\tan x=\frac{-\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$ باشد، انتهای کمان x در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

۱۰۵۵ اگر $1-\cos\theta=\frac{5}{4}$ و $\cos\theta.\sin\theta > 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۰۵۶ اگر $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$ باشد، انتهای کمان مقابل به زاویهٔ θ در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تغییرات نسبت‌های مثلثاتی

۱۰۵۷. با زیاد شدن زاویهٔ θ از 90° تا 270°، نسبت مثلثاتی $\sin\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) همواره زیاد می‌شود. ۲) همواره کم می‌شود. ۳) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود. ۴) ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

۱۰۵۸. با زیاد شدن زاویهٔ θ از 180° تا 360°، نسبت مثلثاتی $\cos\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) همواره زیاد می‌شود. ۲) همواره کم می‌شود. ۳) ابتدا زیاد و سپس کم می‌شود. ۴) ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

۱۰۵۹. کدام نامساوی زیر درست است؟

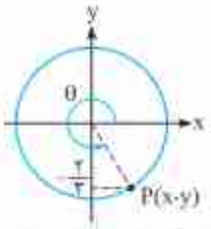
۱) $\sin 40^\circ > \sin 50^\circ$ ۲) $\sin 120^\circ > \sin 150^\circ$ ۳) $\sin 210^\circ < \sin 240^\circ$ ۴) $\sin 270^\circ > \sin 90^\circ$

۱۰۶۰. کدام گزینه درست است؟

۱) $\sin 20^\circ > \cos 50^\circ$ ۲) $\sin 30^\circ > \sin 50^\circ$ ۳) $\cos 40^\circ > \sin 70^\circ$ ۴) $\cos 10^\circ > \sin 50^\circ$

نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی

۱۰۶۱. در دایرهٔ مثلثاتی شکل مقابل، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ ۲) $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ۳) $\tan\theta = -\frac{3}{5}$ ۴) $\cot\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱۰۶۲. نقطهٔ P به طول $-\frac{3}{5}$ روی دایرهٔ مثلثاتی و در ناحیهٔ دوم قرار دارد. اگر θ زاویهٔ بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{3}{5}$ ۴) $-\frac{5}{3}$

۱۰۶۳. نقطه‌ای به عرض $-\frac{5}{13}$ روی دایرهٔ مثلثاتی و در ناحیهٔ سوم قرار دارد. مقدار $\cot\theta$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۲/۸ ۴) ۳

۱۰۶۴. نقطهٔ $(a-1, a+b)$ روی دایرهٔ مثلثاتی واقع در ناحیهٔ دوم قرار دارد. اگر $25\cos^2\theta - 9 = 0$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۱۰۶۵. اگر $5\sin x = 1 - 2m$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $0 \le m \le 1$ ۲) $-2 \le m \le \frac{1}{2}$ ۳) $-3 \le m \le 2$ ۴) $-2 \le m \le 3$

۱۰۶۶. اگر $30^\circ \le \theta \le 90^\circ$ و $\sin\theta = m + 1$، حدود m کدام است؟

۱) $\frac{1}{2} < m \le 1$ ۲) $-\frac{1}{2} \le m \le 0$ ۳) $-1 \le m \le 0$ ۴) $0 \le m < \frac{1}{2}$

۱۰۶۷. اگر $180^\circ < \theta < 270^\circ$ و $\cos\theta = \frac{2m-1}{2}$، حدود m کدام است؟

۱) $-1 < m < 1$ ۲) $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ ۳) $-1 < m < \frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2} < m < 1$

۱۰۶۸. اگر $30^\circ \le \alpha \le 130^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{2m-1}{3}$، حدود m کدام است؟

۱) $-1 \le m \le 1$ ۲) $\frac{5}{4} \le m \le 2$ ۳) $-1 \le m \le \frac{5}{4}$ ۴) $-2 \le m \le \frac{3}{4}$

۱۰۶۹. حاصل $|2\cos x - 3| + |1 - \cos x|$ برابر کدام است؟

۱) $\cos x - 2$ ۲) $2 - \cos x$ ۳) $4 - 3\cos x$ ۴) $3\cos x - 4$

۱۰۷۰. عبارت $A = 3 - 2\sin\theta$ به کدام بازه تعلق دارد؟

۱) $[-1, 1]$ ۲) $[-1, 4]$ ۳) $[1, 5]$ ۴) $[0, 6]$

۱۰۷۱. اگر بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت $4\cos x - 5$ به ترتیب A و B باشد، $A^2 + B$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۱۰۷۲. کم‌ترین مقدار عبارت $2\sin^2 x - 3\sin x + 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) صفر ۳) $-\frac{3}{8}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

۱۰۷۳. بیش‌ترین مقدار عبارت $A = 3\cos^2 x - 7\sin x + 3$، از کم‌ترین مقدار آن چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۰۷۴. کم‌ترین مقدار عبارت $2\cos^2 x - \cos x + 1$، کدام است؟

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰۷۵★. اگر $-\frac{\pi}{9} \le x \le \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3x = \frac{m-1}{2}$ باشد، مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $[1,2]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[2,3]$ ۴) $[3,4]$

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۱۰۷۶◇. زاویهٔ $\frac{2\pi}{9}$ رادیان چند درجه است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) 35° ۲) 45° ۳) 40° ۴) 50°

۱۰۷۷◇. زاویهٔ $37/5^\circ$ چند رادیان است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{3\pi}{16}$ ۲) $\frac{5\pi}{24}$ ۳) $\frac{5\pi}{18}$ ۴) $\frac{3\pi}{8}$

۱۰۷۸. زاویه‌های داخلی مثلثی با اعداد ۳، ۵ و ۷ متناسب می‌باشند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث بر حسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{9}$

۱۰۷۹◇. در چهارضلعی محدب $ABCD$، رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{8} = \frac{\hat{B}}{5} = \frac{\hat{C}}{7} = \frac{\hat{D}}{4}$ بین اندازهٔ زاویه‌های داخلی آن برقرار است. اندازهٔ زاویهٔ C بر حسب رادیان کدام است؟

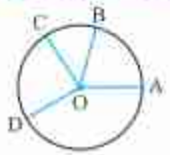
۱) $\frac{5\pi}{12}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) $\frac{7\pi}{9}$

۱۰۸۰. اگر θ زاویهٔ حاده و $\cos^2\theta - \sin^2\theta = -\frac{1}{2}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ θ بر حسب رادیان کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{12}$

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی در دایره بر حسب رادیان

۱۰۸۱◇. در شکل مقابل، O مرکز دایره و طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر ۲ (شعاع دایره) می‌باشد. اگر $\overset{\frown}{BC} = \frac{3}{4}\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD} = \frac{5}{2}\overset{\frown}{CB}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ AOD (روبه‌رو به کمان ABD) چند رادیان است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

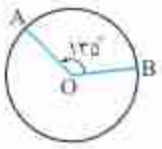


۱) $\frac{29}{8}$ ۲) $\frac{27}{8}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{33}{8}$

۱۰۸۲◇. در دایره‌ای به شعاع ۶۰ سانتی‌متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول یک متر، چند رادیان است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{1}{60}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۱۰۸۳◇. با توجه به شکل مقابل، اگر طول کمان AB برابر 3π باشد، آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟



۱) 16π ۲) 9π ۳) $\frac{9}{16}\pi$ ۴) $\frac{16}{9}\pi$

۱۰۸۴. اگر روی دایره‌ای به شعاع ۵ کیلومتر، مسافت $\frac{25\pi}{3}$ کیلومتر طی شود، زاویهٔ دوران بر حسب درجه کدام است؟

۱) ۲۳۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۲۷۵ ۴) ۳۰۰

۱۰۸۵◇. چه مدت طول می‌کشد که عقربهٔ دقیقه‌شمار به اندازهٔ $\frac{7\pi}{5}$ رادیان دوران کند؟

۱) ۵۴ دقیقه ۲) ۵۰ دقیقه ۳) ۴۸ دقیقه ۴) ۴۲ دقیقه

۱۰۸۶◇. ابتدا نقطهٔ $A(100)$ روی دایرهٔ مثلثاتی را به اندازهٔ 140° دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم و سپس نقطهٔ B را به اندازهٔ $\frac{1}{4}$ دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا به نقطهٔ C برسد. طول کمان BC کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{5}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{18}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرزی

۱۰۸۷: حاصل عبارت $\sin^2 270^\circ - \sin^2 270^\circ + 3\cot 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ + \cos^2 0^\circ$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{9}{4}$

۱۰۸۸: حاصل $\frac{\sin 270^\circ + \cos 180^\circ - \tan 180^\circ}{\sin 90^\circ + \cos 0^\circ - \cot 270^\circ}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

۱۰۸۹: اگر $3\sin 2\alpha - 2\cos 3\beta = 5$ و α و β زاویه‌های حاده باشند، حاصل $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۰۹۰: اگر $\frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} = 2$ و $0 \le x \le 180^\circ$ باشد، حاصل $\cos 3x + \cos(180^\circ + 2x) + \sin(180^\circ + x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -1

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص بر حسب رادیان

۱۰۹۱: مقدار عددی عبارت $\frac{2}{\sqrt{3}}\cot\frac{\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{2} - \tan 2\pi$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۰۹۲: حاصل کسر $\frac{\cot^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{6}}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{7}{9}$

۱۰۹۳: حاصل عبارت $\tan\frac{\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} + \sin^2\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۹۴: مقدار عددی عبارت $\cos^2\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{7} - 2\cot\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) صفر

۱۰۹۵: اگر $\theta \in [0, 2\pi]$ و $\sin\theta = 1$ باشد، مقدار عددی $\cos 2\theta + \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sin 3\theta$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۱

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ۴ ناحیه

۱۰۹۶: چند تا از نامساوی‌های روبه‌رو صحیح است؟

$\cot\frac{13\pi}{8} > 0$ ، $\tan\frac{11\pi}{6} < 0$ ، $\cos\frac{6\pi}{5} < 0$ ، $\sin\frac{4\pi}{7} < 0$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۹۷: کدام‌یک از عبارت‌های زیر، عددی منفی است؟

۱) $\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{7}$ ۲) $\sin\frac{3\pi}{5} - \tan\frac{7\pi}{8}$ ۳) $\cos\frac{7\pi}{5} + \cot\frac{5\pi}{7}$ ۴) $\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6}$

شیب خط

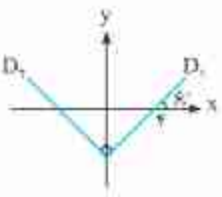
۱۰۹۸: خطی که با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد و از نقطهٔ (۱۰۴) می‌گذرد، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -5 ۲) -3 ۳) ۵ ۴) ۳

۱۰۹۹: به ازای چه مقداری از a، خط گذرنده از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}2\\a\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3a-1\\a+7\end{bmatrix}$ با جهت مثبت محور xها، زاویه 45° می‌سازد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴

۱۱۰۰: در شکل مقابل، خط D_2 محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟



۱) -12 ۲) -9 ۳) $-3\sqrt{3}$ ۴) $-4\sqrt{3}$

۱۲۷۷. اگر $\tan x = \frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{۲} - \cot\frac{x}{۲}$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۷)

۱) $-\frac{۲}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲۷۸. اگر $\frac{\sin x}{۱+\cos x} = ۲$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۲۷۹. اگر $\cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل کسر $\frac{۱+\cos ۲x+\cos ۴x}{\sin ۲x+\sin ۴x}$ کدام است؟ $(۰ < x < \frac{\pi}{۲})$

۱) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۸}$ ۲) $\frac{-۷\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{-۷\sqrt{۲}}{۴}$

قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin u = a$

۱۲۸۰. یکی از جواب‌های معادلهٔ $۲\sin^۲ x - ۳\sin x - ۲ = ۰$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

۱۲۸۱. جواب‌های کلی معادلهٔ $۵\sin x + ۳\cos(\frac{۳\pi}{۲} - x) - ۱ = ۰$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ است. مجموعهٔ مقادیر i کدام‌اند؟

۱) $\{۱۰۵\}$ ۲) $\{۱۰۷\}$ ۳) $\{۵\}$ ۴) $\{۱۰۵،۷\}$

۱۲۸۲. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin(۳x)\cos(۳x) = ۱$، در بازهٔ $[۰،\frac{\pi}{۲}]$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۸۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$، در بازهٔ $[۰،۲\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۸)

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

۱۲۸۴. نمودار تابع $y = \sin ۳x$، خط $y = -\frac{۱}{۲}$ را در بازهٔ $[۰،۲\pi]$ در چند نقطه قطع می‌کند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۸۵. جواب کلی معادلهٔ $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x) - ۲\sin(\pi - x) + ۱ = ۰$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی - ۹۰)

۱) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ۲) $۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۱۲۸۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\frac{۵\pi}{۶} + \sin(\frac{\pi}{۲}+x)\sin(\pi+x) = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری ریاضی - ۸۷)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۲۸۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos ۲x)\cot(\frac{\pi}{۲}+x) = ۱$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$

۱۲۸۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x.\cos^۲ x = ۱$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۱۲۸۹. یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + \sin x - ۱ = ۰$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$ ۲) $k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ۳) $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$ ۴) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$

۱۲۹۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x + \cos^۲ x = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} \pm \frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲} \pm \frac{\pi}{۳}$

۱۲۹۱. جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(x+\frac{\pi}{4})$، با شرط $x\neq k\pi$، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟ [سراسری تجربی-۹۶]

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

۱۲۹۲★. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 5x+\sin 4x=1+\cos\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ [سراسری تجربی خارج از کشور-۹۷]

۱) 8π ۲) 9π ۳) 10π ۴) 11π

۱۲۹۳. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x+\cos(\frac{\pi}{2}-x)=0$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ [سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۷]

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

۱۲۹۴☆. چند مثلث با مساحت $4\sqrt{3}$ و اندازهٔ دو ضلع ۴ و ۶ وجود دارد؟ [پژوهش ۱ کتاب درسی]

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۹۵★. نمودار تابع $y=1-3\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$، روی بازهٔ $[0,2\pi]$ در چند نقطه، بیش‌ترین مقدار را دارد و مجموع طول این نقاط کدام است؟

۱) ۳، $\frac{23\pi}{12}$ ۲) ۲، $\frac{11\pi}{6}$ ۳) ۲، $\frac{3\pi}{2}$ ۴) ۳، $\frac{3\pi}{2}$

۱۲۹۶☆. تابع $y=-3\sin(\frac{3\pi}{2}x)$ در بازهٔ $[0,5]$ در نقطه‌ای با کدام طول، کم‌ترین مقدار را دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۱۲۹۷★. نمودار تابع $y=3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ روی بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟ [سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰]

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۹۸☆. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$، در بازهٔ $[0,\pi]$، برابر کدام است؟ [ریاضی- ۹۵]

۱) $\frac{7\pi}{4}$ ۲) $\frac{9\pi}{4}$ ۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{3}$

۱۲۹۹. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{1}{2}$، در بازهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟ [ریاضی خارج از کشور- ۹۸]

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos x=a$

۱۳۰۰☆. جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $4\cos x(\cos x-2)=-3$، کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ [پژوهش ۱ کتاب درسی]

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

۱۳۰۱★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x=3\cos x$ به کدام صورت است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ [سراسری تجربی- ۸۷]

۱) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۳۰۲☆. نمودار تابع $y=x+2\cos 3x$، خط $y=x+1$ را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{8}$

۱۳۰۳. نمودار تابع $f(x)=2\cos((3x-1)\pi)$ در بازهٔ $(-1,0,1)$، محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۳۰۴☆. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 2x-\cos 2x+1=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) $k\pi$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $2k\pi$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

۱۳۰۵☆. در معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x+\cos x=1$، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟ [سراسری ریاضی خارج از کشور]

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) مثلث قائم‌الزاویه

۳) ذوزنقه ۴) مستطیل

۱۳۰۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin(\pi-x).\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+3\cot x.\sin(\pi+x)=0$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$ [سراسری تجربی- ۸۷]

۱) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۱۳۰۷★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cos\frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۱۳۰۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2\frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{\pi}{2} + x)\cos(-x)$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۳۰۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(1 + \tan^2 x)\cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی)

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۳۱۰★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۵)

۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۳۱۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۷)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۳۱۲★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴ و ۹۸)

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۳۱۳★. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۳۱۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2\frac{5\pi}{4}$، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (سراسری تجربی- ۹۶)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۳۱۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - 5\cos x + 4 = 0$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (پایلوت ۱۱ کتاب دوم)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $2k\pi$

۱۳۱۶. معادلهٔ $\sin 2x + \sqrt{2}\cos x = 0$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳۱۷. مجموع جواب‌های معادلهٔ $\cos 3x - \sin x = 0$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ کدام است؟ (پایلوت ۱۱ کتاب دوم)

۱) $-\frac{\pi}{8}$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $-\frac{3\pi}{8}$ ۴) $-\frac{5\pi}{8}$

۱۳۱۸. مجموع جواب‌های معادلهٔ $2\sin 2x + \sin 4x = 0$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

۱۳۱۹. معادلهٔ $1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۲۰. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1 = 0$ در بازهٔ $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $-\pi$ ۴) $-\frac{\pi}{2}$

۱۳۲۱★. نمودار تابع $y = -4\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$، روی بازهٔ $[-1, 0]$ در چند نقطه بیش‌ترین مقدار را دارد؟ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۲۲. نمودار تابع $y = 5\cos(\frac{3\pi}{4} - \pi x) + 1$ روی بازهٔ $[-1, 2]$، در چند نقطه کم‌ترین مقدار را دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۳۲۳. نمودار تابع $y = -2\cos(\frac{\pi}{3} - 3x)$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، محور x ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۳۲۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x)$، کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۱۳۲۵. در معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$، مجموع تمام جواب‌ها در بازهٔ $[0, \pi]$، کدام است؟ (مواضعی تجربی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

۱۳۲۶. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟ (مواضعی ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث متساوی‌الساقین

۱۳۲۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$، کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی تجربی خارج از کشور- ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{5}$ ۲) $\frac{2k\pi}{5}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ ۴) $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

۱۳۲۸. یکی از جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \sqrt{3}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{7\pi}{6}$ ۲) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

۱۳۲۹. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی تجربی- ۹۶)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

حل معادلهٔ مثلثاتی $\tan u = a$

۱۳۳۰. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی تجربی- ۹۷)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۱. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^2 x - \sin 2x = 1$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی تجربی)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۲. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x(\cos x - \sin x) = 1$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی ریاضی خارج از کشور)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۳. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی تجربی- ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۳۳۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی ریاضی- ۸۷)

۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

۱۳۳۵. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$، به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$ (مواضعی تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۱۳۳۶. اگر $\tan x + \cot x = k - 1$، آن‌گاه حدود k برای آن‌که معادله جواب داشته باشد، کدام است؟

۱) $-1 < k < 3$ ۲) $k \geq 3$ یا $k \leq -1$ ۳) $k > 3$ ۴) $k < -\frac{1}{2}$

۱۳۳۷. مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cot\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} = 2\sqrt{3}$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) 2π ۳) $\frac{7\pi}{3}$ ۴) $\frac{11\pi}{3}$

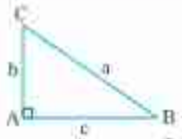
پاسخ فصل ۹ مثلثات

۱۰۱۶ گزینه ۴

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حادهٔ B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sin B=\frac{b}{a}\ ,\ \cos B=\frac{c}{a}\ ,\ \tan B=\frac{b}{c}\ ,\ \cot B=\frac{c}{b}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، داریم:



$$\tan B=\frac{b}{c}=\sqrt{2}\Rightarrow b=\sqrt{2}c\ ,\ a=3\sqrt{3}$$

رابطهٔ فیثاغورس: $a^2=b^2+c^2\Rightarrow(3\sqrt{3})^2=(\sqrt{2}c)^2+c^2$

$$\Rightarrow 27=2c^2+c^2\Rightarrow 3c^2=27\Rightarrow c^2=9\Rightarrow c=3$$

۱۰۱۷ گزینه ۴

با توجه به شکل، مقدار $\sin B$ با مقدار $\frac{AC}{BC}$ برابر است، بنابراین:

$$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{15}{17}$$

برای حل تست، می‌توان $AC=15$ و $BC=17$ در نظر گرفت. بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^2=BC^2-AC^2=17^2-15^2=(17-15)(17+15)$$

$$=2\times 32=64\Rightarrow AB=8$$

$$\Rightarrow \cos B+\sin C=\frac{AB}{BC}+\frac{AB}{BC}=\frac{2AB}{BC}=\frac{2\times 8}{17}=\frac{16}{17}$$

۱۰۱۸ گزینه ۴

بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$b^2=a^2+c^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2=3+5=8\Rightarrow b=\sqrt{8}$$

$$\sin A=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

$$\cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}}=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2 A+\cot^2 A=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{3}{8}+\frac{5}{3}=\frac{9+40}{24}=\frac{49}{24}$$

۱۰۱۹ گزینه ۴

$$\cos C=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{24}{BC}\Rightarrow BC=\frac{24\times 5}{4}=30$$

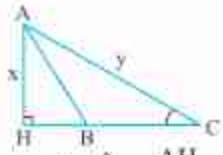
$$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow 30^2=AB^2+24^2$$

$$\Rightarrow AB^2=900-576=324\Rightarrow AB=18$$

$$\text{محیط مثلث}=AC+AB+BC=24+18+30=72$$

۱۰۲۰ گزینه ۳

طول ضلع AH را برابر x و طول ضلع AC را برابر y در نظر می‌گیریم:



$$\sin C=\frac{5}{13}=\frac{AH}{AC}=\frac{x}{y}=\frac{5k}{13k}$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: AH^2+HC^2=AC^2\Rightarrow(5k)^2+81=(13k)^2$$

$$\Rightarrow 169k^2-25k^2=81\Rightarrow 144k^2=81\Rightarrow k^2=\frac{81}{144}$$

$$\Rightarrow k=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=5k=5\times 0/75=3/75$$

۱۰۲۱ گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC (با توجه به شکل صورت سؤال)، داریم:

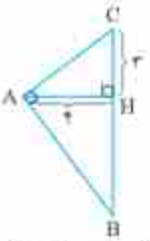
$$\cot C=\frac{CH}{AH}=\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}k}{2k}\Rightarrow CH=\sqrt{5}k\ ,\ AH=2k$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: AC^2=AH^2+CH^2\Rightarrow 96^2=5k^2+4k^2=9k^2$$

$$\Rightarrow 96\times 96=81k^2\Rightarrow k^2=32^2\Rightarrow k=32$$

$$\Rightarrow AH=2k=64$$

۱۰۲۲ گزینه ۱



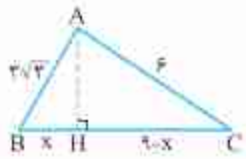
$$\overset{\Delta}{AHC}: AC^2=AH^2+HC^2$$

$$\Rightarrow AC^2=4^2+3^2=25\Rightarrow AC=5$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، دو زاویهٔ B و C متمم یکدیگرند و در نتیجه داریم:

$$\cos B=\sin C=\frac{AH}{AC}=\frac{4}{5}$$

۱۰۲۳ گزینه ۲



مثلث ABC قائم‌الزاویه نیست (تساوی $a^2=b^2+c^2$ برقرار نیست) پس با رسم یک ارتفاع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌وجود می‌آوریم. با رسم ارتفاع AH و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC، داریم:

$$\cos C=\frac{CH}{AC}=\frac{9-x}{6}$$

برای به‌دست آوردن مقدار x از قضیهٔ فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:

$$AH^2=AC^2-CH^2\ ,\ AH^2=AB^2-BH^2$$

$$\Rightarrow AC^2-CH^2=AB^2-BH^2\Rightarrow 6^2-(9-x)^2=(3\sqrt{3})^2-x^2$$

$$\Rightarrow 36-(81-18x+x^2)=27-x^2$$

$$\Rightarrow -45+18x-x^2=27-x^2\Rightarrow 18x=45+27=72$$

$$\Rightarrow x=\frac{72}{18}=4\Rightarrow \cos C=\frac{9-x}{6}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$$

تست‌های کنکور سراسری ۱۴۰۰

۲۸۳۴. فرض کنید $a=\sqrt[۳]{\sqrt{۶}-۲}$ و $b=\sqrt[۳]{\sqrt{۶}+۲}$. مقدار $(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲$، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $۴(۲+\sqrt{۳})$ ۲) $۴(۲-\sqrt{۳})$ ۳) $۱۶(۲+\sqrt{۳})$ ۴) $۱۶(۲-\sqrt{۳})$

۲۸۳۵. فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱)(\sqrt[۳]{x^۲}-۱)=۲\sqrt[۳]{x}$ باشند. مقدار $x_۱+x_۲$ کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۸۳۶. فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x=۵-x^۲$ باشند. $\frac{۱}{(x_۱+۱)^۲}$ و $\frac{۱}{(x_۲+۱)^۲}$، ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $۱۲۵x^۲+۱۶x=۱$ ۲) $۱۲۵x^۲=۱۶x+۱$ ۳) $۱۲۵x^۲=۱۲x+۱$ ۴) $۱۲۵x^۲+۱۲x=۱$

۲۸۳۷. اگر $f(x)=۱۶\cos^۲(۳x)\cos^۲(۶x)\cos^۲(۱۲x)\cos^۲(۲۴x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۳۶})$ کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۶-۳\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶-\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶+\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

۲۸۳۸. اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha)=\frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(۲\alpha)}$، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$ ۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

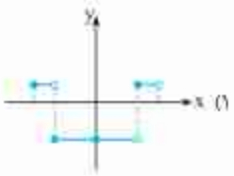
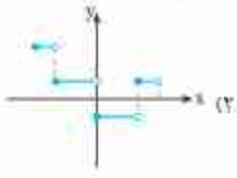
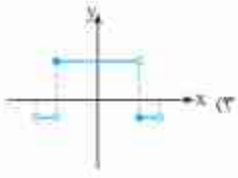
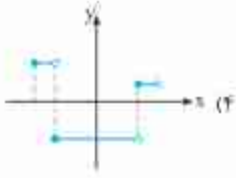
۲۸۳۹. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲(x)-\sin^۲(x)\cos(۳x)=۱$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۸۴۰. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\log_۲(x^۲-x-۲)}{\sqrt{x^۲-۱}+۱}$، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $(۲,+\infty)\cup(-\infty,-۱)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۱,+\infty)\cup(-\infty,-۲)$ ۴) $(-۲,۱)$

۲۸۴۱. نمودار تابع $y=۲[|[۳x]|-۱]$ به ازای $-\frac{۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۳}$، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۸۴۲. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$ و $۲y=x^۲$ تا مبدأ مختصات، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۵}$

۲۸۴۳. اگر $\frac{۳^{x+۵}+۳^{x+۴}+۳^{x+۳}+۳^{x+۲}+۳^{x+۱}+۳^x}{۲^{x+۳}+۲^{x+۲}+۲^{x+۱}+۲^x+۲^{x-۱}+۲^{x-۲}}=۵۲$ باشد، مقدار x کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۴۴. نمودار تابع $y=۳^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۸۴۵. اگر تساوی $\log_x y-۲\log_y x=۱$ به ازای $x,y>۱$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $y=x^۲$ ۲) $y=x^۳$ ۳) $y=\sqrt{x}$ ۴) $xy=۲$

۲۸۴۶. مقدار $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$ کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۸۴۷. مقدار $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است.) (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۸۴۸. قرینهٔ نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۴-

۲۸۴۹. فرض کنید $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ و $f(x)=1-x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸۵۰. تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$ کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸۵۱. قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل برخورد تابع f با خط نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۲۸۵۲. فرض کنید $f(x)=(x[x^2+\frac{1}{2}])^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{3}{\sqrt{8}}$، چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۴- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۸۵۳. فرض کنید $g(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ و $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸۵۴. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) 32π ۲) 64π ۳) $\frac{256\pi}{3}$ ۴) $\frac{512\pi}{3}$

۲۸۵۵. احتمال این‌که یک دانش‌آموز در یک امتحان نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۹ و در دو امتحان متوالی نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۸۵ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این‌که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{85}{94}$ ۳) $\frac{17}{18}$ ۴) $\frac{45}{47}$

۲۸۵۶. فرض کنید $a,b,c\in\{1,2,\cdots,9\}$، چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^2+bx-c=0$ می‌توان تشکیل داد، به طوری‌که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیش‌تر باشد؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۸۵۷. در یک جلسهٔ آموزشی، میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به طوری‌که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

۲۸۵۸. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب‌شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $\frac{13}{21}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۲۸۵۹. شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(۲۰۴)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم، که نقطهٔ B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳۰-۱)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

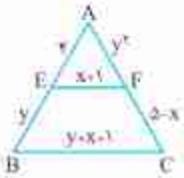
۲۸۶۰. نقطهٔ $H(۲۰۱)$ را روی خط $۳x-y=۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری‌که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

۱) $(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۱}{۶})$

۲۸۶۱. دایره‌های $x^۲+y^۲+۲y=۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۳$ متقاطع‌اند. معادلهٔ وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)

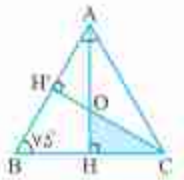
۱) $x=y$ ۲) $x=۱+y$ ۳) $x=-y$ ۴) $x=۱-y$

۲۸۶۲. در شکل مقابل EF موازی BC است. مقدار $۲x-y$، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)



۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

۲۸۶۳. در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC، کدام است؟ (سراسری- ۱۴۰۰)



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۸}{۷+۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۹}{۷+۴\sqrt{۳}}$

۲۸۶۴. فرض کنید $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}$. مقدار $(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹

۲۸۶۵. مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن‌گاه حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیهٔ اکرم، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۸۵ ۴) ۹۱

۲۸۶۶. فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x=x^۲-۴$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $\frac{۱}{x_۲}+x_۱^۳$ و $\frac{۱}{x_۱}+x_۲^۳$ است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $۴x^۲=۵۱x+۲۲۱$ ۲) $۴x^۲+۵۱x=۲۲۱$
۳) $۴x^۲=۵۱x+۱۹۷$ ۴) $۴x^۲+۵۱x=۱۹۷$

۲۸۶۷. اگر $f(x)=۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

۲۸۶۸. فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha)=\frac{۲}{۳}$ باشد. حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^۲(\alpha)-۱|}$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۲) $\frac{۴(-۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۳) $\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$ ۴) $-\frac{۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$

۲۸۶۹. تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۵\sin^۲(x)+۲\cos(۳x)=-۲$، در فاصلهٔ $[-\pi,\pi]$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۲۸۷۰. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_۲(|x^۲-۲|-x)$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ۳) $[-۱,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

۲۸۷۱. تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}x & ۰\le x\le ۱\\ ۲-x & ۱<x\le ۲\end{cases}$ را که دورهٔ تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ محصور به منحنی f و محور xها در بازهٔ $[-۰/۷۵۰۳/۲۵]$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۲۸۷۲. فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+۳} - ۱$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۸۷۳. از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازهٔ ۰/۸ ارتفاع قبلی از زمین به‌صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۵۴ ۲) ۵۷ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

۲۸۷۴. تابع $y = ۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

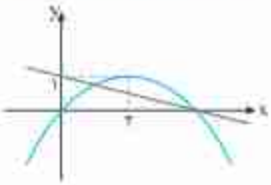
۲۸۷۵. اگر در معادلهٔ $۲\log_x a + \log_a \sqrt{x} = ۲$، مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۲۸۷۶. مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۴ - x^۳ + ۱} + \sqrt{x^۳ + ۱} - x^۲}{x}$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۱

۲۸۷۷. نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to۴^-} \frac{f(x)+g(x)}{۴-x}$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۸۷۸. تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) -۱۲ ۲) -۸ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۲۸۷۹. فرض کنید $f(x) = x(۱-x^۲)$ و $g(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$، تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(fof)og$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸۸۰. مینیمم مطلق تابع $f(x) = x|۳ - x^۲|$ در بازهٔ $[-۱/۵۰\sqrt{۳}]$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۶}{۴}$ ۲) -۲ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{۹}{۸}$

۲۸۸۱. قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[۳]{-x}$ را در دامنهٔ $[-۱,۰]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۲}{۳\sqrt{۶}}$ ۲) $\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$ ۳) $\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$

۲۸۸۲. فرض کنید $f(x) = (x[x])^۳$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ چند برابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۸۸۳. فرض کنید $g(x) = ax^۲ + ۵x + b$، اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \le ۲ \\ g'(x) & x > ۲ \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۲۸۸۴. کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^2 = 4x$ از نقطهٔ $M(3,0)$، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

۲۸۸۵. احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دورهٔ بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن‌که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد.) (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{20}{27}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $\frac{6}{7}$

۲۸۸۶. فرض کنید $a,b,c \in \{1,2,\cdots,9\}$، چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان نوشت که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۲۸۸۷. به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری‌که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۴۳۲

۲۸۸۸. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{66}{205}$ ۲) $\frac{67}{205}$ ۳) $\frac{168}{325}$ ۴) $\frac{177}{325}$

۲۸۸۹. سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$، خط راست گذرا از نقطهٔ $(1,0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

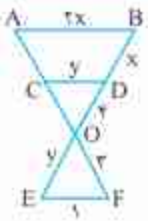
۲۸۹۰. نقاط B، C و $M(3,2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازهٔ میانهٔ AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعدهٔ مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) ۵ ۲) -2 ۳) -5 ۴) -8

۲۸۹۱. دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادلهٔ دایره‌ای که با دایرهٔ قبلی مماس داخل بوده و از نقطهٔ $(-3,0)$ گذشته و شعاع آن با قطر دایرهٔ اصلی برابر باشد، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $x^2 + y^2 - 4x = 3$ ۲) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ ۳) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ۴) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

۲۸۹۲. در شکل مقابل AB، CD و EF موازی‌اند. طول پاره‌خط AC، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)



۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) ۲
۴) ۳

۲۸۹۳. در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور - ۱۴۰۰)

۱) $\frac{6}{2+\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{8}{2+\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{12}{3+2\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{16}{3+2\sqrt{2}}$

پاسخ تست‌های کنکور سراسری ۱۴۰۰

۲۸۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا عبارت داده‌شده را به کمک اتحادها ساده می‌کنیم:

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$$
$$=(((a^2+b^2)-2ab)((a^2+b^2)+2ab))^2$$
$$=((a^2+b^2)^2-4a^2b^2)^2=(a^2+b^2-2a^2b^2)^2$$
$$=((\sqrt[3]{\sqrt{6}-2})^3+(\sqrt[3]{\sqrt{6}+2})^3-3\sqrt[3]{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}\,)^2 = \text{حاصل}$$
$$=(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-2\sqrt{6-4})^2=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2$$
$$=24+8-8\sqrt{12}=32-16\sqrt{3}=16(2-\sqrt{3})$$

۲۸۳۵ ۱ ۲ ۳ ۴

با تغییر متغیر $\sqrt[3]{x}=A$، معادله به‌صورت $(A^2+\frac{1}{A^2}+1)(A^2-1)=2A$ در می‌آید. دو طرف معادله را در A^2 ضرب می‌کنیم. (سمت چپ معادله، A^2 را در پرانتز اول ضرب می‌کنیم):

$$(A^4+1+A^2)(A^2-1)=2A^3 \Rightarrow A^6-1=2A^3$$
$$\Rightarrow A^6-2A^3-1=0 \Rightarrow A^3=t \Rightarrow t^2-2t-1=0$$
$$\Rightarrow \Delta=8 \Rightarrow t=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow A^3=t=1+\sqrt{2} \Rightarrow x_1=A^3=1+\sqrt{2}$$
$$A^3=t=1-\sqrt{2} \Rightarrow x_2=A^3=1-\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x_1+x_2=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$$

۲۸۳۶ ۱ ۲ ۳ ۴

x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-5=0$ هستند، بنابراین:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1 \quad , \quad x_1x_2=\frac{c}{a}=-5$$

مجموع دو ریشهٔ جدید را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}=\frac{(x_2+1)^3+(x_1+1)^3}{((x_1+1)(x_2+1))^3}$$
$$=\frac{(x_1+x_2+2)^3-3(x_1+x_2+2)(x_1x_2+x_1+x_2+1)}{(x_1x_2+x_1+x_2+1)^3}$$
$$=\frac{(-1+2)^3-3(-1+2)(-5-1+1)}{(-5-1+1)^3}=\frac{16}{-125}=-\frac{16}{125}=-\frac{b}{a}$$

در بین گزینه‌ها، فقط در معادلهٔ $125x^2+16x=1$، مقدار $-\frac{b}{a}$ برابر $-\frac{16}{125}$ است. توجه کنید در محاسبهٔ $(x_1+1)^3+(x_2+1)^3$ از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده شده است.

۲۸۳۷ ۱ ۲ ۳ ۴

با قرار دادن $\frac{\pi}{36}$ به جای x، داریم:

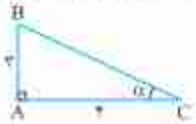
$$f(\frac{\pi}{36})=16\cos^2(\frac{\pi}{12})\cos^2(\frac{\pi}{6})\cos^2(\frac{\pi}{3})\cos^2(\frac{2\pi}{3})$$
$$=16\cos^2(\frac{\pi}{12})\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cos^2(\frac{\pi}{12}) \quad (1)$$

برای به‌دست آوردن مقدار $\cos^2\frac{\pi}{12}$، از اتحاد $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos2(\frac{\pi}{12})}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}$$
$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$
$$(1),(2)\Rightarrow f(\frac{\pi}{36})=\frac{3}{4}\times\frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۲۸۳۸ ۱ ۲ ۳ ۴

با رسم مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمهٔ ۳ و ۴ و با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در آن قرار دارد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست می‌آوریم:



$$\tan\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{4}{3}$$
$$BC^2=AB^2+AC^2=9+16=25\Rightarrow BC=5$$
$$\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{3}{5}\ ,\ \cos\alpha=-\frac{4}{5}$$
$$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\cos(-(\frac{\pi}{2}-2\alpha))=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)=\sin2\alpha$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5})=\frac{24}{25} \quad (1)$$
$$\cos(\alpha+\pi)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=\frac{4}{5} \quad (2)$$
$$\cot(2\alpha)=\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}\overset{(1)}{=}\frac{2\cos^2\alpha-1}{\frac{24}{25}}=\frac{2\times\frac{16}{25}-1}{\frac{24}{25}}=\frac{7}{24} \quad (3)$$
$$(1),(2),(3)\Rightarrow \text{حاصل}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{4}{5}}{\frac{7}{24}}=\frac{\frac{44}{25}}{\frac{7}{24}}=\frac{1056}{175}$$

۲۸۳۹ ۱ ۲ ۳ ۴

در معادله به جای $\cos^2x$، عبارت $1-\sin^2x$ قرار می‌دهیم:

$$1-\sin^2(x)-\sin^2(x)\cos(2x)=1$$
$$\Rightarrow-\sin^2x-\sin^2x\cos2x=0\Rightarrow-\sin^2x(1+\cos2x)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\sin^2x=0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ 1+\cos2x=0\Rightarrow\cos2x=-1\Rightarrow2x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

جواب‌های $x=k\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$، $x=0$، $x=\pi$ و $x=2\pi$ می‌باشد.

همچنین جواب‌های $2x=2k\pi+\pi$ در بازهٔ $[0,2\pi]$، $x=\frac{\pi}{2}$، $x=\pi$ و $x=\frac{5\pi}{2}$ است. بنابراین معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$، ۵ جواب 0، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{5\pi}{2}$ و 2π دارد.

۲۸۴۰ ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: دامنهٔ تابع با حل نامعادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$x^2-x-2>0\ ,\ x^2-1\geq0\ ,\ \sqrt{x^2-1}+1\neq0$$
$$x^2-x-2>0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}x<-1 \text{ یا } x>2 \quad (1)$$
$$x^2-1\geq0\Rightarrow x^2\geq1\xrightarrow{\text{جذر}}|x|\geq1\Rightarrow x\leq-1 \text{ یا } x\geq1 \quad (2)$$

عبارت $\sqrt{x^2-1}+1$ همواره مثبت است و در نتیجه دامنهٔ تابع با اشتراک جواب‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید: $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

فصل ۹ مثلثات

قسمت هفتم: معادلات مثلثاتی

معادلهٔ مثلثاتی: معادلاتی که بر حسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول نوشته می‌شوند را معادلهٔ مثلثاتی می‌نامیم. به عنوان مثال، معادلات $2\sin^2 x + \cos 2x = 0$ و $3\tan x + \cot x = 1$ معادله‌های مثلثاتی هستند.

جواب معادله: مقدارهایی از زاویهٔ مجهول که به ازای آن‌ها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادلهٔ مثلثاتی پیدا کردن کلیهٔ جواب‌های آن معادله است.

به عنوان مثال، در معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x = 1$، داریم:

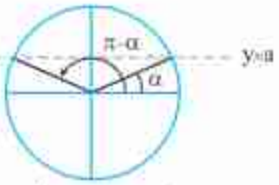
$$2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{3})$$

$x = \frac{\pi}{3}$ و $x = -\frac{\pi}{3}$ جواب‌هایی از معادله‌اند و تمام جواب‌های معادله $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ می‌باشند.

حل معادلهٔ مثلثاتی

برای حل یک معادلهٔ مثلثاتی، ابتدا به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری، آن را به معادلهٔ ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = a$ یا $\cot x = a$ تبدیل شود.

حل معادلهٔ $\sin x = a$



برای حل معادلهٔ $\sin x = a$ که $-1 \le a \le 1$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin\alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \cdot x = 2k\pi + (\pi-\alpha) = (2k+1)\pi - \alpha \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

نکته اگر معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت $\sin u = \sin\alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $u = 2k\pi + (\pi - \alpha)$ و $u = 2k\pi + \alpha$ می‌باشد.

مثال: معادلهٔ $\sin 2x + \sin x = 0$ را حل کنید.

پاسخ: برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x + \sin x = 0$، معادله را به‌صورت $\sin u = \sin\alpha$ می‌نویسیم:

$$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin x = \sin(-x) \Rightarrow \sin(\underbrace{2x}_{u}) = \sin(\underbrace{-x}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - x \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته اگر معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $\sin u = -\sin\alpha$ باشد، برای حذف منفی، معادله را به‌صورت $\sin u = -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ می‌نویسیم.

نکته برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح ± 100 و ± 20 و ... را قرار می‌دهیم و برای **محاسبهٔ راحت‌تر**، بهتر است جواب آخر را به‌صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

تست: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin 3x = \cos x$ در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{9\pi}{8}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{11\pi}{8}$

پاسخ: برای آن‌که معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت $\sin u = \sin\alpha$ دربیاوریم، به جای $\cos x$، عبارت $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ را قرار می‌دهیم (یا می‌توانیم $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$ نیز قرار دهیم). بنابراین داریم:

$$\sin 3x = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \xrightarrow[\alpha = \frac{\pi}{2} - x]{u = 3x} \begin{cases} 3x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{4k\pi + \pi}{8} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4k\pi + \pi}{4} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در تساوی $x = \frac{4k\pi + \pi}{8}$، اگر به جای k مقادیر صحیح را قرار دهیم جواب‌های $x = \frac{\pi}{8}$ و $x = \frac{5\pi}{8}$ در بازهٔ $[0, \pi]$ به‌دست می‌آیند و در معادلهٔ $x = \frac{4k\pi + \pi}{4}$، فقط به ازای $k = 0$، جواب $x = \frac{\pi}{4}$ در بازهٔ $[0, \pi]$ به‌دست می‌آید. بنابراین مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} = \pi \Rightarrow$$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: معادلهٔ $2\sin^3 x - \sin x = 0$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: برای حل معادله، با استفاده از فاکتورگیری داریم:

$$\sin x(2\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow[k=0,1]{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})} x = 0 \ ، \ x = \pi \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4k\pi - \pi}{4} \\ x = 2k\pi + (\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{4k\pi + 5\pi}{4} \end{cases} \xrightarrow[k=0]{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

معادله در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$، ۶ جواب دارد، بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

یادآوری مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin A$$

تست: چند مثلث وجود دارد که مساحت آن ۶ و طول دو ضلع آن ۴ و ۶ باشند؟ (سراسری ریاضی)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: با فرض $AB = 6$ و $AC = 4$ داریم:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = 6 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$$

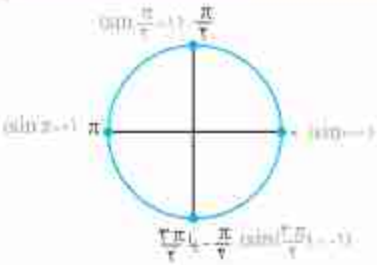
چون A اندازهٔ یک زاویهٔ مثلث است، پس $0^\circ < A < 180^\circ$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \ \text{یا} \ \hat{A} = 150^\circ$$

پس دو مثلث می‌توان رسم کرد. بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u = 0$ و $\sin u = \pm 1$ به‌دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد:



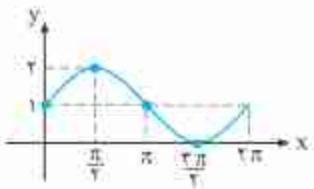
۱) $\sin u = 0 = \sin 0 \Rightarrow u = k\pi \ ، \ (k \in \mathbb{Z})$

۲) $\sin u = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \ ، \ (k \in \mathbb{Z})$

۳) $\sin u = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \ ، \ (k \in \mathbb{Z})$

نکته ریشه‌های معادلات $\sin u = 1$ و $\sin u = -1$، ریشه‌های مضاعف معادلهٔ مثلثاتی هستند و بقیهٔ ریشه‌ها، جزء ریشه‌های ساده می‌باشند و در تعیین علامت عبارت‌های مثلثاتی، در دو طرف ریشه‌های مضاعف تغییر علامت نداریم و در دو طرف ریشه‌های ساده تغییر علامت داریم.

به عنوان مثال، نمودار تابع $f(x) = 1 + \sin x$ به کمک انتقال در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌صورت مقابل است.



با توجه به نمودار، $x = \frac{3\pi}{2}$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x) = 0$ است و علامت $f(x)$ در دو طرف $x = \frac{3\pi}{2}$ مثبت است.

نکته گاهی اوقات نمی‌توان جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی را به‌دست آورد ولی تعداد جواب‌های معادله را می‌توان تعیین کرد.

تست: معادلهٔ $(۳\sin x-۱)(۴\sin x-۵)(\sin x+۱)=۰$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: $(۳\sin x-۱)(۴\sin x-۵)(\sin x+۱)=۰ \Rightarrow ۳\sin x-۱=۰$ یا $۴\sin x-۵=۰$ یا $\sin x+۱=۰$

معادله ریشه ندارد $\Rightarrow \sin x=\frac{۵}{۴}>۱$ ، معادله دو جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد $\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۳}$

معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=\frac{۳\pi}{۲}$ است $\Rightarrow \sin x=-۱$

بنابراین معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای سه ریشه است و در نتیجه، گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکته مهم برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۲ u=a^۲=\sin^۲\alpha$ از روابط مقابل استفاده می‌کنیم:

$$u=k\pi\pm\alpha \ ,(k\in Z)$$

مثال: $\sin^۲ x=\frac{۱}{۲}=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲=\sin^۲\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$

اگر برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۲ x=\frac{۱}{۲}$، از فرمول گفته‌شده استفاده نکنیم، باید به‌صورت زیر حل کنیم:

$$\sin^۲ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x=\pm\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

باید یک بار جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و بار دیگر جواب‌های معادلهٔ $\sin x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را به‌دست بیاوریم. داریم:

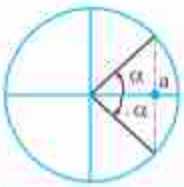
$$\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\underbrace{\sin(-\frac{\pi}{۴})}_{\alpha}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\\ x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

اگر اجتماع ۴ جواب را به‌دست آوریم، همان $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ خواهد بود.

حل معادلهٔ $\cos x=a$

برای حل معادلهٔ $\cos x=a$ و $-۱\le a\le ۱$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید.



$$\cos x=\cos\alpha\Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$$

نکته جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos u=\cos\alpha$ به‌صورت $u=۲k\pi\pm\alpha$ است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

آ) $۲\cos x-\sqrt{۳}=۰$ ب) $\cos ۲x-۳\cos x+۲=۰$

پاسخ: آ) $۲\cos x-\sqrt{۳}=۰\Rightarrow ۲\cos x=\sqrt{۳}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in Z$

ب) از اتحاد مثلثاتی $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ استفاده می‌کنیم و معادلهٔ داده‌شده را به‌صورت یک معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $\cos x$ می‌نویسیم:

$$\cos ۲x-۳\cos x+۲=۰\Rightarrow(۲\cos^۲ x-۱)-۳\cos x+۲=۰\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۳\cos x+۱=۰$$

با انتخاب $A=\cos x$، معادله به‌صورت $۲A^۲-۳A+۱=۰$ درمی‌آید:

$$۲A^۲-۳A+۱=۰\xrightarrow[\text{برابر صفر است}]{\text{مجموع ضرایب}}A=۱\ ,\ A=\frac{۱}{۲}$$

$$A=\frac{۱}{۲}=\cos x=\cos\underbrace{\frac{\pi}{۳}}_{\alpha}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\ ,\ k\in Z \qu� A=۱=\cos x=\cos\underbrace{۰}_{\alpha}\Rightarrow x=۲k\pi\pm۰\Rightarrow x=۲k\pi\ ,\ k\in Z$$

نکته برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos u=-\cos\alpha$، برای حذف منفی، از رابطهٔ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ استفاده می‌کنیم و معادله را به‌صورت $\cos u=\cos(\pi-\alpha)$ می‌نویسیم.

تست: جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{2}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

پاسخ: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$، داریم:

$$\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{-\cos 2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

حالت‌های خاص

هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u = 0$ و $\cos u = \pm 1$ به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد. $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $\cos u = 1 \Rightarrow u = 2k\pi$ ۳) $\cos u = -1 \Rightarrow u = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

نکته ریشه‌های معادلات $\cos u = \pm 1$، ریشه‌های مضاعف معادلات مثلثاتی هستند.

تست: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x + 3\sin(\frac{\pi}{2} + x) + 2 = 0$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) $k\pi$ ۲) $2k\pi$ ۳) $\frac{k\pi}{2}$ ۴) $(2k+1)\pi$

پاسخ:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \xrightarrow{\text{معادله}} \cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \cos x = -1 \,،\, \cos x = -\frac{c}{a} = -2$$

معادلهٔ $\cos x = -2$ جواب ندارد و داریم:

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست: تابع $y = 3\cos(2x) - 1$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ در چند نقطه ماکزیمم دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: تابع به ازای $\cos 2x = 1$ دارای بیش‌ترین مقدار است.

$$\cos 2x = 1 \Rightarrow y = 3(1) - 1 = 2 \,،\, \cos 2x = -1 \Rightarrow y = 3(-1) - 1 = -4$$

(به ازای $\cos 2x = -1$ تابع کم‌ترین مقدار را دارد.)

با حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x = 1$، تعداد xهای بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ را مشخص می‌کنیم:

$$\cos 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

به‌ازای $k = 0$، $k = 1$ و $k = 2$ سه مقدار $x = 0$، $x = \pi$ و $x = 2\pi$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ به‌دست می‌آید و در نتیجه تابع در سه نقطه دارای ماکزیمم است. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

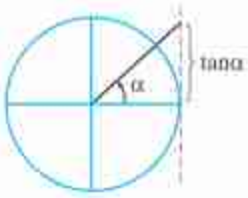
نکته مهم برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 u = a^2 = \cos^2 \alpha$ از رابطهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $u = k\pi \pm \alpha \;،\; k \in \mathbb{Z}$

مثال: $\cos^2 x = \frac{2}{4} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \cos^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

حل معادلات $\cot x = a$ ، $\tan x = a$

برای حل معادلهٔ $\tan x = a$ و $a \in \mathbb{R}$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan \alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\tan x = \tan \alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha \,،\, k \in \mathbb{Z}$$



برای حل معادلهٔ $\cot x = a$ و $a \in \mathbb{R}$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot \alpha = a$ شود تا معادله به‌صورت $\cot x = \cot \alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x = k\pi + \alpha \,،\, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: معادلات $\tan x+\sqrt{3}=0$ و $\tan 2x=\cot x$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\tan x+\sqrt{3}=0\Rightarrow \tan x=-\sqrt{3}=\tan\underbrace{(-\frac{\pi}{3})}_{\alpha}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in Z$$

برای آن‌که معادلهٔ $\tan 2x=\cot x$ را به‌صورت $\tan u=\tan\alpha$ دربیاوریم، به‌جای $\cot x$، عبارت $\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ را قرار می‌دهیم.

$$\cot x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)\ ,\ \tan 2x=\cot x\Rightarrow \tan 2x=\tan\underbrace{(\frac{\pi}{2}-x)}_{\alpha}\Rightarrow 2x=k\pi+(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},k\in Z$$

مثال: معادلهٔ $\cot 2x-1=0$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\cot 2x-1=0\Rightarrow \cot 2x=1=\cot\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in Z$$

حل معادلات مثلثاتی کسری

در حل معادلات مثلثاتی کسری باید ریشه‌های مخرج را از مجموعهٔ جواب حذف کنیم.

تست: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=0$ به کدام صورت است؟ $(k\in Z)$ (سراسری تجربی)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{4}$

پاسخ:

(۱) جواب مخرج کسر: $\cos(x+\frac{\pi}{4})=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

(۲) $\cos 2x=0\xrightarrow{\text{حالت خاص}}2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

باید جواب‌های (۱) را از جواب‌های (۲) حذف کنیم:

$$\{\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\mid k\in Z\}-\{k\pi+\frac{\pi}{4}\mid k\in Z\}$$

$$=\{\dots,-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\dots\}-\{\dots,-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\dots\}=\{\dots,-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\dots\}=\{k\pi-\frac{\pi}{4}\mid k\in Z\}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

خلاصه مطالب فصل

۱) مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص در جدول‌های زیر آمده است:

θ / نسبت مثلثاتی	0	$\frac{\pi}{6}$ یا 30°	$\frac{\pi}{4}$ یا 45°	$\frac{\pi}{3}$ یا 60°	$\frac{\pi}{2}$ یا 90°	π یا 180°	$\frac{3\pi}{2}$ یا 270°	2π یا 360°
$\sin\theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۲) علامت نسبت‌های مثلثاتی در چهار ربع مثلثاتی در جدول زیر آمده است:

ربع / نسبت	ربع اول $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$	ربع دوم $(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi)$	ربع سوم $(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2})$	ربع چهارم $(\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi)$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

۳) در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حادهٔ B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\sin B=\frac{b}{a}\ ,\ \cos B=\frac{c}{a}\ ,\ \tan B=\frac{b}{c}\ ,\ \cot B=\frac{c}{b}$$

۴) اگر طول دو ضلع از مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها را داشته باشیم، مساحت مثلث از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\theta$$

نکته مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است.

۵) اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آن‌گاه $x^2+y^2=1$ و اگر θ زاویهٔ بین OP و جهت مثبت محور $\overrightarrow{Ox}$ باشد، آن‌گاه:

$$\sin\theta=y\ ,\ \cos\theta=x\ ,\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}$$

نکته اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه: $\tan\alpha=$ شیب خط

۶) اگر اندازهٔ زاویه‌ای بر حسب درجه برابر D و بر حسب رادیان برابر R باشد، آن‌گاه $D=\frac{180R}{\pi}$ و $R=\frac{\pi D}{180}$. البته اگر زاویه بر حسب رادیان باشد، می‌توان با قرار دادن 180° به جای π، اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه به‌دست آورد.

۷) اگر l طول کمان روبه‌روی زاویهٔ مرکزی در دایره‌ای به شعاع r باشد (l و r هم‌واحد هستند)، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ α بر حسب رادیان برابر $\alpha=\frac{l}{r}$ است.

۸) روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱) به ازای هر عدد حقیقی x، رابطهٔ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ برقرار است.

۲) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

۳) $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}\ ,\ 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

۴) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ,\ \tan\alpha.\cot\alpha=1$

۹) روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

۱) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ,\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha\ ,\ \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

۲) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\ ,\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\ \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

۳) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\ ,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha\ ,\ \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

۴) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha\ ,\ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha\ ,\ \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

۵) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\ ,\ \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$

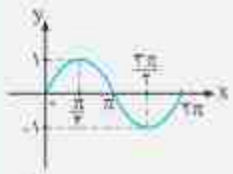
۶) $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha\ ,\ \cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha\ ,\ \cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

۷) $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha\ ,\ \cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha\ ,\ \tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha\ ,\ \cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$

۱۰) اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\sin(2k\pi\pm\alpha)=\sin(\pm\alpha)\ ,\ \cos(2k\pi\pm\alpha)=\cos(\pm\alpha)$$
$$\tan(k\pi\pm\alpha)=\tan(\pm\alpha)\ ,\ \cot(k\pi\pm\alpha)=\cot(\pm\alpha)$$

۱۱) با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ (شکل مقابل) نکات زیر را می‌توان مشخص کرد:



۱) در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$، تابع صعودی است.
۲) در بازهٔ $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$، تابع نزولی است.
۳) در بازهٔ $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$، تابع صعودی است.
۴) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر ۱- است.

۱۲) با توجه به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ (شکل مقابل) نکات زیر را می‌توان نوشت:

۱) در بازهٔ $[0,\pi]$ تابع نزولی است.
۲) در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ تابع صعودی است.
۳) بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۱ و کم‌ترین مقدار تابع برابر ۱- می‌باشد.

۱۳) کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که به ازای آن تساوی $f(x+T)=f(x)$ برقرار باشد، دورهٔ تناوب تابع f می‌گوییم.

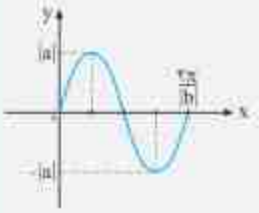
۱۴) دورهٔ تناوب تابع‌های $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ و دورهٔ تناوب تابع $y=a\tan(bx+c)+d$ برابر $\frac{\pi}{|b|}$ است.

۱۵) اگر قطعه‌ای از نمودار با دورهٔ تناوب T، در بازه‌ای به طول l، n بار تکرار شده باشد، آن‌گاه: $T=\frac{l}{n}$

۱۶) اگر T دورهٔ تناوب تابع f باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n، تساوی $f(x+nT)=f(x)$ برقرار است.

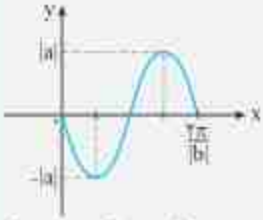
۱۷) در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$، داریم: مینیمم مقدار $=-|a|+c$ ، ماکزیمم مقدار $=|a|+c$

۱۸) نمودار تابع $y=a\sin(bx)$ با فرض $ab>0$ و در یک دورهٔ تناوب به‌صورت $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab<0$، آن‌گاه در بازهٔ $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ تابع ابتدا اکیداً صعودی است.

۱۹) نمودار تابع $y=a\sin(bx)$ با فرض $ab<0$ و در یک دورهٔ تناوب به‌صورت $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ به شکل روبه‌رو می‌باشد:



با توجه به نمودار، اگر $ab<0$، آن‌گاه در بازهٔ $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$ نمودار تابع ابتدا اکیداً نزولی است.

۲۰) در تابع $y=a\cos(bx+c)+d$، با فرض منفی بودن a، داریم:

- طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi \ , \ k\in Z$
- طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi+\pi \ , \ k\in Z$
- اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a\cos(bx+c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

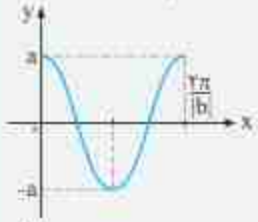
$$bx+c=k\pi+\frac{\pi}{2} \ , \ k\in Z$$

۲۱) در تابع $y=a\cos(bx+c)+d$، با فرض مثبت بودن a، داریم:

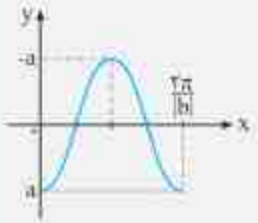
- طول نقاطی که تابع بیش‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi \ , \ k\in Z$
- طول نقاطی که تابع کم‌ترین مقدار را در آن نقاط اختیار می‌کند: $bx+c=2k\pi+\pi \ , \ k\in Z$
- اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a\cos(bx+c)$ باشد، آن‌گاه طول نقاطی که نمودار تابع محور x ها را در آن نقاط قطع می‌کند:

$$bx+c=k\pi+\frac{\pi}{2} \ , \ k\in Z$$

۲۲) نمودار تابع $y=a\cos(bx)$ با فرض $a>0$ و در یک دورهٔ تناوب به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:



نمودار تابع $y=a\cos(bx)$ با فرض $a<0$ و در یک دورهٔ تناوب (بازهٔ $[0,\frac{2\pi}{|b|}]$) به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:



۲۳) دامنهٔ تابع $y=a+b\tan u$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{u=k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\}$ است.

۲۴) با توجه به نمودار تابع $y=\tan x$، تابع در بازه‌های $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$، ... و $(\frac{(2k-1)\pi}{2},\frac{(2k+1)\pi}{2})$ اکیداً صعودی می‌باشد، اما تابع در هر بازه‌ای که شامل این مقادیر باشد، غیریکنوا خواهد شد.

۲۵) $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$ ، $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ یا $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

۲۶) اگر مقدار $\sin x+\cos x$ یا $\sin x-\cos x$ را داشته باشیم، می‌توان مقدار $\sin 2x$ را با به توان رساندن تساوی‌های داده‌شده به‌دست آورد. هم‌چنین اگر مقدار $\cos 2x$ را بخواهیم به‌دست آوریم، باز هم ابتدا مقدار $\sin 2x$ را به‌دست می‌آوریم و سپس مقدار $\cos 2x$ را از رابطهٔ $\cos 2x=\pm\sqrt{1-\sin^2 2x}$ مشخص می‌کنیم.

۲۷) $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ، $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

۲۸) عبارت $1+\sin 2x$ با عبارت $(\sin x+\cos x)^2$ و عبارت $1-\sin 2x$ با عبارت $(\sin x-\cos x)^2$ برابر است.

۲۹) $\cos 2x = 1-2\sin^2 x = \cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1$

۳۰) $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ را می‌توان با فرمول‌های زیر بر حسب $\cos 2x$ نوشت:

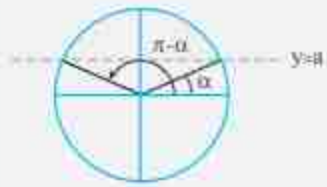
$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1-\cos 2x=2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{یا} \quad 1+\cos 2x=2\cos^2 x$$

۳۱) $$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

۳۲) $$\tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot 2\alpha$$

۳۳) برای حل معادلهٔ $\sin x=a$ و $-1\le a\le 1$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\sin\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

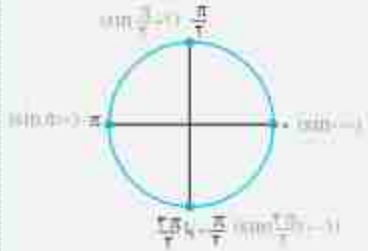


$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\alpha & , k\in\mathbb{Z} \\ x=2k\pi+(\pi-\alpha)=(2k+1)\pi-\alpha & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

۳۴) اگر معادلهٔ مثلثاتی را به‌صورت $\sin u=\sin\alpha$ بنویسیم، آن‌گاه تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت $u=2k\pi+(\pi-\alpha)$ و $u=2k\pi+\alpha$ می‌باشد.

۳۵) برای یافتن مجموع جواب‌های معادله در یک بازه یا تعداد جواب‌ها، به جای k اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ... را قرار می‌دهیم و برای محاسبهٔ راحت‌تر، بهتر است جواب آخر را به‌صورت کسر بنویسیم و سپس به k عدد بدهیم.

۳۶) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\sin u=0$ و $\sin u=\pm 1$ به‌دست آید با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد:



$$\sin u=0\Rightarrow u=k\pi \quad , (k\in\mathbb{Z})$$
$$\sin u=1\Rightarrow u=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad , (k\in\mathbb{Z})$$
$$\sin u=-1\Rightarrow u=2k\pi-\frac{\pi}{2} \quad , (k\in\mathbb{Z})$$

۳۷) برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 u=a^2=\sin^2\alpha$ از رابطهٔ $u=k\pi\pm\alpha \ , (k\in\mathbb{Z})$ استفاده می‌کنیم.

۳۸) برای حل معادلهٔ $\cos x=a$ و $-1\le a\le 1$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos x=\cos\alpha\Rightarrow x=2k\pi\pm\alpha$$

۳۹) جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos u=\cos\alpha$ به‌صورت $u=2k\pi\pm\alpha$ است.

۴۰) هرگاه از معادلات مثلثاتی روابط $\cos u=0$ و $\cos u=\pm 1$ به‌دست آید، با حفظ روابط زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد: $(k\in\mathbb{Z})$

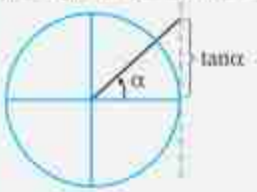
۱) $\cos u=0\Rightarrow u=k\pi+\frac{\pi}{2}$

۲) $\cos u=1\Rightarrow u=2k\pi$

۳) $\cos u=-1\Rightarrow u=2k\pi+\pi=(2k+1)\pi$

۴۱) برای حل معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 u=a^2=\cos^2\alpha$ از رابطهٔ $u=k\pi\pm\alpha, k\in\mathbb{Z}$ استفاده می‌کنیم.

برای حل معادلهٔ $\tan x=a$ و $a\in\mathbb{R}$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\tan x=\tan\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:



$$x=k\pi+\alpha \quad , k\in\mathbb{Z}$$

برای حل معادلهٔ $\cot x=a$ و $a\in\mathbb{R}$، ابتدا α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cot\alpha=a$ شود تا معادله به‌صورت $\cot x=\cot\alpha$ درآید. در این‌صورت تمام جواب‌های معادله از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$x=k\pi+\alpha \quad , k\in\mathbb{Z}$$