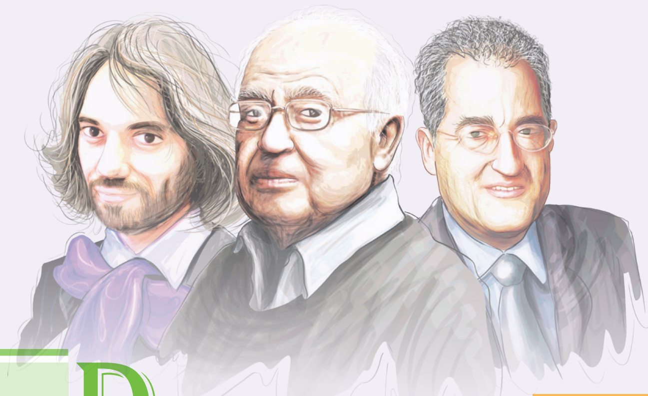
# آمار و احتمال

STATISTICS & PROBABILITY

Cédric Villani Andrey Kolmogorov Ronald Fisher Bertrand Russell





# ریاضیات گسسته

DISCRETE MATHEMATICS

Michael Atiyah Edward Witten David Mumford



# پاسخ‌نامه

ANSWERS

## 01 منطق ریاضی و گزاره

منطق ریاضی که به آن منطق نمادین نیز گفته می‌شود، دستور زبان ریاضی یا مطالعه در ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

هر جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را گزاره می‌نامند.

- مجموع هر دو عدد فرد، همواره عددی زوج است.
- عدد $2^{101}-1$ عددی اول است.

جملات امری، پرسشی، عاطفی، احساسی، تعجبی و دعایی گزاره محسوب نمی‌شوند.

- کتاب‌ها را روی میز بگذارید. [امری]
- آیا ۹۹۷ عددی اول است؟ [پرسشی]
- بیا و کشتی ما در شط شراب انداز. [احساسی]
- چه هوای دل‌انگیزی! [تعجبی]
- ای کاش نرفته بودی! [دعایی]
- تو را من چشم در راهم [عاطفی]

حدس‌های ریاضی که هنوز درستی آن‌ها اثبات یا رد نشده است، گزاره محسوب می‌شوند.

- هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. [حدس گلدباخ]
- بی‌نهایت عدد اول مانند p وجود دارد که $p+2$ هم اول باشد.

جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره محسوب نمی‌شوند.

- درس ریاضی از فیزیک آسان‌تر است.
- عربی دشوارترین درس است.
- کنکور امسال خیلی مفهوم بود.
- روزبه قد بلند است.

## مینی تست

**1** منطق ریاضی [منطق نمادین]، ............ است.

A دستور زبان ریاضی　B یافتن علت و معلول در ریاضی

**2** مطالعهٔ ساختار جمله‌هایی که در ریاضی به‌کار برده می‌شود، ............ است.

A مربوط به فلسفه علم　B مربوط به منطق ریاضی

**3** منطق ریاضی به ............ می‌پردازد.

A بررسی دقیق استدلال‌ها　B فلسفه وجودی قضیه‌ها

**4** منطق ریاضی ............ را مشخص می‌کند.

A جمله بندی استدلال‌ها　B اعتبار یک استدلال

**5** سه جمله 1، 2 و 3 مربوط به یک استدلال است:

1 هیچ عدد زوجی به جز ۲، عدد اول نیست.

2 ۱۸ عددی زوج است.

3 ۱۸ عددی اول نیست.

در این استدلال جملات 1 و 2 را ............ و جملهٔ 3 را ............ می‌نامند.

A مفروضات استدلال - نتیجهٔ استدلال　B مقدم - تالی

**6** جملهٔ «مجموع هر دو عدد فرد، همواره عددی زوج است.» یک گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**7** جملهٔ «$2^{523}-1$ عددی اول است.» یک گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**8** جملهٔ «کتاب‌ها را روی میز بگذارید.» یک جملهٔ ............ است و ............ .

A امری - گزاره محسوب نمی‌شود　B غیرخبری - گزاره محسوب می‌شود

**9** جملهٔ «آیا ۲۰۳ عددی اول است؟» گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**10** جملهٔ «مجموع هر دو عدد اول، زوج است.» گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**11** جملهٔ «چه صبح دل انگیزی!» گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**12** جملهٔ «بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.» گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**13** جملهٔ «ای کاش نرفته بودی!» گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**14** جملهٔ «قشنگ یعنی تعبیر عاشقانهٔ اشکال» گزاره ............ .

A محسوب نمی‌شود　B محسوب می‌شود

**15** «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت.» یک ............ است که به ............ مشهور است.

A قضیهٔ ریاضی - اصل گاوس　B حدس ریاضی - حدس گلدباخ

1 A 2 B 3 A 4 B 5 A 6 B 7 B 8 A 9 A 10 B 11 A 12 B 13 A 14 A 15 B

**1** کدام‌یک از جملات زیر گزاره محسوب نمی‌شود؟

۱) همهٔ اعداد اول فرد هستند
۲) بعضی اعداد صحیح، مربع کامل هستند.
۳) عدد ۷ جزء اعداد مقدس است.
۴) مربع هیچ عدد صحیح فرد بر ۸ بخش‌پذیر نیست.

**2** کدام یک از گزینه‌های زیر یک گزاره است؟

۱) قد علی از رضا بلندتر است.
۲)علی قد بلند است.
۳) علی از رضا خوشگل‌تر است.
۴) علی خوشگل است.

**3** کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک گزاره است؟

۱)روزبه باهوش است.
۲) درس آمار و احتمال درس ساده‌ای است.
۳) کنکور امسال خیلی مفهومی بود.
۴) اسحاق نیوتن در روز اول ماه می ۱۶۰۱ متولد شد.

## 02 جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره همواره دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است. بنابراین اگر دو گزاره مانند p و q را در نظر بگیرید، آن‌گاه برای ارزش آن‌ها می‌توان یک جدول به شکل مقابل تشکیل داد که دارای ۴ حالت است.

| p | q |
|---|---|
| د | د |
| د | ن |
| ن | د |
| ن | ن |

اگر ارزش یک گزاره همواره درست باشد آن را با T و اگر ارزش آن همواره نادرست باشد با F نشان می‌دهند. [این دو حرف، حروف اول کلمات True و False هستند.]

به‌طور کلی اگر n گزاره داشته باشیم، جدول ارزش آن‌ها دارای $2^n$ سطر است.

### مینی تست

**1** هر ........... همواره دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است.

A گزاره
B قضیه

**2** ارزش گزارهٔ «عکس هر عدد مثبت از خودش کوچک‌تر است.» ........... است.

A درست
B نادرست

**3** ارزش گزارهٔ «مربع هر عدد طبیعی از خودش بزرگ‌تر است.» ........... است.

A درست
B نادرست

**4** ارزش گزارهٔ «مجموع هر دو عدد طبیعی متوالی عددی فرد است.» ........... است.

A درست
B نادرست

**5** در جدول ارزش چند گزاره، اگر دو سطر دلخواه را در نظر بگیریم، ........... .

A تمام درایه‌های دو سطر با هم تفاوت دارند
B حداقل یک تفاوت در درایه‌های آن‌ها وجود دارد

**6** جدول ارزش ۳ گزاره، دارای ........... حالت است.

A ۸
B ۶

1 A 2 B 3 B 4 A 5 B 6 A

**4** ارزش کدام‌یک گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) مجموع هر سه عدد فرد، فرد است.
۲) حاصل‌ضرب هر سه عددفرد، عددی فرد است.
۳) مجموع هر سه عدد زوج، عددی زوج است.
۴) حاصل‌ضرب هر چهار عدد فرد، عددی زوج است.

**5** ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) مربع هر عدد اول، فرد است.
۲) مربع هر عدد صحیح، یک عدد طبیعی است.
۳) جمع هر دو عدد اول همواره زوج است.
۴) توان چهارم هر عدد فرد، همواره عددی فرد است.

**6** ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۲) جمع هر دو عدد گویا، عددی گویا است.
۳) جمع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.
۴) جمع هر دو عدد مربع کامل، هیچگاه مربع کامل نیست.

**7** اگر از میان تعدادی گزاره، یک گزاره را حذف کنیم از تعداد سطرهای جدول ارزش گزاره‌ها ۸ سطر کم می‌شود، تعداد گزاره‌های اولیه کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۶

**8** در جدول ارزش گزاره‌های $p, q, r, s$ چند بار حرف «ن» به معنای نادرست نوشته می‌شود؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

**9** اگر ۵ گزاره به گزاره‌های موجود اضافه کنیم، تفاضل یا خارج قسمت تعداد سطرهای جدول ارزش جدید نسبت به قدیم کدام است؟

۱) تفاضل برابر ۵ ۲) خارج قسمت برابر ۳۲ ۳) خارج قسمت برابر ۵ ۴) تفاضل برابر۳۲

## 03 نقیض گزاره

جمله‌ای خبری که معنایی متضاد و مخالف با خود گزاره دارد را نقیض گزاره می‌نامند.

نقیض گزارهٔ «۵ عددی اول است» به صورت « ۵ عددی اول نیست» خواهد بود.

ساده‌ترین روش برای ساختن نقیض یک گزاره، آوردن عبارت «این‌طور نیست که» قبل از گزارهٔ اصلی یا «منفی کردن فعل جملهٔ خبری» است. نقیض گزارهٔ p را با $\sim p$ نشان می‌دهند و به علامت « ~ » ناقض می‌گویند.

نقیض کلمات و نمادهای مهم و پرکاربرد را در جدول زیر ببینید:

| نقیض کلمات | |
|---|---|
| زوج | فرد |
| گویا | گنگ |
| است | نیست |

| نقیض نمادها | |
|---|---|
| $\geq$ | $<$ |
| $\leq$ | $>$ |
| $\neq$ | $=$ |

اگر دو گزارهٔ p و q دارای ارزش یکسانی باشند، آن را به صورت $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم.

اگر p یک گزاره باشد، نقیضِ نقیض گزارهٔ p را به صورت $\sim(\sim p)$ نشان می‌دهند که همواره هم ارز منطقی با خود گزارهٔ p است، یعنی:

$$\boxed{\sim(\sim p) \equiv p}$$

معمولاً برای ساده کردن گزاره‌هایی که فعل‌های منفی در آن‌ها به کار رفته، می‌توان از نقیضِ نقیض استفاده کرد.

گزارهٔ «۲۴ عددی غیرزوج نیست» معادل است با: ۲۴ عددی زوج است $\equiv$ (۲۴ عددی غیرزوج است) ~ $\equiv$ ((۲۴ عددی غیرزوج نیست) ~) ~

### مینی تست

**1** گزارهٔ «قد علی ۱۸۷ سانتی‌متر است.» نقیض گزارهٔ «............» است.

A قد علی کم‌تر از ۱۸۷ سانتی‌متر است.

B چنین نیست که قد علی ۱۸۷ سانتی‌متر است.

**2** نقیض گزارهٔ «میلاد زبان انگلیسی می‌آموزد.» به‌صورت «............» است.

A میلاد زبان فارسی می‌آموزد

B چنین نیست که میلاد زبان انگلیسی می‌آموزد

**3** نقیض گزارهٔ «۱۷ عددی زوج نیست.» به‌صورت «............» قابل بیان است.

A ۱۷ عددی غیر فرد است B ۱۷ عددی اول است

**4** نقیض گزارهٔ «۲ عددی زوج است.» به‌صورت «............» می‌باشد.

A ۲ عددی فرد است B ۲ عددی فرد نیست

**5** نقیض گزارهٔ « $\sqrt{۲}$ عددی گویا است.» به‌صورت «............» است.

A $\sqrt{۲}$ عددی گنگ نیست B $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است

**6** نقیض گزارهٔ «مریم دانش آموز است.» به‌صورت «............» است.

A مریم دانش‌آموز نیست B مریم دانشجو است

**7** نقیض گزارهٔ « $x \geq y$ » به‌صورت «............» است.

A $x < y$ B $x \leq y$

**8** گزارهٔ « $x < y$ » نقیض گزارهٔ «............» است.

A $x > y$ B $x \geq y$

**9** نقیض گزارهٔ «............» به‌صورت $a \neq b$ است.

A $a < b$ B $a = b$

**10** نقیض گزارهٔ «۲ عددی طبیعی است.» به‌صورت «............» است.

A ۲ عددی گنگ است B ۲ عددی غیرطبیعی است

**11** نقیض گزارهٔ «۲ عددی اول است.» به‌صورت «............» است.

A ۲ عددی مرکب است B ۲ عددی غیراول است

NEXT

1 B 2 B 3 A 4 A 5 B 6 A 7 A 8 B 9 B 10 B 11 B

## 01 اثبات مستقیم

درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. اگر برای اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره، از حقایقی استفاده کنیم که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم، از نوعی استدلال به نام استدلال استنتاجی استفاده کرده‌ایم. استدلال استنتاجی دارای انواع و اقسامی است:

استدلال استنتاجی
- مثال نقض
- اثبات مستقیم
- روش اشباع
- برهان خلف
- بازگشتی

برای اثبات یک گزاره به روش اثبات مستقیم، ابتدا باید گزارهٔ داده شده را به زبان ریاضی برگردانیم. جدول زیر برای برگرداندن یک گزاره به زبان ریاضیات کمک مهمی به شما می‌کند:

| عبارت فارسی | نماد ریاضی |
|---|---|
| عدد زوج | $۲k$ |
| عدد فرد | $۲k+۱$ |
| عدد مضرب ۳ | $۳k$ |
| عدد مربع کامل | $k^۲$ |

| عبارت فارسی | نماد ریاضی |
|---|---|
| عدد مکعب کامل | $k^۳$ |
| عدد فرد مربع کامل | $(۲k+۱)^۲$ |
| دو عدد فرد | $۲k+۱, ۲k'+۱$ |
| دو عدد زوج | $۲k, ۲k'$ |

| عبارت فارسی | نماد ریاضی |
|---|---|
| دو عدد فرد متوالی | $۲k-۱, ۲k+۱$ |
| دو عدد زوج متوالی | $۲k, ۲k+۲$ |
| سه عدد متوالی | $k-۱, k, k+۱$ |
| عدد گویا | $\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq ۰$ |

به کمک اثبات مستقیم نشان دهید جمع سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۳ است.

سه عدد طبیعی متوالی را با n و n+۱ و n+۲ نشان می‌دهیم، در این صورت داریم:
$$n+(n+۱)+(n+۲)=۳n+۳=۳(n+۱)$$

### مینی تست

**1** درک و فهم ریاضی بدون ............ امکان‌پذیر نیست.

A استدلال　B دانستن رویه‌ها و الگوریتم‌ها

**2** مثال‌های زیر برای اثبات درستی حدس گلدباخ مبنی بر این‌که «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان برحسب مجموع دو عدد اول نوشت» ............

$۴=۲+۲ , ۶=۳+۳ , ۸=۵+۳ , ۱۰=۷+۳ , ۱۲=۵+۷ , ...$

A کافی است　B کافی نیست

**3** مثال‌های زیر برای اثبات درستی حدس فرما مبنی بر این‌که «عدد $F_n=۲^{۲^n}+۱$ به‌ازای همهٔ عددهای حسابی n اول است»............

$۲^{۲^۰}+۱=۳ , ۲^{۲^۱}+۱=۵ , ۲^{۲^۲}+۱=۱۷ , ۲^{۲^۳}+۱=۲۵۷ , ...$

A کافی است　B کافی نیست

**4** نمایش کلی یک عدد زوج به‌صورت ............ است.

A $۲k$　B $k^۲$

**5** نمایش کُلی یک عدد فرد به‌صورت ............ است.

A $۲k+۱$　B $k+۱$

**6** نمایش کُلی عدد مضرب ۳ به‌صورت ............ است.

A $k^۳$　B $۳k$

**7** نمایش کلی عدد مربع به‌صورت ............ است.

A $k^۲$　B $۲^k$

**8** نمایش کُلی دو عدد صحیح متوالی به‌صورت ............ است.

A $۲k, k$　B $k+۱, k$

**9** نمایش کلی دو عدد فرد متوالی به‌صورت ............ است.

A $۲k-۱, ۲k+۱$　B $۳k+۱, ۲k+۱$

**10** نمایش کلی دو عدد زوج متوالی به‌صورت ............ است.

A $۴k, ۲k$　B $۲k+۲, ۲k$

**11** نمایش کلی دو عدد فرد متمایز به‌صورت ............ است.

A $۲k+۳, ۲k+۱$　B $۲k'+۱, ۲k+۱$

**12** اگر a , b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، $a^۲+b^۲$ ............ است.

A زوج　B مضرب ۳

**13** حاصل ضرب دو عدد به شکل $۶q+۵$ عددی به شکل ............ است.

A $۶k+۱$　B $۶k+۵$

**14** حاصل ضرب دو عدد به شکل $۴q+۳$ عددی به شکل ............ است.

A $۴k+۳$　B $۴k+۱$

**15** مربع عددی به شکل $۵q+۳$ عددی به شکل ............ است.

A $۵k-۱$　B $۵k+۱$

NEXT

1 A　2 B　3 B　4 A　5 A　6 B　7 A　8 B　9 A　10 B　11 B　12 A　13 A　14 B　15 A

## مینی تست

16 مربع عددی به شکل $8q+7$ عددی به شکل ........... است.

A $8k+1$ B $8k-1$

17 مکعب عددی به شکل $7q+2$ عددی به شکل ........... است.

A $7k+1$ B $7k+2$

16 A 17 A

633 اگر $k$ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی باشد، کدام عبارت مربع کامل است؟

۱) $6k+1$ ۲) $8k+1$ ۳) $2k+1$ ۴) $4k+1$

634 درستی کدام گزینه با استفاده از «اثبات مستقیم» قابل استدلال نیست؟

۱) مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است. ۲) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

۳) مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۳ است. ۴) مجموع دو عدد زوج متوالی مضرب ۴ است.

## 02 مثال نقض

اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود. احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند. احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر هر، همه، تمام و ... یا هیچ، هیچ‌یک، هیچکدام و ... بیان می‌شوند.

«تمام اعداد اول، فرد هستند» یک حکم کلی نادرست است زیرا ۲ عددی اول است ولی فرد نیست.

«مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180^\circ$ است» یک حکم کلی درست است.

به مثالی که نشان دهد یک حکم کُلی، نادرست است، مثال نقض [پاد نمونه] گفته می‌شود.

برای رد حکم کلی «به‌ازای همهٔ n های طبیعی، عبارت $n^2+n+41$ عددی اول است» عدد $n=40$ یک مثال نقض است زیرا:

$n=40 \Rightarrow 40^2+40+41=40(40+1)+41=(40\times41)+41=41(40+1)=41\times41$ مرکب

با ارائه مثال نقض نمی‌توان درستی یک حکم کلی را اثبات کرد، بلکه فقط برای نشان‌دادن نادرستی یک حکم، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

«عدد صحیحی وجود ندارد که دو برابر آن مربع کامل و سه برابر آن مکعب کامل باشد.» یک حکم کلی است که مثال نقض آن ۷۲ می‌باشد.

$72\times2=144=12^2$ $72\times3=216=6^3$

## مینی تست

1 مثال نقض [پاد نمونه] برای ........... یک حکم کلی به‌کار می‌رود.

A اثبات درستی B رد کردن

2 ارائه یک مثال نقض برای ........... کافی است.

A اثبات درستی یک حکم کلی B رد یک حکم کلی

3 اگر نتوانیم برای یک حکم کلی مثال نقضی بیاوریم ...........

A به معنی درست بودن آن است B دلیلی بر درست بودن آن نیست

4 عدد ۲ مثال نقضی برای گزارهٔ «...........» است.

A هر عدد اول، فرد است B هر عدد فرد، اول است

5 «$(\sqrt{2}+1)+(1-\sqrt{2})=2$» مثال نقضی برای گزارهٔ «...........» است.

A مجموع دو عدد گنگ، گنگ است B مجموع دو عدد گنگ، گویا است

6 یک مثال نقض برای حکم کلی «حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است» تساوی ........... است.

A $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ B $(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)=2$

7 عدد ........... کلیت حکم «مربع هر عدد مثبت بزرگ‌تر از خود آن عدد است» را نقض می‌کند.

A $\sqrt{2}-1$ B $\sqrt{3}-2$

8 یک مثال نقض برای گزارهٔ «هر عدد به شکل $F_n=2^{2^n}+1$ اول است» عدد ........... است.

A $n=3$ B $n=5$

9 یک مثال نقض برای گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $M_n=2^n-1$ اول است» عدد ........... است.

A $n=6$ B $n=7$

NEXT

1 B 2 B 3 B 4 A 5 A 6 B 7 A 8 B 9 A

**10** گزارهٔ ........... مثال نقض **ندارد**.

A مکعب هر طبیعی از مربع آن بزرگ‌تر است.

B مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

**11** ........... برای گزارهٔ «مکعب هرعدد طبیعی از مربع آن بزرگ‌تراست» مثال نقض است.

A ۲ B ۱

**12** اعداد ........... یک مثال نقض برای «اگر $x, y$ گویا باشد $x^y$ گویا است» است.

A $y=\frac{۱}{۲}, x=۲$ B $y=۲, x=\frac{۱}{۲}$

**13** گزارهٔ ........... هیچ مثال نقضی **ندارد**.

A اگر $x, y$ گنگ باشند، $x^y$ حتماً گنگ است

B اگر $x, y$ گویا باشند $x \pm y$ گویا است

**14** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد حکم کلی «مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات مستقیم - درست

**15** روش اثبات درستی حکم فوق به‌صورت ........... است.

A $n+n+۱+n+۲=۳n+۳=۳(n+۱)=۳k$

B $(۲k-۱)+۲k+(۲k+۱)=۶k=۳(۲k)$

**16** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد حکم کلی «مربع هر عدد طبیعی از خودش بزرگ‌تر است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات مستقیم - درست

**17** مثال نقض برای رد درستی گزارهٔ فوق ........... است.

A ۱ B اعداد بین صفر و یک

**18** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد ارزش گزارهٔ «مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات مستقیم - درست

**19** روش اثبات مستقیم برای استدلال درستی گزاره فوق به‌صورت ........... است.

A $(۲k-۱)+(۲k+۱)=۴k=۲(۲k)=۲k'$

B $(۲k+۱)+(۲k'+۱)=۲k+۲k'+۲=۲(k+k'+۱)=۲k''$

**20** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد «حاصل جمع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است».

A اثبات مستقیم B برهان خلف

**21** روش اثبات برای تأیید درستی گزارهٔ فوق به‌صورت ........... است.

A $(۲k+۱)+(۲k'+۱)=۲(k+k')+۲=۲(k+k'+۱)=۴k''$

B $(۲k+۱)+(۲k+۳)=۴k+۴=۴(k+۱)=۴k'$

**22** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد ارزش گزارهٔ «مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب ۶ است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات مستقیم - درست

**23** روش اثبات برای تأیید درستی حکم فوق به‌صورت ........... است.

A $(۲k-۲)+(۲k)+(۲k+۲)=۶k$

B $(۲k)+(۲k+۴)+(۲k+۸)=۶k+۱۲=۶(k+۲)=۶k'$

**24** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد ارزش گزارهٔ «اگر $k$ حاصل ضرب دو عدد متوالی باشد آنگاه $۴k+۱$ مربع کامل است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات مستقیم - درست

**25** اثبات درستی گزارهٔ فوق به‌صورت زیر است در جای خالی کدام عبارت قرار می‌گیرد؟

$k=n(n+۱) \Rightarrow ۴k+۱=۴n(n+۱)+۱=.........$

A $(۴n+۱)^۲$ B $(۲n+۱)^۲$

**26** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد ارزش گزارهٔ «تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات مستقیم - درست

**27** از هر دو عدد طبیعی متوالی حتماً یکی از آن‌ها ........... است. بنابراین حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی ........... است.

A زوج - زوج B فرد - فرد

**28** از هر سه عدد طبیعی متوالی حتماً یکی از آن‌ها ........... است. بنابراین حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی ........... است.

A مربع کامل - مربع کامل B مضرب ۳ - مضرب ۳

**29** بنابراین می‌توان گفت حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی ........... .

A همواره مضرب ۶ است B همواره مضرب ۴ است

**30** اگر حاصل ضرب چند عدد فرد باشد ...........

A همهٔ آن‌ها فرد هستند B ممکن است بعضی از آن‌ها زوج باشد

**31** اگر حاصل ضرب چند عدد زوج باشد ...........

A همهٔ آن‌ها زوج هستند B حداقل یکی از آن‌ها زوج است

**32** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد ارزش گزارهٔ «اگر $ab$ فرد باشد $a+b$ زوج است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات - درست

**33** با استفاده از ........... می‌توان نشان داد ارزش گزارهٔ «اگر $ab$ زوج باشد $a+b$ نیز زوج است» ........... است.

A مثال نقض - نادرست B اثبات مستقیم - درست

NEXT

10 B 11 B 12 A 13 B 14 B 15 A 16 A 17 A 18 B 19 B 20 A 21 B 22 B 23 A

24 B 25 B 26 B 27 A 28 B 29 A 30 A 31 B 32 B 33 A

### مینی تست

**5** اگر $a|n^2+2, a|n+3$ آنگاه مقادیر a عبارتند از ............

A) $\pm11, \pm1$ B) $\pm13, \pm1$

**6** اگر $n-2|2n+1$ آنگاه برای n ............ صحیح وجود دارد.

A) ۵ جواب B) ۴ جواب

**7** اگر $n+2|n^2+1$ آنگاه برای n ........... صحیح وجود دارد.

A) ۲ جواب B) ۴ جواب

**8** اگر $n-2|n^3$ آنگاه برای n ........... طبیعی وجود دارد.

A) ۵ جواب B) ۴ جواب

5 A 6 B 7 B 8 A

**668** اگر $a|5m-3$ و $a|7m+1$ برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶

**669** اگر $a|12m+1$ و $a|18m-1$ آنگاه برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

**670** اگر $a|8m+3$ و $a|6m-4$ ، برای a چند جواب طبیعی و غیراول وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱

**671** اگر $a|n+2$ و $a|n^2-5n+6$ برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۶

**672** اگر $n+3|n^2+2n+3$ برای n چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱۲

**673** اگر $n+2|3n-1$ آنگاه برای n چند جواب صحیح وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

## 13 نقاط با مختصات صحیح

اگر بخواهیم نقاطی با طول و عرض صحیح واقع بر یک منحنی با ضابطهٔ کسری را پیدا کنیم [اگر تابع کسری نبود با فاکتورگیری از y آن را به‌صورت کسری درمی‌آوریم] باید ببینیم به‌ازای چند مقدار صحیح برای x ، صورت کسر بر مخرج کسر بخش‌پذیر است یا به عبارتی مخرج، صورت را عاد می‌کند.

تعداد نقاط با طول و عرض صحیح واقع بر منحنی $xy+2x^2+y+3=0$ کدام است؟

ابتدا با فاکتورگیری از y ، تابع را به‌صورت کسری در می‌آوریم:

$$xy+2x^2+y+3=0 \Rightarrow y(x+1)=-2x^2-3 \Rightarrow y=-\frac{2x^2+3}{x+1}$$

حال باید صورت کسر یعنی $2x^2+3$ بر مخرج کسر یعنی $x+1$ بخش‌پذیر باشد:

ریشه

$x+1|2x^2+3 \Rightarrow x+1|2(-1)^2+3 \Rightarrow x+1|5 \Rightarrow x+1=\pm1,\pm5 \Rightarrow$ ۴ نقطه

### مینی تست

**1** منحنی $y=\frac{x+1}{x-4}$ از ............ با مختصات صحیح می‌گذرد.

A) ۴ نقطه B) ۲ نقطه

**2** منحنی $y=\frac{x^2+1}{x+3}$ از ............ با مختصات صحیح می‌گذرد.

A) ۸ نقطه B) ۶ نقطه

1 A 2 A

**674** منحنی $y=\frac{x^3-3}{x-3}$ از چند نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

## مینی‌تست

**13** به کمک ........... می‌توان نشان داد اگر $p$ اول و $a$ طبیعی باشد، نتیجه‌گیری « $a|p \Rightarrow a=1$ یا $p$ » ........... است.

A) مثال نقض - نادرست

B) اثبات مستقیم - درست

**14** کوچک‌ترین عدد اول که $7!+100$ را عاد می‌کند ........... است.

A) ۷

B) ۲

**15** عبارت $n^4+4$ همواره ........... .

A) مرکب است

B) مرکب نیست

13 B | 14 A | 15 B

---

**681** کدام گزاره الزاماً درست است؟

۱) هر عدد اول، چهار مقسوم‌علیه صحیح دارد.
۲) همهٔ اعداد اول فرد هستند.
۳) مجموعهٔ اعداد اول متناهی است.
۴) عدد «۱» عددی اول است.

**682** مجموع مربعات دو عدد اول برابر ۲۹ است، تفاضل این دو عدد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۷

**683** اگر $p$ و $q$ دو عدد اول و $p^3+q^3=133$ باشد، $|p-q|$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴

**684** اگر $p,q,r$ اعداد اول و $p>q>r$ و داشته باشیم $p+q+r=54$ حاصل $\dfrac{p+q}{r}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۶ ۳) ۲۲ ۴) ۳۰

**685** اگر $p,q,r$ همگی اول و $p^2-q^2=r$ آن‌گاه $p+q+r$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

**686** اگر $p$ عددی اول باشد و $a|p^3$ آنگاه برای $a$، چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

**687** به‌ازای چند عدد اول مانند $n$ عبارت $2^n+1$ عددی اول است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

**688** اگر $p$ و $q$ اعداد اول و ریشه‌های معادلهٔ $x^2-px+q=0$ صحیح باشند، حاصل ضرب ریشه‌های معادله کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

---

اگر m توانی از ۲ نباشد، عبارت $2^m+1$ مرکب است. امّا اگر m توانی از ۲ باشد، عبارت $2^m+1$ ممکن است اول باشد. ولی قطعی نیست.

اعدادی به شکل $F_n=2^{2^n}+1$ را اعداد فرما می‌نامند. چون پییر فرما [Pierre de Fermat] در قرن پانزدهم با مشاهد این‌که اعدادِ:

$F_0=2^{2^0}+1=3$ $F_1=2^{2^1}+1=5$ $F_2=2^{2^2}+1=17$ $F_3=2^{2^3}+1=257$ $F_4=2^{2^4}+1=65537$

همگی اعدادی اول هستند، طی نامه‌ای به مرسن [Marin Mersenne] اعلام می‌کند که من اعدادی به شکل $F_n=2^{2^n}+1$ یافته‌ام که همواره اول‌اند. بعدها در قرن هفدهم لئونارد اویلر نشان می‌دهد که $F_5=2^{2^5}+1=641\times6700417$ عددی مرکب است. امروزه معلوم شده $F_n$ به‌ازای $5\le n\le21$ همگی مرکب هستند و اما مبارزه بر سر یافتن عدد اول دیگری در میان اعداد فرما، ادامه دارد ...

اگر m عددی اول نباشد، عبارت $2^m-1$ مرکب است. امّا اگر m عدد اول باشد، عبارت $2^m-1$ ممکن است اول باشد ولی قطعی نیست.

اعدادی که به شکل $M_n=2^n-1$ باشند و $M_n$ اول باشد، اعداد مرسن نامیده می‌شوند.

**7** کوچک‌ترین مضرب مشترک ۸ و ۶ عبارت است از ............

A ۲ B ۲۴

**8** حاصل $[۳,۴]$ برابر با ............ است.

A ۱۲ B ۱

**9** حاصل $[۳۶,۴۸]$ برابر با ............ است.

A ۱۰۸ B ۱۴۴

**10** حاصل $[۸,۱۶]$ برابر با ............ است.

A ۱۶ B ۸

**11** حاصل $[۸,۱]$ برابر با ............ است.

A ۸ B ۱

**12** حاصل $[[۸,۱۰],۱۵]$ برابر با ............ است.

A ۱۲۰ B ۲۴۰

**13** حاصل $[[-۶,۴],-۱۰]$ برابر با ............ است.

A ۱۲۰ B ۶۰

**14** حاصل $[a,۱]$ برابر با ............ است.

A ۱ B $|a|$

**15** حاصل $[a,-۱]$ برابر با ............ است.

A ۱ B $|a|$

**16** حاصل $[a,a]$ برابر با ............ است.

A $|a|$ B ۱

**17** حاصل $[a,a^n]$ برابر با ............ است.

A $|a|^n$ B $|a|$

**18** اگر $a,b$ نسبت به‌هم اول باشند $[a,b]$ برابر با ............ است.

A ۱ B $|ab|$

**19** حاصل $[-a,b]$ برابر با ............ است.

A $-[a,b]$ B $[a,b]$

**20** حاصل $[-a,-b]$ برابر با ............ است.

A $[a,b]$ B $-[a,b]$

**21** اگر $a \mid b$ حاصل $[a,b]$ برابر با ............ است.

A $|a|$ B $|b|$

**22** اگر $[a,b]=|a|$ باشد آنگاه ............

A $a \mid b$ B $b \mid a$

**23** اگر $[a,b]=c$ حاصل $[a,c]$ برابر با ............ است.

A $c$ B $|a|$

**24** حاصل $[[a,-b],-a]$ برابر با ............ است.

A $[a,b]$ B $|a|$

**25** حاصل $[a,(a,b)]$ برابر با ............ است.

A $[a,b]$ B $|a|$

**26** حاصل $(a,[a,b])$ برابر با ............ است.

A $[a,b]$ B $|a|$

**27** حاصل $[a,[a,b]]$ برابر با ............ است.

A $|a|$ B $[a,b]$

**28** حاصل $[(۱۳۹۷,۲۰۱۹),۱۳۹۷]$ برابر با ............ است.

A ۱۳۹۷ B ۲۰۱۹

**29** حاصل $([۱۳۹۸,۲۰۲۰],۱۳۹۸)$ برابر با ............ است.

A ۲۰۲۰ B ۱۳۹۸

**30** حاصل $[[۱۸,۱۲],۱۸]$ برابر با ............ است.

A ۳۶ B ۱۴۴۴

**31** حاصل $[(m^۳,m^۲),m]$ برابر با ............ است.

A $|m^۳|$ B $m^۲$

**32** حاصل $([m^۲,m^۳],m)$ برابر با ............ است.

A $m^۲$ B $|m|$

**33** حاصل $([-m^۳,m^۲],(m^۲,m^۴))$ برابر با ............ است.

A $m^۲$ B $m^۴$

**34** اگر $a \mid b$ کدام نتیجه درست است؟

A $[a,b^۲]=b^۲$ B $[a^۲,b]=|b|$

**35** اگر $ab \mid c$ حاصل $[a,c]$ برابر با ............ است.

A $|c|$ B $|a|$

**36** اگر $a \mid a+b$ حاصل $[a+b,b]$ برابر با ............ است.

A $|b|$ B $|a+b|$

**37** اگر $[a,b]=c$ باشد، حاصل $[ab,c^۲]$ برابر با ............ است.

A $|ab|$ B $c^۲$

**38** اگر $[a,b]=c$ باشد، حاصل $[ac,c^۲]$ برابر با ............ است.

A $c$ B $c^۲$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 B | 8 A | 9 B | 10 A | 11 A | 12 A | 13 B | 14 B | 15 B | 16 A |
| 17 A | 18 B | 19 B | 20 A | 21 B | 22 B | 23 A | 24 A | 25 B | 26 B |
| 27 B | 28 A | 29 B | 30 A | 31 B | 32 B | 33 A | 34 A | 35 A | 36 A |
| 37 B | 38 B | | | | | | | | |

**717** کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $A=\{x>0 : 24\,|\,x\,,18\,|\,x\}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۷۲ ۴) ۴۳۲

**718** حاصل $([a,-1],a^2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|a|$ ۳) $a^2$ ۴) $-1$

**719** اگر $b^2\,|\,a^3$ کدام نتیجه‌گیری الزاماً صحیح نیست؟

۱) $(a,b)=|a|$ ۲) $[a,b]=|b|$ ۳) $[a,b^2]=b^2$ ۴) $(a^2,b)=a^2$

**720** با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[(627,429),154]$ کدام است؟ (خارج - ۹۸)

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

**721** اگر m یک عدد طبیعی باشد، حاصل $[[m^2,m],2m^3]$ برابر با ........... است.

۱) $2m^3$ ۲) $m^2$ ۳) $m^4$ ۴) $m$

**722** اگر $(a^2,b)=a^2$ باشد، حاصل $[a,2b^3]$ برابر با ........... است.

۱) $2ab^3$ ۲) $a$ ۳) $2b^3$ ۴) $a^2$

**723** اگر $a=3k+1$ باشد، حاصل $[(a,a+3),[a,a+3]]$ برابر با ........... است.

۱) $a(a+3)$ ۲) $a$ ۳) $\frac{a(a+3)}{3}$ ۴) $a+3$

## 21 چاقی و لاغری در ب.م.م و ک.م.م

می‌دانیم ب.م.م هر دو عدد، هر یک از اعداد را می‌شمارد و ک.م.م هر دو عدد، بر هر یک از اعداد بخش پذیر است:

| ادامهٔ لورل - هاردی در ب.م.م و ک.م.م | |
|---|---|
| ۱ گرفتن ب.م.م بین دو عدد باعث لاغر شدن می‌شود، یعنی برای هر عدد دلخواه a عدد $(a,☁)$ همواره لاغرتر از a است. | $a\,|\,(b,☁)\xrightarrow[\text{چاق‌تر}]{\text{چاق}}a\,|\,b$ $\quad$ $a\,|\,b\xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}}(a,☁)\,|\,a$ |
| ۲ گرفتن ک.م.م بین دو عدد باعث چاق شدن می‌شود، یعنی برای هر عدد دلخواه a عدد $[a,☁]$ همواره چاق‌تر از a است. | $[a,☁]\,|\,b\xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}}a\,|\,b$ $\quad$ $a\,|\,b\xrightarrow[\text{چاق‌تر}]{\text{چاق}}a\,|\,[b,☁]$ |
| ۳ می‌دانیم $[a,b]\times(a,b)=a\times b$ یعنی حاصل ضرب دوعدد همواره چاق‌تر از ک.م.م دوعدد است. | $a\times b\,|\,c\xrightarrow[\text{لاغرتر}]{\text{لاغر}}[a,b]\,|\,c$ $\quad$ $c\,|\,[a,b]\xrightarrow[\text{چاق‌تر}]{\text{چاق}}c\,|\,a\times b$ |

### مینی تست

**1** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $a\,|\,b\Rightarrow a\,|\,(b,c)$ B) $a\,|\,b\Rightarrow(a,c)\,|\,b$

**2** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $a\,|\,(b,c)\Rightarrow a\,|\,b$ B) $(b,c)\,|\,a\Rightarrow b\,|\,a$

**3** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $a\,|\,b\Rightarrow a\,|\,[b,c]$ B) $a\,|\,b\Rightarrow[a,c]\,|\,b$

**4** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $[b,c]\,|\,a\Rightarrow b\,|\,a$ B) $a\,|\,[b,c]\Rightarrow a\,|\,b$

**5** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $a\,|\,(b,c)\Rightarrow a\,|\,[b,c]$ B) $a\,|\,[b,c]\Rightarrow a\,|\,(b,c)$

**6** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $(a,b)\,|\,c\Rightarrow[a,b]\,|\,c$ B) $[a,b]\,|\,c\Rightarrow(a,b)\,|\,c$

**7** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $a\,|\,[b,c]\Rightarrow a\,|\,bc$ B) $a\,|\,bc\Rightarrow a\,|\,[b,c]$

**8** کدام نتیجه‌گیری درست است؟
A) $ab\,|\,c\Rightarrow[a,b]\,|\,c$ B) $[a,b]\,|\,c\Rightarrow ab\,|\,c$

1 B 2 A 3 A 4 A 5 A 6 B 7 A 8 A

## مینی تست

**5** منظور از $[2]_5$ مجموعهٔ ........... است.

A) $\{x\in\mathbb{Z}: x=5k-2\}$  B) $\{x\in\mathbb{Z}: x=5k+2\}$

**6** دستهٔ هم‌نهشتی $[3]_5$ شامل بی‌شمار عدد است که عبارتند از ...........

A) $\{\dots,-2,3,8,13,\dots\}$  B) $\{\dots,-1,2,5,8,11,\dots\}$

**7** می‌دانیم $17\in[2]_5$ و $42\in[2]_5$ بنابراین ...........

A) $42\overset{5}{\equiv}17$  B) $42\overset{2}{\equiv}17$

**8** اگر $a\in[r]_m$ و $b\in[r]_m$ آن‌گاه ...........

A) $a\overset{r}{\equiv}b$  B) $a\overset{m}{\equiv}b$

**9** کدام دو عدد به دستهٔ هم‌نهشتی $[r]_5$ تعلق دارند؟

A) ۳۲, ۶۵  B) ۲۳, ۴۸

**10** دستهٔ هم‌نهشتی $[2]_7$ شامل عدد ........... است.

A) ۳۶  B) ۲۳

**11** دستهٔ هم‌نهشتی $[6]_{11}$ شامل عدد ........... نیست.

A) ۳۹  B) ۲۷

**12** اگر $[r]_7$ شامل عدد ۲۵ باشد، عدد r برابر ........... است.

A) ۳  B) ۴

**13** اگر $[2]_m$ شامل عدد ۲۴ باشد، آن را می‌توان به‌صورت ........... نشان داد.

A) $\{x\in\mathbb{Z}:11k+2\}$  B) $\{x\in\mathbb{Z}:12k-2\}$

**14** مجموعه‌های $A_1=\{x\in\mathbb{Z}: x=3k\}$ و $A_2=\{x\in\mathbb{Z}: x=3k+2\}$ و مجموعهٔ $A_3$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز کرده‌اند، مجموعهٔ $A_3$ کدام است؟

A) $A_3=\{x\in\mathbb{Z}: x=3k-1\}$

B) $A_3=\{x\in\mathbb{Z}: x=3k+1\}$

**15** در هم‌نهشتی به پیمانه ۶، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به ........... هم‌نهشتی افراز می‌شود.

A) ۵ دسته  B) ۶ دسته

**16** دسته‌های هم‌نهشتی ........... یک افراز برای $\mathbb{Z}$ هستند.

A) $[6]_4,[12]_4,[5]_4,[7]_4$  B) $[21]_4,[12]_4,[7]_4,[5]_4$

**17** در هم‌نهشتی به پیمانه ........... $\mathbb{Z}$ به تعداد کلاس‌های کم‌تری افراز می‌شود.

A) ۷  B) ۱۲

**18** اگر دو عدد ۲۱,۱۱۲ در هم‌نهشتی به پیمانهٔ m هم‌نهشت باشد، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ حداقل به ........... کلاس افراز می‌شود.

A) ۹۱ کلاس  B) ۷ کلاس

**19** اگر هم‌نهشتی $a\overset{7}{\equiv}-2$ را به‌صورت تساوی بنویسیم به‌شکل ........... است.

A) $a=7k+2$  B) $a=7k-2$

**20** اگر $a\overset{19}{\equiv}7$ باشد، کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی a برابر با ........... است.

A) ۱۰۳  B) ۱۰۲

5 B | 6 A | 7 A | 8 B | 9 B | 10 B | 11 B | 12 B | 13 A | 14 B | 15 B | 16 A | 17 A | 18 B | 19 B | 20 B

**760** در هم‌نهشتی به پیمانهٔ m سه عدد a, ۴۱, ۱۳۲ در یک کلاس هم ارزی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به تعداد کم‌تری کلاس هم ارزی افراز شود، کدام است؟

۱) ۱۰۲  ۲) ۱۰۳  ۳) ۱۰۴  ۴) ۱۰۶

**761** مجموعهٔ اعداد طبیعی را به سه مجموعهٔ A, B, C افراز کرده‌ایم. اگر $A=\{n: n=7k+2,\ k\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{n: n=7k-3,\ k\in\mathbb{N}\}$، کدام دو عدد، به یک کلاس هم‌ارزی حاصل از این افراز، تعلق دارند؟

۱) ۱۳ و ۲۱  ۲) ۱۳ و ۲۳  ۳) ۲۱ و ۳۲  ۴) ۲۳ و ۳۲

**762** رابطهٔ هم‌نهشتی $xRy \Leftrightarrow 7\mid x^2-y^2$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؟

۱) ۷  ۲) ۲  ۳) ۴  ۴) ۳

**763** مجموعهٔ اعداد صحیح توسط چهار مجموعهٔ $A_1, A_2, A_3, A_4$ افراز شده است به‌طوری‌که $A_1=\{x\in\mathbb{Z}: x=4k\}, A_2=\{x\in\mathbb{Z}: x=4k+1\}$ و $A_3=\{x\in\mathbb{Z}: x=4k-1\}$، کدام دو عدد به مجموعهٔ $A_4$ تعلق دارند؟

۱) ۲۲ و ۳۴  ۲) ۳۰ و ۵۱  ۳) ۱۷ و ۴۲  ۴) ۴۸ و ۵۲

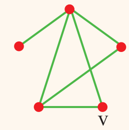
**764** رابطهٔ هم‌نهشتی $xRy\Leftrightarrow 8\mid x^2-y^2$ مجموعهٔ اعداد فرد را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؟

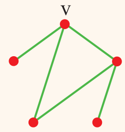
۱) ۱  ۲) ۲  ۳) ۳  ۴) ۴

**765** رابطهٔ فوق مجموعهٔ اعداد زوج را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؟

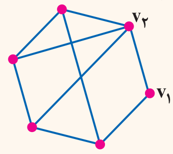
۱) ۱  ۲) ۲  ۳) ۳  ۴) ۴

**6** در گراف ........... درجه رأس v برابر ۳ است.

A 


B 

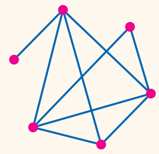

**7** در گراف مقابل $\deg(v_2)-\deg(v_1)$ برابر با ........... است.




A ۱

B ۲

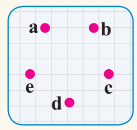
**8** درجه رأس‌های گراف مقابل به‌صورت ........... است.



A ۴,۴,۴,۳,۲,۱

B ۴,۳,۳,۳,۱,۱

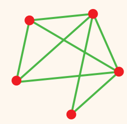
**9** درگراف G اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,bd,cd,de\}$ باشد درجه رأس‌ها به‌صورت ........... است. [رسم کنید]

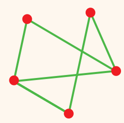



A ۳,۲,۲,۲,۱

B ۳,۳,۲,۲,۱

**10** درجهٔ رأس‌های گراف ........... برابر ۴,۴,۳,۳,۲ است.

A 

B 

**11** اگر درجهٔ یک رأس گراف، برابر با صفر باشد، یعنی ........... .

A هیچ یالی به آن رأس متصل نیست B گراف یک رأس دارد

**12** اگر درجهٔ یک رأس از گراف صفر باشد، به آن رأس ........... گفته می‌شود.

A ایزوله B غیرمتصل

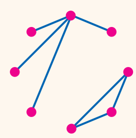
**13** یک گراف ........... به تعداد دلخواه و متناهی رأس ایزوله داشته باشد.

A می‌تواند B نمی‌تواند

**14** در یک گراف از مرتبهٔ p، اگر درجهٔ یک رأس $p-1$ باشد، آن رأس را یک ........... می‌نامند.

A رأس فول B رأس نیم فول

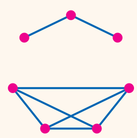
**15** در گراف شکل مقابل ........... است.



A $\Delta(G)=۱$

B $\Delta(G)=۴$

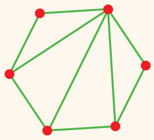
**16** در گراف شکل مقابل ........... است.

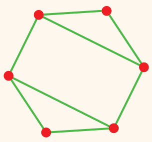


A $\delta(G)=۳$

B $\delta(G)=۱$

**17** در گراف ........... اختلاف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ بیشتر است.

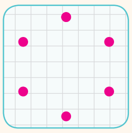
A 

B 

**18** در یک گراف ساده، درجهٔ یکی از رأس‌ها ۶ است. این گراف ........... دارد.

A حداقل ۷ رأس B حداکثر ۷ رأس

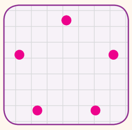
**19** در یک گراف ساده مانند G اگر $\Delta(G)=۴$ باشد، این گراف ........... دارد.



A حداقل ۴ یال

B دقیقاً ۴ یال

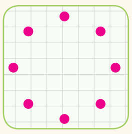
**20** در گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۵، اگر $\Delta(G)=۳$ باشد، این گراف ........... دارد.



A حداکثر ۸ یال

B حداکثر ۷ یال

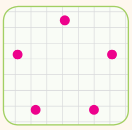
**21** در گراف سادهٔ G با ۸ رأس $\delta(G)=۱$ است. این گراف ........... دارد.



A حداقل یک یال

B حداقل ۴ یال

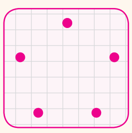
**22** در گراف سادهٔ G با ۵ رأس $\delta(G)=۱$ است. این گراف ........... دارد.



A حداقل یک یال

B حداقل ۳ یال

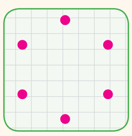
**23** در گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۵، اگر $\delta(G)=۱$ باشد، این گراف ........... دارد.



A حداکثر ۵ یال

B حداکثر ۷ یال

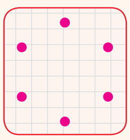
**24** در گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۶، اگر $\delta(G)=۲$ باشد، ........... وجود دارد.



A حداقل ۶ یال

B دقیقاً ۶ یال

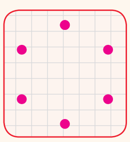
**25** در یک گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۶ اگر $\delta(G)=۲$ باشد، ........... وجود دارد.



A حداکثر ۱۲ یال

B حداکثر ۱۰ یال

**26** در یک گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۶ اگر $\Delta(G)=۲$ باشد، ........... وجود دارد.



A حداکثر ۱۲ یال

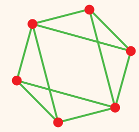
B حداکثر ۶ یال

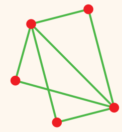
NEXT

6 B 7 B 8 A 9 A 10 A 11 A 12 A 13 A 14 A 15 B 16 B 17 A 18 A 19 A 20 B 21 B 22 B 23 B 24 A 25 A 26 B

## مینی تست

**27** در گراف ........... دو رأس فول وجود دارد.

A 

B 

**28** یک گراف ........... هم رأس فول و هم رأس ایزوله داشته باشد.

A می‌تواند　　B نمی‌تواند

**29** در گرافی با p رأس، یک رأس از درجهٔ $p-1$ است. این گراف ........... ندارد.

A رأس درجهٔ ۲　　B رأس ایزوله

**30** اگر در یک گراف از مرتبهٔ p دو رأس از درجهٔ $p-1$ وجود داشته باشد، درجهٔ سایر رأس‌ها، ........... است.

A دقیقاً ۲　　B حداقل ۲

**31** در گراف‌های ساده درجهٔ دو رأس ........... یکسان باشد.

A می‌تواند　　B نمی‌تواند

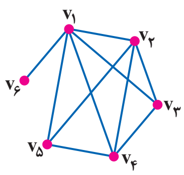
**32** در هرگراف ساده، درجهٔ ........... .

A حداقل دو رأس یکسان است

B هیچ دو رأسی یکسان نیست

27 B 28 B 29 B 30 B 31 A 32 A

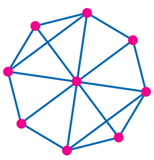
**879** در شکل مقابل، نمودار گراف G داده شده است. اختلاف تعداد رأس‌های زوج و رأس‌های فرد گراف کدام است؟





۱) ۲　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) ۴

**880** در گراف G مطابق شکل حاصل $\Delta(G)-\delta(G)$ کدام است؟



۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۶　　۴) ۵

**881** در گراف ساده‌ای با ۸ رأس اگر مینیمم درجهٔ رأس‌های گراف ۳ باشد، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۲　　۲) ۲۳　　۳) ۲۴　　۴) ۲۵

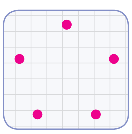
**882** در گراف سادهٔ $G=(V,E)$ ، دو رأس از درجهٔ $\delta=1$ وجود دارد. اگر مرتبهٔ گراف ۹ باشد، گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۱　　۲) ۲۲　　۳) ۲۳　　۴) ۲۴

**883** در گراف ساده‌ای با ۱۲ یال اگر ماکزیمم درجهٔ رأس‌ها ۵ باشد، حداقل تعداد اعضای مجموعهٔ V کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

**884** در گراف سادهٔ G با ۵ رأس، اگر $\Delta(G)=4$ و $\delta(G)=2$ باشد، ........... یال وجود دارد.



۱) حداقل ۵　　۲) حداکثر ۸　　۳) حداکثر ۷　　۴) حداقل ۷

**885** حاصل ضرب درجات رأس‌های یک گراف برابر ۷ است . این گراف حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۱۴　　۲) ۷　　۳) ۸　　۴) چنین گرافی وجود ندارد

**886** حاصل‌ضرب درجات رأس‌های گراف G برابر ۱۳ است. حاصل $\Delta(G)-\delta(G)$ کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۳　　۳) ۲　　۴) ۱

**887** در یک گراف ساده با ۹ رأس و ۶ یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

**888** در یک گراف ساده با ۱۰ رأس و ۱۱ یال حداکثر چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

**889** در یک گراف ساده از مرتبهٔ ۱۲ و اندازهٔ ۴ حداقل چند رأس ایزوله وجود دارد؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

**890** در گراف ساده‌ای از مرتبهٔ ۲۰ اندازه برابر ۵ است. این گراف حداقل چند رأس ایزوله دارد؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۱۴　　۴) ۱۵

## مینی تست

6 هر گراف ........... یک گراف ........... است.

A کامل - منتظم　　B منتظم - کامل

7 هر گراف ........... الزاماً یک گراف ........... نیست.

A کامل - منتظم　　B منتظم - کامل

8 گراف G که در آن ........... تمام رأس‌های آن برابر با V(G) باشد، ........... است.

A همسایگی باز - منتظم　　B همسایگی بسته - کامل

9 درجهٔ همهٔ رأس‌های گراف $K_p$ برابر با ........... است.

A $p-1$　　B $p$

10 در گراف ........... درجهٔ همهٔ راس‌ها ۵ است.

A $K_5$　　B $K_6$

11 هر گراف ........... از مرتبهٔ p یک گراف کامل است که آن را با $K_p$ نشان می‌دهند.

A $(p-1)$-منتظم　　B $p$-منتظم

12 گراف ۳ - منتظم مرتبهٔ ۴ را با ........... نشان می‌دهند.

A $K_3$　　B $K_4$

13 اندازهٔ گراف کامل مرتبهٔ p از رابطهٔ ........... به دست می‌آید.

A $\frac{p(p-1)}{2}$　　B $\frac{p(p+1)}{2}$

14 اندازهٔ گراف $K_4$ برابر ........... است.

A ۶　　B ۴

15 اندازهٔ گراف $K_5$ برابر ........... است.

A ۱۰　　B ۱۵

16 اندازهٔ گراف کاملی برابر ۱۵ است. این گراف ........... رأس دارد.

A ۷　　B ۶

17 اندازهٔ گراف کاملی برابر ۲۱ است. این گراف ........... رأ س دارد.

A ۷　　B ۸

18 اندازهٔ گراف ........... چهار برابر مرتبهٔ آن است.

A $K_8$　　B $K_9$

19 در گراف کامل ........... مرتبه و اندازه برابر است.

A $K_3$　　B $K_4$

20 در چند گراف کامل مرتبه از اندازه بزرگ‌تر است؟

A ۳　　B ۲

6 A 7 B 8 B 9 A 10 B 11 A 12 B 13 A 14 A 15 A 16 B 17 A 18 B 19 A 20 B

909 در گراف کاملی مجموع مرتبه و اندازه ۶ است. این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۵

910 مجموع مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۱۰ است. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۶　　۲) ۵　　۳) ۷　　۴) ۴

911 مجموع مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۱۵ است. این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

912 حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۲۴ است. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۶　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۷

913 حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۵۰ است. این گراف چند یال دارد؟

۱) ۱۰　　۲) ۵　　۳) ۲۵　　۴) ۱۵

914 حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۹۰ است. در این گراف درجهٔ رأس‌ها کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۹

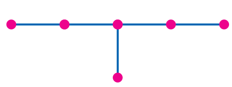
915 تفاضل اندازه و مرتبهٔ گراف کاملی ۱۴ است. در این گراف همسایگی باز هر رأس چند عضو دارد؟

۱) ۸　　۲) ۷　　۳) ۶　　۴) ۹

916 تفاضل مرتبه و اندازهٔ گراف کاملی ۲۰ است. در این گراف همسایگی بستهٔ هر رأس چند عضو دارد؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

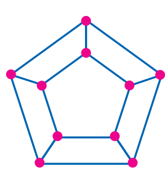
917 گراف مقابل با اضافه شدن چند یال، کامل می‌شود؟



۱) ۱۰　　۲) ۹

۳) ۸　　۴) ۱۱

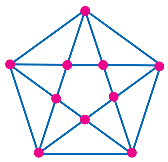
918 در گراف مقابل با اضافه شدن چند یال، درجهٔ تمام رأس‌ها برابر ۹ می‌شود؟



۱) ۳۵　　۲) ۲۵

۳) ۲۰　　۴) ۳۰

**919** گراف $G$ مطابق شکل مفروض است، با اضافه شدن چند یال در این گراف $\delta(G)=۹$ خواهد شد؟



۱) ۲۵ ۲) ۳۰
۳) ۳۵ ۴) ۲۰

**920** یک گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۶ با اضافه شدن چند یال، به یک گراف ۵- منتظم مرتبهٔ ۶ تبدیل می‌شود؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۷

**921** یک گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۸ با اضافه شدن چند یال، همسایگی بستهٔ تمام رأس‌ها یکسان می‌شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

**922** یک گراف ۱- منتظم مرتبهٔ ۶ با اضافه شدن چند یال، همسایگی باز تمام رأس‌ها ۵ عضوی خواهد شد؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

**923** به گراف ۴- منتظم $G$، ۱۸ یال اضافه کرده‌ایم تا هر دو رأس متمایزش مجاور شوند. گراف $G$ چند رأس دارد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

**924** گراف سادهٔ با اضافه شدن ۱۳ یال کامل و با کم شدن ۷ یال از آن ۲- منتظم می‌شود. مجموع مرتبه و اندازهٔ این گراف کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

**925** اگر مجموعهٔ $V=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ مجموعهٔ رأس‌های گراف سادهٔ $G$ باشند و دو رأس متمایز با این شرط مجاور باشند که اعداد مربوط به رأس‌های آن‌ها نسبت به هم اول باشند، این گراف با اضافه شدن چند یال کامل می‌شود؟

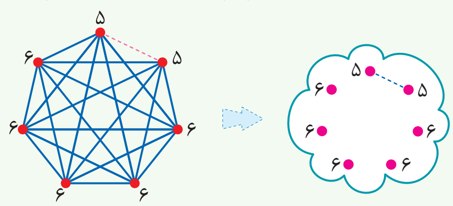
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

## 10 گراف‌های نزدیک به کامل

اگر اندازهٔ یک گراف نزدیک به یک گراف کامل باشد برای بررسی وضعیت، بهتر است آن را با گراف کامل هم مرتبهٔ خودش، مقایسه کنیم. در این موارد به جای این‌که کل یال‌ها را رسم کنیم از روش نمادین برای رسم گراف استفاده می‌کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

اگر اندازهٔ یک گراف از مرتبهٔ ۷ برابر ۲۰ باشد، این گراف چند رأس از درجهٔ ۵ دارد؟

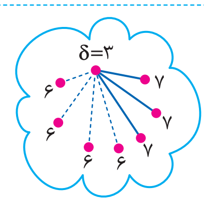
این گراف یک یال از گراف $K_۷$ کم‌تر دارد. بنابراین همهٔ رأس‌های آن به‌جز دو رأس، دارای درجهٔ $\Delta=۶$ و آن دو رأس دارای درجهٔ $\delta=۵$ هستند.



اگر اندازهٔ یک گراف مرتبهٔ ۸ برابر ۲۴ باشد، حداقل و حداکثر مقدار $\Delta-\delta$ را به دست آورید.

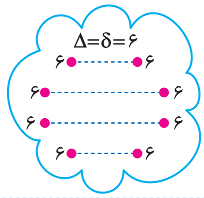
این گراف دارای ۲۴ یال است که نزدیک به گراف $K_۸$ است، ولی ۴ یال کم‌تر از $K_۸$ دارد. برای حل این مسئله، ابتدا فرض می‌کنیم که یک گراف کامل مرتبهٔ ۸ داریم. سپس برای یافتن حداکثر و حداقل $\Delta-\delta$ گراف موردنظر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

**۱** $Max(\Delta-\delta)$: برای این‌که $\Delta-\delta$ حداکثر شود، باید تا حد امکان $\Delta$ زیاد و $\delta$ کم شود. برای این منظور هر ۴ یال را از یک رأس برمی‌داریم:



$Max(\Delta-\delta)=۷-۳=۴$

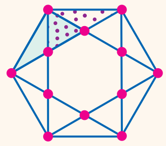
**۲** $Min(\Delta-\delta)$: برای این‌که $\Delta-\delta$ حداقل شود باید تا حد امکان $\Delta$ و $\delta$ به هم نزدیک شوند. برای این منظور یال‌های کندهٔ شده را بین رأس‌ها پخش می‌کنیم:



$Min(\Delta-\delta)=۶-۶=۰$

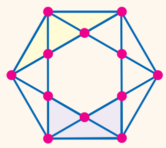
## مینی‌تست

**1** گراف مقابل دارای ........... دور با طول ۴ است.



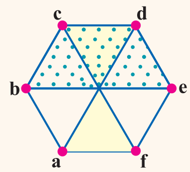
A ۱۰
B ۱۲

**2** گراف مقابل دارای ........... دور با طول ۵ است.



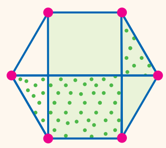
A ۱۰
B ۱۲

**3** گراف مقابل دارای ........... دور با طول ۴ است.



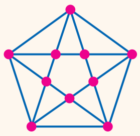

A ۹
B ۶

**4** گراف زیر دارای ........... دور با طول ۵ است.



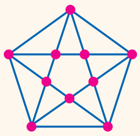
A ۶
B ۴

**5** گراف مقابل دارای ........... دور با طول ۵ است.



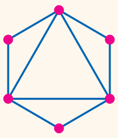
A ۱۲
B ۱۰

**6** گراف مقابل دارای ........... دور با طول ۴ است.



A ۱۰
B ۵

**7** گراف مقابل دارای ........... دور با طول فرد است.

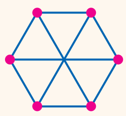


A ۵
B ۷

**8** گراف فوق ........... دور با طول زوج دارد.

A ۳ B ۴

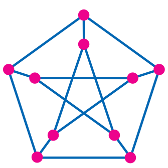
**9** گراف مقابل ........... دور به طول فرد دارد.



A ۶ B صفر

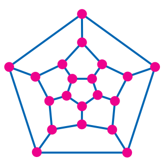
1 B 2 B 3 A 4 A 5 A 6 A 7 B 8 B 9 B

**1004** گراف مقابل [گراف پترسن] دارای ........... دور با طول ۵ است.



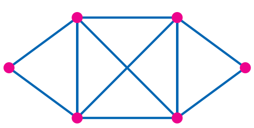
۱) ۱۰ ۲) ۱۲
۳) ۸ ۴) ۱۱

**1005** گراف مقابل چند دور با طول ۵ دارد؟



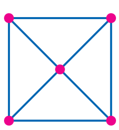
۱) ۵ ۲) ۷
۳) ۱۰ ۴) ۱۲

**1006** گراف مقابل چند دور با طول ۴ دارد؟



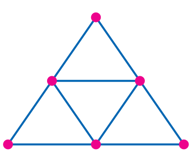
۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

**1007** گراف مقابل چند دور به طول ۴ دارد؟



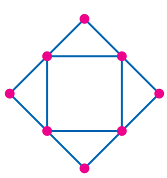
۱) ۱ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

**1008** گراف مقابل چند دور به طول فرد دارد؟



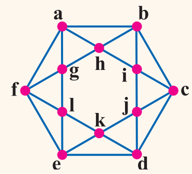
۱) ۸ ۲) ۹
۳) ۱۰ ۴) ۷

**1009** گراف مقابل چند دور با طول ۵ دارد؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۸

**44** در گراف زیر، مجموعهٔ ......... یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.



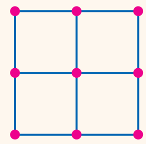

A $\{a,k,j\}$

B $\{b,e,g,j\}$

**45** عدد احاطه‌گری گراف فوق برابر با ......... است.

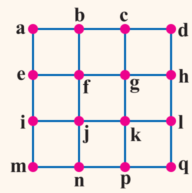
A ۳ B ۴

**46** عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر با ......... است.



A ۳ B ۴

**47** در گراف مقابل، مجموعهٔ ......... یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.



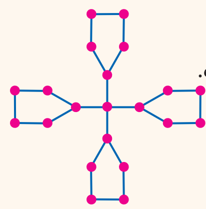

A $\{b,i,p,h\}$

B $\{e,c,i,n\}$

**48** عدد احاطه‌گری گراف فوق برابر با ......... است.

A ۵ B ۴

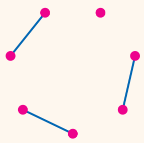
**49** عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر با ......... است.



A ۷

B ۸

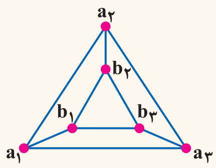
**50** برای این‌که عدد احاطه‌گری گراف زیر برابر ۲ شود، باید حداقل ......... یال به گراف اضافه شود.



A ۳

B ۲

**51** در گراف زیر مجموعه‌های احاطه‌گر دو عضوی به‌صورت ......... است.




A $\{a_i,a_j\}$

B $\{a_i,b_j\}$

**52** اگر G یک گراف nرأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و $\gamma(G)$ عدد احاطه‌گری باشد، آن‌گاه نامساوی ......... همواره برقرار است.

A $\gamma(G)\geq\left[\frac{n}{\Delta+1}\right]$

B $\gamma(G)\leq\left[\frac{n}{\Delta}\right]$

**53** درگرافی از مرتبهٔ ۱۳ اگر $\Delta=3$ باشد، عدد احاطه‌گری نمی‌تواند ......... باشد.

A ۳ B ۴

44 A 45 B 46 A 47 A 48 B 49 B 50 A 51 B 52 A 53 A

**1041** عدد احاطه‌گری در مکمل گراف G با درجهٔ رئوس ۲,۲,۳,۳,۳,۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

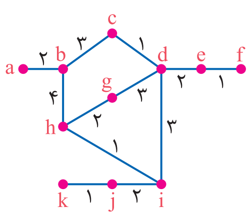
**1042** در گراف همبند و دور دار G مجموع مرتبه و اندازه ۹ است. مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1043** در گراف G از مرتبهٔ ۱۳ عدد احاطه‌گری برابر ۳ است، کوچک‌ترین مقدار برای $\Delta(G)$ در این گراف کدام است؟

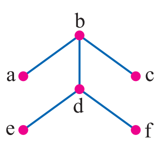
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**1044** گراف مقابل، گراف نظیر با نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاها و مسافت بین آن‌هاست. اگر بخواهیم چند مدرسه در برخی از روستاها احداث کنیم به‌طوری که فاصلهٔ هر روستا از نزدیک‌ترین مدرسه بیش از ۴ کیلومتر نباشد حداقل چند مدرسه باید احداث کرد؟



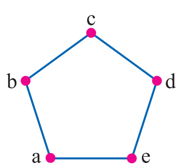

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**1045** در گراف مقابل با حذف کدام یال عدد احاطه‌گری تغییر نمی‌کند؟




۱) df ۲) bc ۳) bd ۴) ab

**1046** گراف مقابل چند $\gamma$ـ مجموعهٔ متمایز فاقد رأس C دارد؟




۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

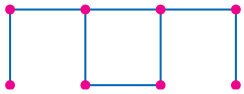
**1047** بازه‌های (۴,۹),(۲,۴),(۳,۵),(۱,۳),(۵,۷) را در نظر بگیرید. دو رأس متناظر با بازه‌های (a,b),(c,d) در گراف G مجاورند به‌شرط آن که اشتراک این دو بازه تهی نباشد. عدد احاطه‌گری گراف G کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1048 حاصل ضرب درجهٔ رأس‌های گراف G از مرتبهٔ ۵ برابر ۵۴ است. عدد احاطه گری مکمل گراف G کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1049 حداقل چند یال به گراف مقابل باید اضافه کرد تا عدد احاطه‌گری آن یک واحد کم شود؟

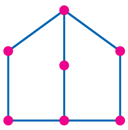


۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1050 اعضای مجموعهٔ $V=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$ را به‌عنوان رأس‌های گراف G در نظر بگیرید. اگر دو رأس متمایز به این شرط مجاور باشند که مجموع اعداد نظیر آن‌ها مضرب ۳ باشد، عدد احاطه‌گری گراف G کدام است؟

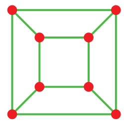
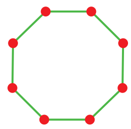
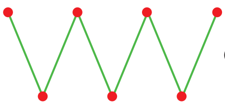
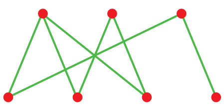
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1051 در گراف مقابل با حذف حداکثر چند یال عدد احاطه گری ثابت می‌ماند؟



۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

1052 عدد احاطه گری کدام گراف از سایرین کوچک‌تر است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

1053 در گراف ناهمبند و نامنتظم G مجموع مرتبه و اندازه برابر ۵ است. عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1054 در گراف همبند G مجموع مرتبه و اندازه برابر ۷ و عدد احاطه‌گری ۲ است، تعداد رأس‌های از درجهٔ مینیمم در این گراف کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1055 در گراف ناهمبند G از مرتبهٔ ۷ تعداد یال‌ها برابر ۱۵ است. عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

1056 کمترین مقدار برای احاطه‌گری یک گراف ناهمبند کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1057 در گراف ۳– منتظم و ناهمبند G از مرتبهٔ ۸ عدد احاطه‌گری کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1058 در یک گراف $\Delta(G)=۴$ و $\gamma(G)=۳$ است. حداکثر مرتبهٔ گراف کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱

1059 در مکمل گراف G با درجهٔ رئوس ۲, ۲,۲,۲,۲,۴ عدد احاطه‌گری کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

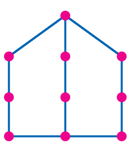
1060 اگر $V=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ مجموعهٔ رأس های گراف G باشد و دو رأس با این شرط همسایه باشند که مجموع اعداد نظیر آن ها برابر ۷ باشد، عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1061 در گراف فاقد دور G از مرتبهٔ ۵ اندازه برابر ۳ است. کمترین مقدار ممکن برای عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

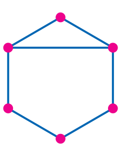
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

1062 عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۳) ۵

1063 در گراف شکل مقابل با اضافه کردن حداقل چند یال عدد احاطه‌گری یک واحد کاهش می‌یابد؟

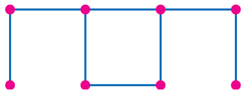


۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

**1048** حاصل ضرب درجهٔ رأس‌های گراف G از مرتبهٔ ۵ برابر ۵۴ است. عدد احاطه گری مکمل گراف G کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1049** حداقل چند یال به گراف مقابل باید اضافه کرد تا عدد احاطه‌گری آن یک واحد کم شود؟

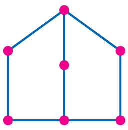


۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1050** اعضای مجموعهٔ $V=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$ را به‌عنوان رأس‌های گراف G در نظر بگیرید. اگر دو رأس متمایز به این شرط مجاور باشند که مجموع اعداد نظیر آن‌ها مضرب ۳ باشد، عدد احاطه‌گری گراف G کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

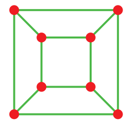
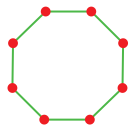
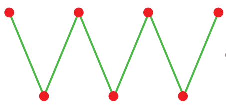
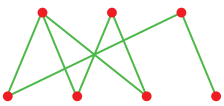
**1051** در گراف مقابل با حذف حداکثر چند یال عدد احاطه گری ثابت می‌ماند؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

**1052** عدد احاطه گری کدام گراف از سایرین کوچک‌تر است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

**1053** در گراف ناهمبند و نامنتظم G مجموع مرتبه و اندازه برابر ۵ است. عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1054** در گراف همبند G مجموع مرتبه و اندازه برابر ۷ و عدد احاطه‌گری ۲ است، تعداد رأس‌های از درجهٔ مینیمم در این گراف کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1055** در گراف ناهمبند G از مرتبهٔ ۷ تعداد یال‌ها برابر ۱۵ است. عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

**1056** کمترین مقدار برای احاطه‌گری یک گراف ناهمبند کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1057** در گراف ۳– منتظم و ناهمبند G از مرتبهٔ ۸ عدد احاطه‌گری کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1058** در یک گراف $\Delta(G)=۴$ و $\gamma(G)=۳$ است. حداکثر مرتبهٔ گراف کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۱

**1059** در مکمل گراف G با درجهٔ رئوس ۴,۲,۲,۲,۲ ,۲ عدد احاطه‌گری کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

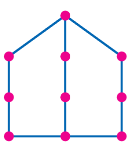
**1060** اگر $V=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ مجموعهٔ رأس های گراف G باشد و دو رأس با این شرط همسایه باشند که مجموع اعداد نظیر آن ها برابر ۷ باشد، عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1061** در گراف فاقد دور G از مرتبهٔ ۵ اندازه برابر ۳ است. کمترین مقدار ممکن برای عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

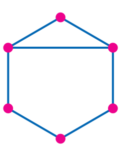
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**1062** عدد احاطه‌گری گراف مقابل کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۳) ۵

**1063** در گراف شکل مقابل با اضافه کردن حداقل چند یال عدد احاطه‌گری یک واحد کاهش می‌یابد؟



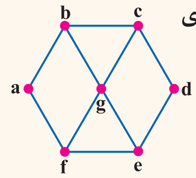
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

## مینی تست

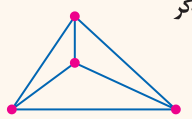
**18** در گراف مقابل ........... مجموعهٔ احاطه‌گر دوعضوی وجود دارد.

A ۲
B ۳



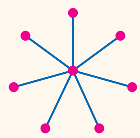

**19** در گراف مقابل، تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر تک‌عضوی برابر با ........... است.

A ۱
B ۴



**20** عدد احاطه‌گری در گراف مقابل برابر با ........... است.

A ۱
B ۷



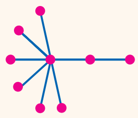
**21** اگر در یک گراف p رأسی $\Delta = p-1$ باشد، عدد احاطه‌گری برابر با ........... است.

A ۱
B ۲

**22** در گرافی با درجهٔ رئوس ۷,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱ ، عدد احاطه‌گری برابر با ........... است.

A ۷
B ۱

**23** عدد احاطه‌گری گراف مقابل برابر با ........... است.



A ۲
B ۳

**24** اگر در یک گراف p رأسی $\Delta = p-2$ باشد، عدد احاطه‌گری برابر با ........... است.

A ۲
B ۳

18 A 19 B 20 A 21 A 22 B 23 A 24 A

**1069** در گراف ۲ــ منتظم G از مرتبهٔ ۱۲ فقط دورهای با طول ۳ وجود دارد. عدد احاطه گری این گراف کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۸

**1070** عدد احاطه‌گری گراف $P_n$ برابر ۶ است. حداقل مقدار n کدام است؟

۱) ۱۵　۲) ۱۶　۳) ۱۷　۴) ۱۸

**1071** در گراف $P_n$ تعداد مسیرهای با طول ۲ برابر ۱۰ است. عدد احاطه‌گری این گراف کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

**1072** از گراف $C_6$ حداکثر چند یال می‌توان حذف کرد به‌طوری که عدد احاطه‌گری آن تغییری نکند؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

**1073** در گراف ۲ــ منتظم G از مرتبهٔ ۱۱ بیش از یک دور با طول ۴ وجود دارد. در این گراف $\gamma(G)$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

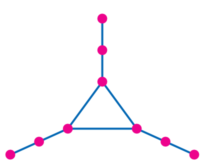
**1074** عدد احاطه گری مکمل گراف $P_{11}$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۵

**1075** در گراف $C_n$ عدد احاطه‌گری برابر ۵ است. برای n چند جواب مختلف وجود دارد؟

۱) ۱۲　۲) ۳　۳) ۴　۴) ۱

**1076** عدد احاطه گری در کدام گراف با عدد احاطه گری گراف مقابل برابر است؟



۱) ۲- منتظم مرتبهٔ ۱۰　۲) ۱- منتظم مرتبهٔ ۸
۳) $C_8$　۴) $P_{10}$

**1077** عدد احاطه‌گری در مکمل گراف $C_{10}$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۳　۴) ۴

**1078** مجموعهٔ $V = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ را به‌عنوان رأس‌های گراف G در نظر بگیرید. اگر دو رأس متمایز با این شرط مجاور باشند که اعداد نظیر آن‌ها متوالی باشند، عدد احاطه گری گراف G کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

NOTE

1106 چند گراف با رئوس $V=\{a,b,c\}$ وجود دارد که مجموعهٔ احاطه گر مینیمال دو عضوی یکتا داشته باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

1107 در گراف همبند $G$ حاصل ضرب مرتبه و اندازه ۲۰ است. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف حداکثر چند عضو دارد ؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

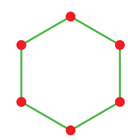
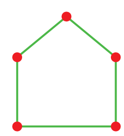
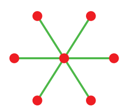
1108 چند گراف با رئوس $V=\{a,b,c\}$ وجود دارد که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال دو عضوی غیر یکتا داشته باشد؟

۱) ۶
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

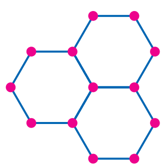
1109 گراف $C_6$ چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال سه عضوی دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بیش از ۳

1110 در کدام گراف هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیز هست؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

1111 یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در گراف مقابل حداکثر چند عضو دارد؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

1112 در گراف $G$ از مرتبهٔ ۵ حاصل ضرب درجهٔ رأس‌ها ۱۸ است، در این گراف یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

1113 چند گراف با رئوس $V=\{a,b,c\}$ وجود دارد که هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیز باشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

1114 مجموعهٔ $V=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ را به‌عنوان رأس‌های گراف سادهٔ $G$ در نظر بگیرید اگر دو رأس متمایز با این شرط مجاور باشند که اعداد نظیر آن‌ها نسبت به‌هم غیر اول باشند، در این صورت حداکثر تعداد اعضای یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

1115 در یک گراف همبند و فاقد دور از مرتبهٔ ۶ دو رأس از درجهٔ ۳ وجود دارد. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال در این گراف حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

**مینی تست**

**15** تعداد اعداد سه رقمی فرد برابر با ........... است.

A ۹×۱۰×۵ B ۸×۸×۵

**16** تعداد اعداد سه رقمی فرد با ارقام متمایز برابر با ........... است.

A ۸×۸×۵ B ۹×۱۰×۵

**17** تعداد اعداد سه رقمی زوج برابر با ........... است.

A ۸×۸×۵ B ۹×۱۰×۵

**18** تعداد اعداد سه رقمی زوج با ارقام متمایز برابر با ........... است.

A ۸×۸×۵ B ۹×۸×۱+۸×۸×۴

15 A 16 A 17 B 18 B

**1136** تعداد اعداد سه رقمی که رقم وسط آن‌ها مضرب ۳ باشد، کدام است؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۲۲۴ ۴) ۲۷۰

**1137** تعداد اعداد سه رقمی زوج که در آن‌ها رقم ۷ به کار نرفته باشد کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۴۰۵ ۴) ۲۸۰

**1138** چند عدد چهار رقمی با ارقام فرد متمایز و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۴۸ ۳) ۹۶ ۴) ۷۲

**1139** با ارقام ۶,۵,۳,۲,۱,۰ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۱۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۱ ۳) ۹۸ ۴) ۹۷

**1140** با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱ چند عدد سه رقمی فرد بزرگ‌تر از ۳۰۰ با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۴۲ ۴) ۲۱

## 04 اصل تفریق

در بعضی مسائل، محاسبهٔ تعداد حالت‌های نامطلوب، از محاسبهٔ تعداد حالت‌های مطلوب مسئله راحت‌تر است. برای حل این نوع مسائل، ابتدا تعداد حالت‌های نامطلوب را محاسبه می‌کنیم و از تعداد کل حالت‌های ممکن کم می‌کنیم. این اصل را اصل تفریق یا متمم می‌نامند.

تعداد حالت‌های نامطلوب − تعداد کل حالت‌ها = تعداد حالت‌های مطلوب

**مهم‌ترین کاربردهای اصل تفریق در مسائل شمارش**

۱ برای محاسبهٔ تعداد اعدادی که شامل رقم مشخصی باشند، تعداد اعداد فاقد آن رقم را حساب می‌کنیم و سپس تعداد اعداد فاقد آن رقم را از کل اعداد کم می‌کنیم.

۲ در مسائل مربوط به شمارش اگر به کلماتی نظیر حداقل (لااقل یا دستکم) یا حداکثر برخوردیم، احتمالاً باید به سراغ اصل تفریق (متمم) برویم.

۳ مسائلی که از فعل‌های منفی در آن‌ها استفاده شده باشد، معمولاً به کمک اصل تفریق حل می‌شوند.

**مینی تست**

ارقام {۵,۴,۳,۲,۱,۰} را در نظر بگیرید؛

**1** تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۲ با این ارقام برابر با ..........است.

A ۴×۵×۵ B ۴×۴×۳

**2** تعداد اعداد سه رقمی شامل رقم ۲ با این ارقام برابر با ..........است.

A ۴×۵×۵ B ۵×۶×۶−۴×۵×۵

**3** تعداد اعداد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ با این ارقام برابر با ..........است.

A ۳×۶×۵ B ۳×۶×۶−۱

**4** تعداد اعداد سه رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۱ برابر با ..........است.

A ۲×۶×۶−۲ B ۲×۶×۶−۱

**5** تعداد اعداد سه رقمی کوچک‌تر از ۳۰۰ برابر با ..........است.

A ۲×۶×۶ B ۲×۵×۴

NEXT

1 A 2 B 3 B 4 A 5 A

# آزمون‌های جامع کنکور

Comprehensive Test

Rene Descartes
1650-1596

## آزمون جامع ۱ سراسری ریاضی ـ داخل ۹۹

دهم + یازدهم + دوازدهم

۱. اگر $A$ و $B$ دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A \subseteq B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B-A'=A$
۲) $A-B'=A$
۳) $A\cap B'=\varnothing$
۴) $B\cap A'=\varnothing$

۲. مجموعهٔ $(A-B)\cup((B\cap C)'\cap((B'\cup A)-B))$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $A\cup B'$
۲) $A\cap B'$
۳) $A$
۴) $B'$

۳. در مجموعه‌های چهار عضوی $A=\{x+2,1,4,y\}$, $B=\{5,7,z,t-1\}$، فرض کنید $A\times B=B\times A$ باشد. تعداد مجموعه‌های به صورت $\{(x,y),(z,t)\}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۴. کدام‌یک از گزاره‌های زیر، هم ارز منطقی گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ است؟

۱) $(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$
۲) $(p\vee q)\vee\sim(p\wedge q)$
۳) $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$
۴) $(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$

۵. تعداد اعداد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸
۲) ۹۵۲
۳) ۹۶۸
۴) ۹۷۲

۶. تعداد جملات در بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$، کدام است؟

۱) ۷۲
۲) ۷۸
۳) ۸۴
۴) ۹۱

۷. در جعبه‌ای ۷ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۱۰ کتاب ریاضی موجود است. حداقل چند کتاب از این جعبه برداریم تا مطمئن باشیم، حداقل ۴ کتاب، هم موضوع است؟

۱) ۱۰
۲) ۹
۳) ۸
۴) ۷

۸. به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟

۱) $\frac{2}{5}$
۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{7}{15}$
۴) $\frac{8}{15}$

۹. تاس همگنی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روشده یک عدد فرد است، احتمال این‌که لااقل یکی از تاس‌های روشده ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{5}{12}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{7}{12}$
۴) $\frac{3}{4}$

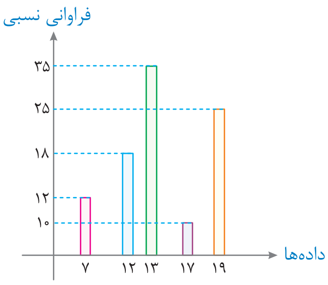
**۱۰.** سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به تصادف از یک ظرف ۲ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

**۱۱.** A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A)=۰/۴$، $P(B|A)=۰/۲۵$، $P(B)=۰/۳$ باشد، $P(B|A')$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

**۱۲.** با توجه به نمودار میله‌ای فراوانی داده‌های کمّی گسسته، میانگین کدام است؟




۱) ۱۳
۲) ۱۳/۸
۳) ۱۴
۴) ۱۴/۲

**۱۳.** چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد، که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن اعداد بر ۴۳۰، با مجذور خارج قسمت، برابر باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

**۱۴.** کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد، کدام است؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸
۳) ۵۲ ۴) ۵۶

**۱۵.** اگر عدد $۲^n-۱$ بر عدد ۲۱۷ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵
۳) ۶ ۴) ۷

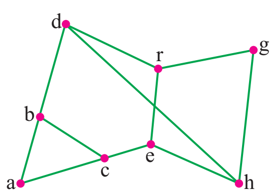
**۱۶.** عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$ مجذور عدد دو رقمی $\overline{cc}$ است. $a-b$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۴ ۴) ۵

**۱۷.** اگر درجهٔ رأس‌های یک گراف ۴, ۴, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدم است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

**۱۸.** در گراف زیر، کدام مجموعه، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، **نیست**؟




۱) $\{a, e, g\}$
۲) $\{a, f, g\}$
۳) $\{b, c, g\}$
۴) $\{e, f, h\}$

**۱۹.** در یک گراف ۷ رأسی غیرتهی و غیرکامل K− منتظم، K چند عدد می‌تواند اختیار کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**۲۰.** سه دوست با هم به اردویی ۳ روزه می‌روند، ۳ مجله ریاضی ۱, ۲, ۳ با سه مجلهٔ ادبی A, B, C در اختیار آن‌ها قرار دارد در هر روز هریک از آنان یک مجلهٔ ریاضی و یک مجلهٔ ادبی مطالعه می‌کنند. [و هر مجلهٔ ادبی با هر مجلهٔ ریاضی دقیقاً یک‌بار استفاده شود] اگر برنامه‌ریزی مجلهٔ ریاضی به صورت مربع لاتین زیر باشد، به چند طریق برنامه‌ریزی ادبی انجام شود، به شرط آن‌که نفر اول در روز اول مجلهٔ A را مطالعه کند؟

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۳ | ۲ | ۱ |

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

**1286** ۲ به رنگ جمله‌ها و ارتباط آن‌ها با محاسبات در بسط $(2a+b-c)^6$ دقت کنید:

$$(2)^2(1)^1(-1)^3 \times \frac{6!}{2!\,1!\,3!} = -4\times 60 = -240$$

**1287** ۳ برای ایجاد شدن جملهٔ $xy^2$ باید توان x برابر ۱ و توان y برابر ۲ شود. از طرفی چون مجموع توان‌ها باید ۵ باشد، پس توان عدد ۲ نیز برابر ۲ است، بنابراین به رنگ جمله‌ها و ارتباط آن‌ها با محاسبات دربسط $(3x+y+2)^5$ دقت کنید:

$$\text{ضریب } xy^2 = (3)^1(1)^2(2)^2 \times \frac{5!}{1!\,2!\,2!} = 12\times 30 = 360$$

**1288** ۲ اگر توان جملات را $x_1, x_2, x_3$ فرض کنیم، تعداد کل جملات بسط برابر تعداد جواب‌های صحیح و منفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=8$ است حال چون می‌خواهیم توان x برابر ۲ باشد، در معادله به جای $x_1$ عدد ۲ قرار می‌دهیم و داریم:

$$2+x_2+x_3=8 \Rightarrow x_2+x_3=6 \Rightarrow N=\binom{1+6}{1}=7$$

**1289** ۴ فرض می‌کنیم توان جملات بسط $x_1, x_2, x_3$ هستند. بنابراین باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ را با شرط $x_1>3$ یعنی $x_1\geq 4$ به دست آوریم، بنابراین ۴ پرتقال از ۷ پرتقال موجود راکنار می‌گذاریم و ۳ پرتقال باقی‌مانده را بین ۳ نفر توزیع می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3=3 \Rightarrow N=\binom{2+3}{2}=10$$

**1290** ۱ چون تعداد جواب‌های صحیح را در بازهٔ $[0, 3]$ می‌خواهیم، پس قدرمطلق بی‌تأثیر است. بنابراین متغیر صحیح و نامنفی $x_4$ را به طرف اول اضافه می‌کنیم و نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم:

$$x_1+|x_2|+\sqrt{x_3}\leq 2 \Rightarrow x_1+x_2+\sqrt{x_3}+x_4=2$$

حال چون رادیکال روی متغیر $x_3$ قرار گرفته، پس به آن عدد می‌دهیم:

1. $x_3=0 \Rightarrow x_1+x_2+x_4=2 \Rightarrow N_1=\binom{2+2}{2}=6$

$$N=6+3=9$$

2. $x_3=1 \Rightarrow x_1+x_2+x_4=1 \Rightarrow N_2=\binom{2+1}{2}=3$

**1291** ۳ عدد سه رقمی موردنظر را به صورت $\overline{x_1x_2x_3}$ در نظر می‌گیریم، بنابراین باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادلهٔ $x_1+x_2+x_3\leq 9$ را با شرط $x_1\geq 1$ به‌دست‌آوریم. حال متغیر صحیح و نامنفی $x_4$ را به طرف اول اضافه می‌کنیم و نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9 \xrightarrow{x_1\geq 1} x_1+x_2+x_3+x_4=8 \Rightarrow N=\binom{11}{3}=165$$

**1292** ۳ متغیر صحیح و نامنفی $x_4$ را به طرف چپ اضافه می‌کنیم و نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم، اما متغیرهای اصلی نامعادله باید طبیعی باشند، بنابراین ابتدا ۳ پرتقال از ۷ پرتقال موجود را به آن‌ها می‌دهیم و ۴ پرتقال باقی‌مانده را توزیع می‌کنیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4 \Rightarrow N=\binom{3+4}{3}=35$$

**1293** ۴ ابتدا نامعادله را به صورت $3\leq x_1+x_2+x_3\leq 8$ می‌نویسیم. حال باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1+x_2+x_3\leq 2$ را از تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادلهٔ $x_1+x_2+x_3\leq 8$ کم کنیم، بنابراین هر دو نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم:

1. $x_1+x_2+x_3+x_4=8 \Rightarrow N_1=\binom{3+8}{3}=165$

$$N=165-10=155$$

2. $x_1+x_2+x_3+x_4=2 \Rightarrow N_2=\binom{2+3}{3}=10$

**1294** ۱ ابتدا متغیر صحیح و نامنفی $x_4$ را به طرف اول اضافه می‌کنیم و نامعادله را به معادلهٔ $x_1+2^{x_2}+x_3+x_4=7$ تبدیل می‌کنیم. حال چون متغیر $x_2$ دارای حالت غیرعادی است، پس باید به آن عدد می‌دهیم:

1. $x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=5 \Rightarrow N_1=\binom{5+2}{2}=21$

$$N=21+10=31$$

2. $x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \Rightarrow N_2=\binom{3+2}{2}=10$

**1295** ۳ اگر تعداد مدادهایی که به افراد می‌رسد را با $x_i$ و تعداد خودکارها را با $y_i$ نمایش دهیم،خواهیم داشت:

1. $y_1+y_2+y_3=5 \Rightarrow N_1=\binom{4+2}{2}=15$
2. $x_1+x_2+x_3=4 \Rightarrow N_2=\binom{5+2}{2}=21$

حال چون توزیع مدادها و خودکارها توأم با هم انجام می‌شود باید تعداد جواب‌های این دو معادله را در هم ضرب کنیم:

$$N=N_1\times N_2=15\times 21=315$$

**1296** ۴ معادلهٔ کوچک‌تر را در معادلهٔ بزرگ‌تر جای‌گذاری می‌کنیم تا به دستگاه ساده‌تری برسیم:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5 \\ x_1+x_3+x_5=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2+x_4=3 \\ x_1+x_3+x_5=2 \end{cases}$$

حال تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی دو معادلهٔ اخیر را در هم ضرب می‌کنیم:

$$N=N_1\times N_2=\binom{3+1}{1}\binom{2+2}{2}=\binom{4}{1}\binom{4}{2}=4\times 6=24$$

**1297** ۳ تعداد راه‌های ممکن برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ x_1+x_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3+x_4+x_5=3 \\ x_1+x_2=4 \end{cases}$$

$$N=N_1\times N_2=\binom{3+2}{2}\binom{4+1}{1}=10\times 5=50$$

**1298** ۳ با توجه به اعداد معلوم مربع لاتین را کامل می‌کنیم:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۴ | ۱ |
| ۱ | ۴ | ۲ | ۳ |
| ۴ | ۱ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ | ۴ |

$$a+b=3+2=5$$

**1299** ۳ با توجه به مربع لاتین داده شده، باید اعداد روی قطر فرعی یکسان باشند. همچنین می‌دانیم تعداد مربع‌های لاتینی که اعداد روی قطر فرعی آن‌ها یکسان است، برابر ۶ است.

**1300** ٤ در این مربع لاتین اعداد روی قطر اصلی یکسان‌اند. از طرفی اگر اعداد روی قطر اصلی یکسان باشند، اعداد روی قطر فرعی ۱,۲,۳ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۶ است.

**1301** ۲ با توجه به این که در مربع لاتین، در هیچ سطر و هیچ ستونی عدد تکراری وجود ندارد، پس تنها مقدار قابل قبول $a = ۲$ است.

**1302** ۳ دو مربع لاتین وجود دارد که سطر اول آن‌ها

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |

باشد:

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۱ |

$a+b=۲$

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

$a+b=۵$

**1303** ۳ با توجه به این‌که $۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$ ، پس ارقام روی قطر اصلی همگی برابر ۳ هستند. بنابراین ارقام روی قطر فرعی، ارقام متمایز ۱,۲,۳ هستند که حاصل ضرب آن‌ها برابر ۶ است.

**1304** ۳ برای برنامه‌ریزی نیاز به یک مربع لاتین ۳×۳ است و از آن‌جا که ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد بنابراین به ۱۲ طریق می‌توان برنامهٔ تدریس برای این ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی تعیین کرد.

**1305** ۳ اگر یک درایه از یک مربع لاتین ۳×۳ معلوم باشد، ۴ مربع لاتین قابل تصور است، که در ۲ تای آن‌ها اعداد روی قطر اصلی یکسان است و در ۲ تای دیگر اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

**1306** ۲ اگر یک سطر یا یک ستون از مربع لاتین ۳×۳ معلوم باشد، دو مربع لاتین قابل تصور است، که در یکی از آن‌ها اعداد روی قطر اصلی یکسان است و در دیگری اعداد روی قطر فرعی یکسان است.

**1307** ۲ اگر جایگاه یکی از اعداد در مربع لاتین مشخص شده باشد (مثلاً بدانیم «۱» در کدام خانه‌ها قرار گرفته است) دو مربع لاتین ۳×۳ با این شرایط قابل تصور است.

**1308** ۲ مربع لاتین داده شده را کامل می‌کنیم، سپس تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۱ | ۳ | ۲ |

$\xrightarrow[۳\to۲]{۲\to۳}$

| | | |
|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

$\xrightarrow[\text{سطر اول و دوم}]{\text{تعویض جای}}$

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |

**1309** ۲ در مربع داده شده اعداد قطر اصلی یکسان است، بنابراین با مربعی متعامد است که اعداد قطر فرعی یکسان باشد.

**1310** ۲ خانه‌های a,b,c,d در مربع دیگر همگی با ۲ پر شده‌اند؛ پس باید به جای آن‌ها ارقام متمایز ۱,۲,۳,۴ قرار گیرند که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

**1311** ۲ می‌دانیم تعداد مربع‌های لاتینی که همه اعداد روی قطر اصلی یا قطر فرعی آن‌ها برابر ۳ باشد، دو تا است. که هر مربع لاتینی که اعداد روی قطر اصلی آن ۳ است، با دو مربع لاتین دیگری که همهٔ اعداد روی قطر فرعی آن برابر ۳ است، متعامد می‌باشد. پس ۴ جفت مربع لاتین با شکل‌های گفته شده وجود دارد.

**1312** ٤ با توجه به این که ۱×۲×۳=۶ است، پس اعداد تشکیل دهندهٔ روی قطر اصلی ۱,۲,۳ هستند. یعنی در مربع لاتین A، اعداد روی قطر فرعی یکسان هستند. بنابراین مربع لاتین A، با مربعی متعامد است که اعداد روی قطر اصلی آن یکسان باشد. که فقط گزینهٔ ۴ این ویژگی را دارد.

در این سؤال، نیازی به تکمیل مربع‌های لاتین نیست. در گزینهٔ ۴، چون اعداد روی نواری که موازی قطر اصلی است، یکسان هستند، پس اعداد روی قطر اصلی آن نیز یکسان‌اند.

**1313** ٤ در مربع لاتین A، همهٔ اعداد روی قطر فرعی یکسان‌اند. بنابراین با همهٔ مربع‌های لاتین ۳×۳ که اعداد روی قطر اصلی آن‌ها یکسان است متعامد است، پس گزینهٔ ۴ جواب است.

**1314** ۲ خانه‌هایی که در مربع لاتین داده شده، با رقم «۲» پُر شده‌اند، در گزینه‌های ۱ و ۴ نیز با رقم «۲» پُر شده‌اند. خانه‌هایی که در مربع لاتین داده شده با رقم «۴» پُر شده‌اند، در گزینهٔ ۳ نیز با رقم «۴» پُر شده‌اند. پس این مربع‌ها نمی‌توانند با مربع لاتین داده شده متعامد باشند.

**1315** ٤ مربع لاتین داده شده با ۶ مربع لاتین دیگر که اعداد روی قطر اصلی آن‌ها یکسان است، متعامد است.

**1316** ۲ مربع A با تمام مربع‌های لاتین حاصل از جایگشت روی اعضای B متعامد است، از طرفی با اعمال جایگشت روی اعضای B می‌توان ۲۳=۱-!۴ مربع لاتین جدید به‌دست آورد که همگی با A متعامد هستند.

**1317** ٤ بررسی گزینه‌ها:

۱ فقط اگر A یک مربع لاتین ۳×۳ باشد درست است و برای مربع‌های لاتین مراتب بالاتر نادرست است.

۲ فقط اگر A یک مربع لاتین ۳×۳ باشد درست است و برای مربع‌های لاتین مراتب بالاتر نادرست است.

۳ در یک مربع لاتین از هر مرتبهٔ اگر یک جایگشت روی اعضای آن اعمال کنیم قطعاً مربع لاتینی غیر متعامد با خودش حاصل می‌شود.

**1318** ۱ مربع لاتین A را تکمیل می‌کنیم. سپس تغییرات گفته شده را انجام می‌دهیم:

A=

| | | |
|---|---|---|
| ۲ | ۳ | ۱ |
| ۱ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۱ | ۲ |

B=

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ |
| ۲ | ۱ | ۳ |
| ۱ | ۳ | ۲ |

C=

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | ۲ | ۱ |
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۲ | ۱ | ۳ |

بنابراین مربع A فقط با مربع B متعامد است.

**1319** ۲ اگر قرار باشد سه برادر در سه روز مختلف از سه پیراهن مختلف استفاده کنند، باید یک مربع لاتین ۳×۳ برای پیراهن‌ها در نظر بگیریم. همچنین اگر برادرها بخواهند طی سه روز از سه کُت مختلف نیز استفاده کنند، یک مربع لاتین ۳×۳ نیز باید برای کُت‌ها در نظر بگیریم. حال برای این‌که هر کُت و هر پیراهن دقیقاً یک بار با هم مورد استفاده قرار گیرد، باید این دو مربع متعامد باشند. بنابراین گزینهٔ ۲ جواب است.

**1320** ۲ در مربع لاتین کُت‌ها خانهٔ مربوط به برادر بزرگ‌تر (L) در روز اول را با a و در مربع لاتین پیراهن‌ها با x پُر می‌کنیم. به همین ترتیب، خانهٔ مربوط به برادر کوچک‌تر (S) در روز سوم را در مربع لاتین کُت‌ها با a و در مربع لاتین پیراهن‌ها با z پُر می‌کنیم و سپس بقیهٔ خانه‌ها را تکمیل می‌کنیم:

| | S | M | L |
|---|---|---|---|
| اول | y | z | x |
| دوم | x | y | z |
| سوم | z | x | y |

| | S | M | L |
|---|---|---|---|
| اول | | | a |
| دوم | | a | |
| سوم | a | | |

با توجه به مربع‌های لاتین واضح است برادر بزرگ در روز سوم باید پیراهن y را بپوشد.

**1321** ۴ خانهٔ مربوط به برادر بزرگ‌تر در روز اول را در مربع لاتین کُت‌ها با a و در مربع لاتین پیراهن‌ها با z پُر می‌کنیم. خانهٔ مربوط به برادر وسطی در روز دوم را در مربع لاتین کُت‌ها با b و در مربع لاتین پیراهن‌ها با z پُر می‌کنیم و سپس بقیهٔ خانه‌ها را تکمیل می‌کنیم. با توجه به مربع‌ها برادر کوچک در روز سوم کُت c را با پیراهن z می‌پوشد.

| | S | M | L |
|---|---|---|---|
| اول | | | z |
| دوم | | z | |
| سوم | z | | |

| | S | M | L |
|---|---|---|---|
| اول | b | c | a |
| دوم | a | b | c |
| سوم | c | a | b |

**1322** ۲ باید یک جفت مربع لاتین ۳×۳ برای این برنامه‌ریزی استفاده کنیم و همان‌طور که می‌دانیم ۳۶ جفت مربع لاتین متعامد ۳×۳ وجود دارد.

**1323** ۱ مربع‌های لاتین متعامد از مرتبه‌های ۱,۲,۶ وجود ندارند.

**1324** ۴ باید دو مربع لاتین متعامد ۶×۶ برای این برنامه‌ریزی استفاده شود و همان‌طور که می‌دانیم دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارد. بنابراین این کار نشدنی است.

**1325** ۱ مربع A یک مربع لاتین شبه چرخشی و مربع B یک مربع لاتین چرخشی است؛ بنابراین $a=۴, b=۳, c=۲$ است.

**1326** ۲ با تعویض جای ستون دوم و سوم مربع لاتین A، به یک مربع لاتین چرخشی می‌رسیم.

$$A=\begin{bmatrix}۱&۳&۲\\۳&۲&۱\\۲&۱&۳\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۳&۱&۲\\۲&۳&۱\end{bmatrix}$$

**1327** ۴ هریک از مربع‌های لاتین را کامل می‌کنیم. برای هریک از مربع‌های لاتین در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ دو مربع لاتین وجود دارد که فقط یکی از آن‌ها از نوع لاتین چرخشی است یعنی امکان دارد مربع غیر چرخشی نیز باشد.

۱ $\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۳&۱&۲\\۲&۳&۱\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۲&۳&۱\\۳&۱&۲\end{bmatrix}$

۲ $\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۳&۱&۲\\۲&۳&۱\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}۲&۱&۳\\۱&۳&۲\\۳&۲&۱\end{bmatrix}$

۳ $\begin{bmatrix}۱&۳&۲\\۲&۱&۳\\۳&۲&۱\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۳&۱&۲\\۱&۳&۱\end{bmatrix}$

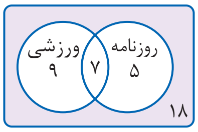
۴ $\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۳&۱&۲\\۲&۳&۱\end{bmatrix}$

**1328** ۲ چون مربع لاتین A، یک مربع لاتین چرخشی ۳×۳ است، پس همهٔ ارقام روی قطر اصلی آن «۱» هستند. حال چون مربع لاتین B با مربع لاتین A متعامد است، پس ارقام روی قطر اصلی آن ارقام متمایز ۱,۲,۳ هستند که مجموع آن‌ها برابر ۶ است.

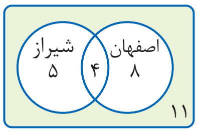
**1329** ۴ $|A\cup B|=۸+۵-۴=۹$

**1330** ۴ $|\overline{A\cup B}|=۴۲-(۱۵+۱۲-۷)=۲۲$

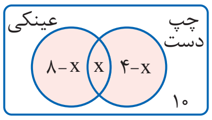
**1331** ۴ بهتر است از نمودار وِن استفاده کنیم:




**1332** ۴ بهتر است از نمودار وِن استفاده کنیم:

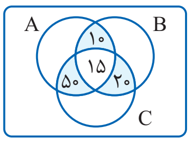



**1333** ۱ چون تعداد کل دانش‌آموزان برابر ۲۰ و تعداد دانش‌آموزانی که نه عینکی و نه چپ دست هستند برابر ۱۰ است، پس تعداد دانش‌آموزانی که عینکی یا چپ دست هستند برابر ۱۰=۱۰-۲۰ است، بنابراین داریم:




$$(۸-x)+x+(۴-x)=۱۰\Rightarrow x=۲$$

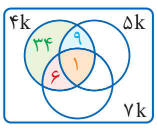
**1334** ۴ ناحیهٔ مربوط به افرادی که دقیقاً دو مجله می‌خوانند با رنگ آبی مشخص شده است و تعداد آن‌ها برابر است با:




$n(S)=۱۵۰$

$$۱۰+۵۰+۲۰=۸۰$$

**1335** ۲ ناحیهٔ موردنظر با رنگ سبز مشخص شده است. بنابراین برای مشخص کردن تعداد اعضای این ناحیه مراحل عملیات را به صورت زیر دنبال می‌کنیم:

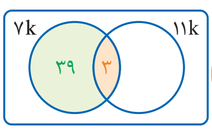



$n(A)=۲۰۰$

۱ $\left[\frac{۲۰۰}{۱۴۰}\right]=۱$ ۲ $\left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right]-۱=۹$

۳ $\left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right]-۱=۶$ ۴ $\left[\frac{۲۰۰}{۴}\right]-۹-۶-۱=۳۴$

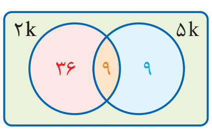
**1336** ۲ ناحیهٔ موردنظر با رنگ سبز مشخص شده است و برای مشخص کردن تعداد اعضای آن داریم:




$n(S)=۳۰۰$

۱ $\left[\frac{۳۰۰}{۷۷}\right]=۳$ ۲ $\left[\frac{۳۰۰}{۷}\right]-۳=۳۹$

**1337** ۳ می‌دانیم $۲۰=۲^۲\times۵$ است. بنابراین اعدادی که نسبت به ۲۰ اول هستند، نباید عامل‌های عدد ۲۰ را داشته باشند. یعنی نه مضرب ۲ باشند و نه مضرب ۵. ناحیهٔ موردنظر با رنگ سبز مشخص شده است و داریم:



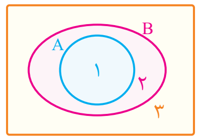

$n(A)=۹۰$

۱ $\left[\frac{۹۰}{۱۰}\right]=۹$ ۲ $\left[\frac{۹۰}{۵}\right]-۹=۹$

۳ $\left[\frac{۹۰}{۲}\right]-۹=۳۶$ ۴ $۹۰-(۳۶+۹+۹)=۳۶$

## داخل ـ ۹۹

**1** ④ یک شکل متناسب با $A\subseteq B$ رسم می‌کنیم، سپس به **بررسی گزینه‌ها** می‌پردازیم:




① $B-A'\Rightarrow\{۱,۲\}\cup\{۲,۳\}=\{۱\}=A$

② $A-B'\Rightarrow\{۱\}\cup\{۳\}=\{۱\}=A$

③ $A\cap B'=\{۱\}\cap\{۳\}=\varnothing$

④ $B\cap A'\Rightarrow\{۱,۲\}\cap\{۲,۳\}=\{۲\}\neq\varnothing$

**2** ④ می‌دانیم طبق $A-B=A\cap B'$ است و همچنین طبق قانون جذب $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$ است. بنابراین:

$$(\underbrace{A-B}_{A\cap B'})\cup(\underbrace{(B\cap C)'}_{B'\cup C'}\cap(\underbrace{B'\cup A)-B}_{(B'\cup A)\cap B'=B'}))$$

$$=(A\cap B')\cup(\underbrace{(B'\cup C')\cap B'}_{\text{جذب}})=(A\cap B')\cup B'=B'$$

**3** ③ می‌دانیم اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند و $A\times B=B\times A$ باشد، آنگاه $A=B$ خواهد بود، بنابراین حالات زیر قابل تصور است:

① $\begin{cases}x+۲=۵\\y=۷\\z=۱\\t-۱=۴\end{cases}$ ② $\begin{cases}x+۲=۵\\y=۷\\z=۴\\t-۱=۱\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x+۲=۷\\y=۵\\z=۱\\t-۱=۴\end{cases}$ ④ $\begin{cases}x+۲=۷\\y=۵\\z=۱\\t-۱=۴\end{cases}$

بنابراین، تعداد مجموعه‌های به شکل $\{(x,y),(z,t)\}$ برابر است با ۴ است.

**4** ① می‌دانیم $p\Leftrightarrow q\equiv(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$ بنابراین:

$$p\Leftrightarrow q\equiv\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)\equiv(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$$

**5** ② چون تکرار ارقام مجاز نیست، باید مسئله را به دو قسمت تقسیم کنیم، یعنی تعداد اعداد مضرب ۵ و مختوم به صفر را حساب کنیم و یک‌بار تعداد اعداد مضرب ۵ و مختوم به ۵ را:

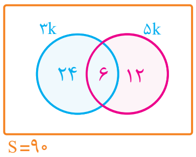
$$۹\times۸\times۷\times\underset{\uparrow\,\{۰\}}{۱}+۸\times۸\times۷\times\underset{\uparrow\,\{۵\}}{۱}=۵۰۴+۴۴۸=۹۵۲$$

**6** ④ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۱۲$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\binom{۱۲+۲}{۲}=\binom{۱۴}{۲}=\frac{۱۴\times۱۳}{۲}=۹۱$$

**7** ② بدترین حالات ممکن حالتی است که ۳ کتاب ادبی، ۳ کتاب هنر [که البته ۳ کتاب هنر نداریم و ۲ کتاب هنر برمی‌داریم] و ۳ کتاب ریاضی برداریم که در این حالت با این‌که ۸ کتاب برداشته‌ایم ولی هنوز ۴ کتاب هم‌موضوع نداریم. حال اگر یک کتاب دیگر برداریم این کتاب به یقین یا ادبی است یا ریاضی و ما حداقل ۴ کتاب هم موضوع داریم، بنابراین حداقل تعداد کتاب‌ها برابر است با: $n=(۳+۲+۳)+۱=۹$

**8** ③ تعداد اعداد دورقمی برابر با $n(s)=۹\times۱۰=۹۰$ است، حال یک نمودار رسم می‌کنیم و داریم:




$$P(A)=\frac{۲۴+۶+۱۲}{۹۰}=\frac{۴۲}{۹۰}=\frac{۷}{۱۵}$$

**9** ① فضای نمونه تعداد حالاتی است که مجموع سه تاس فرد آمده که برابر با نصف کل حالات است یعنی:

$$n(S)=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\times۶=۱۰۸$$

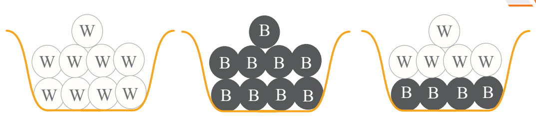
حال باید ببینیم در چند حالت از این ۱۰۸ حالت حداقل یکی از تاس‌های روشده «۲» است، ابتدا تعداد کل حالاتی که حداقل یکی از تاس‌ها «۲» باشد را پیدا می‌کنیم:

$$n=۶\times۶\times۶-۵\times۵\times۵=۹۱$$

حال یکی از ۹۱ حالت (۲,۲,۲) است و از ۹۰ حالت باقی‌مانده دقیقاً در نصف حالات مجموع زوج و در نصف دیگر حالات مجموع فرد است. یعنی در ۴۵ حالت مجموع فرد و حداقل یکی ۲ است، بنابراین حاصل این احتمال شرطی برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۴۵}{۱۰۸}=\frac{۵}{۱۲}$$

**10** ②




از ظرف اول هر دو مهره‌ای که خارج کنیم الزاماً سفید است و احتمال لااقل یک سیاه صفر است، از ظرف دوم هر دو مهره‌ای که خارج شود حتماً سیاه است و احتمال لااقل یک سیاه برابر ۱ است و از ظرف سوم اگر دو مهره خارج کنیم در صورتی حداقل یکی سیاه است که هر دو سفید نباشد:

$$P=\frac{۱}{۳}\times۰+\frac{۱}{۳}\times۱+\frac{۱}{۳}\times\left(۱-\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}\right)=۰+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}=\frac{۱۱}{۱۸}$$

**11** ② ابتدا به کمک $P(B|A)$ حاصل $P(A\cap B)$ را به دست می‌آوریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow ۰/۲۵=\frac{P(B\cap A)}{۰/۴}\Rightarrow P(B\cap A)=۰/۱$$

حال با معلوم بودن $P(A\cap B)$ می‌توانیم احتمال شرطی خواسته شده را به‌دست آوریم:

$$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}=\frac{P(B-A)}{۱-P(A)}=\frac{۰/۳-۰/۱}{۱-۰/۴}=\frac{۰/۲}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

**12** ③ ظاهراً نمودار که داده شده مربوط به درصد فراوانی نسبی است، بنابراین:

$$\bar{x}=\frac{\sum p_ix_i}{۱۰۰}=\frac{\overbrace{۷\times۱۲+۱۲\times۱۸+۱۳\times۳۵+۱۷\times۱۰+۱۹\times۲۵}^{۱۴۰۰}}{۱۰۰}=۱۴$$

**14** ۴ ابتدا بین دو عبارت سمت راست $n^۲$ را حذف می‌کنیم:

$$\begin{matrix} d\mid ۳n+۵ \\ d\mid ۳n^۲-۲n+۶ \end{matrix} \Rightarrow d\mid \underbrace{n(۳n+۵)-(۳n^۲-۲n+۶)}_{۷n-۶}$$

حال بین دو عبارت درجهٔ یک اولیه و درجهٔ یک حاصل شده n را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} d\mid ۷n-۶ \\ d\mid ۳n+۵ \end{cases} \Rightarrow d\mid \underbrace{۳(۷n-۶)-۷(۳n+۵)}_{-۵۳} \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۵۳$$

**15** ۲ می‌دانیم $۷\times۳\times۵=۱۰۵$ بنابراین ابتدا کوچک‌ترین توان از ۲ را پیدا می‌کنیم که باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۰۵ برابر ۱ باشد:

$$\begin{cases} ۲^۲ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۱۲} \overset{۳}{\equiv} ۱ \\ ۲^۴ \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۱۲} \overset{۵}{\equiv} ۱ \\ ۲^۳ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۱۲} \overset{۷}{\equiv} ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲^{۱۲} \overset{۱۰۵}{\equiv} ۱$$

بنابراین $۱ \overset{۱۰۵}{\equiv} ۲^{۱۲k}$ است، در نتیجه:

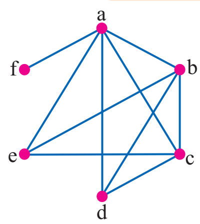
$$n=۱۲k \Rightarrow ۱۰ \le ۱۲k \le ۹۹ \Rightarrow k=\underbrace{۲,۳,\dots,۸}_{\text{۷ جواب}}$$

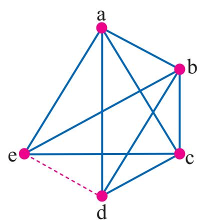
**16** ۲ عدد فوق به صورت $m=(۵\times\overline{aa})(\overline{aa})$ خواهد بود، که اگر آن را باز کنیم به‌صورت زیر در می‌آید: $m=۴\times\overline{aa۰۰}+\overline{aa}=۵\times a\times۱۱۰۰+a\times۱۱$

$$=a\times۱۱(\underbrace{۵۰۰+۱}_{۱۶۷\times۳})=۳a\times(۱۱\times۱۶۷)=۳a\times۱۸۳۷$$

بنابراین عدد فوق همواره مضرب ۱۸۳۷ است و در پیمانهٔ ۱۸۳۷ حاصل آن صفر خواهد شد.

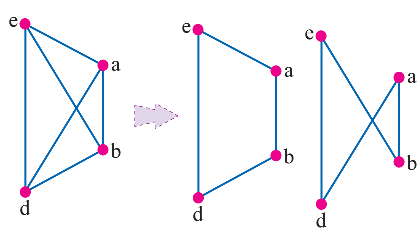
**17** ۴ گراف را رسم می‌کنیم، می‌دانیم رأس‌های درجهٔ ۱ در شمارش تعداد دورها تأثیری ندارند، بنابراین رأس f را کنار می‌گذاریم، در نتیجه شکل گراف به‌صورت زیر خلاصه می‌شود، یعنی یک گراف کامل که یال ed را ندارند، بنابراین تعداد کل دورهای به طول ۴ را در گراف $k_۵$ به‌دست می‌آوریم، سپس دورهایی را که شامل یال ed هستند، کنار می‌گذاریم:




$$\binom{۵}{۴}\times\frac{(۴-۱)!}{۲}-\binom{۳}{۲}\times۲=۱۵-۶=۹$$

با هر چهار رأس می‌توان سه دور به طول ۴ ساخت که دو تا از آن‌ها شامل یال ed هستند:




**18** ۴ منظور طراح تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم است. [ظاهراً طراح‌های سازمان سنجش هنوز بحث احاطه‌گری را خوب مطالعه نکرده‌اند و فرق بین مینیمال و مینیمم را خوب مسلط نیستند. انشاالله طی چند سال آینده تسلط کافی بر این مبحث جدید پیدا خواهند کرد]، حال برای پیدا کردن تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم باید از بین سه مجموعهٔ $\{e,y\},\{a,d\},\{m,p\}$ از هرکدام یکی از اعضاء را انتخاب کنیم، یعنی تعداد $\gamma$- مجموعه‌ها برابر است با: $\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۸$

تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف بسیار بسیار بیشتر از این عدد است و در گزینه‌ها وجود ندارد. به عنوان مثال مجموعهٔ $\{b,f,q,n,b,c\}$ و مجموعه‌هایی نظیر $\{m,b,f,b,c\}$ همگی مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال هستند.

**19** ۴ بیش‌ترین مقدار ممکن k برابر ۴ است، بنابراین گراف ۴ منتظم مرتبهٔ ۵ مدنظر طراح است که تعداد دورهای با طول ۴ آن برابر است با:

$$\binom{۵}{۴}\times\frac{(۴-۱)!}{۲}=۱۵$$

این سؤال زیر مجموعه‌ای از سؤال قبلی است و هر دو در یک کنکور مطرح شده، من نمی‌دانم واقعاً این‌قدر موضوع برای سوال دادن در گراف کم است که ۲ سؤال تقریباً مثل هم در یک کنکور باید مطرح شود؟!!!! یا واقعاً طراح کنکور تا این حد سهل‌انگار است!!!

**20** ۴ اگر عددی اندازهٔ یک گراف کامل باشد، دو برابر آن قابل تجزیه به حاصل ضرب دو عدد متوالی است، یعنی عدد ۱۰: $۱۰\times۲=۲۰=۴\times۵$

**21** ۴ باید مربع‌های لاتین متعامد با این مربع لاتین را طوری پیدا کنیم که نفر اول در روز اول در مسیر A نباشد، بنابراین از میان ۶ مربع لاتین متعامد با این مربع لاتین $۳\times۳$ تنها ۴ مربع لاتین باقی می‌ماند:

| | | |
|---|---|---|
| C | B | A |
| A | C | B |
| B | A | C |

| | | |
|---|---|---|
| C | A | B |
| B | C | A |
| A | B | C |

| | | |
|---|---|---|
| B | C | A |
| A | B | C |
| C | A | B |

| | | |
|---|---|---|
| B | A | C |
| C | B | A |
| A | C | B |

NOTE

مدرسه رفتن را با یاد گرفتن اشتباه نگیرید!
من به هاروارد نرفتم اما تمام کسانی که زیر دستم کار می‌کنند رفته‌اند!!!
ایلان ماسک (موسس تسلا)