مقدمهٔ مؤلفان

ویژگی‌های این کتاب و شیوهٔ استفاده از آن:

۱ پاسخ سؤال‌ها در هر فصل با توجه به یک روند آموزشی نوشته شده است. معمولاً در سؤال‌های اول، راه‌حل‌ها تشریحی‌تر و با توضیح بیشتر است و هر چه که جلوتر می‌روید راه‌حل‌ها حرفه‌ای‌تر، سریع‌تر و با توضیح کم‌تر می‌شوند.

۲ در بعضی از سؤال‌ها **راه I**، **راه II** و ... آورده شده است. معمولاً **راه I** سریع‌ترین یا متداول‌ترین راه‌حل است و راه‌حل‌های بعدی برای توضیح شیوه‌های دیگر و یا نوع نگاه دیگری به سؤال با توجه به مباحث دیگر یا با توجه به نکاتی که در درس‌نامه گفته شده آورده شده‌اند.

۳ در پاسخ‌ها هر جا که لازم بوده **نکته** یا **اشاره** یا **خاطره** داریم.

نکته به مفهوم مطلب، رابطه، فرمول یا ... است که باید بدانید تا بتوانید سؤال را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

اشاره مثل یک تلنگر است که به شکل درست و مفهومی به سؤال نگاه کنید. گاهی وقت‌ها هم در **اشاره** سؤالی پرسیده‌ایم که باعث شود بیشتر با مفاهیم سؤال درگیر شوید.

خاطره همان‌طور که از اسمش پیداست یک یادآوری سریع در مورد مفهوم، فرمول، رابطه یا ... آن مبحث درسی است.

۴ توصیه می‌کنیم برای حل تست‌ها:

الف تعداد معینی سؤال (مثلاً ۳۰ تا ۴۰ تا) برای یک نشست انتخاب کنید.

ب با توجه به زمانی که برای این تست در نظر گرفته‌اید تست‌ها را حل کنید.

پ به پاسخ‌نامهٔ کلیدی که در جلد درس‌نامه و سؤال آمده است مراجعه کنید و تست‌هایی را که نزده‌اید یا جواب نادرست داده‌اید مشخص کنید.

ت برگردید و سعی کنید اولاً تست‌هایی را که حل نکرده‌اید حل کنید و ثانیاً تست‌هایی را پاسخ نادرست داده‌اید دوباره بررسی کنید و ببینید آیا می‌توانید به پاسخ درست برسید.

ث حالا بیایید سراغ پاسخ‌نامه، پاسخ همه تست‌ها را حتی آن‌هایی را که درست پاسخ داده‌اید بررسی کنید. به **نکته**‌ها، **اشاره**‌ها، **راه I** و **راه II** توجه کنید تا هر چه را که لازم است درست یاد بگیرید.

۵ گاهی وقت‌ها ممکن است با دیدن راه‌حل یک تست که به نظر طولانی می‌رسد تعجب کنید یا ناامید شوید. حواستان باشد که در این کتاب بعضی از راه‌حل‌ها به علت این‌که لازم بوده همه چیز را خوب توضیح دهیم طولانی شده است و در عمل، هنگام حل سؤال لازم نیست این همه بنویسید.

۶ در بعضی از سؤال‌ها، از روش **عددگذاری** استفاده کرده‌ایم. سعی‌مان این بوده که در تست‌هایی از این روش استفاده کنیم که مناسب بوده و در عین حال تست و مفاهیمش این ویژگی را داشته باشند که در موارد مشابه از همین شیوه استفاده کنیم. به همین علت سعی کرده‌ایم در استفاده از **عددگذاری** زیاده‌روی و افراط نکنیم.

- کل پاسخ‌ها چند بار بررسی و ویرایش شده‌اند. سعی‌مان این بوده که کتاب بدون اشتباه باشد. اما حتماً طبق قوانین طبیعت ممکن است باز هم اشتباهاتی رخ داده باشد. اگر اشتباه، نقص یا نکته‌ای در کتاب دیدید لطفاً برایمان بنویسید و بفرستید. به ما در بهترشدن این کتاب بسیار کمک می‌کنید. در هر مورد دیگر هم هر پیشنهادی داشتید خوشحال می‌شویم که بشنویم.
- همچنین همکاران عزیز دیگری نیز با ارائهٔ نظرات و پیشنهادات خود در مورد چاپ قبلی کتاب به ما در بازنویسی کتاب کمک کرده‌اند، از این دوستان، آقایان معین کرمی، حسین نادری، مصطفی کرمی، حمید گلزاری، ایمان کاظمی، عباس موسوی و فرزاد فتاحی نیز کمال تشکر را داریم.
- از تمام معلمان گرامی که از این کتاب استفاده می‌کنند نیز درخواست می‌کنیم هر نظری در مورد کتاب دارند برایمان بفرستند. حتماً برایمان بسیار ارزشمند و مؤثر است.

خوب و شاد و پیروز باشید.

@Shahraabiali
@mathmohsenimanesh

فهرست

فصل چهارم
مشتق
فصل ۴ حسابان دوازدهم

فصل پنجم
کاربرد مشتق
فصل ۵ حسابان دوازدهم

فصل ششم
معادلهٔ درجه‌دوم و سهمی
فصل ۴ ریاضی دهم

فصل ۱ حسابان یازدهم

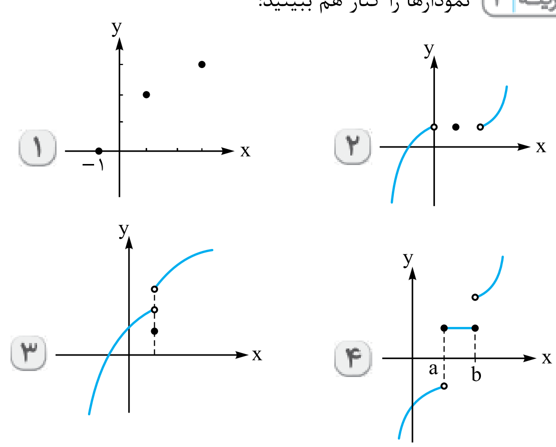
فصل هفتم
معادله، نامعادله و تعیین علامت
فصل ۴ ریاضی دهم

فصل ۱ حسابان یازدهم

فصل هشتم
قدرمطلق و جزء صحیح
فصل ۴ ریاضی دهم

فصل‌های ۱ و ۲ حسابان یازدهم

۴۰۸. گزینه ۴ نمودارها را کنار هم ببینید:



در گزینه‌های ۱ و ۲ وقتی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا رفته، پس صعودی اکیدند.

در ۳، ابتدا نمودار رو به بالا رفته و سپس در یک نقطه به پایین آمده، پس غیریکنواست.

در ۴، نمودار یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

۴۰۹. گزینه ۲ تابع خطی زمانی اکیداً صعودی است که شیبش مثبت باشد، پس:
$۱-a^۲>۰ \Rightarrow a^۲<۱ \Rightarrow |a|<۱ \Rightarrow -۱<a<۱$

عرض از مبدأ خط $f(x)=(۱-a^۲)x+(a+۳)$، می‌شود $a+۳$.

به کمک $-۱<a<۱$، محدودهٔ عرض از مبدأ درمی‌آید:

$$-۱<a<۱ \xrightarrow{+۳} ۲<a+۳<۴ \Rightarrow ۲<\text{عرض از مبدأ}<۴$$

۴۱۰. گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $y=\sqrt{ax+b}$ با شرط $a<۰$، اکیداً نزولی است، پس $y=\sqrt{-۲x+۴}$ اکیداً نزولی می‌باشد.

۲) چون توان فرد است، منفی را می‌توانیم به داخل پرانتز ببریم:
$y=-(۲-x)^۳-۱=(x-۲)^۳-۱$

توابع به فرم $y=a(x+\alpha)^۳+\beta$ با شرط $a>۰$ اکیداً صعودی هستند، پس این تابع اکیداً صعودی است.

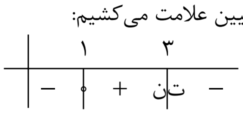
۳) تابع لگاریتمی $y=\log_{۰/۱}x$، چون مبنایش بین صفر و ۱ است، اکیداً نزولی است.

۴) می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. پس با تابع نمایی $y=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^x$ طرفیم که چون پایه‌اش بین ۰ و ۱ است، تابعی اکیداً نزولی محسوب می‌شود.

۴۱۱. گزینه ۲ تابع نمایی $y=A^x$ با شرط $A>۱$، تابعی صعودی (یا اکیداً صعودی) است. پس در تابع $y=(\frac{k+۱}{۳-k})^x$، باید پایه بزرگ‌تر از ۱ باشد:

$$\frac{k+۱}{۳-k}>۱ \Rightarrow \frac{k+۱}{۳-k}-۱>۰ \Rightarrow \frac{k+۱-۳+k}{۳-k}>۰ \Rightarrow \frac{۲k-۲}{۳-k}>۰$$

ریشهٔ صورت ۱ و ریشهٔ مخرج ۳ است. جدول تعیین علامت می‌کشیم:



قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم:
$k\in(\underset{a}{۱},\underset{b}{۳})$

پس:
$\max(b-a)=۳-۱=۲$

۴۱۲. گزینه ۲ برای آن‌که تابع $y=A^x$ نزولی باشد باید $۰<A\le۱$ باشد.

> **اشاره** اگر در صورت سؤال، می‌گفت تابع نماییِ فلان، نزولی باشد، شرطمان $۰<A<۱$ می‌شد. پس در تابع $f(x)=(\frac{۳m+۱}{۴})^x$ برای نزولی‌شدن، باید:
> $$۰<\frac{۳m+۱}{۴}\le۱ \xrightarrow{\times۴} ۰<۳m+۱\le۴$$
> $$\xrightarrow{-۱} -۱<۳m\le۳ \xrightarrow{\div۳} -\frac{۱}{۳}<m\le۱$$

پس m دو مقدار صحیح دارد: صفر و ۱

۴۱۳. گزینه ۲ تابع آبشاری $y=|x-a|-|x-b|$، به شرطی که ریشهٔ قدرمطلق اولش بزرگ‌تر از ریشهٔ قدرمطلق دوم باشد نزولی است (یعنی $a>b$):

a < b   a > b

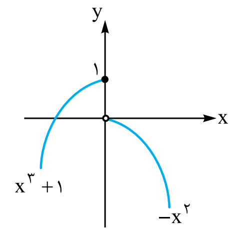
در هر دو شرط بالا، اگر مساوی قرار دهیم، نمودارمان به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود که هم صعودی است و هم نزولی. ریشهٔ قدرمطلق‌ها را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=|\underbrace{x+۲m-۱}_{\text{ریشه}:-۲m+۱}|-|\underbrace{x-m+۵}_{\text{ریشه}:m-۵}|$$

شرط نزولی‌بودن را اعمال می‌کنیم:

$$\text{ریشهٔ اولی}\ge\text{ریشهٔ دومی} \Rightarrow -۲m+۱\ge m-۵ \Rightarrow -۳m\ge-۶ \Rightarrow m\le۲$$

۴۱۴. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

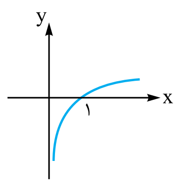


با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی (در $x \le 0$ رو به بالا) و سپس نزولی (در $x > 0$ رو به پایین) است.

۴۱۵. گزینه ۱ ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\log_2 \sqrt[3]{x}=\log_2 x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_2 x$$

نمودار تابع $y=\log_2 x$ به صورت روبه‌رو است:



تابع صعودی اکید است.

اگر عددی مثبت مثل $\frac{1}{3}$ در ضابطه ضرب شود، تغییری در یکنوایی ایجاد نمی‌کند.

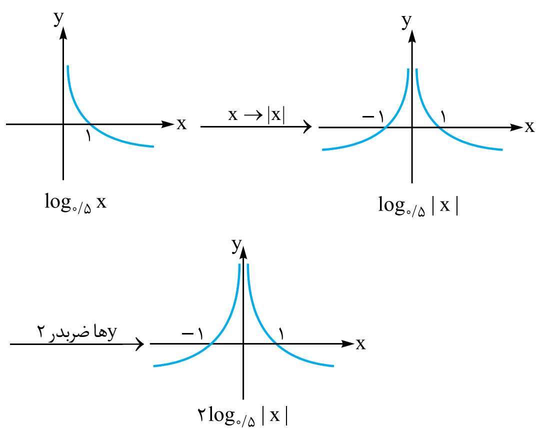
۴۱۶. گزینه ۳

نکته

$$\begin{cases}\log x^2 = 2\log|x| & (\text{توان زوج})\\ \log x^3 = 3\log x & (\text{توان فرد})\end{cases}$$

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم: $f(x)=\log_{0/5} x^2 = 2\log_{0/5}|x|$

نمودار f را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:



چون تابع f، در قسمت‌هایی صعودی اکید $(x<0)$ و در قسمت‌هایی نزولی اکید $(x>0)$ است، پس غیریکنواست.

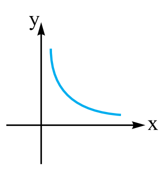
۴۱۷. گزینه ۴ دامنهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$$

ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{|x|\sqrt{x}}=\frac{1}{|x|}\xrightarrow{x>0} f(x)=\frac{1}{x}$$

پس ضابطهٔ f، به صورت $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $x>0$ است. نمودارش به شکل روبه‌رو است:

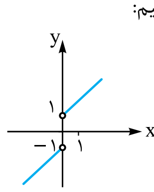


پس f، همواره نزولی است.

۴۱۸. گزینه ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

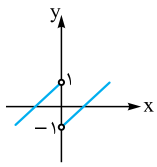
(۱)

$$f(x)=\frac{|x|}{x}+x=\begin{cases}1+x & x>0\\ -1+x & x<0\end{cases}$$



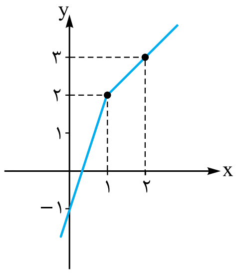
(۲)

$$f(x)=x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases}x-1 & x>0\\ x+1 & x<0\end{cases}$$



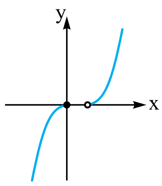
(۳)

$$f(x)=2x-|x-1|=\begin{cases}x+1 & x\ge 1\\ 3x-1 & x<1\end{cases}$$



(۴)

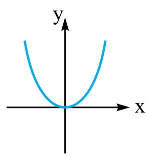
$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$$



با توجه به نمودارها، $f(x)=x-\frac{x}{|x|}$ غیریکنوا است و بقیهٔ تابع‌ها صعودی اکید هستند.

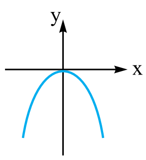
۴۱۹. گزینه ۴ نمودار تمام توابع را رسم می‌کنیم:

(۱) $y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\ge 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$



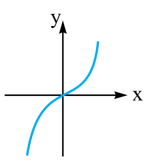
$\Rightarrow$ غیریکنوا

(۲) شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم: $y=-x^2|x| \Rightarrow$



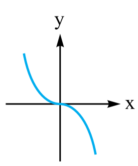
$\Rightarrow$ غیریکنوا

(۳) $y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$



$\Rightarrow$ اکیداً صعودی

(۴) شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم: $y=-x|x| \Rightarrow$

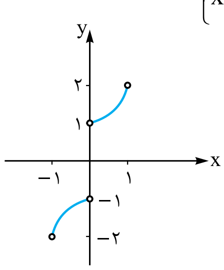


$\Rightarrow$ اکیداً نزولی

۴۲۰. گزینه ۱ با توجه به ریشهٔ قدرمطلق $(x=0)$، تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

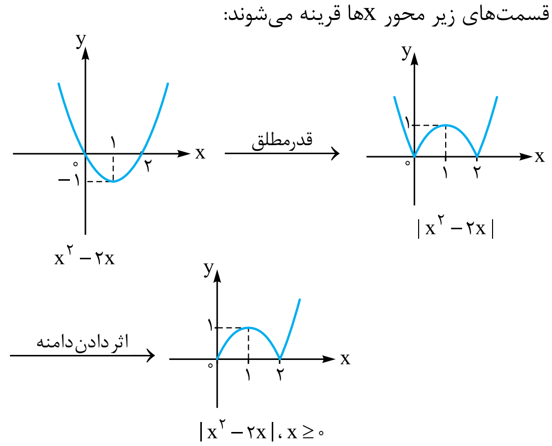
$$f(x)=x|x|+\frac{x}{|x|}=\begin{cases}x(x)+\frac{x}{x} & x>0\\ x(-x)+\frac{x}{-x} & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ -x^2-1 & x<0\end{cases}$$

تابع را در دامنهٔ $(-1,1)-\{0\}$ رسم می‌کنیم:



نمودار f فقط رو به بالا حرکت کرده، پس صعودی اکید (یا صعودی) است.

۴۲۱. گزینه ۳ ابتدا سهمی $y=x(x-2)$ را با داشتن ریشه‌هایش $(x=2, x=0)$ و دهانهٔ رو به بالا رسم می‌کنیم. بعد که قدرمطلق را اثر می‌دهیم، قسمت‌های زیر محور xها قرینه می‌شوند:



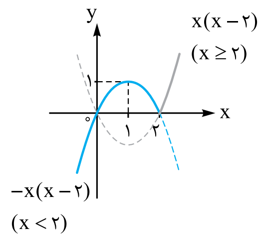
نمودار آخر در بازهٔ $(1,2)$ یا $[1,2]$ نزولی اکید است، پس:

$$\max(b-a)=2-1=1$$

۴۲۲. گزینه ۳ اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

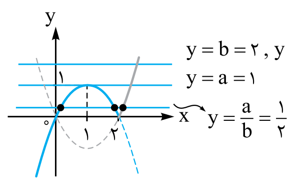
$$y=x|x-2|=\begin{cases} x(x-2) & x\ge 2 \\ -x(x-2) & x<2 \end{cases}$$

هر دو ضابطهٔ سهمی با ریشه‌های صفر و ۲ هستند. نمودار را رسم می‌کنیم:



تابع رسم‌شده در بازهٔ $[\underset{a}{1},\underset{b}{2}]$ نزولی اکید است.

خطوط داده‌شده در گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



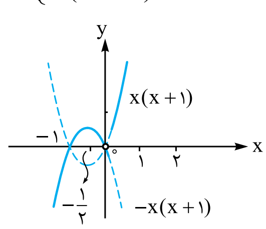
فقط خط $y=\frac{a}{b}$ یعنی $y=\frac{1}{2}$، نمودار f را در ۳ نقطه قطع می‌کند.

۴۲۳. گزینه ۲ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌نویسیم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^3+x^2}{|x|}=\begin{cases} \frac{x^3+x^2}{x} & x>0 \\ \frac{x^3+x^2}{-x} & x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2+x & x>0 \\ -(x^2+x) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} x(x+1) & x>0 \\ -x(x+1) & x<0 \end{cases}$$

هر دو ضابطهٔ سهمی با ریشه‌های $x=0$ و $x=-1$ هستند. رأس هر دو سهمی هم میانگین ریشه‌ها یعنی $x=-\frac{1}{2}$ است. نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم می‌کنیم:

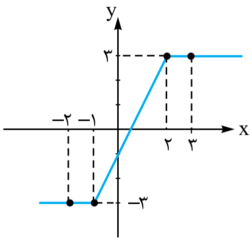


پس تابع $\frac{f}{g}$ در بازهٔ $(-\frac{1}{2},0)$ نزولی است.

۴۲۴. گزینه ۳ نمودار رسم می‌کنیم. اگر یادتان باشد شکل این توابع، آبشاری می‌شد! کافی است چهارتا نقطه بدهیم:

	کوچک‌تر	ریشه	ریشه	بزرگ‌تر
x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3

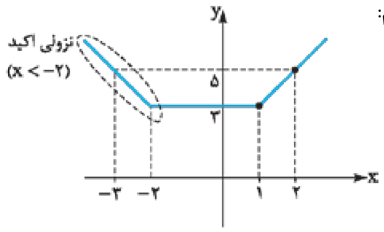
این تابع در بازهٔ $[-1,2]$ یا $(-1,2)$ اکیداً صعودی است.



اشاره اگر جای «اکیداً صعودی» می‌گفت «صعودی»، جواب $\mathbb{R}$ می‌شد.

۴۲۵. گزینه ۱ تابع $f(x)=|x+2|+|x-1|$ یک تابع گلدانی است. با نقطه‌یابی آن را رسم می‌کنیم:

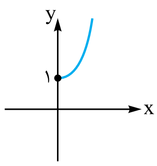
	کوچک‌تر	ریشه	ریشه	بزرگ‌تر
x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5



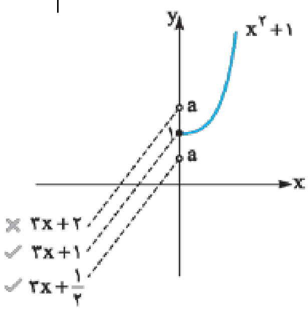
پس f در بازهٔ $(-\infty,-2)$ نزولی اکید است.

۴۲۶. گزینه ۲ ضابطهٔ اول قابل رسم است:

$y=x^2+1$ با دامنهٔ $x\ge 0$



ضابطهٔ دوم، یک خط با شیب مثبت می‌باشد (یعنی صعودی است) که عرض از مبدأش a است. باید $a\le 1$ انتخاب شود تا تابع صعودی اکید باشد:

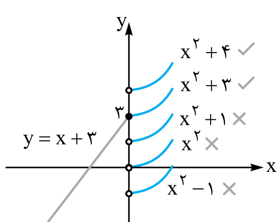


پس حداکثر مقدار a برابر با ۱ است.

۴۲۷. گزینه ۳ به ازای $x\le 0$، عبارت داخل قدرمطلق منفی می‌شود، پس ضابطهٔ بالا این‌جوری می‌شود: $4-|x-1|=4-(-x+1)=x+3$

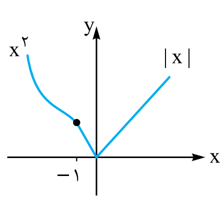
ضابطه تا این‌جا به شکل $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\le 0 \\ x^2+k & x>0 \end{cases}$ درآمده.

ضابطهٔ اول را می‌توانیم رسم کنیم. ضابطهٔ دوم هم قسمت راست سهمی x^2 است که با توجه به مقدار k، از مبدأ به بالا یا پایین می‌رود. با توجه به نمودار، فقط وقتی $k\ge 3$ انتخاب شود، نمودار رو به بالا می‌رود و صعودی اکید می‌شود.

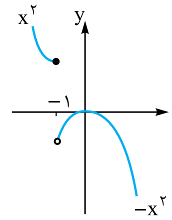


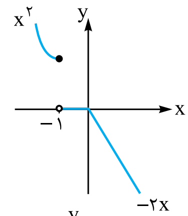
۴۲۸. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le -1 \\ g(x) & x>-1 \end{cases}$ را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:

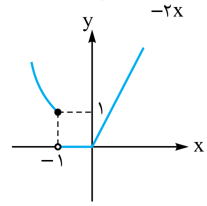
۱) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le -1 \\ |x| & x>-1 \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow$ غیریکنوا

(۲) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ -x^2 & x>-1\end{cases} \Rightarrow$  $\Rightarrow$ غیریکنوا

(۳) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ -|x|-x & x>-1\end{cases} \Rightarrow$  $\Rightarrow$ نزولی

(۴) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ x+|x| & x>-1\end{cases} \Rightarrow$  $\Rightarrow$ غیریکنوا

۴۲۹. گزینه ۳ در توابع $y=$ خط $\pm$ |خط| شرط اکیداً یکنوایی آن است که شیب هر دو ضابطه، هم‌علامت باشد.

(۱) $y=|2x|+x=\begin{cases}2x+x & x\ge 0\\ -2x+x & x<0\end{cases}=\begin{cases}3x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$

(۲) $y=|2x-4|-x=\begin{cases}(2x-4)-x & x\ge 2\\ (-2x+4)-x & x<2\end{cases}=\begin{cases}x-4 & x\ge 2\\ -3x+4 & x<2\end{cases}$

(۳) $y=|x+1|+2x=\begin{cases}(x+1)+2x & x\ge -1\\ (-x-1)+2x & x<-1\end{cases}=\begin{cases}3x+1 & x\ge -1\\ x-1 & x<-1\end{cases}$

(۴) $y=|x-1|+x=\begin{cases}(x-1)+x & x\ge 1\\ (-x+1)+x & x<1\end{cases}=\begin{cases}2x-1 & x\ge 1\\ 1 & x<1\end{cases}$

فقط در (۳)، شیب هر دو ضابطه هم‌علامت (هر دو مثبت) شد، پس اکیداً یکنواست.

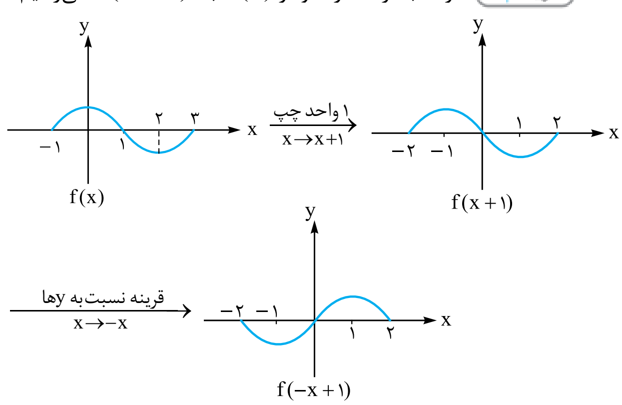
اشاره در (۴)، شیب یکی از ضابطه‌ها ۲ و شیب دیگری صفر شد، پس صعودی (یکنوا) است ولی اکید نیست.

۴۳۰. گزینه ۳ برای آن‌که تابع $y=$ خط $\pm$ |خط|، تابعی غیریکنوا باشد باید شیب ضابطه‌هایش هم‌علامت نباشد.

با توجه به ضابطهٔ $y=ax+4-|\frac{x}{2}+1|$، شیب ضابطه‌ها $a-\frac{1}{2}$ و $a+\frac{1}{2}$ است. برای هم‌علامت نبودن، باید ضربشان منفی شود:

$$(a-\frac{1}{2})(a+\frac{1}{2})<0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$$

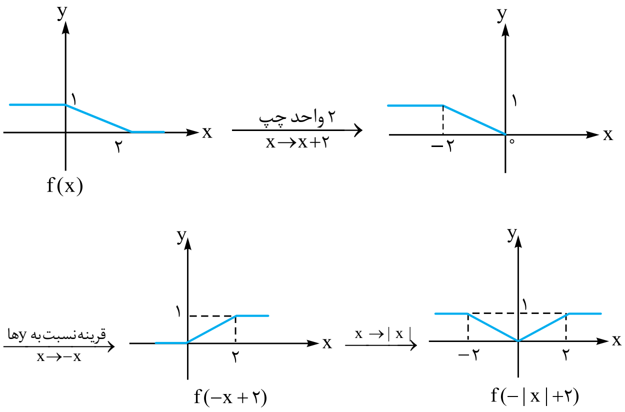
۴۳۱. گزینه ۴ مرحله‌به‌مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-x+1)$ می‌رسیم.



تابع نهایی در بازه‌های $[-2,-1]$ و $[1,2]$ اکیداً نزولی است.

۴۳۲. گزینه ۴ با توجه به ضابطهٔ $g(x)=-|x|+2$، ضابطهٔ fog به صورت مقابل می‌شود: $f(g(x))=f(-|x|+2)$

مرحله‌به‌مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-|x|+2)$ می‌رسیم.



نمودار نهایی در بین گزینه‌های داده‌شده در بازهٔ $(1,5)$ صعودی است (چون یا ثابت بوده یا رو به بالا حرکت کرده).

۴۳۳. گزینه ۴ اگر جای x^2، $|x|^2$ را بنویسیم، ضابطهٔ f ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{|x|+x^2}{1+|x|}=\frac{|x|+|x|^2}{1+|x|}=\frac{|x|(1+|x|)}{1+|x|}=|x|$$

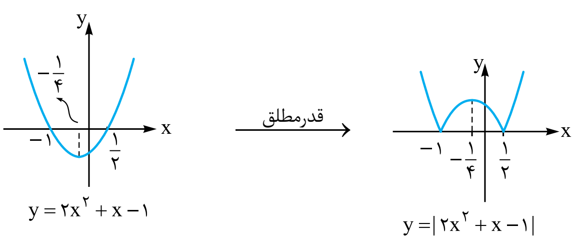
با توجه به این‌که مخرج f ریشه نداشت، پس دامنه هم $\mathbb{R}$ می‌ماند.

بــا توجه بــه $f(x)=|x|$ و $g(x)=2x^2+x-1$، ضابطهٔ fog را تشــکیل می‌دهیم: $f(g(x))=|g(x)|=|2x^2+x-1|$

اول سهمی $y=2x^2+x-1$ را رسم می‌کنیم و بعد قدرمطلق را اثر می‌دهیم.

با توجه به رابطهٔ $a+c=b$، ریشه‌های سهمی -1 و $\frac{1}{2}$ هستند.

طول رأس برابر است با: $x_S=\frac{-1+\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$



با توجه به منفی‌بودن $-a^2$ و $-b^2$، باید دنبال یک بازهٔ دو سر منفی باشیم.

تابع نهایی در بازهٔ $[\underbrace{-1}_{-a^2},\underbrace{-\frac{1}{4}}_{-b^2}]$ صعودی است، پس:

$$\begin{cases}-a^2=-1 \Rightarrow a=\pm 1\\ -b^2=-\frac{1}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$$

بیشترین مقدار $b-a$ زمانی است که $b=\frac{1}{2}$ و $a=-1$ باشد:

$\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}=$ ۱/۵

۴۳۴. گزینه ۲ ضابطهٔ اول f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

پس کل ضابطهٔ f به این صورت می‌شود:

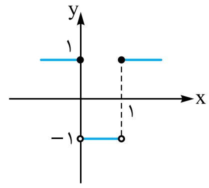
$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\\ 1 & x=0\end{cases} \xrightarrow{\text{ادغام ضابطهٔ اول و سوم}} \begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

با داشتن ضابطهٔ $g(x)=x^2-x$، ضابطهٔ fog را تشکیل می‌دهیم.

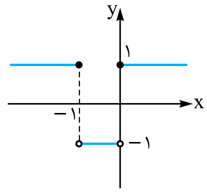
جای تمام xهای ضابطهٔ f، x^2-x قرار می‌دهیم:

$$f(g(x))=\begin{cases}1 & x^2-x\ge 0\\ -1 & x^2-x<0\end{cases}=\begin{cases}1 & x\ge 1 \text{ یا } x\le 0\\ -1 & 0<x<1\end{cases}$$

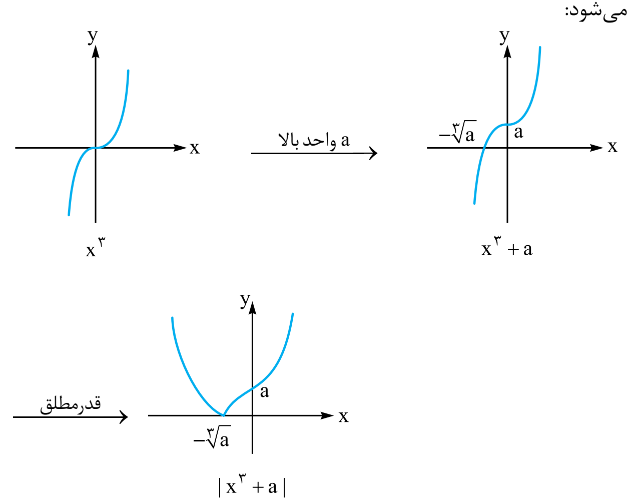
نمودار fog را رسم می‌کنیم:



نمودار بالا را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا به نمودار $(fog)(x+1)$ برسیم: تابع نهایی در بازهٔ $(-1,+\infty)$ رو به بالا یا ثابت است، پس صعودی است. در نتیجه کم‌ترین مقدار a برابر ۱− است.



۴۳۵. گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=x^3+a$، همان نمودار تابع $y=x^3$ که a واحد بالا (چون $a\in\mathbb{N}$) رفته است. پس نمودار $f(x)=|x^3+a|$ این‌شکلی می‌شود:



برای به دست آوردن محل برخورد با محور xها، y را صفر می‌دهیم:

$$x^3+a=0\Rightarrow x^3=-a\Rightarrow x=-\sqrt[3]{a}$$

تابع نهایی در بازهٔ $(-\infty,\sqrt[3]{a}]$ و هر بازه‌ای که زیرمجموعه‌اش باشد، نزولی اکید است.

پس الان $(-\infty,a-2)$ باید زیرمجموعهٔ $(-\infty,\sqrt[3]{a})$ باشد، یعنی $a-2$ باید کوچک‌تر یا مساوی از $-\sqrt[3]{a}$ باشد: $a-2\le-\sqrt[3]{a}\Rightarrow a+\sqrt[3]{a}-2\le 0$

برای حل نامعادله، تغییر متغیر $t=\sqrt[3]{a}$ را می‌دهیم:

$$t^3+t-2\le 0\xrightarrow{\text{بر } t-1 \text{ بخش‌پذیر}}$$

$$(t-1)\underbrace{(t^2+t+2)}_{\Delta<0,a>0}\le 0\xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{\text{پرانتز دوم}} t-1\le 0$$

$$\Rightarrow t\le 1\xrightarrow{t=\sqrt[3]{a}}\sqrt[3]{a}\le 1\Rightarrow a\le 1$$

پس a فقط یک مقدار طبیعی $a=1$ را می‌تواند داشته باشد.

۴۳۶. گزینهٔ ۲ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$(1,1),(\sqrt{2},m^2-2),(3,6),(10,20)$$

در تابع اکیداً صعودی، با افزایش xها، باید yها هم زیاد شوند:

$$1<m^2-2<6<20$$

فقط باید $1<m^2-2<6$ را حل کنیم:

$$1<m^2-2<6\xrightarrow{+2}3<m^2<8$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}<|m|<2\sqrt{2}\xrightarrow[2\sqrt{2}\simeq 2/8]{\sqrt{3}\simeq 1/7}\begin{cases}1/7<m<2/8\\ \text{یا}\\ -2/8<m<-1/7\end{cases}$$

پس m فقط دو مقدار صحیح ۲± را می‌گیرد.

۴۳۷. گزینهٔ ۴ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$(-1,a+1)\ ,\ (1,3a+1)\ ,\ (2,4a+3)$$

در تابع صعودی، با افزایش xها، باید yها یا زیاد شوند یا ثابت بمانند:

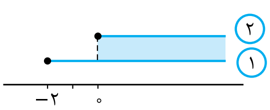
$$\underbrace{a+1\le 3a+1}_{(1)}\overbrace{\le 4a+3}^{(2)}$$

نامعادلهٔ بالا به دو نامعادله تقسیم می‌شود:

1) $a+1\le 3a+1\Rightarrow 2a\ge 0\Rightarrow a\ge 0$

2) $3a+1\le 4a+3\Rightarrow a\ge -2$

اشتراک می‌گیریم:



$$(1)\cap(2)=a\ge 0$$

۴۳۸. گزینهٔ ۳ برای تشکیل $f+g$، اول دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{-3,1,5\}$$

در xهای مشترک، مقدار $f+g$ را پیدا می‌کنیم:

$$x=-3: f(-3)+g(-3)=m+12$$
$$x=1: f(1)+g(1)=(m^2-1)+1=m^2$$
$$x=5: f(5)+g(5)=-m+2$$

در تابع نزولی با افزایش xها، باید مقادیر y کم شوند یا ثابت بمانند:

$$\underbrace{-m+2\le m^2}_{(1)}\overbrace{\le m+12}^{(2)}$$

دو نامعادله را حل می‌کنیم:

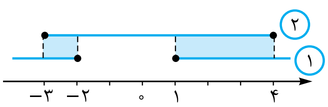
1) $m^2\ge -m+2\Rightarrow m^2+m-2\ge 0$

$\Rightarrow (m+2)(m-1)\ge 0\xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{نابین}} m\ge 1$ یا $m\le -2$

2) $m^2\le m+12\Rightarrow m^2-m-12\le 0$

$\Rightarrow (m-4)(m+3)\le 0\xrightarrow{\text{بین}} -3\le m\le 4$

اشتراک می‌گیریم:



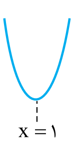
$$(1)\cap(2)=[-3,-2]\cup[1,4]$$

$\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}}\{-3,-2,1,2,3,4\}\Rightarrow$ ۶ مقدار

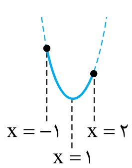
۴۳۹. گزینهٔ ۲ طول رأس سهمی $f(x)=3x^2-6x+2$ مهم است:

$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{6}=1$$

دهانه هم که رو به بالاست. پس شکلش این‌جوری است:



بازهٔ $[-1,2]$ را روی سهمی مشخص می‌کنیم:



قسمت باقی‌مانده، ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۴۴۰. گزینه ۴ دامنهٔ تابع از حل نامعادلهٔ $|x-۱|<۲$ به دست می‌آید:

$$|x-۱|<۲ \Rightarrow -۲<x-۱<۲ \xrightarrow{+۱} -۱<x<۳$$

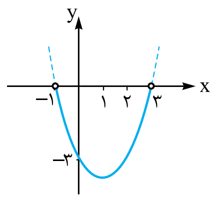
ریشه‌های سهمی $f(x)=x^۲-۲x-۳$ را حساب می‌کنیم:

$$(x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۱ \end{cases}$$

طول رأس هم میانگین ریشه‌ها است:

$$x_S=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$$
$$y_S=f(۱)=-۴$$

سهمی را رسم می‌کنیم:

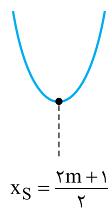


در دامنهٔ داده‌شده، سهمی غیریکنوا است و چون زیر محور xهاست، پس مقادیرش منفی است.

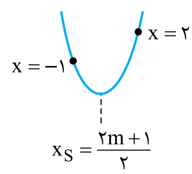
۴۴۱. گزینه ۴ طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۲m+۱}{۲}$$

ضریب $x^۲$ مثبت است، پس دهانهٔ سهمی رو به بالاست:



برای آن‌که سهمی در بازهٔ $[-۱,۲]$ غیریکنوا باشد، باید x_S در این بازه قرار گیرد:



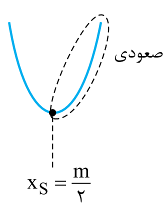
پس: $-۱<x_S<۲ \Rightarrow -۱<\frac{۲m+۱}{۲}<۲$

$$\xrightarrow{\times ۲} -۲<۲m+۱<۴ \xrightarrow{-۱} -۳<۲m<۳$$
$$\xrightarrow{\div ۲} \frac{-۳}{۲}<m<\frac{۳}{۲}$$

۴۴۲. گزینه ۲ اول طول رأس سهمی $y=(\frac{۱}{m})x^۲-x+۳$ را پیدا می‌کنیم:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۱}{۲(\frac{۱}{m})}=\frac{m}{۲}$$

چون علامت a را نداریم، باید در دو حالت بررسی کنیم:

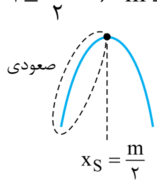


۱) ضریب $x^۲$ یعنی $\frac{۱}{m}$ مثبت باشد $(m>۰)$. در این حالت سهمی این‌شکلی است:

برای آن‌که در بازهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد باید ۱ یا روی رأس باشد یا بعد از رأس، پس:

$$۱\geq\frac{m}{۲} \Rightarrow m\leq ۲$$

از اشتراک دو شرط $m>۰$ و $m\leq ۲$ به $۰<m\leq ۲$ می‌رسیم.



۲) ضریب $x^۲$ یعنی $\frac{۱}{m}$ منفی باشد $(m<۰)$. در این حالت سهمی این‌شکلی است:

که با کمی دقت متوجه می‌شویم که امکان ندارد تابع در بازهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد، چون تابع در بازهٔ $[\frac{m}{۲},+\infty)$ نزولی است، هر چه که باشد باز هم امکان ندارد که با $[۱,+\infty)$ اشتراکی پیدا نکند! پس این حالت کلاً اتفاق نمی‌افتد.

حالا بین جواب‌های دو حالت، اجتماع می‌گیریم:

$$(۱)\cup(۲)=(۰,۲]\cup\varnothing=(۰,۲]$$

۴۴۳. گزینه ۲ ضابطهٔ سهمی را با داشتن ریشه‌هایش می‌نویسیم:

$$y=a(x-۶)(x+۲)$$

سهمی رسم‌شده از نقطهٔ $(۰,۶)$ می‌گذرد، پس: $۶=a(-۶)(۲) \Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$

در نتیجه ضابطهٔ سهمی به این شکل می‌شود:

$$f(x)=\frac{-۱}{۲}(x-۶)(x+۲)=\frac{-۱}{۲}x^۲+۲x+۶$$

حالا ضابطهٔ g را تشکیل می‌دهیم: $g(x)=kx^۲+۴(\frac{-۱}{۲}x^۲+۲x+۶)$

$$=kx^۲-۲x^۲+۸x+۲۴=(k-۲)x^۲+۸x+۲۴$$

می‌دانیم توابع درجه۲، یکنوا نیستند، پس برای آن‌که g یکنوا باشد باید ضریب $x^۲$ صفر باشد: $k-۲=۰ \Rightarrow k=۲$

۴۴۴. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم: $x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$

پس تابع در بازه‌های $(-\infty,۳)$ و $(۳,+\infty)$ یکنواست.

با توجه به بازهٔ یکنوایی $(-\infty,a)$، حداکثر a برابر ۳ است. (دقت کنید که چون $ad-bc=-۷<۰$، پس تابع روی هر کدام از بازه‌ها نزولی است.)

۴۴۵. گزینه ۱ ریشهٔ مخرج تابع $y=\frac{-۱}{x-۲}$ را پیدا می‌کنیم.

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

پس تابع در بازه‌های $(-\infty,۲)$ و $(۲,+\infty)$ اکیداً یکنواست.

با توجه به بسته‌بودن انتهای بازهٔ $(-\infty,a]$، حداکثر مقدار صحیح a، عدد ۱ است نه ۲.

(دقت کنید که $ad-bc=۱>۰$، پس تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,+\frac{d}{c}),(\frac{d}{c},+\infty)$ صعودی است.)

۴۴۶. گزینه ۱ $ad-bc$ باید مثبت باشد.

۱) $y=\frac{x-۱}{x+۳} \Rightarrow ad-bc=۳+۱=۴$ ✓

۲) $y=\frac{۲x-۳}{x+۱} \Rightarrow ad-bc=۲+۳=۵$ ✓

۳) $y=\frac{-x+۱}{x+۳} \Rightarrow ad-bc=-۳-۱=-۴$ ×

۴) $y=\frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow ad-bc=-۲-۱=-۳$ ×

در بین دو گزینهٔ باقی‌مانده باید چک کنیم، ریشهٔ مخرج تابع، داخل بازهٔ $(-۲,+\infty)$ نباشد.

۱) $y=\frac{x-۱}{x+۳} \xrightarrow{x=-۳} -۳\notin(-۲,+\infty)$ ×

۲) $y=\frac{۲x-۳}{x+۱} \xrightarrow{x=-۱} -۱\in(-۲,+\infty)$ ×

پس جواب، ۱ است.

۴۴۷. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم:

$$۲x-a=۰ \Rightarrow x=\frac{a}{۲}$$

کافی است ریشهٔ مخرج در بازهٔ $(۱,+\infty)$ نباشد، پس $\frac{a}{۲}$ باید از ۱ کوچک‌تر یا مساوی باشد:

$$\frac{a}{۲}\leq ۱ \Rightarrow a\leq ۲$$

چون می‌خواهیم تابع اکیداً یکنوا باشد، پس تابع ما نباید تابع ثابت باشد.

برای آن‌که تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ثابت نباشد، باید شرط $ad-bc\neq 0$ را داشته باشد، پس در تابع $f(x)=\frac{x+1}{2x-a}$ باید:

$(1)(-a)-(1)(2)\neq 0 \Rightarrow -a-2\neq 0 \Rightarrow a\neq -2$

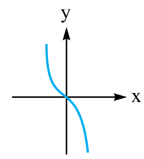
از دو شرط $a\le 2$ و $a\neq -2$ به مجموعهٔ $(-\infty,2]-\{-2\}$ می‌رسیم.

۴۴۸. گزینه ۳ از آن‌جایی که تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{2x+b}{3x+d}$ در بازه‌های $(-2,+\infty)$ و $(-\infty,-2)$ یکنوا اکید است، نتیجه می‌گیریم عدد -2، ریشهٔ مخرج است: $3(-2)+d=0 \Rightarrow d=6$

تا این‌جا ضابطهٔ f به شکل $f(x)=\frac{2x+b}{3x+6}$ درآمد. این تابع، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند: $f(1)=0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

با جای‌گذاری $d=6$ و $b=-2$، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $y=6^{-x}=(\frac{1}{6})^x \xrightarrow{\text{نمایی با پایهٔ بین صفر و ۱}}$ نزولی اکید

(۲) $y=-2x^3 \xrightarrow{\text{نمودار}}$  $\rightarrow$ نزولی اکید

(۳) $y=6x-2|x|=\begin{cases}4x & x\ge 0\\ 8x & x<0\end{cases}$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد و تابع ناپیوستگی ندارد، پس صعودی اکید است.

(۴) $y=-2x+6 \xrightarrow{\text{شیب منفی}}$ نزولی اکید

پس جواب (۳) است.

۴۴۹. گزینه ۴ چون f نزولی است، پس بعد از حذف f، جهت نامساوی عوض می‌شود: $f(2a-1)>f(5-a) \xrightarrow{\text{تغییر جهت}} 2a-1<5-a$

$\Rightarrow 3a<6 \Rightarrow a<2$

۴۵۰. گزینه ۳ برای دامنهٔ تابع رادیکالی g، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $f(2x+1)-f(x-2)\ge 0 \Rightarrow f(2x+1)\ge f(x-2)$

حالا باید بگوییم چون f نزولی است، پس با حذف fها، جهت عوض می‌شود:

$f(2x+1)\ge f(x-2) \xrightarrow{f\ \text{نزولی}} 2x+1\le x-2 \Rightarrow x\le -3$

پس، $D_g=(-\infty,-3]$.

۴۵۱. گزینه ۱ $f(x)=\frac{-x+1}{x}$ یک تابع هموگرافیک است. $ad-bc$ را حساب می‌کنیم: $(-1)(0)-(1)(1)=-1$

ریشهٔ مخرج هم $x=0$ است.

پس این تابع در بازه‌های قبل و بعد ریشهٔ مخرج، اکیداً نزولی است.

با توجه به این‌که $1+x^4$ و $3+x^2$ هر دو بزرگ‌تر از صفر هستند، پس هر دو در شاخهٔ $(0,+\infty)$ قرار دارند. می‌خواهیم نمودار تابع $f(1+x^4)$ بالای نمودار $f(3+x^2)$ باشد: $f(1+x^4)>f(3+x^2)$

چون f اکیداً نزولی است (در شاخهٔ $(0,+\infty)$)، پس با حذف fها، جهت عوض می‌شود: $1+x^4<3+x^2 \Rightarrow x^4-x^2-2<0$

$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x^2-2)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{همواره مثبت}}<0$

$\Rightarrow x^2-2<0 \Rightarrow x^2<2 \Rightarrow |x|<\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

فقط بازهٔ $(-1,1)$، زیرمجموعهٔ بازهٔ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ است.

۴۵۲. گزینه ۱ با توجه به ضابطهٔ $f(x)=-x^3+2$، می‌فهمیم f تابعی اکیداً نزولی است.

نامعادله را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $f(f(x))>f(x^2)$

با حذف fها، جهت نامساوی عوض می‌شود: $f(x)<x^2$

حالا جای $f(x)$، ضابطه‌اش را می‌نویسیم:

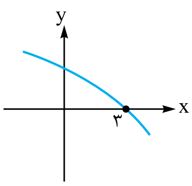
$-x^3+2<x^2 \Rightarrow x^3+x^2-2>0$

عبارت x^3+x^2-2 به ازای $x=1$ صفر می‌شود، پس بر $x-1$ بخش‌پذیر است. اگر x^3+x^2-2 را بر $x-1$ تقسیم کنیم، خارج قسمت x^2+2x+2 می‌شود، پس: $x^3+x^2-2>0 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2)>0$

چون دلتای x^2+2x+2 منفی و ضریب x^2اش مثبت است، پس همواره مثبت است و می‌توانیم حذفش کنیم:

$(x-1)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\text{بی‌اثر}}>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$

۴۵۳. گزینه ۱ راه I برای f یک نمودار اکیداً نزولی که محور xها را در ۳ قطع کند، رسم می‌کنیم:



برای دامنهٔ تابع رادیکالی g، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $xf(x)\ge 0$

برای رسم جدول تعیین علامت، ریشه‌های عبارت را پیدا می‌کنیم: $\underset{0}{\underset{\downarrow}{x}}\ \underset{3}{\underset{\downarrow}{f(x)}}\ge 0$

جدول می‌کشیم:

		۰		۳	
x	−		+		+
f(x)	+		+		−
کل	−		+		−

جواب

پس: $D_g=[0,3]$

راه II می‌توانیم برای f یک تابع مثال بزنیم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس $f(x)=-x+3$ را در نظر می‌گیریم (+۳ را برای این نوشتیم که تابع، محور xها را در نقطهٔ $x=3$ قطع کند). حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم: $y=\sqrt{x(-x+3)}$

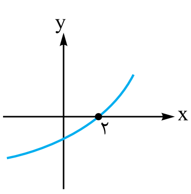
$x(-x+3)\ge 0$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
		−		+		−	

$\Rightarrow 0\le x\le 3$

۴۵۴. گزینه ۱ راه I برای f یک نمودار اکیداً صعودی که محور xها را در ۲ قطع کند، رسم می‌کنیم:



برای دامنهٔ تابع رادیکالی $g(x)=\sqrt{(x^2-x)f(x)}$، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$(x^2-x)f(x)\ge 0 \Rightarrow \underset{0}{\underset{\downarrow}{x}}\underset{1}{\underset{\downarrow}{(x-1)}}\ \underset{2}{\underset{\downarrow}{f(x)}}\ge 0$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		۰		۱		۲	
f(x)	−		−		−		+
(x^2-x)	+		−		+		+
کل	−		+		−		+

جواب   جواب

پس: $D_g=[0,1]\cup[2,+\infty)$ دامنهٔ g و شامل تمام اعداد طبیعی می‌باشد.

راه II می‌توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزنیم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطهٔ $x=۲$ قطع کند یعنی $f(x)=x-۲$، حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^۲-x)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\sqrt{(x^۲-x)(x-۲)}=\sqrt{x(x-۱)(x-۲)}$$
$$x(x-۱)(x-۲)\geq ۰$$

حالا جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		۰		۱		۲	
	−		+		−		+
			جواب				جواب

پس: $D_g=[۰,۱]\cup[۲,+\infty)$

۴۵۵. گزینهٔ ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f(\frac{۱}{x})-f(x)\geq ۰ \Rightarrow f(\frac{۱}{x})\geq f(x)$$

$f(x)=۲^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف fها، علامت برنمی‌گردد:

$$\frac{۱}{x}\geq x$$

نامعادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

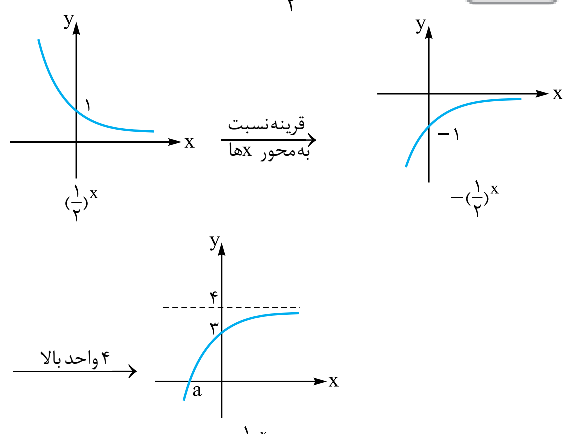
$$\frac{۱}{x}-x\geq ۰ \Rightarrow \frac{۱-x^۲}{x}\geq ۰ \Rightarrow \frac{(۱-x)(۱+x)}{x}\geq ۰$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		−۱		۰		۱	
کل	+		−	ت	+		−
	جواب				جواب		

پس: $(-\infty,-۱]\cup(۰,۱]$

۴۵۶. گزینهٔ ۲ نمودار تابع $f(x)=-(\frac{۱}{۲})^x+۴$ را می‌کشیم:



محل برخورد تابع نهایی با محور xها مهم است:

$$-(\frac{۱}{۲})^x+۴=۰ \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^x=۴ \Rightarrow x=-۲$$

پس f تابعی اکیداً صعودی با ریشهٔ $x=-۲$ است.

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع رادیکالی $g(x)=\sqrt{x\,f(x)}$، زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\underset{۰}{x}\,\underset{-۲}{f(x)}\geq ۰$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

		−۲		۰	
x	−		−		+
f(x)	−		+		+
کل	+		−		+
	جواب				جواب

پس: $D_g=(-\infty,-۲]\cup[۰,+\infty)=\mathbb{R}-(-۲,۰)$

۴۵۷. گزینهٔ ۲ همهٔ جملات را بررسی می‌کنیم:

الف) جمع تابع صعودی و نزولی، نامشخص است یعنی می‌تواند صعودی یا نزولی یا ثابت یا غیریکنوا شود. مثلاً اگر $f(x)=۳x+۱$ و $g(x)=-x-۱$ باشد، آن وقت $(f+g)(x)=۲x$ که تابعی صعودی است.

ب) جمع صعودی اکید و صعودی، تابعی صعودی اکید است.

پ) اگر g نزولی باشد، آن‌گاه $-g$ صعودی است، پس:

$f-g=f+(-g)=$ صعودی اکید + (صعودی) = صعودی اکید

ت) اگر f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، fg، می‌تواند صعودی اکید یا نزولی اکید یا ثابت باشد:

$f(x)=x\,,\,g(x)=۲ \Rightarrow (fg)(x)=۲x \Rightarrow$ صعودی اکید

$f(x)=x\,,\,g(x)=-۲ \Rightarrow (fg)(x)=-۲x \Rightarrow$ نزولی اکید

$f(x)=x\,,\,g(x)=۰ \Rightarrow (fg)(x)=۰ \Rightarrow$ ثابت

پس دو جملهٔ (ب) و (پ) درست بودند.

۴۵۸. گزینهٔ ۲ با فرض $g(x)=-x^۳$، جای $f(-x^۳)$ می‌توانیم بنویسیم fog.

سؤال گفته f اکیداً نزولی است، از طرفی $g(x)=-x^۳$ هم اکیداً نزولی است. با توجه به این‌که ضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است: $(-)\times(-)\Rightarrow(+)$

پس: $\underset{\text{نزولی}}{f}\,,\,\underset{\text{نزولی}}{g}\Rightarrow\underset{\text{صعودی}}{fog}$

۴۵۹. گزینهٔ ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

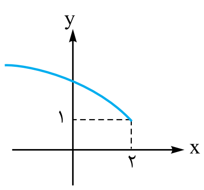
(۱) $f(x)+\sqrt{x}=$ صعودی + صعودی = صعودی

(۲) $\underset{-}{g}\,o\,\underset{-}{g}(\underset{+}{x}) \Rightarrow (-)\times(-)\times(+)=(+)\Rightarrow$ صعودی

(۳) $g\,(\underset{\text{غیریکنوا}}{x^۲}) \Rightarrow (-)\times$ نامشخص $\Rightarrow$ نامشخص

(۴) $(\underset{+}{f}\,o\,\underset{-}{g}\,o\,\underset{+}{f})(\underset{+}{x}) \Rightarrow (+)\times(-)\times(+)\times(+)=-\Rightarrow$ نزولی

۴۶۰. گزینهٔ ۱ تابع $\sqrt{۲-x}+۱$ به صورت مقابل است:



این تابع، اکیداً نزولی است و مقادیرش تغییر علامت نمی‌دهند (چون بالای محور xهاست)، پس $\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۱}$ تابعی اکیداً صعودی می‌شود.

۴۶۱. گزینهٔ ۲ برای f یک ضابطه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً $y=-(۲^x)$. f نزولی اکید و زیر محور xهاست.

حالا دو ضابطه را تشکیل می‌دهیم و با مقایسهٔ مقادیر در $x=۱$ و $x=۲$، وضعیت یکنوایی را مشخص می‌کنیم (چون در گزینه‌ها غیریکنوا نداریم، مشکلی پیش نمی‌آید).

$$g(x)=-x.f(x)=x.۲^x \Rightarrow \begin{cases}g(۱)=۲\\ g(۲)=۸\end{cases} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

$$h(x)=\frac{۱}{f(-x)}=\frac{۱}{-۲^{-x}}=\frac{۱}{-(\frac{۱}{۲})^x}=-(۲^x) \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

۴۶۲. گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار، $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی است، پس $-f(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{اکیدصعودی}}+\underbrace{(-f(x))}_{\text{اکیدصعودی}}}_{\text{اکید صعودی}}$$

برای به دست آوردن بُرد تابع اکیداً صعودی که ناپیوستگی ندارد، مقادیر تابع را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه حساب می‌کنیم. دامنهٔ $\sqrt{x}$ بازهٔ $[۰,+\infty)$ و دامنهٔ f، بازهٔ $(۲,۵)$ است که اشتراکشان $(۲,۵)$ می‌شود، پس:

$$g(x)=\sqrt{x}-f(x)\xrightarrow{\text{برد}}\begin{cases}g(۲)=\sqrt{۲}-f(۲)=\sqrt{۲}-۳\\ g(۵)=\sqrt{۵}-f(۵)=\sqrt{۵}+۱\end{cases}$$

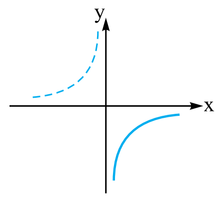
پس بردمان محدودهٔ $[\sqrt{۲}-۳,\sqrt{۵}+۱]$ است که تقریباً $[-۱/۶,۳/۲]$ می‌شود.

الان اگر براکت بگیریم، بردمان شامل $-۲,-۱,۰,۱,۲,۳$ می‌شود.

۴۶۳. گزینهٔ ۴ دقت کنید دامنه‌های هر دو تابع محدود است. هر دو تابع را بررسی می‌کنیم.

۱) $f(x)=\frac{-۱}{x}+\sqrt{x}$: دامنهٔ f بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

نمودار $y=\frac{-۱}{x}$ در این بازه به صورت روبه‌رو است:



پس:

$$f(x)=\underbrace{\frac{-۱}{x}}_{\text{صعودی}}+\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{صعودی}}\Rightarrow \text{صعودی}$$

۲) $g(x)=|x|+\sqrt{-x}$: دامنهٔ g، بازهٔ $(-\infty,۰]$ است.

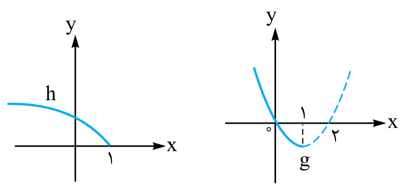
پس جای $|x|$ می‌توانیم $-x$ قرار دهیم:

$$g(x)=\underbrace{-x}_{\text{نزولی}}+\underbrace{\sqrt{-x}}_{\text{نزولی}}\Rightarrow \text{نزولی}$$

۴۶۴. گزینهٔ ۲ تابع f را به صورت جمع دو تابع $g(x)=x^۲-۲x$ و $h(x)=\sqrt{۱-x}$ می‌بینیم:

$$f(x)=\underbrace{x^۲-۲x}_{g(x)}+\underbrace{\sqrt{۱-x}}_{h(x)}$$

دامنهٔ f، به صورت $(-\infty,۱]$ است. نمودار g و h را با شرط $x\le ۱$ رسم می‌کنیم:



هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس f اکیداً نزولی است.

۴۶۵. گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}\Rightarrow x\ge ۰\\ ۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}\xrightarrow{\text{مخرج}}x\ne \pm ۱\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_f=[۰,۱)\cup(۱,+\infty)$$

در دو بازهٔ $[۰,۱)$ و $(۱,+\infty)$، یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم.

۱) تابع $y=۲\sqrt{x}$ در هر دو بازهٔ بالا صعودی اکید است.

۲) تابع $y=\frac{-۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ را مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$$\text{صعودی اکید } y=x^۲-۱\xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }}\text{صعودی اکید } y=\sqrt[۳]{x^۲-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}}\text{نزولی اکید } y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}\xrightarrow{\times\frac{-۳}{۲}}$$

$$\text{صعودی اکید } y=\frac{-۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید است، پس تابع $f(x)$ صعودی اکید است.

$$f(x)=\underbrace{۲\sqrt{x}}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{\frac{-۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}}_{\text{صعودی اکید}}$$