به نام پروردگار مهربان

گسسته و آمار و احتمال

دهم | یازدهم | دوازدهم

سید مسعود طایفه

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی

مهروماه

لقمه طلایی

فهرست

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

وعدهٔ ۱

گزاره و گزاره‌نما

۱ به جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، **گزاره** می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p ، q ، r و... نمایش می‌دهند.

۲ درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

چاشنی: ◂ یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد. یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. ممکن است ارزش گزاره، هنوز برای ما مشخص نشده باشد، مانند حدس‌های حل نشدهٔ ریاضی.
حدس‌های ریاضی در هر نوعی بالاخره یا درست هستند یا نادرست، پس گزاره به حساب می‌آیند.
◂ جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند. به نمونه‌های زیر توجه کنید:
عجب هوایی! (ابراز احساسات)
چه خبر؟ (پرسشی)
لطفاً سر جای خود بنشینید. (امری)

تست: کدام‌یک از جمله‌های زیر یک گزاره است؟

۱) از صدای سخن عشق ندیدم خوش‌تر.
۲) قدرمطلق کرهٔ زمین برابر خودش است.
۳) هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ و کوچک‌تر از 10^6 را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
۴) $\frac{2}{3}$ بزرگ‌تر است یا $\frac{3}{4}$؟

پاسخ گزینهٔ «۳»

درستی یا نادرستی گزینهٔ «۱» نسبی است، از فردی به فرد دیگر ممکن است تغییر کند و ارزش آن مشخص نیست. گزینهٔ «۲» فاقد معنی و مفهوم است و راستی آزمایی آن ممکن نیست. گزینهٔ «۴» یک جملهٔ پرسشی است، پس گزاره نیست. گزینهٔ «۳» یک حدس در ریاضی است و حدس‌ها گزاره به حساب می‌آیند.

۳ هر استدلال از چند گزاره تشکیل می‌شود. یکی از آن‌ها نتیجهٔ استدلال و بقیه مقدمه‌های استدلال هستند. به عنوان نمونه نتیجهٔ استدلال‌های «علی از محمد بلندتر است.» و «علی از رضا کوتاه‌تر است.» می‌شود «محمد از رضا کوتاه‌تر است.». دو گزارهٔ اول مقدمه‌های استدلال هستند.

تست: با توجه به جمله‌های زیر، کدام نتیجه‌گیری درست‌تر است؟
«اگر پلیس قاتل را دستگیر کند، قاتل اعدام خواهد شد. اگر قاتل اثری از خود بر جای گذاشته باشد، پلیس او را دستگیر می‌کند. قاتل اعدام نشده است.»

۱) پلیس قاتل را دستگیر نکرده است.
۲) قاتل مرتکب جرم نشده است.
۳) قاتل گناهکار است اما اعدام نشده است.
۴) قاتل اثری از خود بر جای نگذاشته است.

پاسخ گزینهٔ «۴»

با توجه به جملات، اعدام شدن قاتل وابسته به این است که اثری از خود بر جای گذاشته است و پلیس او را دستگیر کرده است. پس اگر قاتل اعدام نشده است، متوجه می‌شویم که اثری از خود بر جای نگذاشته و دستگیر نشده است.

۴ هر گزاره مانند p دارای ارزش درست یا نادرست است. اگر گزارهٔ q را نیز در نظر بگیریم، ارزش‌های دو گزاره در کنار هم در جدول زیر آمده است. به این جدول، **جدول ارزش گزاره‌ها** می‌گوییم.

q	p
د	د
ن	د
د	ن
ن	ن

با توجه به جدول، برای n گزاره، ۲^n حالت ارزش در جدول وجود دارد.

تست: ارزش چهار گزارهٔ p , q , r , s دارای چند حالت است و در چند حالت از آن‌ها، فقط دو گزاره درست هستند؟ (آمار و احتمال صفحهٔ ۴)

۱) ۱۶ − ۴ ۲) ۱۶ − ۶ ۳) ۸ − ۴ ۴) ۸ − ۶

پاسخ گزینهٔ «۲»

چهار گزاره در کل $۱۶ = ۲^۴$ حالتِ ارزش در جدول دارند. با توجه به رابطهٔ انتخاب، تعداد حالت‌هایی که فقط ۲ گزاره درست هستند، برابر است با:

$$\binom{۴}{۲} = ۶$$

فقط دو گزاره از چهار گزاره درست هستند

۵ هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کاررفته در آن‌ها یک متغیره، دو متغیره و... می‌نامیم.

به عنوان مثال عبارت «$x^۲ > ۱$» یک گزاره‌نما است. به جای x ، هر عددی که قرار دهیم، یک گزاره به دست می‌آید که درست یا نادرست است.

چاشنی: ◂ A رخ ندهد و B رخ ندهد، منظور $A' \cap B' = (A \cup B)'$ است. اما A و B با هم رخ ندهند، منظور $(A \cap B)'$ است.

◂ در حالت کلی هر زمان پیشامدها با «و» بیان شدند از «اشتراک» و چنان‌چه با «یا» بیان شدند از «اجتماع» استفاده می‌کنیم.

تست: ۴ سکهٔ متمایز را پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A ظاهرشدن حداقل ۲ پشت و پیشامد B ظاهرشدن حداکثر ۲ پشت باشد، آن‌گاه پیشامد $A - B$ چند عضوی است؟ (ریاضی دهم صفحهٔ ۱۴۴ و ۱۴۵)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

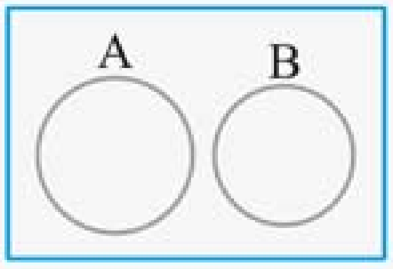
پاسخ گزینهٔ «۱»

پیشامد A به معنی ظاهرشدن ۲ یا ۳ یا ۴ پشت و پیشامد B به معنی ظاهرشدن ۰ یا ۱ یا ۲ پشت در پرتاب ۴ سکه است. با توجه به روابط تعداد عضوهای مجموعه داریم: $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$

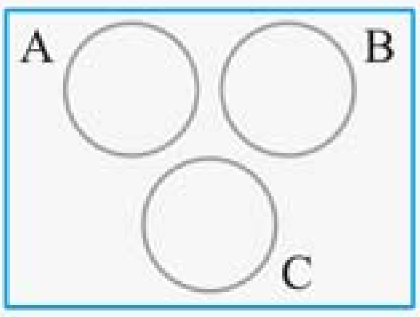
$A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که دو پیشامد A و B هم‌زمان اتفاق بیافتند. این به معنی این است که در پرتاب ۴ سکه حداقل و حداکثر ۲ پشت ظاهر شود که تنها حالتی که این پیشامد ممکن است رخ دهد آمدن ۲ پشت در پرتاب ۴ سکه است. پس داریم:

$$n(A-B) = \left[\binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴}\right] - \left[\binom{۴}{۲}\right] = ۱۱ - ۶ = ۵$$

چاشنی: ◂ اگر $A \cap B = \varnothing$، در این صورت A و B را **ناسازگار** گوییم و به این معنی است که رخ دادن هر دوی آن‌ها به طور هم‌زمان محال است. به عنوان مثال در پرتاب سکه، پیشامد ظاهرشدن «رو» و ظاهر شدن «پشت» دو پیشامد ناسازگار هستند.



◂ اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه $A\bigcap B=\varnothing$ ، $A\bigcap C=\varnothing$ و $B\bigcap C=\varnothing$ باشد. نمودار وِن مربوط به سه پیشامد دو به دو ناسازگار به صورت زیر است:



سه پیشامد ناسازگار

وعدهٔ ۳

احتمال مقدماتی (ساده)

اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A\subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمالِ رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ که به صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود، عددی است حقیقی که $۰\le P(A)\le ۱$.

تست: دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد روشده، یک عدد اول است؟ (ریاضی ۹۳ ـ ریاضی دهم صفحهٔ ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

پاسخ گزینهٔ «۱»

باید مجموع دو تاس یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد. با توجه به این که در مسائل مربوط به تاس‌ها، عدد تاس‌ها را متفاوت در نظر می‌گیریم، ((۲ , ۳) با (۳ , ۲) متفاوت است.) داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱+۲+۴+۶+۲}{۶\times ۶}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

تست: در جعبه‌ای ۷ مهرهٔ سفید، ۵ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۱ مهرهٔ قرمز و حداقل ۲ مهرهٔ سفید خارج شده است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

$$P(A)=\frac{\overset{\text{انتخاب ۱ مهرهٔ قرمز}}{\binom{۲}{۱}}\times\Big[\overbrace{\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۷}{۳}}^{\text{انتخاب حداقل ۲ سفید}}\Big]}{\binom{۱۴}{۴}}$$

$$=\frac{۲(۱۰۵+۳۵)}{۷\times۱۳\times۱۱}=\frac{۲۸۰}{۷\times۱۳\times۱۱}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

وعدهٔ ۴

اصول و قوانین احتمال

۱ برای هر پیشامد مانند A، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی در بازهٔ $[۰,۱]$ است. اصول احتمال عبارت است از:

الف $P(\varnothing)=۰$ و $P(S)=۱$

ب برای هر دو پیشامد A و B که $A\cap B=\varnothing$ داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۲ قضیه‌های احتمال

الف $P(A')=۱-P(A)$

وعدهٔ ۶

معیارهای پراکندگی (انحراف معیار و واریانس)

۱ انحراف معیار داده‌ها: اگر n داده از جامعه به صورت $x_۱ , x_۲ , \dots , x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \overline{x})^۲}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{(x_۱ - \overline{x})^۲ + (x_۲ - \overline{x})^۲ + \cdots + (x_n - \overline{x})^۲}{n}}$$

که در آن $x_i - \overline{x}$ را انحراف دادهٔ iاُم از میانگین داده‌ها می‌گویند.

چاشنی: ◂ اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیار صفر است و بالعکس.

◂ اگر σ عددی کوچک باشد، بدین معناست که پراکندگی داده‌ها پیرامون میانگین آن‌ها کم و داده‌ها به هم نزدیک‌تر هستند. اگر σ بزرگ باشد برعکس حالت قبل برقرار است.

◂ اگر همهٔ داده‌ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم، σ تغییر نمی‌کند. هم‌چنین اگر همهٔ داده‌ها را a برابر کنیم، انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود.

۲ در صورتی که داده‌ها دارای وزن $w_۱ , w_۲ , \dots , w_n$ باشند، انحراف معیار برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{w_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + w_n (x_n - \bar{x})^2}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}}$$

۳ تـوان دوم انحـراف معیـار داده‌ها را **واریانس** می‌گوینـد و با نماد σ^2 نشان داده می‌شود. در حالت کلی داریم:

$$\sigma^2 = \frac{w_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + w_n (x_n - \bar{x})^2}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

چاشنی: برای محاسـبهٔ واریانس دسـتور دیگـری داریم که به صورت زیر است:

$$\sigma^2 = \frac{\sum w_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + \cdots + w_n x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

- اگر همهٔ داده‌ها را a برابر کنیم، واریانس a^2 برابر می‌شود.
- واریانـس n عـدد کـه تشـکیل دنبالـهٔ حسـابی بـا قدرنسـبت d می‌دهند، برابر $\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} d^2$ است.

◂ هر عدد اول $p \geq ۵$، حتماً به‌صورت $۶k \pm ۱$ است. بنابراین اگر p عددی اول و بیشتر از ۳ باشد، داریم: $p^{۲} = ۲۴k + ۱$

تست: چند عدد اول p وجود دارد به‌طوری که $۱۶۸p + ۱$ مجذور یک عدد طبیعی باشند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۲»

می‌دانیم $۱۶۸p + ۱$ فرد است. بنابراین اگر بخواهد مربع کامل باشد، مربع یک عدد فرد است، یعنی:

$$۱۶۸p+۱=(۲k+۱)^{۲}=۴k^{۲}+۴k+۱ \Rightarrow ۴۲p=k(k+۱)$$

پس باید $۴۲p$ حاصل‌ضرب دو عدد متوالی باشد.

$۱)\ ۴۲, p \Rightarrow p = ۴۱, ۴۳$

$۲)\ ۲۱, ۲p \Rightarrow p = ۱۱$

$۳)\ ۱۴, ۳p \Rightarrow p = ۵$

$۴)\ ۷, ۶p \Rightarrow p = ۱$ غیر قابل قبول

وعدهٔ ۷

ب.م.م و ک.م.م

«ب.م.م» یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک. به‌عنوان مثال مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ عبارتنداز: ۱، ۲، ۳، ۶، ۹، ۱۸

و مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۳۰ عبارتنداز: ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵، ۳۰

مقسوم‌علیه‌های مشترک طبیعی ۱۸ و ۳۰ عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ۶

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۸ و ۳۰ که آن را به‌صورت $(۱۸, ۳۰)$

یا $(30, 18)$ نمایش می‌دهیم. برابر است با ۶. با این مقدمه به تعریف «ب.م.م» می‌پردازیم:

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم(a , b هر دو با هم صفر نیستند.) و می‌نویسیم $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند،

۱ $d \mid a, d \mid b$

۲ $\forall m > 0, m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$

شرط ۱ مقسوم‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط ۲ نشان می‌دهد، از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m ، بزرگ‌تر است.

چاشنی: ب.م.م با اعداد هماهنگ است و با آن‌ها تغییر می‌کند. در مورد به‌توان رساندن اعداد و ضرب آن‌ها در عددی ثابت، می‌توان نوشت: $(a^n, b^n) = (a, b)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$(ka, kb) = |k|(a, b) \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$$

- اجازه داریم به هر یک از اعداد، مضرب دلخواهی از دیگری را اضافه یا کم کنیم: $(a, b) = (a, b \pm ka) = (a \pm k'b, b)$
- $a \mid b \Leftrightarrow (a, b) = |a|$
- ب.م.م دو عدد همواره عددی طبیعی است، پس هرجا علامت ب.م.م را ندانیم، باید آن را داخل قدرمطلق قرار دهیم.
- مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد، همان مقسوم‌علیه‌های ب.م.م هستند.
- اگر $(a, b) = 1$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند. a , b را **متباین** نیز می‌گویند.
- هر دو عدد متوالی، هر دو عدد فرد متوالی و هر دو عدد اول متمایز نسبت به‌هم اول‌اند.
- برای محاسبه ب.م.م اعداد، تمام آن‌ها را به عوامل اول تجزیه کنید. ب.م.م برابر با حاصل‌ضرب تمام پایه‌های مشترک با کم‌ترین توان است.

تست: بـه‌ازای چند عدد دو رقمـی n، دو عدد طبیعی $9n+2$ و $11n-5$ نسبت به‌هم غیر اول‌اند؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۱»

فرض می‌کنیم ب.م.م دو عدد $11n-5$ و $9n+2$ برابر d باشد. پس می‌توان نوشت: $(11n-5, 9n+2)=d$

با توجه به ویژگی‌های عاد کردن داریم:

$$\begin{cases} d \mid 11n-5 \xrightarrow{\times 9} d \mid 99n-45 \\ d \mid 9n+2 \xrightarrow{\times 11} d \mid 99n+22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid (99n+22)-(99n-45)$$

$$\Rightarrow d \mid 67 \xrightarrow{d\neq 1} d=67$$

پس $9n+2=67k$، حالا بررسی می‌کنیم بـه‌ازای چند عدد طبیعـی دو رقمی n، رابطـهٔ مـورد نظر برقرار اسـت:

$$k=1 \Rightarrow 9n+2=67 \Rightarrow n=\frac{65}{9}$$ غیر قابل قبول

$$k=2 \Rightarrow 9n+2=134 \Rightarrow n=\frac{132}{9}$$ غیر قابل قبول

$$\cdots \Rightarrow k=5 \Rightarrow 9n+2=335 \Rightarrow n=37$$

به‌ازای مقادیر دیگر k مقدار قابل قبولی برای n به‌دست نمی‌آید.
در بخش‌های بعدی با بیان مبحث هم‌نهشتی، این مسئله به‌صورت سریع‌تری حل می‌شود.

$$\Rightarrow (p-10)(p+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} p=10 \\ p=-3 \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

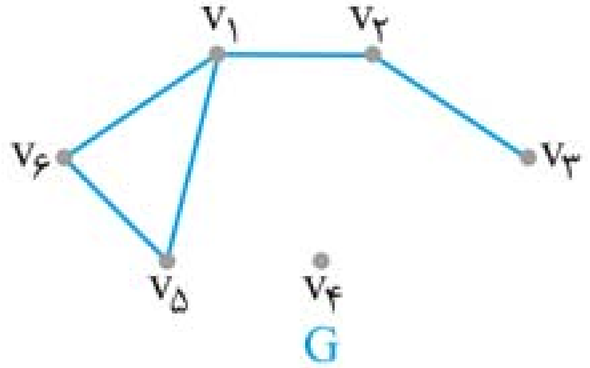
پس گراف G، گراف K_{10} است و درجهٔ هر رأس آن که برابر تعداد عضوهای مجموعهٔ همسایه‌های رئوس آن نیز است برابر ۹=۱−۱۰ می‌باشد.

چاشنی: گرافی که هیچ یالی نداشته‌باشد، یعنی تمام رئوس آن رأس تنها باشند، **گراف تهی** نامیده می‌شود. در گراف تهی، مجموعهٔ همسایگی باز هر رأس، همواره مجموعهٔ تهی است.

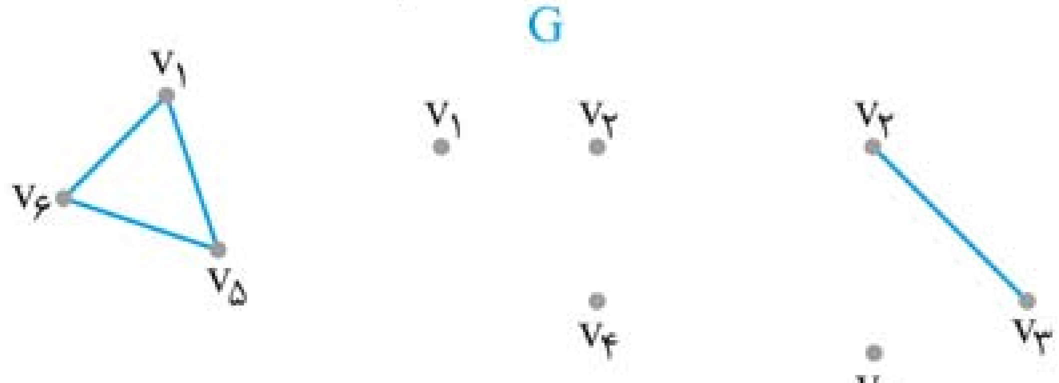
وعدهٔ ۶

زیر گراف

یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد. به عنوان مثال گراف G را در نظر بگیرید. گراف‌های G_1، G_2 و G_3 زیرگراف‌هایی از گراف G هستند.



G



G_1 G_2 G_3

تست: گراف کامل مرتبهٔ ۵ چند زیرگراف (با رئوس نام‌گذاری شده) از اندازهٔ ۳ و مرتبهٔ ۴ دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۵۰ ۴) ۴۰

پاسخ گزینهٔ «۲»

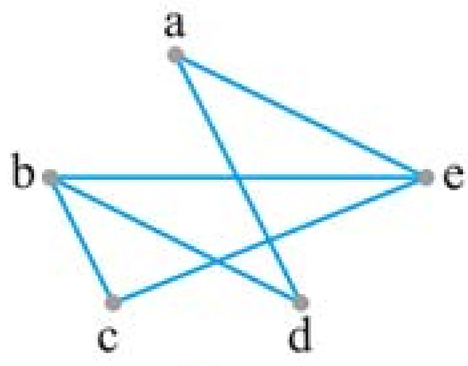
فرض کنیم $V = \{a , b , c , d , e\}$ مجموعهٔ رئوس گراف کامل G باشد، برای شمارش تعداد زیرگراف‌ها به اندازهٔ ۳ و مرتبهٔ ۴، ابتدا ۴ رأس از ۵ رأس را انتخاب می‌کنیم. این عمل به $۵ = \binom{۵}{۴}$ حالت امکان‌پذیر است. سپس از بین $۶ = \binom{۴}{۲}$ یالی که می‌توانیم با ۴ رأس رسم کنیم باید ۳ یال را انتخاب کنیم. بنابراین تعداد زیرگراف‌ها برابر است با:

$$\binom{۵}{۴} \times \binom{۶}{۳} = ۵ \times ۲۰ = ۱۰۰$$

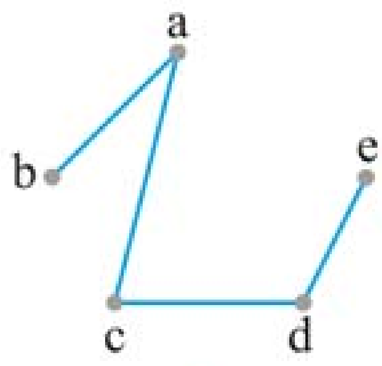
وعدهٔ ۷

مکمل یک گراف

مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد، در شکل زیر یک گراف و مکمل آن نمایش داده شده است:



G



$\overline{G}$

چاشنی: اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و v یک رأس آن باشد داریم:

۱) $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=p-۱$

۲) $q(G)+q(\overline{G})=\binom{p}{۲}$

تست: اگر $N_G(a)=\{b,c,d\}$ و $N_{\overline{G}}(a)=\{e\}$ باشند، آن‌گاه حداقل و حداکثر اندازهٔ گراف G به‌ترتیب کدام است؟ (از راست به چپ)

۱) ۳ – ۴ ۲) ۴ – ۱۰ ۳) ۴ – ۶ ۴) ۳ – ۹

پاسخ گزینهٔ «۴»

با توجه به فرض مسئله می‌توان نتیجه گرفت که $d_G(a)=۳$ و $d_{\overline{G}}(a)=۱$ بنابراین داریم:

$$d_G(a)+d_{\overline{G}}(a)=۳+۱=۴=p-۱\Rightarrow p=۵$$

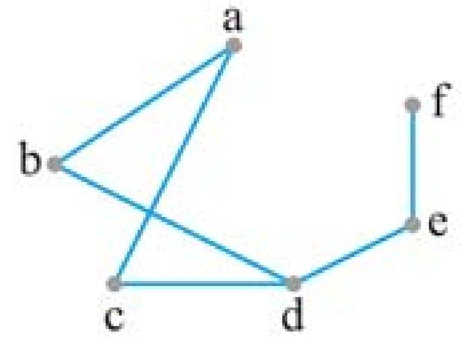
پس مرتبهٔ گراف G برابر ۵ است. با توجه به سؤال حداقل تعداد یال در گراف G برابر ۳ است که شامل یال‌های ab، ac و ad است. همچنین بیشترین اندازهٔ گراف G می‌تواند برابر $\binom{۵}{۲}=۱۰$ باشد که یک گراف کامل است اما با توجه به اینکه یال ae در گراف $\overline{G}$ وجود دارد پس این یال در گراف G به‌طور قطع وجود ندارد و گراف G حداکثر ۹ یال دارد.

وعدهٔ ۸

مسیر و دور

مسیر: اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $u-v$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از

u شروع و به v ختم می‌شود به‌طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر **(یکی کم‌تر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر)**. قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأسِ v یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش. به عنوان مثال در گراف زیر داریم:



$acde$ یک $a-e$ مسیر به‌طول ۳ است. $bacdef$ یک $b-f$ مسیر به طول ۵ است.

چاشنی: تعداد مسیر به طول L از رأس معین a به رأس معین b در گراف K_n (گراف کامل) عبارت است از:

$$\binom{n-2}{L-1}\times(L-1)!$$

پس تعداد همهٔ مسیرها با طول‌های مختلف از رأس a به رأس b عبارت است از:

$$\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m}\times m!$$

- می‌توان تعداد همهٔ مسیرها را از رأس معین a به رأس معین b در گراف K_n از رابطهٔ $\left[(n-2)!e\right]$ که $e \simeq 2/718$ (عدد نپر) است به‌دست آورد. ([ ] جزء صحیح است.)
- اگر گرافی کامل نباشد، تنها راه شمارش مسیرها، استفاده از شکل و شمارش دستی است.

پیوست

فرمول‌نامه

مبانی ریاضیات

۱. نقیض p — $\sim p$

۲. ترکیب فصلی — $p \vee q$

۳. ترکیب عطفی — $p \wedge q$

۴. ترکیب شرطی — $p \Rightarrow q$

۵. عکس ترکیب شرطی — $q \Rightarrow p$

۶. عکس نقیض ترکیب شرطی — $\sim q \Rightarrow \sim p$

۷. ترکیب دو شرطی — $p \Leftrightarrow q$

۸. هم‌ارزی شرطی دو شرطی — $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

۹. دمورگان

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

۱۰. تبدیل ترکیب شرطی به فصلی — $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

۱۱. نقیض ترکیب شرطی — $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۱۲. نقیض ترکیب دوشرط — $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

۱۳. جابه‌جایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

۱۴. شرکت‌پذیری — $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

۱۵. توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$ و برعکس.

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

۱۶. قانون جذب

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee p) \equiv p \\ p \vee (q \wedge p) \equiv p \end{cases}$$

آمار استنباطی

۱. احتمال انتخاب یک عضو در نمونه‌گیری تصادفی ساده با حجم n از جامعه‌ای با حجم N

$\frac{1}{N^n}$ ← با جای‌گذاری $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ ← بدون جای‌گذاری

۲. انحراف معیار برآورد میانگین

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

σ ← انحراف معیار جامعه، n ← حجم نمونه

$$\frac{(\sigma_{\overline{x}})_2}{(\sigma_{\overline{x}})_1} = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}$$

۳. برآورد بازه‌ای میانگین

$$\overline{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

۴. بازهٔ اطمینان $[a , b]$

$$b - a = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} , \overline{x} = \frac{a+b}{2}$$

۵. برآورد بازه‌ای نسبت

$$(P-k , P+k) \ , \ k = 2\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

استدلال ریاضی

۱. اثبات به روش اشباع (همهٔ حالت‌ها)

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

۲. اثبات غیرمستقیم (روش برهان خلف) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۳. اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) $p \Leftrightarrow q$

هم‌نهشتی و بخش‌پذیری

۱. عاد کردن $a \mid b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = a \cdot q$

۲. روابط عاد کردن $(m, n \in \mathbb{N})$ ، $(a, b, c \in \mathbb{Z})$

الف $m \le n \longrightarrow m! \mid n!$

ب $\forall a \in \mathbb{Z} \ ; \ a \mid ۰ , \pm ۱ \mid a , \pm a \mid a$

پ $a \mid b \to -a \mid b \ , \ a \mid -b \ , \ -a \mid -b$

ت $(a \mid b \wedge b \mid a) \Leftrightarrow |a| = |b|$

ث $(a \mid b \wedge b \mid c) \Rightarrow a \mid c$

ج $a \mid b \begin{cases} \xrightarrow{\forall m \in \mathbb{Z}} a \mid mb \ , \ ma \mid mb \\ \xrightarrow[\forall n \in \mathbb{Z}]{} a \mid b^n \ , \ a^n \mid b^n \end{cases}$

چ $\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{m \le n} a^m \mid b^n \\ a^m \mid b^n \xrightarrow{m \ge n} a \mid b \end{cases}$

ح $(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow (a \mid (b \pm c) \wedge a \mid bc)$

خ $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{W} : (a-b) \mid a^n - b^n \\ \forall n \in \mathbb{W} \text{, فرد باشد } n : (a+b) \mid a^n + b^n \\ \forall n \in \mathbb{W} \text{, زوج باشد } n : (a+b) \mid a^n - b^n \end{cases}$

۳. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (d)

الف $\begin{cases} (a, b) = d \Leftrightarrow (d \mid a \wedge d \mid b) \\ \forall m \in \mathbb{N} : (m \mid a \wedge m \mid b) \Rightarrow m \le d \end{cases}$