فهرست مطالب

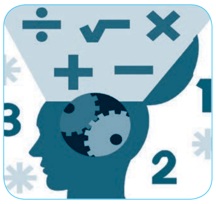
بخش اوّل: بانک تست

فصل اول:

آمار توصیفی
(فصل سوم کتاب آمار و احتمال)

فصل دوم:

آمار استنباطی
(فصل چهارم کتاب آمار و احتمال)



فصل سوم:

آشنایی با مبانی ریاضیات
(فصل اول کتاب آمار و احتمال)

فصل چهارم:

آشنایی با نظریه اعداد
(فصل اول کتاب ریاضیات گسسته)

فصل پنجم:

گراف و مدل‌سازی
(فصل دوم کتاب ریاضیات گسسته)

فصل ششم:

مجموعه‌ها
(فصل اول کتاب آمار و احتمال)

فصل هفتم:

ترکیبیات (شمارش)
(فصل سوم کتاب ریاضیات گسسته)

فصل هشتم:

احتمال
(فصل دوم کتاب آمار و احتمال)

قسمت چهارم: قضیهٔ تقسیم و کاربردها

قضیهٔ تقسیم

☆۳۷۰. در تقسیم ۶۷- بر ۲۳، خارج‌قسمت q و باقی‌مانده r است. حاصل $r+q$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۱-

☆۳۷۱. در یک تقسیم، اگر ۷۳ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج‌قسمت تغییری نمی‌کند ولی ۳ واحد از باقی‌مانده کم می‌شود. خارج‌قسمت تقسیم کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۳۷۲. در تقسیم عدد صحیح a بر ۱۷، باقی‌مانده برابر ۸ است. اگر ۱۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، آن‌گاه:

۱) باقی‌مانده تغییر نمی‌کند. ۲) باقی‌مانده یک واحد کم می‌شود.
۳) باقی‌مانده ۷ واحد کم می‌شود. ۴) باقی‌مانده ۷ واحد اضافه می‌شود.

★۳۷۳. در تقسیم عدد a بر ۶۳، باقی‌مانده ۴۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت به ترتیب چه تغییری می‌کنند؟

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود. ۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.
۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند. ۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

☆۳۷۴. در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت و باقی‌مانده مساوی q هستند. اگر ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم شود، ۵ واحد به خارج‌قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. مقادیر q کدام‌اند؟ (سراسری)

۱) ۸ و ۵ ۲) ۹ و ۴ ۳) ۱۰ و ۵ ۴) ۱۰ و ۸

۳۷۵. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی‌ماندهٔ تقسیم، توان دوم خارج‌قسمت است، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

★۳۷۶. در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷، باقی‌ماندهٔ تقسیم از مربع خارج‌قسمت آن ۲ واحد کم‌تر است. بزرگ‌ترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (سراسری)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

★۳۷۷. در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت مجذور باقی‌مانده است. چند عدد b می‌توان یافت؟ (سراسری ـ ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷۸. در تقسیم عدد ۷۵ بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت جذر باقی‌مانده است. چند مقدار برای b وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷۹. خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b به ترتیب ۱۳ و ۴۱ می‌باشد، مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۱۷ ۴) ۱۵

☆۳۸۰. در تقسیمی، باقی‌مانده برابر ۱۴ و مقسوم‌علیه سه واحد کم‌تر از مربع خارج‌قسمت است اگر مقسوم مضرب ۳ باشد، حاصل‌ضرب ارقام کوچک‌ترین مقدار طبیعی مقسوم کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۵۴

☆۳۸۱. در تقسیمی، مقسوم ۳۰ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده، ماکزیمم می‌باشد. خارج‌قسمت تقسیم کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۳۸۲. در یک تقسیم، مقسوم برابر ۶۵۰ و خارج‌قسمت برابر ۱۲ است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقدار باقی‌مانده کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

☆۳۸۳. در یک تقسیم، مقسوم برابر ۵۰۰ و خارج‌قسمت برابر ۹ است. برای مقسوم‌علیه چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تعیین باقی‌مانده

☆۳۸۴. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a-b$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۸۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۸ برابر ۷ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $2a+1$ بر ۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☆۳۸۶. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۱ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۳۸۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۵ و ۶ به ترتیب ۱ و ۴ می‌باشند. باقیماندهٔ تقسیم a بر ۳۰ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

☆۳۸۸. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ و ۷ به‌ترتیب ۳ و ۴ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳۵ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵

☆۳۸۹. اگر a یک عدد صحیح زوج و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۳۷ برابر ۱۱ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{a}{2}$ بر ۳۷ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

☆۳۹۰. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۹۹ برابر ۲۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۳۹۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۵ و ۱۱ به‌ترتیب ۴ و ۶ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۵ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۹

☆۳۹۲. اگر a مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۶ نباشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۴ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲

۳۹۳. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر ۱۳ برابر ۹ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A^2 - 2A$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۹ ۴) ۱۱

☆۳۹۴. اگر n یک عدد صحیح زوج باشد، عدد $n(n^2 - 4)$ همواره بر بزرگ‌ترین عددی که بخش‌پذیر است، کدام می‌باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۲۴

☆۳۹۵. اگر حاصل‌ضرب سه عدد صحیح x، y و z زوج باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^2 + y^2 + z^2$ بر چهار، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۹۶. اگر x و y دو عدد صحیح فرد باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^2 - 5y^2$ بر ۸، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

★۳۹۷. کدام گزینه نادرست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $6 | n^3 - n$

۲) اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، آن‌گاه $24 | p^2 - 1$

۳) اگر a یک عدد صحیح دلخواه باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۵ یکی از اعداد صفر یا ۱ است.

۴) اگر m و n دو عدد صحیح فرد باشند، آن‌گاه $16 | n^4 + m^4 - 2$

قسمت پنجم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح

ویژگی‌های هم‌نهشتی

☆۳۹۸. کدام دو عدد در هم‌نهشتی $a \overset{12}{\equiv} b$ صادق‌اند؟ (سراسری)

۱) ۲۰ و ۶۳ ۲) ۲۳ و ۱۲ ۳) ۲۳ و ۵۹ ۴) ۲۴ و ۵۹

☆۳۹۹. اگر m یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، به ازای چند مقدار m، رابطهٔ $57 \overset{m}{\equiv} 93$ برقرار است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۴۰۰. عدد ۲۸۷ به کدام دستهٔ هم‌ارزی در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۳ قرار دارد؟

۱) ۴۷ ۲) ۲۱ ۳) -56 ۴) -38

☆۴۰۱. دستهٔ هم‌ارزی $[83]_8$ با کدام مجموعهٔ زیر برابر است؟

۱) $[25]_8$ ۲) $[19]_8$ ۳) $[-43]_8$ ۴) $[-73]_8$

★۴۰۲. رابطهٔ $R = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{Z}, x - y = mk, k \in \mathbb{Z}\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. کدام دو عدد در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند؟ (سراسری)

۱) ۲۵ و ۷ ۲) ۳۱ و ۳ ۳) ۳۷ و ۱ ۴) ۳۷ و ۱۲

۴۰۳. در هم‌نهشتی به پیمانهٔ $m\ (m \neq ۱)$، سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به طوری‌که مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کم‌تری کلاس هم‌ارزی افراز شود، کدام است؟ (سراسری)

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۶

۴۰۴. مجموعهٔ همهٔ دسته‌های هم‌ارزی به پیمانهٔ ۵ به‌صورت $\{[۰],[a],[a^{۲}],[a^{۳}],[a^{۴}]\}$ است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۴

۴۰۵. اگر a عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، با کدام پیمانه گزارهٔ $[a^{۲}]=[۱]$ همواره درست نیست؟ (سراسری)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۴۰۶. اگر $(c,m)=۱$ کدام گزارهٔ شرطی در رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m همیشه درست نیست؟ (سراسری)

۱) $a^n \equiv b^n \Rightarrow a \equiv b$ ۲) $ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b$ ۳) $a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$ ۴) $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$

۴۰۷. از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۸۴) $۳۶a \equiv ۱۹۲$، کدام نتیجه‌گیری در پیمانهٔ ۷ نادرست است؟ (سراسری- ۸۸)

۱) $a \equiv ۳$ ۲) $a \equiv ۴$ ۳) $۲a \equiv -۱$ ۴) $۳a \equiv ۲$

۴۰۸. از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۳۰) $۱۵a \equiv ۲۰b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (سراسری)

۱) $۳a \overset{۳۰}{\equiv} ۴b$ ۲) $۳a \overset{۶}{\equiv} ۴b$ ۳) $b \overset{۳}{\equiv} ۰$ ۴) $a \overset{۲}{\equiv} ۰$

۴۰۹. اگر (به پیمانهٔ m)، $a^{۳}-a^{۲}-a+۱ \equiv a^{۲}-۱$ و $(a^{۲}-۱,m)=۱$ آن‌گاه .... (سراسری)

۱) $m \mid a-۲$ ۲) $m \mid a-۱$ ۳) $m \mid a+۱$ ۴) $m \mid a+۲$

۴۱۰. از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۹) $۱۸a \equiv ۱۲b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۵)

۱) (پیمانهٔ ۲) $a \equiv ۰$ ۲) (پیمانهٔ ۳) $b \equiv ۰$ ۳) (پیمانهٔ ۳) $۳a \equiv b$ ۴) (پیمانهٔ ۳) $۳a \equiv ۲b$

۴۱۱. از رابطهٔ هم‌نهشتی (پیمانهٔ ۱۸) $۹a \equiv ۶b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (سراسری- ۸۷)

۱) (پیمانهٔ ۲) $a \equiv ۰$ ۲) (پیمانهٔ ۳) $b \equiv ۰$ ۳) (پیمانهٔ ۶) $a \equiv ۲$ ۴) (پیمانهٔ ۶) $۳a \equiv ۲b$

۴۱۲. رابطهٔ هم‌نهشتی، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۱۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است و عدد سه‌رقمی $\overline{۶a۴}$ در کلاس هم‌ارزی $[۹]$ قرار دارد. تعداد جواب‌های a کدام است؟ (سراسری)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۴۱۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد ۱۲۸، ۱۱۵ و a بر عدد طبیعی $m\ (m \neq ۱)$ یکسان است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد چهاررقمی a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

تعیین باقی‌مانده و هم‌نهشتی

۴۱۴. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A بر ۱۹ برابر ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A^{۳}-۵A$ بر ۱۹ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۲

۴۱۵. اگر $a=۵k+۳$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+a^{۲}+a^{۳}+a^{۴}$ بر ۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۱۶. اگر n یک عدد صحیح دلخواه باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $n^{۲}$ بر ۵ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۱۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۷ برابر ۳ و بر ۱۱ برابر ۴ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷۷ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۵۹ ۴) ۶۵

۴۱۸. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۱ و ۱۳ به ترتیب ۴ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a+۵$ بر ۱۴۳ کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۵۴ ۳) ۸۹ ۴) ۷۹

۴۱۹. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶۳ چگونه است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۵)

۱) عدد اول ۲) مضرب ۲ ۳) مضرب ۳ ۴) مضرب ۵

۴۲۰. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۴)

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

★۴۲۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۳ برابر ۵ و باقی‌ماندهٔ تقسیم دو برابر عدد A بر عدد ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه رقمی A بر عدد ۱۲، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۷)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۷

☆۴۲۲. چند عدد سه‌رقمی طبیعی وجود دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ و بر ۵ برابر ۳ می‌باشد؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۰ ۳) ۶۱ ۴) ۶۲

☆۴۲۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر ۱۲ است. اگر a + ۱۷ مضرب ۲۱ باشد، رقم وسط کوچک‌ترین عدد a کدام است؟ (سراسری)

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۲۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۲۱ برابر ۱۹ و بر ۳۵ برابر ۳۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۵ چقدر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲ ۳) ۱۱ ۴) ۴

☆۴۲۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۱۲، ۱۵ و ۳۲ به ترتیب ۵، ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری)

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

★۴۲۶. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲، ۴ و ۸ می‌باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی A بر عدد ۲۳، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۴

۴۲۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر اعداد ۱۱، ۱۴ و ۱۵ به ترتیب ۵، ۸ و ۹ می‌باشد. کوچک‌ترین مقدار ممکن برای این عدد، مضرب کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۸ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵ (سراسری خارج از کشور- ۸۹)

☆۴۲۸. چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم‌های آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟ (سراسری- ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۲۹. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی N بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ می‌باشد. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر خارج‌قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۳۰. اگر ۷ | ۳n + ۱ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $12n^2 + n + 5$ بر ۴۹ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

☆۴۳۱. اگر عدد طبیعی به‌صورت ۲n + ۱ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی به‌صورت $14n^2 + 19n + 6$ بر عدد ۲۵، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

★۴۳۲. در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده ۱۷ و خارج‌قسمت ۲۵ می‌باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری- ۸۸)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

☆۴۳۳. در تقسیم عدد طبیعی سه‌رقمی a بر عدد طبیعی b، خارج‌قسمت ۲۱ و باقی‌مانده ۳۷ می‌باشد. چند عضو از مجموعه جواب‌های a مضرب ۵ می‌باشد؟ (سراسری- ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆۴۳۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد !۱۲۰ + ... + !۹ + !۶ + !۳ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

هم‌نهشتی و ب.م.م

★۴۳۵. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n، کسر $\frac{9n+4}{12n-5}$ یک کسر ساده‌شدنی است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۳۶. به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد به‌صورت‌های ۱۱n + ۷ و ۹n + ۲ نسبت به هم اول نیستند. کوچک‌ترین مقدار n در این حالت، مضرب کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

★۴۳۷. به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به‌صورت‌های ۵n − ۲ و ۷n + ۳، نسبت به هم غیراول‌اند؟ (سراسری- ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۳۸. به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به‌صورت‌های ۵n + ۴ و ۱۳n − ۳، نسبت به هم غیراول‌اند؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

☆۴۳۹. به ازای چند عدد دو رقمی n، دو عدد طبیعی $9n+2$ و $11n-5$ نسبت به هم غیراول‌اند؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴۰. به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n، اعداد $4n+1$ و $5n-3$، نسبت به هم اول‌اند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۸۱ ۲) ۸۲ ۳) ۸۴ ۴) ۸۵

باقی‌ماندهٔ اعداد توان‌دار

★۴۴۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 13^{43} بر عدد ۱۷ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۴۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 2^{26} بر عدد ۴۳ کدام است؟ (سراسری)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۲۶

☆۴۴۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم $5^{22}-22$ بر عدد ۴۱ کدام است؟ (سراسری)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3^{31}-9$ بر عدد ۴۱ کدام است؟ (سراسری)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

★۴۴۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 3^{20} بر عدد ۱۷ کدام است؟ (سراسری)

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۵ ۴) ۴

۴۴۶. باقی‌ماندهٔ عدد 3^{48} بر ۱۱ کدام است؟ (سراسری)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

★۴۴۷. در رابطهٔ هم‌باقی‌مانده بر ۱۱، عدد 5^{10} به کدام دستهٔ هم‌ارزی تعلق دارد؟ (سراسری- ۹۱)

۱) [۵] ۲) [۳] ۳) [۱] ۴) [۷]

☆۴۴۸. دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دستهٔ هم‌ارزی به پیمانهٔ m هم‌نهشت شده‌اند. اگر $(m,7)=1$، باقی‌ماندهٔ عدد m^m بر ۷ کدام است؟ (سراسری)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۴۹. اگر a مضرب ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+1391)^3+(a+1392)^3+\cdots+(a+1397)^3$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱

☆۴۵۰. باقی‌ماندهٔ تقسیم $3^{42}-2^{42}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟ (سراسری)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۵۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم $(-6)^{23}$ بر عدد ۳۳ کدام است؟ (سراسری- ۸۶)

۱) -18 ۲) -15 ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۴۵۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم $6^{60}+3^{60}-2^{60}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

☆۴۵۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $7^{1398}+6^{1398}$ بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱

۴۵۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2^{140}+19$ بر ۲۱ کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۱۹ ۳) ۴ ۴) ۲

★۴۵۵. اگر عدد $7^{200}+a$ مضرب ۱۹ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری- ۸۵)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۵۶. اگر عدد $7^{17}+a$ بر عدد ۵۷ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟ (سراسری)

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

☆۴۵۷. اگر $7^{32}-5\times 8^{16}\overset{17}{\equiv}a$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟ (سراسری)

۱) ۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۴۵۸. عدد $7^{15}+a$ در کلاس هم‌ارزی [۰] به پیمانهٔ ۱۷ قرار دارد. کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

☆**۴۵۹.** اگر $2^{40} + a \overset{19}{\equiv} 0$ باشد، کم‌ترین مقدار طبیعی a، کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۲

★**۴۶۰.** تعداد اعداد دورقمی a، به طوری‌که (پیمانهٔ ۱۹) $11^a \equiv 1$ کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۴)

۱) ۲۵   ۲) ۲۷   ۳) ۲۸   ۴) ۳۰

☆**۴۶۱.** به ازای چند عدد طبیعی n کوچک‌تر از ۵۰، عدد $42 + 7^n$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است؟ (سراسری- ۹۲)

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۹

۴۶۲. عدد $A + 13 \times 7^{54}$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین عدد طبیعی A، کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۲)

۱) ۲۰   ۲) ۲۸   ۳) ۲۹   ۴) ۳۰

☆**۴۶۳.** اگر عدد $(6^n - 3^n)$ مضرب ۲۵ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی n کدام است؟ (سراسری- ۹۱)

۱) ۱۶   ۲) ۱۵   ۳) ۱۰   ۴) ۲۰

۴۶۴. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی a که عدد $a + A = (1389)^{100}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) ۲۴   ۲) ۲۵   ۳) ۲۶   ۴) ۲۷

☆**۴۶۵.** به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $1 + 5^{3n+2} + 5^{6n+4}$، بر عدد ۳۱ بخش‌پذیر است؟ (سراسری ریاضی- ۹۶)

۱) فقط اعداد فرد   ۲) فقط اعداد زوج   ۳) فقط اعداد مضرب ۵   ۴) تمام اعداد

۴۶۶. به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $2^{n+1} + 2^{n+4} + 5^{2n+1}$، بر عدد ۲۳ بخش‌پذیر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور-۹۶)

۱) تمام اعداد   ۲) فقط اعداد فرد   ۳) فقط اعداد زوج   ۴) فقط اعداد مضرب ۷

روزهای هفته و بسط دوجمله‌ای

★**۴۶۷.** هرگاه سال نو با روز چهارشنبه آغاز شود، در این سال ۱۵ آبان چه روزی است؟

۱) دوشنبه   ۲) سه‌شنبه   ۳) چهارشنبه   ۴) پنجشنبه

☆**۴۶۸.** اگر ۲۵ اسفند سالی دوشنبه باشد، ۱۹ اردیبهشت همان سال چه روزی بوده است؟

۱) جمعه   ۲) دوشنبه   ۳) سه‌شنبه   ۴) چهارشنبه

☆**۴۶۹.** عدد 47^3 با کدام پیمانه با عدد $7^3 + 40^3$ هم‌نهشت است؟

۱) ۲۸۰   ۲) ۳۲۰   ۳) ۳۴۰   ۴) ۳۶۰

۴۷۰. باقی‌ماندهٔ تقسیم $23^4 + 7^4 - 30^4$ بر ۱۶۱ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۷   ۳) ۱۱   ۴) ۲۳

قسمت ششم: بخش‌پذیری بر اعداد خاص

★**۴۷۱.** به ازای کدام مقدار n، مجموع ارقام عدد $10^{3n} - 10^n$ برابر ۲۱۶ می‌شود؟ (سراسری- ۸۵)

۱) ۹   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۱۵

☆**۴۷۲.** عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$ مربع کامل است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد دو رقمی $\overline{ab}$ بر ۱۳، کدام است؟ (سراسری- ۹۲)

۱) ۹   ۲) ۱۰   ۳) ۱۱   ۴) ۱۲

۴۷۳. به ازای کدام مقدار b، عدد پنج‌رقمی $\overline{a1aba}$ بر عدد ۷ بخش‌پذیر است؟ (سراسری)

۱) ۲   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۸

★**۴۷۴.** عدد !۷۵ مختوم به چند صفر است؟ (سراسری- ۹۰)

۱) ۱۸   ۲) ۱۶   ۳) ۱۷   ۴) ۱۵

۴۷۵. در سمت راست عدد $5^{30} \times 30!$، چند رقم صفر وجود دارد؟

۱) ۳۰   ۲) ۲۶   ۳) ۳۶   ۴) ۳۷

۴۷۶. کوچک‌ترین عدد به‌صورت $k!$ که بر 5^{22} بخش‌پذیر است، کدام است؟

۱) !۳۵   ۲) !۹۵   ۳) !۱۲۰   ۴) !۱۱۰

تســـــــــت‌هـای V.I.P

۵۳۰. کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت.» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۴ ۲) ۳۷ ۳) ۶۱ ۴) ۲۴

۵۳۱. اگر a، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند به طوری‌که $a+b+c=1$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $(1-a)(1-b)(1-c)$ کدام است؟

۱) abc ۲) $a+b+c$ ۳) $8abc$ ۴) $8(a+b+c)$

۵۳۲. چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار $3y = 7x^3 - 7x$ وجود دارد به طوری‌که طول نقاط مضرب ۲ و عرض نقاط مضرب ۱۴ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۵۳۳. اگر $202 \mid 11^n - 9^n$ باشد، مقدار مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۳۴. اگر $11 \mid 3a-b+1$ و $11 \mid 5a+2b+x$، مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی x کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۵۳۵. اگر a و b دو عدد صحیح، $(a,b)=d$ و $\frac{ab}{d}=1800$ و $(d,6)=1$، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰۸۵ ۲) ۱۸۲۵ ۳) ۳۶۵ ۴) ۱۸۰۱

۵۳۶. اگر ۱۱، ۱۳، ۱۷، ... و p، ۴۵ عدد اول متوالی باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $11^2+13^2+\dots+p^2$ بر ۸ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) صفر

۵۳۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم $(a+1381)^3+(a+1382)^3+\dots+(a+1386)^3$ بر ۶ کدام است؟

۱) به a بستگی دارد. ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

۵۳۸. عدد شش‌رقمی $\overline{ababab}$ ممکن است مضرب کدام عدد نباشد؟ (سراسری- ۸۹)

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۷

۵۳۹. عدد شش‌رقمی $\overline{ababab}$ برابر حاصل‌ضرب ۱۱۱ در مربع کامل یک عدد است. مجموع دو رقم a و b کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۳)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۵۴۰. هفت برابر عدد شش‌رقمی $\overline{abcabc}$، مربع کامل است. بیش‌ترین مقدار مجموع ارقام عدد $\overline{abc}$، کدام است؟ (سراسری- ۹۳)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۵۴۱. به ازای مقادیر nهای طبیعی، $100 \le n \le 1000$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $n^{100}+1$ بر ۷ چند عدد متفاوت می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

۵۴۲. اگر $a^p = 10k+7$، آن‌گاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟ (سراسری)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۴۳. اگر $A = 2!+3!+\dots+1381!$ و $B = 3!+4!+\dots+1382!$ باشد، رقم یکان عدد $(B-A)^{A+B}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۶

۵۴۴. اگر دو عدد a و ۹۰ نسبت به هم اول باشند، بزرگ‌ترین عددی که همواره a^4-1 را می‌شمارد، کدام است؟ (سراسری)

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۸۸ ۳) ۳۲۴ ۴) ۴۸۰

به دو طرف تساوی ۶۰ واحد اضافه می‌کنیم. داریم:

$$a+60=63q+107 \xrightarrow{107=63\times1+44} a+60=63\underbrace{(q+1)}_{\text{خارج‌قسمت}}+\underbrace{44}_{\text{باقی‌مانده}}$$

پس یک واحد به خارج‌قسمت اضافه شده است و $47-44=3$ واحد از باقی‌مانده کم‌شده است.

۳۷۴ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

$$\left.\begin{array}{l} a=bq+q \\ a=(b-3)(q+5)\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{bq}+q=\cancel{bq}-3q+5b-15$$

$$\Rightarrow q+3q=5b-15 \Rightarrow 4q=5(b-3)$$

$5(b-3)$ مضرب ۵ است، پس $4q$ مضرب ۵ است و در نتیجه q مضرب ۵ است. در گزینه‌ها فقط گزینهٔ (۳) شامل اعداد مضرب ۵ است.

۳۷۵ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

طبق فرض، اگر q خارج‌قسمت تقسیم باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $r=q^2$ است. فرض کنیم a بر ۴۷ تقسیم شده باشد، بنابر قضیهٔ تقسیم، داریم: $a=47q+r\ ,\ 0\le r=q^2<47$

بیش‌ترین مقدار q که در نامساوی $0\le q^2<47$ صدق می‌کند، برابر $q=6$ است. به ازای $q=6$، بزرگ‌ترین عدد a به‌دست می‌آید. داریم:

$$q=6\Rightarrow a=47\times6+6^2=6(47+6)=6\times53=318$$

$\Rightarrow$ مجموع ارقام $=3+1+8=12$

۳۷۶ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

اگر q خارج‌قسمت تقسیم باشد، آن‌گاه طبق فرض، q^2-2 باقی‌ماندهٔ تقسیم است. بنابراین:

$$a=37q+q^2-2, r=q^2-2<37\Rightarrow q^2<39\Rightarrow \max(q)=6$$

$$\max(a)=37\times6+6^2-2=256=16^2$$

۳۷۷ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

طبق فرض، اگر r باقی‌ماندهٔ تقسیم باشد، آن‌گاه r^2 خارج‌قسمت تقسیم است. داریم: $165=br^2+r=r(br+1)\ ,\ r<b$

$$165=3\times5\times11\Rightarrow \begin{cases} r=1, br+1=165\Rightarrow b=164>r \\ r=3, br+1=55 \Rightarrow b=\frac{54}{3}=18>r \\ r=5, br+1=33\Rightarrow b=\frac{32}{5}\notin\mathbb{N} \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ r=11, br+1=15\Rightarrow b=\frac{14}{11}\notin \mathbb{N} \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

۳۷۸ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

در تقسیم، اگر q خارج‌قسمت تقسیم باشد، آن‌گاه باقی‌مانده q^2 است.

طبق قضیهٔ تقسیم، داریم: $75=bq+q^2\ ,\ 0\le \underset{\text{باقی‌مانده}}{q^2}<b$

$$\Rightarrow q(b+q)=75=1\times75=3\times25=5\times15$$

واضح است که $b+q>q$، پس:

$$\begin{cases}q=1\\ b+q=75\Rightarrow b=74>q^2=1\ \checkmark\end{cases}$$
$$\begin{cases}q=3\\ b+q=25\Rightarrow b=22>q^2=9\ \checkmark\end{cases}$$
$$\begin{cases}q=5\\ b+q=15\Rightarrow b=10\not>q^2=25\ \times\end{cases}$$

بنابراین فقط دو مقدار برای b وجود دارد.

۳۷۹ (**۱**) (۲) (۳) (۴)

بنابر قضیهٔ تقسیم، داریم: $a=13b+\underset{\text{باقی‌مانده}}{41}\ ,\ b>41$

کوچک‌ترین مقدار a به ازای کم‌ترین مقدار b، یعنی $b=42$ به‌دست می‌آید. داریم:

$b=42\Rightarrow a=13\times42+41=587\Rightarrow$ مجموع ارقام $=5+8+7=20$

۳۸۰ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$\left.\begin{array}{l}a=bq+r\\ r=14, b=q^2-3\end{array}\right\}\Rightarrow a=(q^2-3)q+14$$

$$b>r\Rightarrow q^2-3>14\Rightarrow q^2>17\Rightarrow q\ge5$$

با توجه به این‌که a باید مضرب ۳ باشد، پس عبارت $(q^2-3)q+14=q^3-3q+14$ مضرب ۳ است. $-3q$ که مضرب ۳ است و با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ ۱۴ بر ۳ برابر ۲ است، پس باید باقی‌ماندهٔ q^3 بر ۳ برابر ۱ باشد و یعنی عدد q به‌صورت $3k+1$ است و با توجه به شرط $q\ge5$ حداقل مقدار q برابر ۷ است.

$$\min(a)=7^3-3\times7+14=336$$

$\Rightarrow$ حاصل‌ضرب ارقام $=3\times3\times6=54$

۳۸۱ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

فرض کنیم a، مقسوم و b مقسوم‌علیه تقسیم باشد. ماکزیمم باقی‌مانده برابر $b-1$ است. داریم: $a=bq+b-1$

طبق فرض، $a=30(b-1)$ است. داریم:

$$30(b-1)=bq+(b-1)\Rightarrow 30b-30=bq+b-1$$

$$\Rightarrow 29b-bq=29\Rightarrow b(29-q)=29=1\times29$$

$$\Rightarrow \begin{cases}b=1\\29-q=29\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\q=0\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}b=29\\29-q=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=29\\q=28\end{cases}$$

۳۸۲ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

$$650=b\times12+r\Rightarrow r=650-12b\Rightarrow 0\le r=650-12b<b$$

$$650-12b\ge0\Rightarrow 12b\le650\Rightarrow b\le\frac{650}{12}\simeq54.16 \quad (1)$$

$$650-12b<b\Rightarrow 13b>650\Rightarrow 50=\frac{650}{13}<b \quad (2)$$

با توجه به نتایج (۱) و (۲) مجموعهٔ جواب‌های قابل قبول b برابر است با:
۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴

برای آن‌که باقی‌مانده حداکثر شود، باید b حداقل مقدار خود را دارا باشد (با توجه به $r=650-12b$)

بنابراین: $\max(r)=650-12\times51=650-612=38$

$\Rightarrow$ مجموع ارقام r $=3+8=11$

۳۸۳ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

$$500=b\times9+r\Rightarrow0\le r=500-9b<b$$

$$\begin{cases}0\le500-9b\Rightarrow9b\le500\Rightarrow b\le\frac{500}{9}=55.5 & (1)\\ 500-9b<b\Rightarrow500<10b\Rightarrow50=\frac{500}{10}<b & (2)\end{cases}$$

با توجه به نتایج (۱) و (۲) برای b جواب‌های ۵۵، ۵۴، ۵۳، ۵۲ و ۵۱ قابل قبول هستند.

۳۸۴ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a=17q+5\ ,\ b=17q'+2$

$$\Rightarrow 2a-b=2(17q+5)-(17q'+2)=34q-17q'+8$$

$$=17\underbrace{(2q-q')}_{q''}+8\Rightarrow 2a-b=17q''+8\Rightarrow r=8$$

۳۸۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۸ برابر ۷ است، پس عدد صحیح مانند q وجود دارد به طوری‌که: $a=۸q+۷$

دو طرف رابطهٔ اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم و با عدد ۱ جمع می‌کنیم:

$$a=۸q+۷ \xrightarrow{\times ۲} ۲a=۱۶q+۱۴ \xrightarrow{+۱} ۲a+۱=۱۶q+\underset{\substack{\downarrow\\ ۳\times ۴+۳}}{۱۵}$$

$$\Rightarrow ۲a+۱=۴\underbrace{(۴q+۳)}_{q'}+۳ \Rightarrow r=۳$$

۳۸۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر اعداد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۱ می‌باشد، بنابر قضیهٔ تقسیم، داریم:

$$\exists q\in \mathbb{Z}\ ،\ a=۶q+۳ \qquad (۱)$$

$$\exists q'\in \mathbb{Z}\ ،\ a=۷q'+۱ \qquad (۲)$$

برای آن‌که مقسوم‌علیه ۴۲ داشته باشیم، رابطهٔ (۱) را در ۷ و رابطهٔ (۲) را در ۶ ضرب می‌کنیم:

$$(۱) \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۴۲q+۲۱$$

$$(۲) \xrightarrow{\times ۶} ۶a=۴۲q'+۶$$

دو رابطهٔ اخیر را از هم کم می‌کنیم:

$$۷a-۶a=۴۲q-۴۲q'+۱۵ \Rightarrow a=۴۲\underbrace{(q-q')}_{q''}+۱۵$$

$$\Rightarrow a=۴۲q''+۱۵ \Rightarrow r=۱۵$$

۳۸۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ و ۶ به ترتیب برابر ۱ و ۴ می‌باشد، پس بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\exists q\in \mathbb{Z}\ ،\ a=۵q+۱ \qquad (۱)$$

$$\exists q'\in \mathbb{Z}\ ،\ a=۶q'+۴ \qquad (۲)$$

چون می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر ۳۰ به‌دست آوریم، دو طرف رابطهٔ (۱) را در عدد ۶ و دو طرف رابطهٔ (۲) را در عدد ۵ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}(۱) &\xrightarrow{\times ۶} ۶a=۳۰q+۶\\ (۲) &\xrightarrow{\times ۵} ۵a=۳۰q'+۲۰\end{aligned} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۶a-۵a=۳۰q-۳۰q'-۱۴$$

$$\Rightarrow a=۳۰\underbrace{(q-q')}_{q''}-۱۴$$

۱۴− باقی‌ماندهٔ تقسیم نمی‌باشد، بنابراین:

$$a=۳۰q''\underbrace{-۳۰+۱۶}_{-۱۴}=۳۰\underbrace{(q''-۱)}_{k}+۱۶ \Rightarrow a=۳۰k+۱۶ \Rightarrow r=۱۶$$

۳۸۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

طبق فرض، داریم: $a=۵q+۳ \quad ، \quad a=۷q'+۴$

$$\begin{cases} a=۵q+۳ \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۳۵q+۲۱\\ a=۷q'+۴ \xrightarrow{\times ۵} ۵a=۳۵q'+۲۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۲a=۳۵\underbrace{(q-q')}_{q''}+۱$$

روش اول: می‌خواهیم دو طرف رابطه را بر ۲ تقسیم کنیم اما طرف دوم، کسری درمی‌آید $(a=۳۵\frac{q''}{۲}+\frac{۱}{۲})$ که در قضیهٔ تقسیم با اعداد کسری سروکار نداریم.

ابتدا وضعیت q'' را از نظر زوج یا فرد بودن مشخص می‌کنیم (۲a زوج است) داریم:

q'' فرد است. $\Rightarrow \underbrace{۳۵q''}_{\text{فرد}} \Rightarrow ۳۵q''+\underset{\substack{\downarrow\\ \text{فرد}}}{۱}$ عددی زوج است. $\Rightarrow$ ۲a زوج

$$\Rightarrow q''=۲k+۱$$

با قرار دادن ۲k+۱ در رابطهٔ $۲a=۳۵q''+۱$، داریم:

$$۲a=۳۵(۲k+۱)+۱ \Rightarrow ۲a=۷۰k+۳۶ \Rightarrow a=۳۵k+۱۸$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳۵ برابر ۱۸ است.

روش دوم: به جای q'' عددی دلخواه قرار می‌دهیم به طوری که حاصل $۳۵q''+۱$ عددی زوج شود:

$$q''=۱ \Rightarrow ۲a=۳۵(۱)+۱=۳۶ \Rightarrow a=۱۸$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۸ بر ۳۵ برابر ۱۸ است: $۱۸=۰\times ۳۵+۱۸$

۳۸۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

بنابر قضیهٔ تقسیم، داریم: $a=۳۷q+۱۱ \qquad (*)$

روش اول: دو طرف رابطه را نمی‌توان بر ۲ تقسیم کرد، زیرا $\frac{۱۱}{۲}$ و $\frac{q}{۲}$ اعداد صحیح نمی‌باشند. ابتدا وضعیت q را از نظر زوج یا فرد بودن مشخص می‌کنیم. a یک عدد زوج است، پس ۳۷q+۱۱ باید یک عدد زوج باشد.

q عدد فرد است. $\Rightarrow$ ۳۷q عدد فرد است. $\Rightarrow$ زوج $=\underset{\substack{\downarrow\\ \text{فرد}}}{۱۱}+۳۷q$

$$\Rightarrow q=۲k+۱ \xrightarrow{(*)} a=۳۷(۲k+۱)+۱۱=۷۴k+۴۸$$

$$\xrightarrow{\div ۲} \frac{a}{۲}=۳۷k+۲۴ \Rightarrow r=۲۴$$

روش دوم: به جای q عددی قرار می‌دهیم که a عدد زوج به‌دست آید.

$$q=۱ \Rightarrow a=۳۷+۱۱=۴۸ \Rightarrow \frac{a}{۲}=۲۴\ ،\ ۲۴=۳۷\times ۰+۲۴ \Rightarrow r=۲۴$$

۳۹۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۹۹ برابر ۲۵ است، بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\exists q\in \mathbb{Z}\ ،\ a=۹۹q+۲۵=۹(۱۱q)+۱۸+۷$$

$$=۹\underbrace{(۱۱q+۲)}_{q'}+۷=۹q'+۷$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ برابر ۷ است.

۳۹۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

بنابر قضیهٔ تقسیم داریم: $a=۱۵q+۴ \quad ، \quad a=۱۱q'+۶$

ابتدا تقسیم a را بر ۱۱×۱۵ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a=۱۵q+۴\\ a=۱۱q'+۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۱a=۱۱\times ۱۵q+۴۴\\ ۱۵a=۱۵\times ۱۱q'+۹۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۴a=۱۱\times ۱۵(q'-q)+\underbrace{۹۰-۴۴}_{۴۶}$$

$$\Rightarrow ۴a=۱۱\times ۵\times \underbrace{۳(q'-q)}_{q''}+۴۶ \Rightarrow ۴a=۵۵q''+۴۶$$

می‌خواهیم دو طرف رابطه را بر ۴ تقسیم کنیم. باید $۵۵q''+۴۶$ مضرب ۴ باشد، بر این اساس، q'' باید فقط به یکی از صورت‌های ۴k یا ۴k+۱ یا ۴k+۲ یا ۴k+۳ باشد.

$$q''=۴k \Rightarrow ۵۵q''+۴۶=\underbrace{۵۵\times ۴k+۴۶}_{\text{مضرب ۴ نمی‌باشد}}$$

$$q''=۴k+۱ \Rightarrow ۵۵q''+۴۶=۵۵(۴k+۱)+۴۶=\underbrace{۵۵\times ۴k+۱۰۱}_{\text{مضرب ۴ نمی‌باشد}}$$

$$q''=۴k+۲ \Rightarrow ۵۵q''+۴۶=۵۵(۴k+۲)+۴۶$$

$$=۵۵\times ۴k+۱۵۶ \quad ✓$$

$$\Rightarrow ۴a=۵۵q''+۴۶=۵۵\times ۴k+۱۵۶$$

$$\xrightarrow{\div ۴} a=۵۵k+۳۹ \Rightarrow r=۳۹$$

۳۹۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

بنابر قضیهٔ تقسیم و در تقسیم a بر ۶، داریم:

$$a = ۶q + r \ ,\ r \in \{۰،۱،۲،۳،۴،۵\}$$

a مضرب ۶ نیست ولی مضرب ۳ است، پس a به‌صورت $۶q+۳$ است.

بنابراین:

$$a^۲ = (۶q+۳)^۲ = ۳۶q^۲ + ۳۶q + \underset{۸+۱}{\underset{\downarrow}{۹}}$$

$$= ۴\underbrace{(۹q^۲ + ۹q + ۲)}_{q'} + ۱ = ۴q' + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

روش تستی: به جای a می‌توان عدد ۳ را در نظر گرفت:

$$a^۲ = ۹ = ۲ \times ۴ + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

۳۹۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

طبق قضیهٔ تقسیم، داریم:

$$A = ۱۳q + ۹ \Rightarrow A^۲ = (۱۳q+۹)^۲ = ۱۳^۲q^۲ + ۲\times۱۳\times۹q + \underset{۶\times۱۳+۳}{\underset{\downarrow}{۸۱}}$$

$$= ۱۳\underbrace{(۱۳q^۲ + ۱۸q + ۶)}_{q'} + ۳ = ۱۳q' + ۳$$

$$\Rightarrow A^۲ - ۲A = (۱۳q' + ۳) - ۲(۱۳q + ۹)$$

$$= ۱۳q' - ۲۶q - \underset{-۲۶+۱۱}{\underset{\downarrow}{۱۵}} = ۱۳\underbrace{(q' - ۲q - ۲)}_{k} + ۱۱ \Rightarrow r = ۱۱$$

۳۹۴ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

> از هر n عدد متوالی، دقیقاً یکی بر n بخش‌پذیر است.
> حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

فرض کنیم n به‌صورت $۲k$ باشد، در این‌صورت:

$$n = ۲k \Rightarrow n(n^۲ - ۴) = ۲k\underbrace{(۴k^۲ - ۴)}_{۴(k^۲-۱)}$$

$$= ۸k(k^۲ - ۱) = ۸k(k-۱)(k+۱)$$

$$= ۸\underbrace{(k-۱)k(k+۱)}_{\text{ضرب ۳ عدد متوالی}} = ۸ \times ۳!q = ۴۸q$$

پس $n(n^۲ - ۴)$ همواره بر ۴۸ بخش‌پذیر است.

۳۹۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

> مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است $(k \in \mathbb{Z})$ و مربع هر عدد زوج به‌صورت $۴k$ است.

حاصل‌ضرب سه عدد زوج است. پس حداقل یکی از آن‌ها زوج است. حالتی که هیچ‌کدام زوج نباشد را مشخص می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ آن را بر ۴ به‌دست می‌آوریم. عدد به‌دست آمده جواب نمی‌باشد.

x، y و z فرد هستند. $\Rightarrow xyz$ فرد است.

مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است، پس:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = (۸k+۱) + (۸k'+۱) + (۸k''+۱)$$

$$= ۴\underbrace{(۲k + ۲k' + ۲k'')}_{q} + ۳ = ۴q + ۳$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲$ بر ۴ برابر ۳ است که غیر قابل قبول است.

۳۹۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

روش اول: با فرض $x = ۳$ و $y = ۱$، داریم:

$$x^۲ - ۵y^۲ = ۹ - ۵ = ۴ \ ,\ \begin{array}{r|l} ۴ & ۸ \\ \hline -۰ & ۰ \\ ۴ & \end{array} \Rightarrow r = ۴$$

روش دوم: مربع هر عدد صحیح فرد به‌صورت $۸k+۱$ است. x و y دو عدد صحیح فرد هستند، بنابراین:

$$x^۲ = ۸k+۱ ، k \in \mathbb{Z} ، y^۲ = ۸k'+۱ \ ,\ k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۵y^۲ = (۸k+۱) - ۵(۸k'+۱)$$

$$= ۸k - ۴۰k' \underbrace{-۴}_{-۸+۴} = ۸k - ۴۰k' - ۸ + ۴$$

$$= ۸\underbrace{(k - ۵k' - ۱)}_{k''} + ۴ = ۸k'' + ۴ \Rightarrow r = ۴$$

۳۹۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

گزینهٔ (۱): عبارت $n^۳ - n$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی تجزیه کرد:

$$n^۳ - n = n(n^۲ - ۱) = n(n-۱)(n+۱) = (n-۱)n(n+۱)$$

ضرب سه عدد صحیح متوالی بر $۳!$ بخش‌پذیر است و داریم: $۶ | n^۳ - n$

گزینهٔ (۲): هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ مانند p فرد است و مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است، پس: $p^۲ = ۸k+۱ \Rightarrow p^۲ - ۱ = ۸k$

از طرفی p مضرب ۳ نمی‌باشد و در نتیجه: $p^۲ = ۳k+۱ \Rightarrow p^۲ - ۱ = ۳k$

$p^۲ - ۱$ هم مضرب ۳ و هم مضرب ۸ است، پس $p^۲ - ۱$ مضرب ۲۴ است.

گزینهٔ (۳): نادرست است. زیرا به عنوان مثال، اگر $a = ۲$ باشد، آن‌گاه:

$$a^۲ = ۴ = ۰ \times ۵ + ۴ \Rightarrow r = ۴$$

گزینهٔ (۴): مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است. بنابراین:

$$m^۲ = ۸k+۱ \ ,\ n^۲ = ۸k'+۱$$

$$m^۴ + n^۴ - ۲ = (m^۴ - ۱) + (n^۴ - ۱)$$

$$= \underbrace{(m^۲-۱)}_{۸k}\underbrace{(m^۲+۱)}_{۲q} + \underbrace{(n^۲-۱)}_{۸k'}\underbrace{(n^۲+۱)}_{۲q'} = ۱۶p$$

۳۹۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

> **تعریف:** برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m | a-b$ ($a-b$ مضرب m است)، می‌گوییم « a همنهشت با b است به سنج یا پیمانهٔ m » و می‌نویسیم:
>
> $$a \overset{m}{\equiv} b$$
>
> تعریف رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m $(m \in \mathbb{N})$، به زبان ریاضی عبارت است از:
>
> $$\forall a،b \in \mathbb{Z} \ ,\ a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m | a-b$$

اگر تفاضل دو عدد a و b، مضرب ۱۲ باشد، آن‌گاه $a \overset{۱۲}{\equiv} b$ برقرار است. باید تفاضل اعداد موجود در گزینه‌ها را به‌دست آوریم. طبق گزینه‌ها، $۵۹ - ۲۳ = ۳۶$ مضرب ۱۲ است و در نتیجه رابطهٔ $۵۹ \overset{۱۲}{\equiv} ۲۳$ برقرار است.

فصل ۴ آشنایی با نظریهٔ اعداد

قسمت چهارم: قضیهٔ تقسیم و کاربردها

قضیهٔ تقسیم: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این‌صورت (با تقسیم a بر b) اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$

(در یک تقسیم وقتی a را بر b تقسیم می‌کنیم، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.)

به عنوان مثال، اگر $a = -47$ و $b = 13$ باشد، آن‌گاه:

$$-47 = 13(\overset{\overset{q\in\mathbb{Z}}{\uparrow}}{-4}) + \underset{\underset{0\le r<13}{\downarrow}}{5}$$

مقدار q در قضیهٔ تقسیم از نکتهٔ بعدی به‌دست می‌آید:

نکته در قضیهٔ تقسیم، مقدار q برابر $[\frac{a}{b}]$ است، زیرا:

$$a = bq + r \ , \ 0 \le r < b$$

$$a = bq + r \xrightarrow{\div b} \frac{a}{b} = \frac{bq}{b} + \frac{r}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \Rightarrow [\frac{a}{b}] = [\underset{\underset{q\in\mathbb{Z}}{\downarrow}}{q} + \frac{r}{b}] = q + [\frac{r}{b}] \quad (*)$$

چون $0 \le r < b$، پس داریم $0 \le \frac{r}{b} < 1$ و در نتیجه $[\frac{r}{b}] = 0$

$$\xrightarrow{(*)} [\frac{a}{b}] = q$$

مثال: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۴ به ترتیب ۶ و ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $3m - 5n$ را بر ۱۴ به‌دست آورید.

پاسخ: طبق قضیهٔ تقسیم و فرض‌های مسئله داریم:

$$\begin{cases} m = 14q_1 + 6 \\ n = 14q_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m = 3\times 14q_1 + 18 \\ 5n = 5\times 14q_2 + 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m - 5n = 14\underbrace{(3q_1 - 5q_2)}_{q_3} + 18 - 20 = 14q_3 \overset{\overset{12-14}{\uparrow}}{(-2)} = 14\underbrace{(q_3 - 1)}_{q} + 12 = 14q + 12 \Rightarrow r = 12 \ \text{باقی‌مانده}$$

تست: در تقسیم عدد صحیح a بر ۳۵، باقی‌مانده برابر ۱۱ است. اگر ۸۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کند؟

۱) ۲ واحد به خارج‌قسمت و ۱۰ واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود.
۲) ۲ واحد به خارج‌قسمت اضافه و ۸ واحد از باقی‌مانده کم می‌شود.
۳) ۱ واحد به خارج‌قسمت اضافه و ۸ واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود.
۴) ۱ واحد به خارج‌قسمت اضافه و ۱۰ واحد از باقی‌مانده کم می‌شود.

پاسخ: بنابر قضیهٔ تقسیم، خارج‌قسمتی مانند q وجود دارد به طوری‌که $a = 35q + 11$. می‌خواهیم ۸۰ واحد به مقسوم (a) اضافه کنیم. پس به دو طرف تساوی $a = 35q + 11$، ۸۰ واحد اضافه می‌کنیم. داریم:

$$a + 80 = 35q + 91 \quad (1)$$

عدد ۹۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم $a + 80$ بر ۳۵ نیست $(0 \le r < 35)$، بنابراین ۹۱ را بر ۳۵ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$91 = 2\times 35 + 21 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow a + 80 = \underbrace{35q + 2\times 35}_{\text{فاکتورگیری از ۳۵}} + 21 = 35(q+2) + 21$$

پس ۲ واحد به خارج‌قسمت و همچنین ۱۰ واحد به باقی‌ماندهٔ اولیه $(10 + 11 = 21)$ اضافه شده است. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۲۳ برابر ۱۳ می‌باشد؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۹ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

پاسخ: فرض کنیم a یک عدد سه‌رقمی باشد که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۲۳ برابر ۱۳ باشد، بنابر قضیهٔ تقسیم، داریم:

$\exists q \in \mathbb{Z}\ ،\ a = ۲۳q + ۱۳$

سه رقمی $a \Rightarrow ۱۰۰ \le a < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ \le ۲۳q + ۱۳ < ۱۰۰۰ \xrightarrow{-۱۳} ۸۷ \le ۲۳q < ۹۸۷$ است.

$\Rightarrow \frac{۸۷}{۲۳} \le q < \frac{۹۸۷}{۲۳} \Rightarrow ۳/... \le q < ۴۲/... \Rightarrow ۴ \le q \le ۴۲ \Rightarrow$ تعداد $q = (۴۲ - ۴) + ۱ = ۳۹ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: در یک تقسیم، اگر ۷۷ واحد به مقسوم اضافه کنیم، سه واحد به مقسوم‌علیه اضافه می‌شود و بدون آن‌که خارج‌قسمت تغییر کند، ۲ واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود. خارج قسمت تقسیم کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۳ ۳) ۲۱ ۴) ۱۹

پاسخ: اگر a مقسوم، b مقسوم‌علیه، q خارج‌قسمت و r باقی‌ماندهٔ تقسیم باشد، آن‌گاه: $a = bq + r\ ،\ ۰ \le r < b$

با اضافه کردن ۷۷ واحد به a (مقسوم)، ۳ واحد به b (مقسوم‌علیه) و ۲ واحد به r (باقی‌مانده)، داریم: $a + ۷۷ = (b + ۳)q + (r + ۲)$

$\xrightarrow{a=bq+r} (\cancel{bq} + \cancel{r}) + ۷۷ = \cancel{bq} + ۳q + \cancel{r} + ۲ \Rightarrow ۷۷ = ۳q + ۲ \Rightarrow ۳q = ۷۵ \Rightarrow q = ۲۵$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ و ۶ به ترتیب ۴ و ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۳۰ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: بنابر قضیهٔ تقسیم، داریم:

$$\begin{matrix}\times۶ \\ \times۵\end{matrix}\begin{cases} a = ۵q + ۴ \\ a = ۶q' + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶a = ۳۰q + ۲۴ \\ ۵a = ۳۰q' + ۱۵ \end{cases} \Rightarrow ۶a - ۵a = ۳۰q - ۳۰q' + ۲۴ - ۱۵ \Rightarrow a = ۳۰\underbrace{(q - q')}_{q'' \in \mathbb{Z}} + ۹ \Rightarrow r = ۹ \Rightarrow$$

گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: اگر a یک عدد صحیح زوج و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۳ برابر ۱۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $\frac{a}{۲}$ بر ۲۳ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

پاسخ: بنابر قضیهٔ تقسیم، داریم: $a = ۲۳q + ۱۳$

روش تستی: با در نظر گرفتن $q = ۱$، عدد زوج $a = ۳۶$ به‌دست می‌آید:

$a = ۳۶ \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۱۸ = ۰ \times ۲۳ + ۱۸ \Rightarrow r = ۱۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

روش دوم: می‌خواهیم دو طرف رابطهٔ $a = ۲۳q + ۱۳$ را بر ۲ تقسیم کنیم، اما سمت راست اعداد غیرصحیح به‌دست می‌آید که غیرقابل قبول هستند. a یک عدد زوج است، ابتدا وضعیت q را از نظر زوج یا فرد بودن مشخص می‌کنیم:

$a = ۲۳q + ۱۳ \Rightarrow ۲۳q = \underset{\text{زوج}}{a} - \underset{\text{فرد}}{۱۳} =$ فرد $\Rightarrow$ $۲۳q$ فرد است $\Rightarrow$ q فرد است. (ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است)

$\Rightarrow q = ۲k + ۱ \Rightarrow a = ۲۳(۲k + ۱) + ۱۳ \Rightarrow a = ۴۶k + ۳۶ \xrightarrow{\div ۲} \frac{a}{۲} = ۲۳k + ۱۸ \Rightarrow r = ۱۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد ۵ و ۸ به ترتیب ۳ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴۰ کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

پاسخ: طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a = ۵q' + ۳\ ،\ a = ۸q + ۶$

چون می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر ۴۰ به‌دست بیاوریم، رابطهٔ $a = ۵q' + ۳$ را در ۸ و رابطهٔ $a = ۸q + ۶$ را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = ۵q' + ۳ \\ a = ۸q + ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸a = ۴۰q' + ۲۴ \\ ۵a = ۴۰q + ۳۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳a = ۴۰\underbrace{(q' - q)}_{k} - ۶$$

در تساوی $۳a = ۴۰k - ۶$، دو عدد $۳a$ و -۶ مضرب ۳ هستند، پس $۴۰k$ باید مضرب ۳ باشد و در نتیجه k باید مضرب ۳ باشد. بنابراین:

$۳a = ۴۰k - ۶ \xrightarrow{k=۳m} ۳a = ۱۲۰m - ۶ \xrightarrow{\div ۳} a = ۴۰m - \overset{۳۸-۴۰}{۲} \Rightarrow a = ۴۰(m - ۱) + ۳۸ \Rightarrow r = ۳۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست: در تقسیم عدد طبیعی a بر ۷۵، باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲ واحد از مکعب خارج قسمت بیش‌تر است. مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

پاسخ: اگر q خارج قسمت تقسیم a بر ۷۵ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم (r) برابر $q^{۳}+۲$ (مکعب خارج قسمت + ۲) است. بنابراین:

$$a=۷۵q+\underbrace{(q^{۳}+۲)}_{r}\ ,\ ۰\le r<۷۵\Rightarrow ۰\le q^{۳}+۲<۷۵$$

بزرگ‌ترین مقدار طبیعی a به ازای بزرگ‌ترین مقدار q به‌دست می‌آید. بزرگ‌ترین مقدار طبیعی q که در نامعادلهٔ $۰\le q^{۳}+۲<۷۵$ صدق می‌کند، برابر $q=۴$ است.

$$q_{max}=۴\Rightarrow a_{max}=۷۵(۴)+(۴^{۳}+۲)=۳۰۰+۶۶=۳۶۶$$

پس مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی a برابر $۳+۶+۶=۱۵$ است و در نتیجه گزینهٔ (۴) صحیح است.

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیهٔ تقسیم

اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b و با توجه به این‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰\le r<b$ صدق می‌کند، برای a بر حسب r، دقیقاً b حالت وجود دارد. به عنوان مثال اگر عدد صحیح a را به ۴ تقسیم کنیم، در این صورت یا a بر ۴ بخش‌پذیر است، یعنی $r=۰$ یا باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴ عدد ۱، عدد ۲ یا عدد ۳ است، به عبارت دیگر: $a=۴k+۳$ ، $a=۴k+۲$ ، $a=۴k+۱$ یا $a=۴k$. پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از چهار صورت فوق نوشت.

چهار مجموعهٔ $A_۱=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k\}$ ، $A_۲=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۱\}$ ، $A_۳=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۲\}$ و $A_۴=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۳\}$، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند. پس هر عدد صحیح دلخواه، فقط و فقط در یکی از مجموعه‌های $A_۱$ تا $A_۴$ قرار می‌گیرد.

می‌توان نکتهٔ کلی زیر را در نظر گرفت:

نکته اگر اعداد صحیح را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، آن‌گاه اعداد صحیح به‌صورت bk، $bk+۱$، ... و $bk+(b-۱)$ افراز می‌شوند.

توجه مشخص کردن b مناسب و استفاده از قضیهٔ تقسیم به مسئله بستگی دارد.

مثال: ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ نوشته می‌شود و سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸t+۱$ نوشته می‌شود. (برگرفته از کتاب درسی)

پاسخ: طبق قضیهٔ تقسیم، در تقسیم عدد صحیح a بر عدد $b=۴$، داریم:

$a=۴k$ یا $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۲$ یا $a=۴k+۳$

در حالت‌های $a=۴k$ و $a=۴k+۲$، a عددی زوج می‌باشد، پس عدد فرد a باید به یکی از دو صورت $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۳$ باشد. در هر دو حالت ثابت می‌کنیم، $a^{۲}$ به‌صورت $۸t+۱$ است:

$$a=۴k+۱\Rightarrow a^{۲}=(۴k+۱)^{۲}=\underbrace{۱۶k^{۲}+۸k}_{\underbrace{۸(۲k^{۲}+k)}_{t}}+۱=۸t+۱$$

$$a=۴k+۳\Rightarrow a^{۲}=(۴k+۳)^{۲}=۱۶k^{۲}+۲۴k+۹=\underbrace{۱۶k^{۲}+۲۴k+۸}_{\text{فاکتورگیری از ۸}}+۱=۸(\underbrace{۲k^{۲}+۳k+۱}_{t})+۱=۸t+۱$$

نکات زیر را به‌صورت یادآوری بیان می‌کنیم و در حل تست‌ها از آن‌ها استفاده می‌کنیم:

۱) مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است $(k\in\mathbb{Z})$ و مربع هر عدد زوج به‌صورت $۴k$ است.

۲) از هر n عدد متوالی، دقیقاً یکی بر n بخش‌پذیر است.

۳) حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱۱۹^۲+\cdots+۱۰۵^۲+۱۰۳^۲+۱۰۱^۲$ بر عدد ۸ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ : ۱۰۱، ۱۰۳، ... و ۱۱۹ همگی اعداد فرد هستند، بنابراین مربع آن‌ها به‌صورت $۸k+۱$ است. تعداد این اعداد برابر است با:

$$n=\frac{۱۱۹-۱۰۱}{۲}+۱=۱۰$$

(تعداد جملات در دنبالهٔ حسابی برابر $n=\frac{t_n-t_1}{d}+۱$ است.)

بنابراین:

$$۱۰۱^۲=۸k_1+۱\,,\,۱۰۳^۲=۸k_2+۱\,,\cdots,\,۱۱۹^۲=۸k_{10}+۱$$

$$\Rightarrow ۱۰۱^۲+۱۰۳^۲+\cdots+۱۱۹^۲=(۸k_1+۱)+(۸k_2+۱)+\cdots+(۸k_{10}+۱)$$

$$=(۸k_1+۸k_2+\cdots+۸k_{10})+(\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{\text{۱۰ تا}})=\underbrace{۸(k_1+\cdots+k_{10})+۸}_{۸k'}+۲=۸k'+۲\Rightarrow r=۲\Rightarrow$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد به صورت $۶q+۵$، عددی به صورت $۶q+۱$ است.

پاسخ : فرض کنیم $۶q+۵$ و $۶q'+۵$ دو عدد دلخواه باشند، (دو عددی که باقی ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۵ است) در این صورت:

$$(۶q+۵)(۶q'+۵)=۳۶qq'+۳۰q+۳۰q'+۲۵=(۳۶qq'+۳۰q+۳۰q'+۲۴)+۱=۶\underbrace{(۶qq'+۵q+۵q'+۴)}_{k}+۱=۶k+۱$$

در واقع ثابت کرده‌ایم که اگر حاصل‌ضرب دو عددی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۶ برابر ۵ است را بر ۶ تقسیم کنیم، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر ۱ می‌شود.

تست: کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟

۱) حاصل‌ضرب هر دو عدد به‌صورت $۴q+۳$، عددی به‌صورت $۴q+۱$ است.

۲) اگر a مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه a^2 به‌صورت $۳k+۱$ است.

۳) اگر a یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $a^2=۴k$ یا $a^2=۴k+۳$

۴) اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد، آن‌گاه $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$

پاسخ : گزینهٔ (۱): باید دو عدد دلخواه $۴q+۳$ و $۴q'+۳$ را در هم ضرب کنیم، سپس باقی‌ماندهٔ آن را بر ۴ به‌دست بیاوریم:

$$(۴q+۳)(۴q'+۳)=۱۶qq'+۱۲q+۱۲q'+\underset{۸+۱}{\underset{\downarrow}{۹}}=۴\underbrace{(۴qq'+۳q+۳q'+۲)}_{q''}+۱=۴q''+۱$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۴ برابر ۱ است و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

گزینهٔ (۲): a مضرب ۳ نمی‌باشد، بنابر قضیهٔ تقسیم، a به یکی از دو صورت $a=۳q+۱$ یا $a=۳q+۲$ است. داریم:

$$a=۳q+۱\Rightarrow a^2=(۳q+۱)^2=\underbrace{۹q^2+۶q}_{۳\underbrace{(۳q^2+۲q)}_{k}}+۱=۳k+۱$$

$$a=۳q+۲\Rightarrow a^2=(۳q+۲)^2=۹q^2+۱۲q+\underset{۳+۱}{\underset{\downarrow}{۴}}=۳\underbrace{(۳q^2+۴q+۱)}_{k}+۱$$

در هر دو حالت a^2 به‌صورت $۳k+۱$ است و در نتیجه گزینهٔ (۲) نیز صحیح است.

گزینهٔ (۳): اگر a زوج باشد، آن‌گاه a^2 به‌صورت $۴k$ است و چنان‌چه a فرد باشد، آن‌گاه a^2 به‌صورت $۸k+۱$ است که در این صورت داریم:

$$a^2=۸k+۱=۴(۲k)+۱=۴q+۱$$

پس a^2 نمی‌تواند به‌صورت $۴k+۳$ باشد و در نتیجه گزینهٔ (۳) نادرست است.

گزینهٔ (۴): اگر p عدد اول و بزرگ‌تر از ۳ را بر ۶ تقسیم کنیم، بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$p=۶k \quad \text{یا} \quad p=۶k+۱ \quad \text{یا} \quad p=۶k+۲ \quad \text{یا} \quad p=۶k+۳ \quad \text{یا} \quad p=۶k+۴ \quad \text{یا} \quad p=۶k+۵$$

اگر $p=۶k$ یا $p=۶k+۲$ یا $p=۶k+۴$ باشد، در این‌صورت p عددی زوج است و عدد اول زوج بزرگ‌تر از ۳ وجود ندارد. پس هیچ‌یک از این ۳ حالت اتفاق نمی‌افتد. اگر $p=۶k+۳$ باشد، آن‌گاه p مضرب ۳ است و می‌دانیم هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۳ و مضرب ۳ نداریم. پس این حالت نیز غیرقابل قبول است و در نتیجه p به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$ می‌باشد و در نتیجه گزینهٔ (۴) نیز درست است.

بنابراین گزینهٔ (۳) جواب تست است.

نکته اگر a مضرب ۳ نباشد، آن‌گاه a^2 به‌صورت $۳k+۱$ است.

نکته هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به یکی از دو صورت $۶k+۱$ یا $۶k+۵$ است.

فصل ۴ آشنایی با نظریهٔ اعداد

قسمت پنجم: همنهشتی در اعداد صحیح

رابطهٔ همنهشتی

تعریف برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$ ($a-b$ مضرب m است)، می‌گوییم «a همنهشت با b است به سنج یا پیمانهٔ m» و می‌نویسیم: $a \overset{m}{\equiv} b$

تعریف رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m ($m \in \mathbb{N}$)، به زبان ریاضی عبارت است از: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a-b$

به عنوان مثال، اگر $a=-۲۱$ و $b=۱۳$ باشند، آن‌گاه $a-b=-۳۴$ و -۳۴ مضرب عدد طبیعی ۱۷ (همچنین ۲ و ۳۴) است. پس: $-۲۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۳$

اما تفاضل دو عدد ۴۳ و ۱۵، یعنی ۲۸ مضرب ۱۳ نمی‌باشد، پس ۴۳ و ۱۵ به پیمانهٔ ۱۳ همنهشت نمی‌باشند. در واقع: $۴۳ \not\equiv ۱۵$ (پیمانهٔ ۱۳)

تست: اگر m یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، به ازای چند مقدار m، رابطهٔ $-۳۳ \overset{m}{\equiv} ۱۵$ برقرار است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

پاسخ: طبق تعریف، تفاضل دو عدد باید مضرب m باشد، پس $-۳۳-۱۵=-۴۸$ مضرب m است و به عبارت دیگر m یک مقسوم‌علیه طبیعی (به غیر از ۱) عدد -۴۸ است. بنابراین تعداد m با تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۴۸ (به غیر از ۱) برابر است:

$$۴۸ = ۲^۴ \times ۳^۱ \Rightarrow \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی } ۴۸ = (۴+۱)(۱+۱) = ۱۰$$

پس m می‌تواند $۱۰-۱=۹$ عدد طبیعی غیر از ۱ باشد و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

اگر a یک عدد صحیح باشد، می‌خواهیم مشخص کنیم چه اعدادی با a به پیمانهٔ m همنهشت هستند. فرض کنیم b عدد دلخواهی باشد که با a به پیمانهٔ m همنهشت است، در واقع: $b \overset{m}{\equiv} a$

طبق تعریف $b-a$ مضرب m است، پس داریم: $b-a=mk, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b=a+mk, k \in \mathbb{Z}$

بنابراین اگر مضرب‌های صحیح m را به a اضافه کنیم، اعداد همنهشت با a مشخص می‌شود. پس نکتهٔ مهم زیر را می‌توان نوشت:

نکته اگر a و b دو عدد صحیح و m یک عدد طبیعی باشند، آن‌گاه ($k \in \mathbb{Z}$): $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b=a+mk$ یا $a \overset{m}{\equiv} a+mk$

به عنوان مثال، داریم: $-۱۸ \overset{۱۲}{\equiv} \underset{}{-۱۸} + \overset{k}{\uparrow}۲ \times \overset{m}{\uparrow}۱۲ = ۶$ یا $-۱۸ \overset{۱۲}{\equiv} -۱۸ + \overset{k}{\uparrow}۱۰ \times \overset{m}{\uparrow}۱۲ = ۱۰۲$

کلاس یا دستهٔ همنهشتی: مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر r می‌باشد، را با $[r]_m$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r, k \in \mathbb{Z}\}$$

$[r]_m$ را کلاس یا دستهٔ همنهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم.

به عنوان مثال، هرگاه عدد صحیح a را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده یکی از اعداد ۰، ۱ یا ۲ می‌باشد. اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ مجموعه‌ای در نظر بگیریم، آن‌گاه این کلاس‌های هم‌ارزی را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

$$A_۰ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۳k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -۶, -۳, ۰, ۳, ۶, \cdots\} = [۰]_۳$$
$$A_۱ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۳k+۱, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, \cdots\} = [۱]_۳$$
$$A_۲ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۳k+۲, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -۴, -۱, ۲, ۵, ۸, \cdots\} = [۲]_۳$$

اگر هر دو عضو دلخواه از مجموعهٔ A_r را در نظر بگیریم، آن‌گاه تفاضل آن‌ها مضربی از عدد ۳ می‌باشد. به عنوان مثال، برای هر دو عضو دلخواه در $A_۱$، داریم:

$$\forall a, b \in A_۱ \Rightarrow \begin{cases} a = ۳k_۱+۱ \\ b = ۳k_۲+۱ \end{cases} \Leftrightarrow a-b = (۳k_۱+۱)-(۳k_۲+۱) \Leftrightarrow a-b = ۳k_۱ + \cancel{۱} - ۳k_۲ - \cancel{۱}$$

$$\Leftrightarrow a-b = ۳\underbrace{(k_۱-k_۲)}_{k_۳} \Leftrightarrow a-b = ۳k_۳ \Leftrightarrow ۳|a-b \Leftrightarrow a \overset{۳}{\equiv} b$$

در نتیجه هر دو عضو دلخواه از هر یک از مجموعهٔ A_0 ، A_1 و A_2 به پیمانهٔ ۳ با یکدیگر همنهشت می‌باشند. مانند: $-۴ \overset{۳}{\equiv} ۱۱$ ، $۹ \overset{۳}{\equiv} ۰$ ، $۴ \overset{۳}{\equiv} -۵$ ، $۷ \overset{۳}{\equiv} ۱$

می‌دانیم مجموعه‌های $[۰]_۳$ ، $[۱]_۳$ و $[۲]_۳$ یک افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند. در این مثال، همنهشتی به پیمانهٔ $m=۳$ را در نظر گرفته‌ایم و مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ۳ کلاس هم‌ارزی افراز شده است. همچنین دو عددی در یک کلاس هم‌ارزی قرار گرفته‌اند که تفاضل آن‌ها مضرب ۳ است. بنابراین در حالت کلی داریم:

نکته در همنهشتی به پیمانهٔ m، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به m کلاس هم‌ارزی افراز می‌شود. این کلاس‌های هم‌ارزی می‌توانند به‌صورت $[۰]_m$ ، $[۱]_m$ ، $[۲]_m$ ، ... و $[m-۱]_m$ باشد.

نکته دو عدد a و b در کلاس هم‌ارزی $[r]_m$ قرار دارند، هرگاه $a-b$ مضرب m باشد و به عبارت دیگر $a \overset{m}{\equiv} b$

نکته با توجه به تعریف‌های ارائه‌شده، گزاره‌های زیر همگی معادل هستند:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b$ ۲) $m \mid a-b$ ($a-b$ مضرب m است)

۳) $a \in [b]_m$ ۴) $[a]_m = [b]_m$

۵) باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر m یکسان است. ۶) a و b عضو یک کلاس یا دستهٔ هم‌ارزی به پیمانهٔ m هستند.

توجه در حل سؤالات، هر یک از گزاره‌های (۲) تا (۶) را به گزارهٔ (۱) تبدیل می‌کنیم.

تست: رابطهٔ همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند. کدام دو عدد در یک کلاس هم‌ارزی به پیمانهٔ m قرار می‌گیرند؟

۱) ۴۰ و ۱۸ ۲) ۲۱ و ۳۴- ۳) ۳۲- و ۱۷ ۴) ۴۳- و ۱۱-

پاسخ: رابطهٔ همنهشتی به پیمانهٔ m، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به ۵ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. پس m باید ۵ باشد. دو عددی در یک کلاس هم‌ارزی قرار می‌گیرند که تفاضل آن‌ها مضرب ۵ باشد. طبق گزینه‌ها، تفاضل دو عدد ۲۱ و ۳۴-، یعنی ۵۵- (یا ۵۵) مضرب ۵ است و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: دستهٔ هم‌ارزی $[۱۳]_۹$ با کدام دستهٔ هم‌ارزی زیر به پیمانهٔ ۹ برابر است؟

۱) $[-۶۹]$ ۲) $[-۴۳]$ ۳) $[۹۷]$ ۴) $[۸۵]$

پاسخ: اگر $[a]_m = [b]_m$، آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$ و در نتیجه $a-b$ مضرب m است. پس باید عددی که تفاضل آن با ۱۳ مضرب ۹ باشد را مشخص کنیم. طبق گزینه‌ها، $۸۵-۱۳=۷۲$ مضرب ۹ است و در نتیجه دو دستهٔ هم‌ارزی $[۱۳]_۹$ و $[۸۵]_۹$ یکی هستند. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

خواص و ویژگی‌های رابطهٔ همنهشتی

۱) آ) هر عدد صحیح مانند a به پیمانهٔ m با خودش همنهشت است: $a \overset{m}{\equiv} a$

ب) اگر a همنهشت با b به پیمانهٔ m باشد، آن‌گاه b نیز همنهشت با a به پیمانهٔ m است و برعکس: $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$

پ) اگر a همنهشت با b به پیمانهٔ m و b همنهشت با c به پیمانهٔ m باشند، آن‌گاه a همنهشت با c به پیمانهٔ m است: $a \overset{m}{\equiv} b ، b \overset{m}{\equiv} c \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$

(خاصیت تعدی برای همنهشتی برقرار است.)

۲) به دو طرف یک رابطهٔ همنهشتی می‌توان هر عدد صحیح را اضافه یا کم کرد: $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

۳) دو طرف یک رابطهٔ همنهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

تذکر عکس این رابطه لزوماً برقرار نیست. یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$

برای این مطلب می‌توان مثال نقض آورد.

$۱۲ \overset{۲}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۳ \times ۴ \overset{۲}{\equiv} ۲ \times ۴ \Rightarrow ۲ \overset{۲}{\not\equiv} ۳$ (پیمانهٔ ۲)

۴) دو طرف یک رابطهٔ همنهشتی را می‌توانیم به توان n برسانیم: $(n \in \mathbb{N})$ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

تذکر عکس این قانون برقرار نیست. یعنی در حالت کلی نمی‌توان از دو طرف یک رابطهٔ همنهشتی ریشه گرفت.

مثال نقض: $۲۵ \overset{۸}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۵^۲ \overset{۸}{\equiv} ۳^۲ \Rightarrow ۵ \overset{۸}{\not\equiv} ۳$

۵) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \mid m$ (n یک عدد طبیعی است)، در این صورت $a \overset{n}{\equiv} b$

به عنوان مثال، اگر $a \overset{۳۰}{\equiv} b$، آن‌گاه $a-b$ مضرب ۳۰ است و $۵ \mid ۳۰$ (۵ یک مقسوم‌علیه طبیعی ۳۰ است)، در این صورت $a-b$ مضرب ۵ خواهد بود و در نتیجه $a \overset{۵}{\equiv} b$

۶) دو طرف رابطه‌های همنهشتی که پیمانه‌های یکسان داشته باشند را می‌توان با هم جمع یا منها کرده یا در هم ضرب کرد:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd \quad , \quad a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d$$

نکته با توجه به ویژگی‌های همنهشتی، اگر $f(a)$ یک چندجمله‌ای بر حسب a با ضرایب صحیح و $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ $f(a)$ به پیمانهٔ m، کافی است مقدار $f(b)$ را به پیمانهٔ m به‌دست بیاوریم. به عبارت دیگر:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow f(a) \overset{m}{\equiv} f(b)$$

به عنوان مثال، اگر $a \overset{۷}{\equiv} ۲$ و بخواهیم حاصل $۵a^۳ - ۴a^۲ + ۱$ را به پیمانهٔ ۷ به‌دست بیاوریم، داریم:

$$a \overset{۷}{\equiv} \underset{b}{\underset{\downarrow}{۲}} \,,\, f(a) = ۵a^۳ - ۴a^۲ + ۱ \Rightarrow f(a) \overset{۷}{\equiv} f(۲) = ۵(۲)^۳ - ۴(۲)^۲ + ۱ = ۲۵$$

۷) می‌توان به دو طرف یک رابطهٔ همنهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk \quad (t,k \in \mathbb{Z})$$

نکته از این ویژگی همنهشتی همواره در محاسبات استفاده می‌کنیم و با اضافه کردن و یا کم کردن **مضرب‌های مناسب** پیمانه، اعداد کوچک‌تر به وجود می‌آوریم.

به عنوان مثال، اگر $a \overset{۱۱}{\equiv} ۴۱$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$a \overset{۱۱}{\equiv} ۴۱ - ۴ \times ۱۱ = -۳$$

۸) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$

$$a = mq + r \Leftrightarrow a - r = mq \Leftrightarrow m \mid a - r \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

همچنین اگر $a \overset{m}{\equiv} r$ و $۰ \le r \le m-۱$، آن‌گاه r باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m است.

از ویژگی‌های گفته‌شده برای تعیین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی m استفاده می‌کنیم.

تست: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۱۷ برابر ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۴a + ۳$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۷ برابر ۵ می‌باشد، بنابراین:

$$a \overset{۱۷}{\equiv} ۵$$

ابتدا دو طرف رابطهٔ همنهشتی را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم و سپس با عدد ۳ جمع می‌کنیم:

$$a \overset{۱۷}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۴} ۴a \overset{۱۷}{\equiv} ۲۰ \xrightarrow{+۳} ۴a + ۳ \overset{۱۷}{\equiv} ۲۳$$

۲۳ باقی‌ماندهٔ $۴a + ۳$ بر ۱۷ نمی‌باشد $(۰ \le r < ۱۷)$. داریم:

$$۲۳ \underset{-۱۷}{\overset{۱۷}{\equiv}} ۶ \Rightarrow ۴a + ۳ \overset{۱۷}{\equiv} ۶$$

پس باقی‌مانده برابر ۶ است و در نتیجه گزینهٔ (۱) صحیح است.

روش تستی: می‌توان ۵ را به جای a قرار داد و سپس باقی‌ماندهٔ $۴a + ۳$ را بر ۱۷ به‌دست آورد:

$$۴a + ۳ = ۴(۵) + ۳ = ۲۳ = ۱ \times ۱۷ + ۶ \Rightarrow r = ۶$$

تست: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۱۵ برابر ۱۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴a^۳ + ۱۱$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۱

پاسخ : روش اول: طبق فرض، $a \overset{۱۵}{\equiv} ۱۲$ می‌باشد. در همنهشتی و در محاسبات آن، ۱۲ عددی بزرگ به پیمانهٔ ۱۵ به حساب می‌آید. می‌نویسیم:

$$a \overset{۱۵}{\equiv} ۱۲ \underset{-۱۵}{\overset{۱۵}{\equiv}} -۳ \xrightarrow[\text{۳ می‌رسانیم.}]{\text{دو طرف را به توان}} a^۳ \overset{۱۵}{\equiv} -۲۷ \overset{۱۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow[\text{۴ ضرب می‌کنیم.}]{\text{دو طرف را در عدد}} ۴a^۳ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۲ \overset{۱۵}{\equiv} -۳$$

به دو طرف رابطهٔ اخیر، عدد ۱۱ را اضافه می‌کنیم:

$$۴a^۳ \overset{۱۵}{\equiv} -۳ \xrightarrow{+۱۱} ۴a^۳ + ۱۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۸ \Rightarrow r = ۸ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

روش دوم:

$$a \overset{۱۵}{\equiv} ۱۲ \overset{۱۵}{\equiv} -۳ \,,\, f(a) = ۴a^۳ + ۱۱ \Rightarrow f(a) \overset{۱۵}{\equiv} f(-۳) = ۴(-۳)^۳ + ۱۱ = ۴ \times (-۲۷) + ۱۱ \underset{+۳۰}{\overset{۱۵}{\equiv}} ۴ \times ۳ + ۱۱ = ۲۳ \overset{۱۵}{\equiv} ۸$$

در صورت نیاز، می‌توان هم دو طرف رابطهٔ همنهشتی و هم‌پیمانه را در یک عدد طبیعی دلخواه ضرب کرد.

۹) (قانون تغییر پیمانه) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه: $an \overset{mn}{\equiv} bn$

از این ویژگی وقتی استفاده می‌کنیم که بخواهیم پیمانه را تغییر دهیم.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۶ و ۷ به ترتیب ۴ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۸ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

پاسخ: باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶ برابر ۴ است. بنابراین: $a \overset{۶}{\equiv} ۴$

باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷ برابر ۵ است. بنابراین: $a \overset{۷}{\equiv} ۵$

چون می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر ۴۲ به‌دست آوریم، باید پیمانه را تغییر دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{۶}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times ۷} ۷a \overset{۴۲}{\equiv} ۲۸ \\ a \overset{۷}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۶} ۶a \overset{۴۲}{\equiv} ۳۰ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{هم کم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را از}} ۷a - ۶a \overset{۴۲}{\equiv} ۲۸ - ۳۰ \Rightarrow a \overset{۴۲}{\equiv} -۲$$

-۲ باقی‌ماندهٔ a بر ۴۲ نمی‌باشد، زیرا باقی‌مانده بر ۴۲ یکی از اعضای مجموعهٔ $\{۰،۱،۲،...،۴۱\}$ می‌باشد. داریم:

$\underbrace{-۲ \overset{۴۲}{\equiv} ۴۰}_{+۴۲} \Rightarrow a \overset{۴۲}{\equiv} ۴۰ = r \Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

۱۰) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ ($a-b$ مضرب m است) و $a \overset{n}{\equiv} b$ ($a-b$ مضرب n است)، در این صورت $a-b$ مضرب ک.م.م m و n، یعنی $[m،n]$ است.

در واقع:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right. \Rightarrow a \overset{[m،n]}{\equiv} b$$

در حالت خاص، اگر m و n نسبت به هم اول باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right. \xrightarrow{(m،n)=۱} a \overset{mn}{\equiv} b$$

تست: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۵ و ۱۸ به ترتیب ۱۳ و ۱۶ باشند، رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: طبق فرض، داریم: $a \overset{۱۵}{\equiv} ۱۳ \,،\, a \overset{۱۸}{\equiv} ۱۶$

برای استفاده از ویژگی (۱۰)، طرف‌های دوم رابطه‌های همنهشتی باید با هم برابر باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{۱۵}{\equiv} \underbrace{۱۳ \overset{۱۵}{\equiv} -۲}_{-۱۵} \\ a \overset{۱۸}{\equiv} \underbrace{۱۶ \overset{۱۸}{\equiv} -۲}_{-۱۸} \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{[۱۵،۱۸]}{\equiv} -۲ \,،\, [۱۵،۱۸] = [۵^۱ \times ۳^۱ , ۳^۲ , ۲^۱] = ۲^۱ \times ۳^۲ \times ۵ = ۹۰ \Rightarrow a \overset{۹۰}{\equiv} -۲ \Rightarrow a = -۲ + ۹۰k \;,\; k \in \mathbb{Z}$$

به ازای $k=۲$، کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a به‌دست می‌آید و داریم: $k = ۲ \Rightarrow a = -۲ + ۱۸۰ = ۱۷۸ \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

یکی از ویژگی‌های همنهشتی که کاربرد فراوانی نیز دارد، تقسیم است اما تقسیم در همنهشتی، به سادگی ویژگی‌های دیگر نمی‌باشد. در واقع نمی‌توان همواره دو طرف رابطهٔ همنهشتی را بر یک عدد صحیح تقسیم کرد. به عنوان مثال، در رابطهٔ همنهشتی $۵ \times ۴ \overset{۴}{\equiv} ۷ \times ۴$، اگر دو طرف را بر ۴ تقسیم کنیم به رابطهٔ نادرست $۵ \overset{۴}{\equiv} ۷$ می‌رسیم ($۲ = ۵ - ۷$ مضرب ۴ نمی‌باشد).

تقسیم در همنهشتی

قضیه (تقسیم طرفین همنهشتی بر یک عدد):

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \;،\; (m،c) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

در حالت خاص می‌توان نوشت:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \;،\; (m،c) = ۱ \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد صحیح a بر ۴ و ۷ به ترتیب ۱ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۲۸ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۹

پاسخ: طبق فرض، داریم: $a\overset{4}{\equiv}1\ ,\ a\overset{7}{\equiv}5$

برای به‌دست آوردن باقی‌ماندهٔ a بر ۲۸، باید هم‌نهشتی a به پیمانهٔ ۲۸ را به‌دست آوریم. از قانون تغییر پیمانه استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{4}{\equiv}1 \xrightarrow{\times 7} 7a\overset{28}{\equiv}7 \\ a\overset{7}{\equiv}5 \xrightarrow{\times 4} 4a\overset{28}{\equiv}20 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3a\overset{28}{\equiv}-13$$

باید دو طرف را بر ۳ تقسیم کنیم. ۱۳− بر ۳ بخش‌پذیر نیست. با اضافه کردن مضرب مناسبی از ۲۸ به عدد ۱۳−، عددی مضرب ۳ می‌سازیم:

$$\underset{+28}{-13\overset{28}{\equiv}15} \Rightarrow 3a\overset{28}{\equiv}15 \xrightarrow[(3,28)=1]{\div 3} a\overset{28}{\equiv}5 \Rightarrow r=5 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: از رابطهٔ $48a\overset{30}{\equiv}75b$ کدام گزینه را نمی‌توان نتیجه گرفت؟

۱) $2a\overset{10}{\equiv}5b$ ۲) $6a\overset{10}{\equiv}5b$ ۳) $7a\overset{10}{\equiv}6b$ ۴) $a\overset{5}{\equiv}0$

پاسخ: **روش اول:** با توجه به این‌که $(3,30)=3$ می‌باشد، داریم:

$$48a\overset{30}{\equiv}75b \Rightarrow 3\times16a\overset{30}{\equiv}3\times25b \Rightarrow 16a\overset{10}{\equiv}25b$$

$$\left\{\begin{array}{l} 16a\overset{10}{\equiv}25b \\ 16\overset{10}{\equiv}6\ ,\ 25\overset{10}{\equiv}5 \end{array}\right. \Rightarrow 6a\overset{10}{\equiv}5b \Rightarrow$$ گزینهٔ (۲) درست است.

$$\left\{\begin{array}{l} 6a\overset{10}{\equiv}5b \Rightarrow 3\times6a\overset{10}{\equiv}3\times5b \Rightarrow 18a\overset{10}{\equiv}15b \\ 18\overset{10}{\equiv}-2\ ,\ 15\overset{10}{\equiv}-5 \end{array}\right. \Rightarrow -2a\overset{10}{\equiv}-5b \Rightarrow 2a\overset{10}{\equiv}5b \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) درست است.

$$2a\overset{10}{\equiv}5b \Rightarrow 2a\overset{5}{\equiv}5b\ ,\ 5b\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow 2a\overset{5}{\equiv}0 \xrightarrow{\div 2} a\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) درست است.

با توجه به موارد فوق، گزینهٔ (۳) را نمی‌توان نتیجه گرفت.

روش دوم: البته می‌توانستیم با مثال نقض هم به این نتیجه برسیم. در رابطهٔ $16a\overset{10}{\equiv}25b$، اگر $a=5$ و $b=2$ باشد، رابطه صحیح است و گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) برقرارند ولی گزینهٔ (۳) نادرست است.

$$7\times5\overset{10}{\not\equiv}6\times2$$

یکی از کاربردهای ویژگی تقسیم در هم‌نهشتی، حل معادلات هم‌نهشتی است.

تست: اگر $451\overset{13}{\equiv}17x$ باشد، رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه رقمی x کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: اعداد ۱۷ و ۴۵۱ در پیمانهٔ ۱۳، اعداد بزرگی به حساب می‌آیند:

$$\underset{-13}{17\overset{13}{\equiv}4}\ ,\ \underset{-13\times30}{451\overset{13}{\equiv}61}\underset{-5\times13}{\overset{13}{\equiv}-4}$$

معادله: $4x\overset{13}{\equiv}-4 \xrightarrow[\div 4]{(4,13)=1} x\overset{13}{\equiv}-1 \Rightarrow x=-1+13k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

کوچک‌ترین عدد سه رقمی x به ازای $k=8$ به‌دست می‌آید. داریم:

$k=8 \Rightarrow x=-1+13\times8=103 \Rightarrow$ رقم یکان $=3 \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد توان‌دار

در حل این نوع مسائل باید به دنبال توانی مناسب از عدد پایه باشیم که در هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، جواب ۱ یا ۱− شود. این دو عدد در توان رساندن‌های بعدی به راحتی قابل محاسبه‌اند. اگر به ۱± نرسیم، باید ۲± ، ۳± و ... را به عنوان مبنا در نظر بگیریم.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 5^{137} بر عدد ۳۱ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۵   ۳) ۲۵   ۴) ۳۰

پاسخ : باید توان‌های عدد ۵ را بررسی کنیم. داریم:

$$5^3 = 125 = 4\times 31 + 1$$

در این‌جا توان مناسب عدد ۳ است. ۱۳۷ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 137 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{135} & 45 \\ 2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 5^3 \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow[\text{۴۵ می‌رسانیم}]{\text{دو طرف را به توان}} (5^3)^{45} \overset{31}{\equiv} 1^{45} \Rightarrow 5^{135} \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{دو طرف را در } 5^2} 5^{135}\times 5^2 = 5^{137} \overset{31}{\equiv} 1\times 5^2 = 25 \Rightarrow$$

گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 2^{150} بر عدد ۴۳کدام است؟

۱) ۳۵   ۲) ۲۵   ۳) ۸   ۴) ۸-

پاسخ : با محاسبهٔ توان‌های ۲، داریم:

$$2^7 = 128 = 3\times 43 - 1 \Rightarrow 2^7 \overset{43}{\equiv} -1$$

$$\xrightarrow{150 = 7\times 21 + 3} (2^7)^{21} \overset{43}{\equiv} (-1)^{21} \Rightarrow 2^{147} \overset{43}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^{147}\times 2^3 = 2^{150} \overset{43}{\equiv} -1\times 2^3 = -8$$

توجه کنید که عدد 2^{150} با عدد ۸- به پیمانهٔ ۴۳ هم‌نهشت است، ولی چون در سؤال باقی‌ماندهٔ تقسیم خواسته شده، پس باید جواب عددی باشد که شرط تقسیم را دارا باشد، یعنی $0 \le r < 43$. پس با توجه به این‌که $35 \overset{43}{\equiv} -8$، جواب گزینهٔ (۱) است.

در برخی از اعداد توان‌دار، ابتدا باید پایه را به پیمانهٔ m حساب کنیم تا پایه، عددی کوچک شود.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 44^{150} بر عدد ۴۱ کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۲۷   ۳) ۳۲   ۴) ۳۸

پاسخ : در این مثال باید به دنبال توان‌های عدد ۴۴ باشیم که کار راحتی نیست! بهتر است که ابتدا خود عدد ۴۴ را در هم‌نهشتی بر عدد ۴۱ محاسبه کنیم.

$$44 = 41\times 1 + 3 \Rightarrow 44 \overset{41}{\equiv} 3 \Rightarrow 44^{150} \overset{41}{\equiv} 3^{150}$$

پس مثال تبدیل به این شد که «عدد 3^{150} در تقسیم بر ۴۱ دارای چه باقی‌مانده‌ای است؟»

$$3^4 = 81 = 2\times 41 - 1 \Rightarrow 3^4 \overset{41}{\equiv} -1 \xrightarrow{150 = 4\times 37 + 2} (3^4)^{37} \overset{41}{\equiv} (-1)^{37} \Rightarrow 3^{148} \overset{41}{\equiv} -1 \Rightarrow 3^2\times 3^{148} = 3^{150} \overset{41}{\equiv} -1\times 3^2 = -9 \overset{41}{\equiv} 32$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست: عدد $42^{43} + 28^{29}$ به پیمانهٔ ۱۳ در کدام دستهٔ هم‌ارزی قرار می‌گیرد؟

۱) $[6]$ ۲) $[7]$ ۳) $[8]$ ۴) $[9]$

پاسخ : با توجه به گزینه‌ها، باید باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $42^{43} + 28^{29}$ را بر ۱۳ به‌دست بیاوریم. برای این کار ابتدا باقی‌ماندهٔ اعداد ۲۸ و ۴۲ را در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۳ محاسبه می‌کنیم:

$$\underbrace{28 \overset{13}{\equiv} 2}_{-26} \Rightarrow 28^{29} \overset{13}{\equiv} 2^{29} \quad , \quad \underbrace{42 \overset{13}{\equiv} 3}_{-39} \Rightarrow 42^{43} \overset{13}{\equiv} 3^{43}$$

$$2^6 = 64 = 13\times 5 - 1 \Rightarrow 2^6 \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^6)^4 \overset{13}{\equiv} (-1)^4 \Rightarrow 2^{24} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{24}\times 2^5 = 2^{29} \overset{13}{\equiv} 1\times 2^5 = 32 \overset{13}{\equiv} 6 \qquad (1)$$

$$3^3 = 27 = 13\times 2 + 1 \Rightarrow 3^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^3)^{14} \overset{13}{\equiv} 1^{14} \Rightarrow 3^{42} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{42}\times 3 = 3^{43} \overset{13}{\equiv} 1\times 3 = 3 \qquad (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) و این‌که می‌توان دو هم‌نهشتی را با هم جمع کرد، داریم:

$$2^{29} + 3^{43} \overset{13}{\equiv} 6 + 3 = 9$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست: عدد $10 \times 6^{224} - 5 \times 7^{128}$ در کدام کلاس همنهشتی به پیمانهٔ ۴۳ قرار دارد؟

۱) $[-14]_{43}$ ۲) $[14]_{43}$ ۳) $[-20]_{43}$ ۴) $[20]_{43}$

پاسخ:

$$6^3 = 216 = 5 \times 43 + 1 \Rightarrow 6^3 \overset{43}{\equiv} 1 \Rightarrow (6^3)^{74} \overset{43}{\equiv} 1^{74}$$

$$\begin{array}{r|l} 224 & 3 \\ -222 & 74 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 6^{222} \overset{43}{\equiv} 1 \Rightarrow 6^{222} \times 6^2 = 6^{224} \overset{43}{\equiv} 1 \times 6^2 = 36 \overset{43}{\equiv} -7$$

$$\Rightarrow 10 \times 6^{224} \overset{43}{\equiv} 10 \times (-7) = -70 \quad (1)$$

$$7^3 = 343 = 8 \times 43 - 1 \Rightarrow 7^3 \overset{43}{\equiv} -1 \Rightarrow (7^3)^{42} \overset{43}{\equiv} (-1)^{42} \Rightarrow 7^{126} \overset{43}{\equiv} 1$$

$$\begin{array}{r|l} 128 & 3 \\ -126 & 42 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 7^{126} \times 7^2 = 7^{128} \overset{43}{\equiv} 1 \times 7^2 = 49 \overset{43}{\equiv} 6 \Rightarrow 5 \times 7^{128} \overset{43}{\equiv} 5 \times 6 = 30 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 10 \times 6^{224} - 5 \times 7^{128} \overset{43}{\equiv} -70 - 30 \overset{43}{\equiv} -100 \overset{43}{\equiv} -14 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

در برخی از سؤالات، می‌توان با به توان رساندن به توانی بزرگ‌تر از آن‌چه که در صورت سؤال است، برسیم و سپس با تقسیم، به توان مطلوب برسیم.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 2^{55} بر عدد ۴۳ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۲ ۳) ۹ ۴) ۱۹

پاسخ:

$$2^7 = 128 = 3 \times 43 - 1 \Rightarrow 2^7 \overset{43}{\equiv} -1$$

دو طرف را به توان ۸ می‌رسانیم:

$$(2^7)^8 \overset{43}{\equiv} (-1)^8 \Rightarrow 2^{56} \overset{43}{\equiv} 1$$

باید 2^{56} را بر ۲ تقسیم کنیم تا به 2^{55} برسیم. ولی عدد ۱ مضرب عدد ۲ نیست، پس با اضافه کردن مضرب مناسبی از ۴۳ به رابطهٔ همنهشتی داریم:

$$\begin{cases} 2^{56} \overset{43}{\equiv} 1 \overset{43}{\equiv} 44 \\ (2, 43) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{55} \overset{43}{\equiv} 22 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

در مثال‌های قبل، مهم‌ترین کار، پیدا کردن توان مناسب برای پایه بود. از قضیهٔ زیر می‌توان برای پیدا کردن توان مناسب در محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ برخی اعداد توان‌دار استفاده کرد.

قضیهٔ فرما: اگر p عددی اول باشد به طوری‌که $(a, p) = 1$، در این صورت $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

تذکر قبل از قضیهٔ فرما هم سؤال‌های همنهشتی را حل می‌کردیم ولی این قضیه می‌تواند در یافتن توانی که همنهشتی برابر ۱ شود کمک زیادی کند. ولی دقت کنید که حتماً شرط اول بودن عدد پیمانه را رعایت کنیم.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم $3^{42} + 3^{41}$ بر عدد ۴۳ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

پاسخ: با توجه به قضیهٔ فرما داریم، $3^{42} \overset{43}{\equiv} 1$. اما برای محاسبهٔ 3^{41} باید دو طرف رابطهٔ $3^{42} \overset{43}{\equiv} 1$ را بر ۳ تقسیم کنیم. داریم:

$$3^{42} \overset{43}{\equiv} 1 \overset{43}{\equiv} -42 \xrightarrow[(3,43)=1]{\div 3} 3^{41} \overset{43}{\equiv} -14 \Rightarrow 3^{41} + 3^{42} \overset{43}{\equiv} -14 + 1 = \underbrace{-13 \overset{43}{\equiv} 30}_{+43}$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

شکستن پیمانه در حل مسائل همنهشتی

در حل بعضی مسائل همنهشتی بهتر است که پیمانه را به اعداد کوچک‌تری خرد کنیم و با استفاده از ویژگی شمارهٔ (۱۰) همنهشتی، یا قانون تغییر پیمانه جواب را به‌دست آوریم. به تست بعدی توجه کنید.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد 5^{100} بر عدد ۵۶ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶

پاسخ : اگر توان‌های اولیهٔ عدد ۵ را امتحان کنیم، در تقسیم بر عدد ۵۶ به اعداد ۱ یا ۱- نمی‌رسیم. در چنین مسائلی بهتر است که پیمانه را خرد کنیم. بهتر است که عدد ۵۶ طوری تجزیه شود که اعداد نسبت به هم اول شوند، مثلاً $56 = 8 \times 7$

$$5^2 = 25 = 8 \times 3 + 1 \Rightarrow 5^2 \overset{8}{\equiv} 1 \Rightarrow (5^2)^{50} \overset{8}{\equiv} 1^{50} \Rightarrow 5^{100} \overset{8}{\equiv} 1 \qquad (1)$$

$$5^3 = 125 = 7 \times 18 - 1 \Rightarrow 5^3 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (5^3)^{33} \overset{7}{\equiv} (-1)^{33} \Rightarrow 5^{99} \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow 5^{99} \times 5 = 5^{100} \overset{7}{\equiv} -1 \times 5 = -5 \qquad (2)$$

می‌دانیم که $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \equiv b$ (به پیمانهٔ $[m,n]$)، پس باید هر دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که در (۱) و (۲) به‌دست آمده‌اند ادامه دهیم تا سمت راست آن‌ها یک عدد یکسان شوند:

$$\left.\begin{aligned} (1) &\Rightarrow 5^{100} \overset{8}{\equiv} 1 \overset{8}{\equiv} 9 \\ (2) &\Rightarrow 5^{100} \overset{7}{\equiv} -5 \overset{7}{\equiv} 2 \overset{7}{\equiv} 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5^{100} \overset{56}{\equiv} 9$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکتهٔ مهم در حل تست‌ها، وقتی که حاصل هم‌نهشتی را به پیمانهٔ عدد کوچک‌تر به‌دست آوردیم، با نگاه به گزینه‌ها، اعدادی که به این پیمانه با عدد حاصل هم‌نهشت نمی‌باشند، جواب تست نخواهند بود.

به عنوان مثال، در تست قبل، داریم: $5^{100} \overset{8}{\equiv} 1$. در بین گزینه‌ها، اعداد ۸ و ۱۶ به پیمانهٔ ۸ برابر ۱ نمی‌باشند، پس این دو گزینه، جواب تست نمی‌باشند.

همچنین: $5^{100} \overset{7}{\equiv} -5$. از بین دو عدد ۹ و ۱۷، عدد ۹ به پیمانهٔ ۷ برابر ۵- است و در نتیجه جواب ۹ می‌باشد.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم $2^{100} + 3^{100} + 5^{100}$ بر ۳۰ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲۸ ۴) ۴

پاسخ : تجزیهٔ ۳۰ به‌صورت $2 \times 3 \times 5$ است. تمام اعداد موجود در گزینه‌ها به پیمانهٔ ۲ هم‌نهشت هستند. پس باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد را بر ۲ به‌دست نمی‌آوریم.

$$2 \overset{3}{\equiv} -1 ,\ 3 \overset{3}{\equiv} 0 ,\ 5 \overset{3}{\equiv} -1 \Rightarrow A = 2^{100} + 3^{100} + 5^{100} \overset{3}{\equiv} (-1)^{100} + 0^{100} + (-1)^{100} = 1 + 0 + 1 = 2$$

تنها عددی که در گزینه‌ها به پیمانهٔ ۳ با ۲ هم‌نهشت است، عدد ۲ می‌باشد.

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست: به ازای چند عدد دو رقمی n، عدد $19^n + 18$ مضرب ۱۷ است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

پاسخ :

$$\begin{cases} 19 \overset{17}{\equiv} 2 \Rightarrow 19^n \overset{17}{\equiv} 2^n \\ 18 \overset{17}{\equiv} 1 \end{cases} \Rightarrow 19^n + 18 \overset{17}{\equiv} 2^n + 1 \overset{17}{\equiv} 0 \Rightarrow 2^n \overset{17}{\equiv} -1$$

برای حل چنین تست‌هایی، ابتدا کوچک‌ترین عدد طبیعی n که به ازای آن $2^n \overset{17}{\equiv} -1$ می‌شود را مشخص می‌کنیم.

$$2^4 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^4)^{2k+1} \overset{17}{\equiv} (-1)^{2k+1} \overset{17}{\equiv} -1$$

(دو طرف رابطهٔ $2^4 \overset{17}{\equiv} -1$ را به توان عدد فرد برسانیم، طرف دوم ۱- به‌دست می‌آید)

بنابراین عدد n، به‌صورت $4(2k+1)$ است و باید شرط دو رقمی بودن را رعایت کنیم:

$$10 \le n = 8k + 4 < 100 \Rightarrow k \in \{1,2,\dots,11\}$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

اعداد فاکتوریل‌دار و هم‌نهشتی

در حل این نوع از مثال‌ها ابتدا باید اولین عدد فاکتوریل‌داری را بیابیم که بر پیمانه بخش‌پذیر باشد و سپس به کمک سایر ویژگی‌های هم‌نهشتی جواب را به‌دست می‌آوریم.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $1!+2!+3!+\ldots+1000!$ بر عدد ۱۵ کدام است؟

۱) ۳　۲) ۷　۳) ۱۳　۴) ۹

پاسخ: در این مثال اعداد !۱، !۲، !۳ و !۴ مضرب ۱۵ نیستند، اما عدد $5!=120$ مضرب ۱۵ است و بنابراین به ازای هر $n \geq 5$ داریم $n! \overset{15}{\equiv} 0$،

بنابراین:
$$1!+2!+3!+\cdots+1000! \overset{15}{\equiv} 1!+2!+3!+4! \overset{15}{\equiv} 1+2+6+24=33 \overset{15}{\equiv} 3$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $7^{200}+57^{200}+200!+a$ بر عدد ۱۹ صفر است. کوچک‌ترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۶　۲) ۷　۳) ۸　۴) ۹

پاسخ: دقت کنیم که در عدد !۲۰۰ عدد ۱۹ هم ضرب شده است. بنابراین $200! \overset{19}{\equiv} 0$

عدد $57=3\times19$ مضرب ۱۹ است، بنابراین:
$$57 \overset{19}{\equiv} 0 \Rightarrow 57^{200} \overset{19}{\equiv} 0$$

قضیهٔ فرما: $7^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان ۱۱}} 7^{198} \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 7^2} 7^{200} \overset{19}{\equiv} 49 \underset{-38}{\overset{19}{\equiv}} 11$

$$\Rightarrow 7^{200}+57^{200}+200!+a \overset{19}{\equiv} 11+0+0+a \overset{19}{\equiv} 0 \Rightarrow \min(a)=8 \Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

بسط دوجمله‌ای و هم‌نهشتی

بسط دوجمله‌ای عبارت است از:
$$(a+b)^n=\binom{n}{n}a^n+\binom{n}{n-1}a^{n-1}b+\binom{n}{n-2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{2}a^2b^{n-2}+\binom{n}{1}ab^{n-1}+\binom{n}{0}b^n$$

با توجه به این‌که تمام جملات به‌جز جملات اول و آخر شامل a و b هستند، پس مضرب ab هستند و بنابراین:

نکته

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n \quad , \quad (a-b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+(-1)^n b^n$$

تست: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $17^{40}-9^{40}-8^{40}$ بر ۷۲ کدام است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۷۱

پاسخ: اگر در رابطهٔ $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n$، مقادیر $a=9$، $b=8$ و $n=40$ را قرار دهیم، داریم:
$$(9+8)^{40} \overset{9\times8}{\equiv} 9^{40}+8^{40} \Rightarrow 17^{40} \overset{72}{\equiv} 9^{40}+8^{40} \Rightarrow 17^{40}-9^{40}-8^{40} \overset{72}{\equiv} 0$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

روزهای هفته و هم‌نهشتی

تست: اگر ۱۱ اردیبهشت، دوشنبه باشد، روز ۹ اسفند همان سال چه روزی از هفته است؟

۱) پنجشنبه　۲) جمعه　۳) سه‌شنبه　۴) چهارشنبه

پاسخ: دقت کنیم که هر هفت روز که طی شود، دوباره به همان روز از هفته می‌رسیم، پس در این مثال فاصلهٔ دو روز (۱۱ اردیبهشت تا ۱۹ اسفند) را محاسبه می‌کنیم و از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ استفاده می‌کنیم.

$$\underbrace{20}_{\substack{\text{۲۰ روز}\\ \text{ادامهٔ اردیبهشت}}} + \underbrace{4\times31}_{\substack{\text{۴ ماه ۳۱ روزه}\\ \text{(خرداد، تیر، مرداد، شهریور)}}} + \underbrace{5\times30}_{\substack{\text{۵ ماه ۳۰ روزه}\\ \text{(مهر، آبان، آذر، دی و بهمن)}}} + \underbrace{9}_{\text{۹ روز از اسفند}} \overset{7}{\equiv} -1+5+3+2 \overset{7}{\equiv} 2$$

$$20 \overset{7}{\equiv} -1 \quad , \quad 4\times31 \overset{7}{\equiv} 4\times3 \overset{7}{\equiv} 5 \quad , \quad 5\times30 \overset{7}{\equiv} 5\times2 \overset{7}{\equiv} 3 \quad , \quad 9 \overset{7}{\equiv} 2$$

نتیجهٔ هم‌نهشتی ۲ شده است، پس از روز دوشنبه باید دو روز جلوتر برویم و جواب چهارشنبه است و گزینهٔ (۴) صحیح است.